

Decoerenza

Edoardo Maria Centamori

20 dicembre 2020

Motivazioni: il problema della misura



Figura: Immagine di Peter Snejbjerg.

Copenhagen vs multi-mondi

L'assioma della misura è in aperto contrasto con l'assioma di evoluzione unitaria del sistema. Le due interpretazioni più famose della meccanica quantistica che trattano il problema sono:

- ◆ **Copenhagen**: la misura fa **collassare realmente** lo stato del sistema.
- ◆ **Multi-mondi**: l'intero universo evolve in maniera unitaria, quello della misura è solo un **collasso apparente** legato alla percezione che ha la nostra coscienza.

Nessuna delle interpretazioni però risolve il problema, infatti non è spiegato cosa in un sistema fisico distingua uno strumento di misura da tutto il resto. Di questo si occupa la **teoria della decoerenza**.

Equazioni decoerenza

Langevin

Misura

Emergenza spazio delle fasi

Fokker-Plank

Emergenza classicità

Crank-Nicholson

Effetto chaos

Chaos

Conclusioni

Interazioni con l'ambiente

Studiamo un sistema S accoppiato ad un environment E

$$H_{tot} = H_S + H_E + H_{int}$$

$$H_{int} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha}$$

dove A_{α} e B_{α} sono operatori su S ed E rispettivamente.

- ◆ **Approssimazione di Born**: durante l'evoluzione l'environment è inalterato, le correlazioni con il sistema si disperdono

$$\rho_{SE}(t) = \rho_S(t) \otimes \rho_E(0).$$

Equazione di Bloch-Redfield

I termini di correlazione

$$C_{\alpha,\beta}(t-t') = \text{Tr}_E[\tilde{B}_\alpha(t)\tilde{B}_\beta(t')\rho_E(0)]$$

definiscono la memoria dell'environment.

- ◆ Ambienti con infiniti DOF hanno correlazioni che decadono con tempi scala τ_C .
- ◆ **Approssimazione di Markov**: questi tempi sono veloci rispetto alla dinamica dissipativa del sistema

$$\tau_C \ll \tau_\gamma.$$

Allora si può derivare l'**equazione di Bloch-Redfield**

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^\infty \text{Tr}_E[H_{int}(t), [H_{int}(t-s), \rho_S(t) \otimes \rho_E(0)]] ds. \quad (1)$$

GKSL equation

L'equazione è di semplice applicazione ma **non è completamente positiva**, un fatto non fisico.

- ◆ **Approssimazione secolare**: un'ulteriore approssimazione (in ottica di onda rotante) che risana il problema.

Si ha così la **master equation GKSL**

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_{LS}, \rho_S(t)] + D(\rho_S(T)) \quad (2)$$

il secondo termine è detto **dissipatore**

$$D(\rho) = \sum_k 2L_k \rho L_k^\dagger - \{L_k^\dagger L_k, \rho\}$$

e può essere calcolato a partire da H_{int} .

Attenzione: H_{LS} , l'hamiltoniana di Lamb shift, ha gli stessi autovettori di H_{int} ma uno spettro diverso.

Evoluzione

Caso standard: particella interagisce con un campo scalare esterno (in equilibrio a temperatura T)

$$H_{int} = \varepsilon x \frac{d\phi}{dt}. \quad (3)$$

Dalla procedura vista si ha, nel limite di alte temperature, la **master equation di Caldeira-Leggett**

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)] - \frac{i\gamma}{\hbar}[x, \{p, \rho(t)\}] - \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2}[x, [x, \rho(t)]] \quad (4)$$

che espressa in coordinate è

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \underbrace{-\frac{i}{\hbar}[H, \rho]}_{\text{Von Neumann}} \underbrace{-\gamma(x-x')\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)\rho}_{\text{Rilassamento}} \underbrace{-\frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2}(x-x')^2\rho}_{\text{Decoerenza}}.$$

Connessioni con il formalismo classico

- ◆ Derivazione alternativa **parallela al formalismo classico**.
- ◆ È **molto lunga**, l'accenno solamente.

Il campo esterno è rappresentato in termini dei suoi modi caratteristici

$$H_E = \sum_n \left\{ \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{k_n q_n^2}{2} \right\}.$$

Come prima, il sistema è ad esso accoppiato linearmente

$$H = H_S(Z) + \sum_n \left\{ \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{k_n}{2} (q_n - X)^2 \right\}.$$

◆ equazione per l'evoluzione di una variabile Y di S

$$\frac{dY}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, Y]$$

riporto solo il risultato, definite

$$\xi(t) = i \sum_n k_n \sqrt{\frac{\hbar \omega_n}{2}} \left[-a_n(t_0) e^{-i\omega_n(t-t_0)} + a_n^\dagger(t_0) e^{i\omega_n(t-t_0)} \right]$$
$$f(t) = \sum_n k_n^2 \cos(\omega_n t)$$

si ha l'**equazione di Langevin quantistica**

$$\frac{dY}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_S, Y] - \frac{i}{2\hbar} \left[[X, Y], \xi(t) - \int_{t_0}^t f(t-t') \frac{dX(t')}{dt'} dt' - f(t-t_0) X(t_0) \right].$$

Il bagno termico interviene soltanto tramite $\xi(t)$ e $f(t)$.

- ◆ È più chiaro per $H_S = \frac{p^2}{2m} + V(q)$.
- ◆ Imponendo $f(t) = 2\gamma\delta(t)$ (approssimazione di Markov)

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{p}{m} \\ \frac{dp}{dt} = -V'(q) - \gamma p + \xi(t) \end{cases} \quad (5)$$

e

$$[\xi(t), \xi(t')] = i\hbar \frac{d}{dt} f(t-t') = i\hbar \frac{d}{dt} \delta(t-t')$$

che è esattamente il risultato classico.

- ◆ **Attenzione:** $\xi(t)$ è un operatore deterministico non un processo stocastico.
- ◆ In ogni caso l'environment interviene esternamente introducendo un termine di damping ed una forzante.

- ◆ Classicamente: Langevin \rightarrow Fokker-Plank per distribuzioni di probabilità.
- ◆ Quantisticamente si trova un'equazione per matrici di densità.

Riformulo l'equazione di Langevin quantistica in termini di matrici di densità.

In rappresentazione di Heisenberg $\rho = \rho_S \otimes \rho_E$ si definisce l'operatore $\mu(t)$

$$\text{Tr}[Y\mu(t)] = \text{Tr}[Y(t)\rho_S] \quad \forall Y$$

come una matrice di densità locale del sistema S .

Vale l'equazione aggiunta

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \mu(t)] + \frac{i\gamma}{2\hbar} \left[\left[\frac{d}{dt}X, \mu(t) \right], X \right] - \frac{i}{\hbar}\alpha(t)[\mu(t), X].$$

- ◆ $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ dipende solo da $\xi(t)$ e $\mu(t)$
- ◆ il suo effetto è equivalente a quello di un processo stocastico.

- ◆ L'equazione può essere **mediata lungo il processo stocastico $\alpha(t)$** .

$$\rho(t) = \langle \mu(t) \rangle_\alpha$$

- ◆ Si introducono anche le ipotesi precedenti (**approssimazione di Markov** e **approssimazione secolare**).

Si può risalire nuovamente alla **master equation di Caldeira-Leggett**

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)] - \frac{i\gamma}{\hbar}[x, \{\rho, \rho(t)\}] - \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2}[x, [x, \rho(t)]].$$

Effetto del termine dissipativo

◆ Le equazioni di Ehrenfest sono

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\langle x \rangle = \frac{1}{m}\langle p \rangle \\ \frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\langle \frac{d}{dx} V(x) \rangle - 2\gamma\langle p \rangle \\ \frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = \frac{1}{m}\langle px + xp \rangle \\ \frac{d}{dt}\langle px + xp \rangle = \frac{2}{m}\langle p^2 \rangle - 2\langle xV'(x) \rangle - 2\gamma\langle xp + px \rangle \\ \frac{d}{dt}\langle p^2 \rangle = -\langle pV'(x) + V'(x)p \rangle - 4\gamma\langle p^2 \rangle + 4m\gamma k_B T \end{cases}$$

◆ Il caso libero $V(x) = 0$ può essere risolto analiticamente

$$\begin{cases} \langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle + \frac{1-e^{-2\gamma t}}{2m\gamma} \langle p(0) \rangle \\ \langle p(t) \rangle = \langle p(0) \rangle e^{-2\gamma t} \\ \sigma_x^2(t) \xrightarrow[\gamma t \gg 1]{} \frac{k_b T}{m\gamma} t \end{cases}$$

◆ Il limite classico è $\gamma t \gg 1$

$$\begin{cases} \langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle + \frac{\langle p(0) \rangle}{2m\gamma} \\ \langle p(t) \rangle = 0 \\ \sigma_x^2(t) = \frac{k_b T}{m\gamma} t \end{cases}$$

Gli stessi risultati si hanno classicamente dall'equazione stocastica

$$\begin{cases} dx = \frac{p}{m} dt \\ dp = -2\gamma p dt + \sqrt{4m\gamma k_B T} dW \end{cases}$$

che rappresenta un **processo di Ornstein-Uhlenbeck**. Si vede come la decoerenza quantistica assuma il ruolo di forzante fluttuante nel caso classico.

Passando a $V(x) \neq 0$, con il cambio di variabile $x = r + \hbar q$, $x' = r - \hbar q$ l'equazione si semplifica

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left[\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r \partial q} - \frac{i}{\hbar} (V(r + \hbar q) - V(r - \hbar q)) - 2\gamma q \frac{\partial}{\partial q} - 8\gamma m k T q^2 \right] f$$

◆ Nel **regime classico** $\hbar \rightarrow 0$ si può approssimare

$$V(r + \hbar q) - V(r - \hbar q) \simeq 2 \frac{\partial V(r)}{\partial r} q.$$

Si può allora mostrare che

$$\rho_s(x, x') = N \exp \left[-\frac{1}{kT} V \left(\frac{x + x'}{2} \right) - \frac{mkT(x - x')^2}{2\hbar^2} \right].$$

◆ Sulla diagonale è la **distribuzione canonica** e decade esponenzialmente se mi allontano dalla diagonale.

Misura e decoerenza

- ♦ L'evoluzione del solo termine di **decoerenza** può essere risolta analiticamente

$$\rho(x, x', t) = e^{-\alpha(x-x')^2 t} \rho(x, x', 0) \quad \alpha = \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2}$$

- ♦ Simuliamo un **gatto di Schrodinger**

$$|\text{cat}_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{(x+\Delta x/2)^2}{4\delta^2}}$$

$$|\text{cat}_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{(x-\Delta x/2)^2}{4\delta^2}}$$

che per $\Delta x \gg \delta$ sono ortogonali

$$\langle \text{cat}_- | \text{cat}_+ \rangle = 0$$

Si considera lo stato

$$|\Psi\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

Allora la sua matrice di densità

$$\rho(0) = \frac{1}{2} [|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|]$$

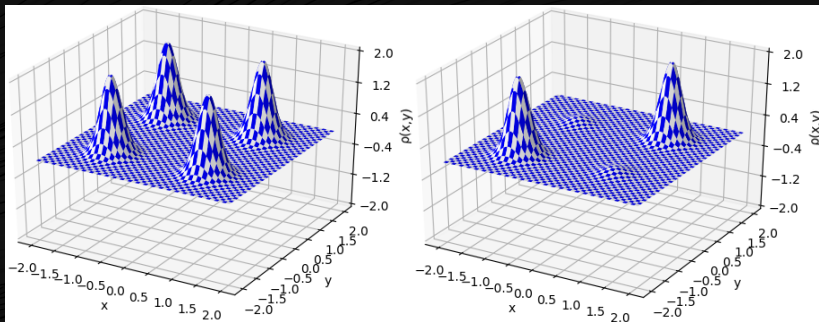
- ◆ I termini misti sono detti di **coerenza**.
- ◆ La **decoerenza** li elimina con tempo scala τ_D

$$\tau_D = \frac{\hbar^2}{2m\gamma k_B T (\Delta x)^2} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\lambda_{DB}}{\Delta x} \right)^2. \quad (6)$$

- ◆ Lo stato limite non ha termini di coerenza

$$\rho(t) = \frac{1}{2} [|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|].$$

◆ In rappresentazione grafica è chiaro l'effetto della decoerenza.



(a) Preparazione iniziale.

(b) Stato dopo l'evoluzione.

Figura: L'evoluzione elimina i termini di coerenza.

Spieghiamo l'effetto su una misura, si immagini un **detector quantistico** D , un sistema nello stato $|\Psi\rangle$ ed un bagno termico \mathcal{E} .

- ◆ Lo stato totale SD in **assenza di decoerenza** è

$$|\Psi_C\rangle = \frac{|\uparrow\rangle|d_\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|d_\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (7)$$

- ◆ È massimamente entangled, viola la disuguaglianza di Bell.
- ◆ **Non c'è alcuna base preferenziale scelta**, ci sono infiniti stati $|\Psi_A\rangle$ tali che $\rho^C = |\Psi_C\rangle\langle\Psi_C| = |\Psi_A\rangle\langle\Psi_A|$.

- ◆ In **presenza di decoerenza** indotta da \mathcal{E} lo stato finale è

$$\rho^r = \frac{1}{2} [|\uparrow\rangle\langle\uparrow||d_\uparrow\rangle\langle d_\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow||d_\downarrow\rangle\langle d_\downarrow|] \quad (8)$$

- ◆ È una miscela statistica $\{(\frac{1}{2}, |\uparrow\rangle|d_\uparrow\rangle), (\frac{1}{2}, |\downarrow\rangle|d_\downarrow\rangle)\}$ e non viola la disuguaglianza di Bell.
- ◆ **C'è una base preferenziale** $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, la correlazione tra risultati è la stessa che avrebbe una moneta in aria, il risultato è indeterminato, ma solo testa o croce sono possibili.

- ◆ Il processo di decoerenza induce una **perdita di informazione**.

Ad esempio per

$$|\psi_C\rangle = \alpha |\uparrow\rangle |d_\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle |d_\downarrow\rangle$$

$$\rho^C = |\psi_C\rangle \langle \psi_C| \Rightarrow \rho^r = |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| |d_\uparrow\rangle \langle d_\uparrow| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| |d_\downarrow\rangle \langle d_\downarrow|$$

la perdita di informazione può essere valutata usando l'entropia di Von Neumann

$$H(\rho) = -\text{Tr}[\rho \ln(\rho)]$$

e nel caso in esame risulta essere

$$\Delta H = -(|\alpha|^2 \ln(|\alpha|^2) + |\beta|^2 \ln(|\beta|^2))$$

- ◆ La perdita di informazione è una misura dell'effetto di decoerenza, in seguito sarà importante.

Classicità ed effetto sullo spazio delle fasi

- ◆ La quantità che in meccanica quantistica meglio rappresenta una distribuzione di probabilità è la **distribuzione di Wigner**

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{p}{\hbar}y} \rho\left(x - \frac{y}{2}, x + \frac{y}{2}\right) dy \quad (9)$$

- ◆ Le marginali infatti rispettano

$$\begin{cases} \int W(x, p) dp = \langle \rho \hat{X} \rangle = \rho(x) \\ \int W(x, p) dx = \langle \rho \hat{P} \rangle = \rho(p) \end{cases}$$

- ◆ Inoltre $W(x, p) \in \mathbb{R}$.
- ◆ **Attenzione:** $W(x, p) \not\geq 0$ può essere negativa, per questo è detta **distribuzione di quasiprobabilità**.

- ◆ Distribuzioni con **valori negativi** indicano stati con **proprietà quantistiche** altamente marcate.

Ad esempio **stati classici** come quelli coerenti hanno

$$W_C(x, p) = \frac{1}{\pi \hbar} \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{\delta^2} - \frac{(p - p_0)^2 \delta^2}{\hbar^2} \right\} \geq 0$$

così come le loro **sovrapposizioni classiche**

$$\sum_i \alpha_i W_{C_i}(x, p) \geq 0.$$

Invece uno **stato altamente quantistico** come $\frac{|\psi\rangle + |\phi\rangle}{\sqrt{2}}$ dà origine a

$$W(x, p) = \frac{W_+(x, p) + W_-(x, p)}{2} + \frac{1}{\pi \hbar} \exp \left\{ -\frac{p^2 \delta^2}{\hbar^2} - \frac{x^2}{\delta^2} \right\} \cos \left(\frac{\Delta x p}{\hbar} \right) \not\geq 0$$

L'ultimo addendo è un **termine di interferenza** che chiamo **I**.

- ♦ La **master equation** vista prima si traduce per le distribuzioni di Wigner in un' **equazione di Fokker-Plank**

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \underbrace{-\frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial p}}_{\text{Liouville Equation}} + \underbrace{2\gamma \frac{\partial(pW)}{\partial p}}_{\text{Attrito}} + \underbrace{D \frac{\partial^2 W}{\partial p^2}}_{\text{Decoerenza}}$$

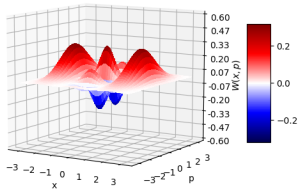
con $D = 2m\gamma k_B T$, chiaramente si tratta dell'**equazione di Kramer**.

- ♦ Il termine di decoerenza è responsabile della comparsa di proprietà classiche.

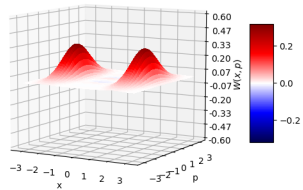
Nel caso di $\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$ poichè $\cos(\frac{p\Delta x}{\hbar})$ è autovettore di $\frac{\partial^2}{\partial p^2}$ si può valutare analiticamente l'effetto sul termine di interferenza

$$I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{\tau_D}}.$$

- ◆ Il termine di decoerenza trasforma sovrapposizioni quantistiche in miscele classiche.



(a) Preparazione iniziale.



(b) Stato dopo l'evoluzione.

Figura: La decoerenza elimina i termini di interferenza.

Selezione di una base

- ◆ Si è visto come la decoerenza elimini i termini di coerenza in qualche base.
- ◆ Ora specifichiamo quale è la base che viene scelta.
- ◆ Quando l'interazione è dominante si dimostra che è la base degli autovettori delle osservabili Λ tali che

$$[\Lambda, H_{int}] = 0$$

- ◆ Tali stati sono detti **stati puntatori** in riferimento al puntatore di uno strumento classico.

Quando l'accoppiamento con l'environment non è dominante, il precedente argomento viene meno. Quello che succede è che si crea un filtro che agisce su tutti gli stati del sistema.

- ◆ In generale il sistema agisce sugli stati in maniera dissipativa, alcuni sopravvivono meglio di altri.
- ◆ Il **filtro di predittività** è una funzione che quantifica quanto è importante l'effetto dell'environment su uno stato iniziale.

La procedura usata tipicamente in letteratura è

1. Parametrizzo gli stati iniziali $\rho(s)$.
2. Li faccio evolvere con l'**equazione GKSL** per $\tau_D \ll \tau \ll \tau_T$.
3. Misuro la **variazione di entropia**

$$- \text{Tr}[\rho(s, t) \ln(\rho(s, t))] \Big|_0^\tau$$

4. Questa definisce il filtro in funzione della parametrizzazione.

- ◆ Consideriamo il sistema di un oscillatore armonico che interagisce con un bagno termico.
- ◆ In regime sovrasmorzato l'accoppiamento con l'ambiente è forte, siamo nel caso precedente e vengono preferiti autostati della posizione (stati squeezed con Δx molto piccolo) perchè $[x, H_{int}] = 0$.
- ◆ Noi scegliamo il regime altamente **sottosmorzato** $\frac{\gamma}{\omega} = 10^{-3}$.

Il sistema evolve secondo la **master equation**.

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)] - \frac{i\gamma}{\hbar}[x, \{p, \rho(t)\}] - \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2}[x, [x, \rho(t)]]$$

O in coordinate

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] - \gamma(x - x') \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) \rho - \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2} (x - x')^2 \rho$$

- ◆ Studiamo il sistema numericamente.

Qualche nota numerica

- ◆ L'**equazione di Calderia-Legget** è una PDE in tre variabili x, x' e t .
- ◆ La sua complessità la rende instabile per tecniche di integrazione esplicita.
- ◆ Io uso un metodo collegato a **Crank-Nicholson (CN)** chiamato **alternating direction implicit CN (ADICN)** che è **incondizionatamente stabile**.

Sfruttando uno splitting di Trotter

$$e^{(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)dt} \simeq e^{\mathcal{L}_1 dt} e^{\mathcal{L}_2 dt} \quad dt \rightarrow 0$$

Definiti

$$\begin{cases} L_x = \frac{i}{2} \partial_x^2 - \frac{\gamma}{2} (x - x') \partial_x \\ L'_x = -\frac{i}{2} \partial_{x'}^2 + \frac{\gamma}{2} (x - x') \partial_{x'} \\ \tilde{V} = V(x) - V(x') - i \frac{\gamma}{\beta} (x - x')^2 \end{cases}$$

Si ricavano le equazioni fondamentali

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{dt}{2} L_x\right) \rho^*(x, x', t + \frac{dt}{2}) = \left(1 + \frac{dt}{2} L_{x'}\right) \rho(x, x', t) \\ \left(1 - \frac{dt}{2} L_{x'}\right) e^{i \frac{dt}{2} \tilde{V}} \rho(x, x', t + dt) = \left(1 + \frac{dt}{2} L_x\right) e^{-i \frac{dt}{2} \tilde{V}} \rho^*(x, x', t + \frac{dt}{2}) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{dt}{2} L_x\right) \rho^* \left(t + \frac{dt}{2}\right) = \left(1 + \frac{dt}{2} L_{x'}\right) \rho(t) \end{array} \right. \quad (10a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{dt}{2} L_{x'}\right) e^{i\frac{dt}{2}\tilde{V}} \rho(t+dt) = \left(1 + \frac{dt}{2} L_x\right) e^{-i\frac{dt}{2}\tilde{V}} \rho^* \left(t + \frac{dt}{2}\right) \end{array} \right. \quad (10b)$$

Alternating direction implicit Crank-Nicholson

- ▶ Discretizzare eq. 10a e 10b (reticolo $N_x \times N_{x'}$).
- ▶ Per $t \in [t_0, t_0 + dt, t_0 + 2dt, \dots, t_f]$:
 - ▶ calcolare il RHS di eq. 10a;
 - ▶ risolvere il LHS di eq. 10a per ρ^* (risolvere $N_{x'}$ sistemi tridiagonali);
 - ▶ calcolare il RHS di eq. 10b;
 - ▶ risolvere il LHS di eq. 10b per ρ (risolvere N_x sistemi tridiagonali).

Nota bene: $t_f > \tau_D$ per vedere effetti di decoerenza.

- ◆ L'algoritmo è stato implementato in python.

La spesa computazionale viene tutta dalla risoluzione dei sistemi tridiagonali, questa è stata accelerata in due modi:

- ◆ usando l'**algoritmo di Thomas** (complessità $O(n)$) per sistemi tridiagonali (la classica riduzione gaussiana costa $O(n^3)$);
- ◆ usando il decoratore `@jit` di Numba.

L'implementazione dell'**algoritmo di Thomas** è in Figura 4a, la parte principale dell' **algoritmo ADICN** può essere vista in Figura 4b.

```
from numba import jit

@jit
def TDMA(a, b, c, d):
    """
    Param : a = Lower Diagonal, b = Main Diagonal, c = Upper Diagonal, d = solution vector
    Complessità: O(N)
    """
    n = len(d)
    w = np.zeros(n-1, float)
    g = np.zeros(n, float)
    p = np.zeros(n, float)

    w[0] = c[0]/b[0]
    g[0] = d[0]/b[0]

    for i in range(1, n-1):
        w[i] = c[i]/(b[i] - a[i-1]*w[i-1])
    for i in range(1, n):
        g[i] = (d[i] - a[i-1]*g[i-1])/(b[i] - a[i-1]*w[i-1])
    p[n-1] = g[n-1]
    for i in range(n-1, 0, -1):
        p[i-1] = g[i-1] - w[i-1]*p[i]
    return p
```

(a) Algoritmo di Thomas.

```
def timestep(rho, X, Y, dx, dt):
    expV = exp_V(dt, X[:, 0], Y[0, :])
    xs = X[:, 0]
    K = rho*0.5*dt*L_y(rho, X, Y, dx)
    alpha = -0.25*dt/dx**2
    beta = 0.25*gamma*dt/dx
    L = []
    for y in range(len(Y[0])):
        down, dmain, dup = diagonals(alpha, beta, X[:, y], Y[:, y])
        L.append(TDMA(down, dmain, dup, K[:, y]))
    K0 = np.asarray(L).T
    K01 = expV*K0
    K1 = K01+0.5*dt*L_x(K01, X, Y, dx)
    L = []
    for x in range(len(X[:, 0])):
        down, dmain, dup=diagonals(-alpha, -beta, X[x, :], Y[x, :])
        L.append(TDMA(down, dmain, dup, K1[x, :]))
    K00 = np.asarray(L)
    K2 = expV*K00
    T1 = trace(xs, K2)
    T2 = trace(xs, product(xs, K2, K2))
    return K2, T1, T2
```

(b) Singolo passo di ADICN.

I risultati numerici sono raccolti in figura 5.

- ◆ Per motivi di complessità computazionale è stata usata la **purezza** $\text{Tr}[\rho^2]$ invece dell'entropia $\text{Tr}[\rho \ln(\rho)]$ come filtro di predittività.
- ◆ Gli stati iniziali sono **stati squeezed** parametrizzati dallo squeezing S .

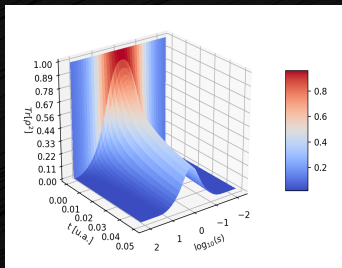


Figura: Filtro di predittività per stati squeezed in un oscillatore armonico smorzato.

- ◆ Dopo poco tempo il filtro mostra che gli **stati coerenti** sono quelli che sopravvivono (si noti che sono overcompleti).

Chaos e corrispondenza classica-quantistica

- ◆ L'instabilità esponenziale dei sistemi caotici induce una rapida esplorazione di ampie porzioni dello spazio delle fasi.
- ◆ Nel caso quantistico questo crea delle **frange di interferenza** che lo distinguono pesantemente dal caso classico.
- ◆ I **valori di aspettazione** delle osservabili sono **in disaccordo**, tipicamente del $\sim 10\%$.
- ◆ É stato mostrato che un termine di **decoerenza** dato da accoppiamenti, anche molto deboli, con un environment, **risana il disaccordo**.

Come esempio (S. Habib, K. Shizume e W. H. Zurek (1998)) si consideri

$$H = \frac{p^2}{2m} + Bx^4 - Ax^2 + \Lambda x \cos(\omega t) \quad (11)$$

($m = 1$, $B = 0.5$, $A = 10$, $\Lambda = 10$, $\omega = 6.07$).

- ♦ Una sezione considerevole dello spazio delle fasi ha **esponente di Lyapunov effettivo $\lambda \simeq 0.4 - 0.5$** .

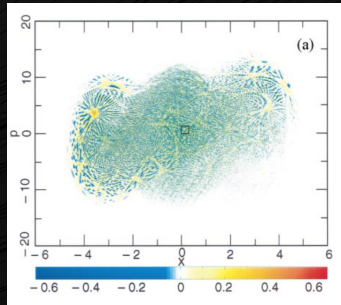
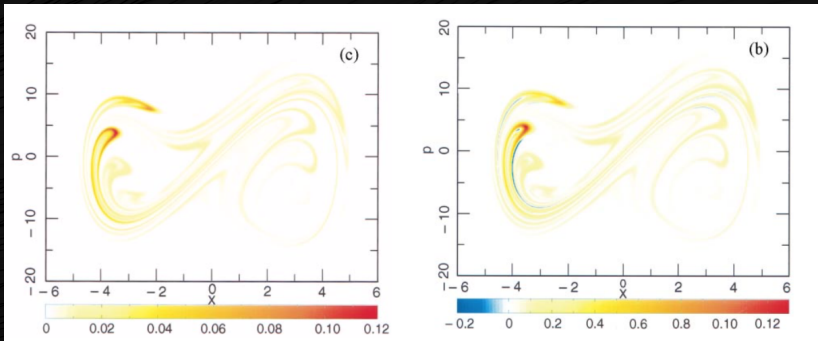


Figura: Presa da S. Habib, K. Shizume e W. H. Zurek (1998). Distribuzione di wigner dopo un'evoluzione per un tempo τ .

- ◆ La richiesta di precisione molto alta richiede un potere computazionale proibitivo per normali computer.
- ◆ Le simulazioni sono state eseguite su CM-5 presso LANL e su T3E presso LBNL, due supercomputer con potere computazionale di migliaia di computer parallelizzati.

Entrambe le caratteristiche citate precedentemente sono osservate.








(a) Distribuzione di probabilità classica (b) Distribuzione di probabilità quantistica con decoerenza.



Emergenza della realtà classica

- ◆ Una descrizione completa della nostra percezione richiederebbe un **modello di coscienza**, attualmente questo è **assente**.
- ◆ I **processi mentali**, avvengono su **scale macroscopiche** (quelle dei neuroni) e dunque sono soggetti sicuramente a **decoerenza**.
- ◆ La decoerenza può essere usata come tassello nell'**interpretazione di Copenaghen** per distinguere uno strumento da un sistema.
- ◆ La decoerenza può essere usata come tassello nell'**interpretazione multi-mondi** per definire la nozione di 'branch'.
- ◆ La **decoerenza** può essere pensata come una **teoria** intermedia **a sé stante**.

Bibliografia I

-  W. Zurek (2006) "Decoherence and the Transition from Quantum to Classical - Revisited "In: Duplantier B., Raimond JM., Rivasseau V. (eds) Quantum Decoherence. Progress in Mathematical Physics, vol 48. Birkhäuser Basel.
-  C.W. Gardiner (1997) "Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the neural Science", Springer.
-  C.W. Gardiner, P. Zoller (2000) "Quantum Noise, A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Application to Quantum Optics" , Springer.
-  H.P. Breuer, F. Petruccione (2002) "The Theory of Open Quantum Systems", Oxford University Press.
-  W. Zurek (1994) "Preferred sets of states, predictability, classicality, and the environment-induced decoherence", Progress of Theoretical Physics.

Bibliografia II

-  F. Grossman, W. Koch (2009) "A finite-difference implementation of the Caldeira–Leggett master equation", The journal of chemical Physics.
-  S. Habib, K. Shizume, W. Zurek (1998) "Decoherence, Chaos, and the Correspondence Principle", Physical Review Letters.