REPORT PROGETTO DES

GRUPPO #3

Brogi Andrea, Burroni Leonardo, Caproni Edoardo, Quintabà Tommaso

Punto 1:

S = {E, X, Γ, p, x_0, F}

E = {a, d_1, d_2}

- l'evento a ha una probabilità **f** = 4/9 di aggiungere un pezzo da processare solo in M2, e una probabilità **1-f** = 5/9 di aggiungere un pezzo da processare sia in M1 che M2

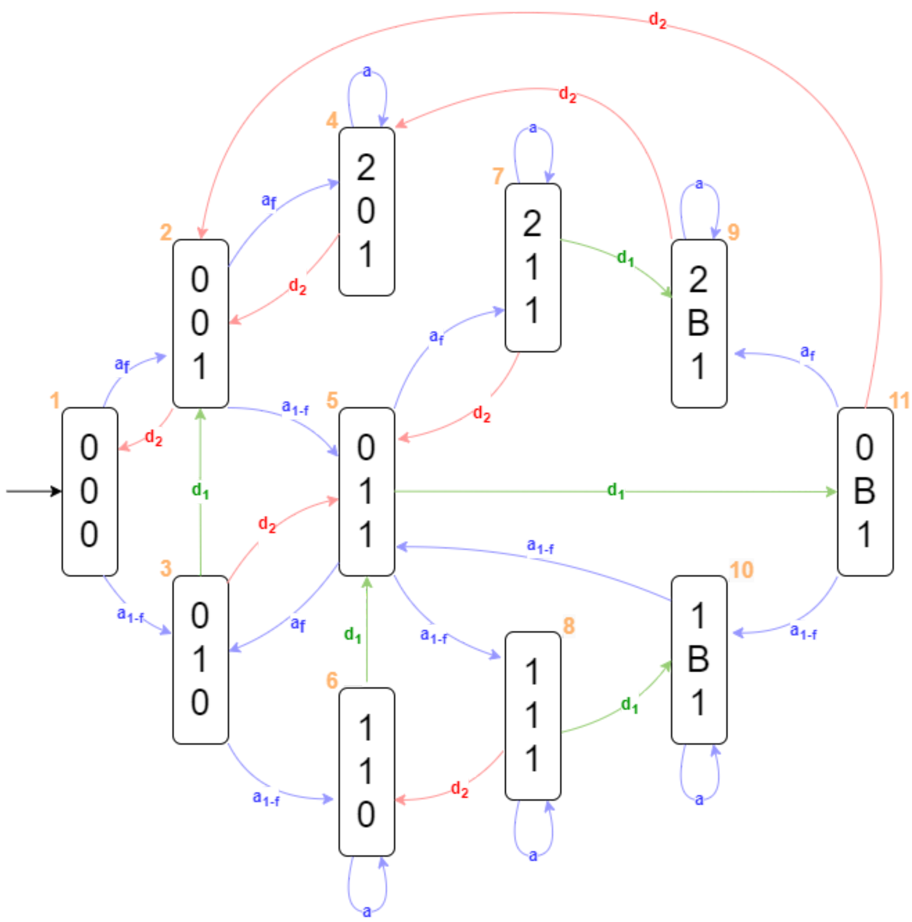
X = {x_B, x_1, x_2}, dove:

- $x_B \in$ {0, 1, 2} (**0** = vuoto, **1** = parte da mandare in M1, **2** = parte da mandare in M2)
- $x_1 \in$ {0, 1, B} (**0** = vuoto, **1** = attivo, **B** = bloccato)
- $x_2 \in$ {0, 1} (**0** = vuoto, **1** = attivo)

F = {V_a, V_1, V_2}, dove:

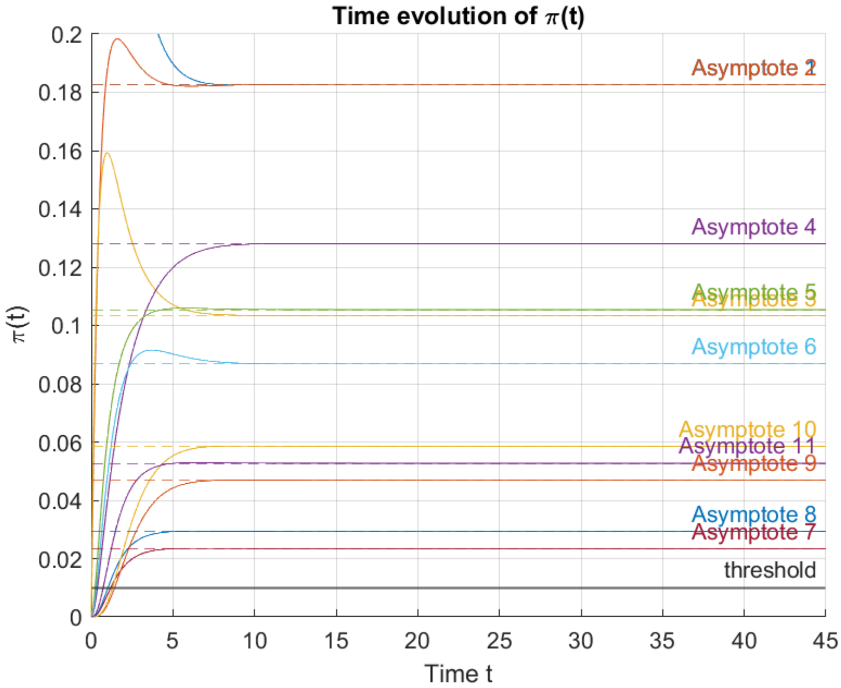
- $V_a \sim Exp(1/\lambda_a)$
- $V_1 \sim Exp(1/\mu_1)$
- $V_2 \sim Exp(1/\mu_2)$

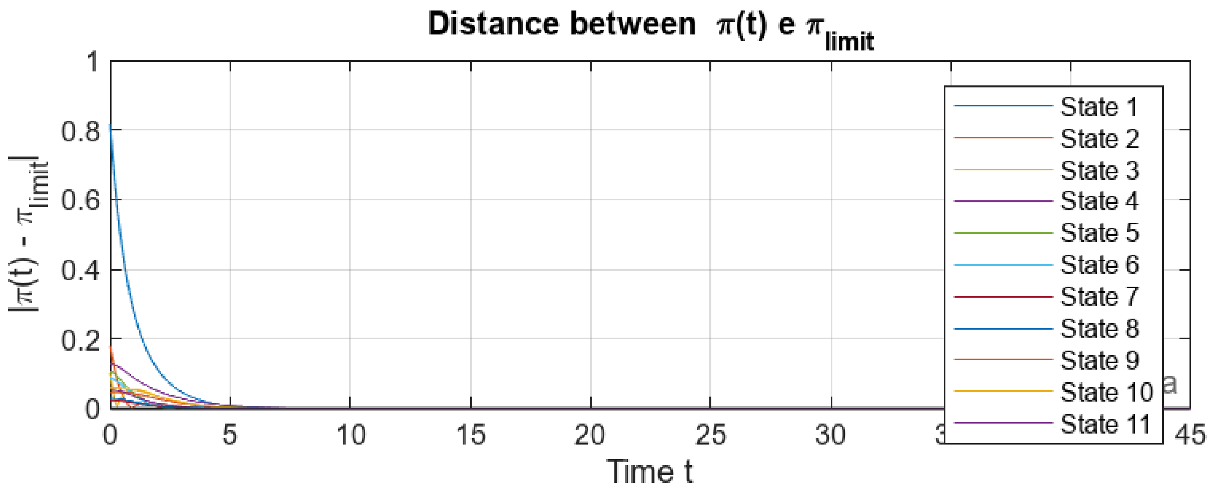
I parametri λ_a, μ_1, μ_2 verranno dimensionati nella soluzione del punto 2.

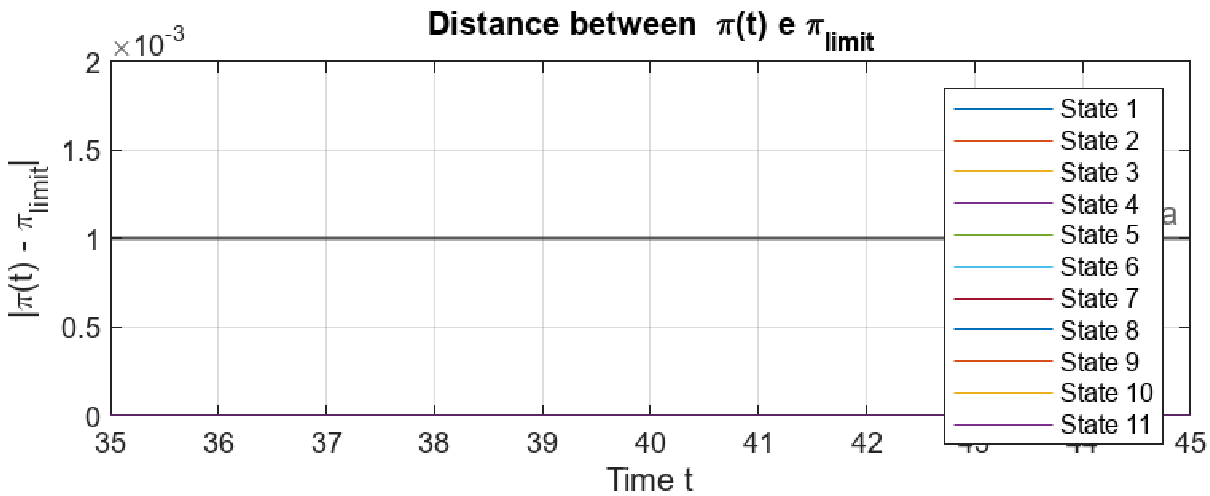


Punto 2:

La prima scelta dei tassi è stata **(λ_a, μ_1, μ_2) = (1, 1, 1)**. Questo ci ha portato a osservare la seguente situazione:

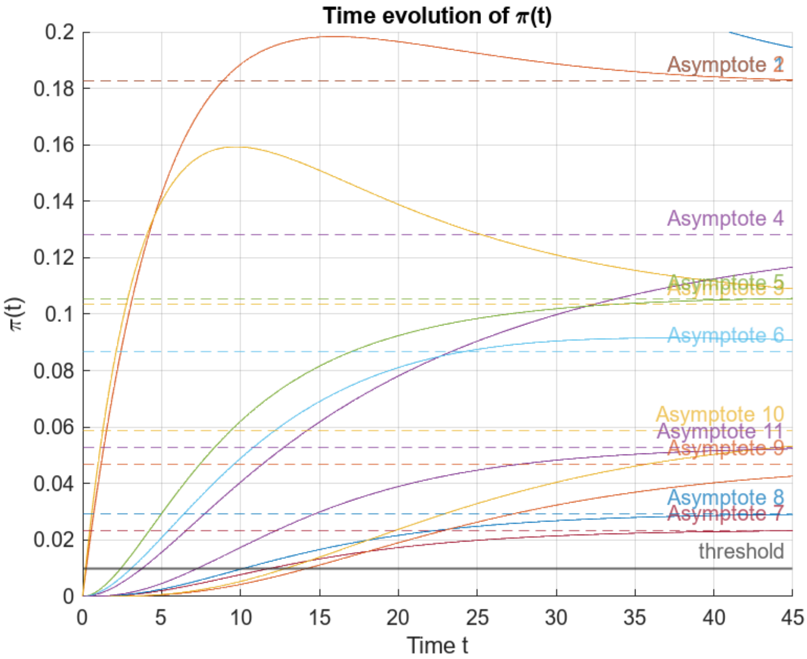


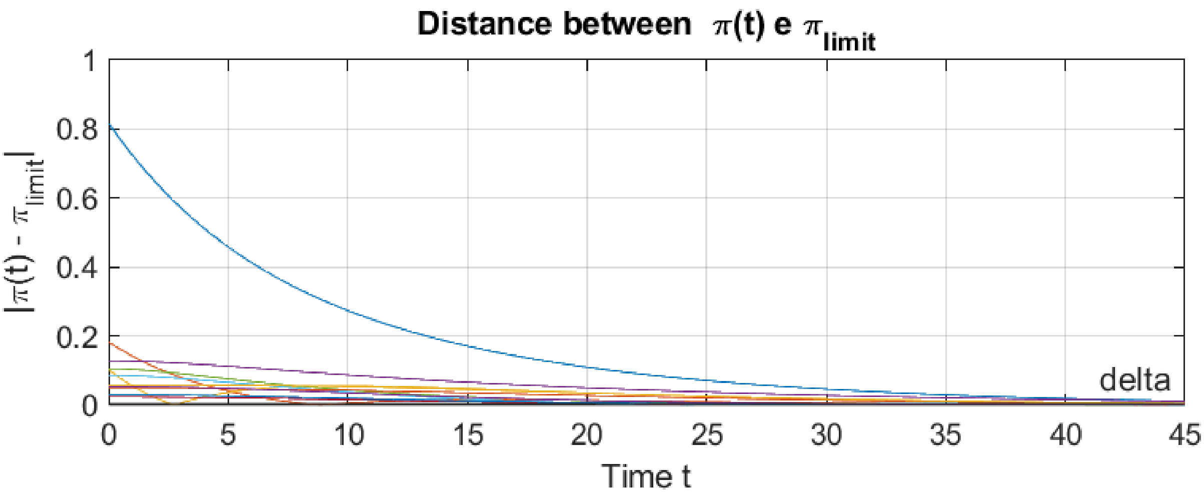


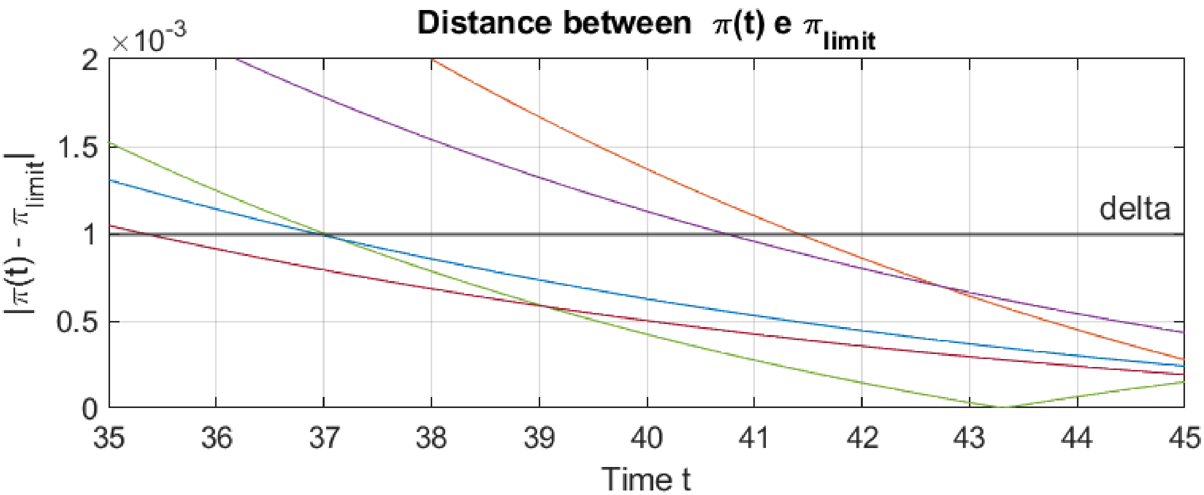


Verificato che i valori dei parametri iniziali erano troppo alti, li abbiamo dimensionati per tentativi fino a trovare una combinazione che rispettasse le richieste dell'esercizio. Di seguito riportiamo la lista di parametri testati:

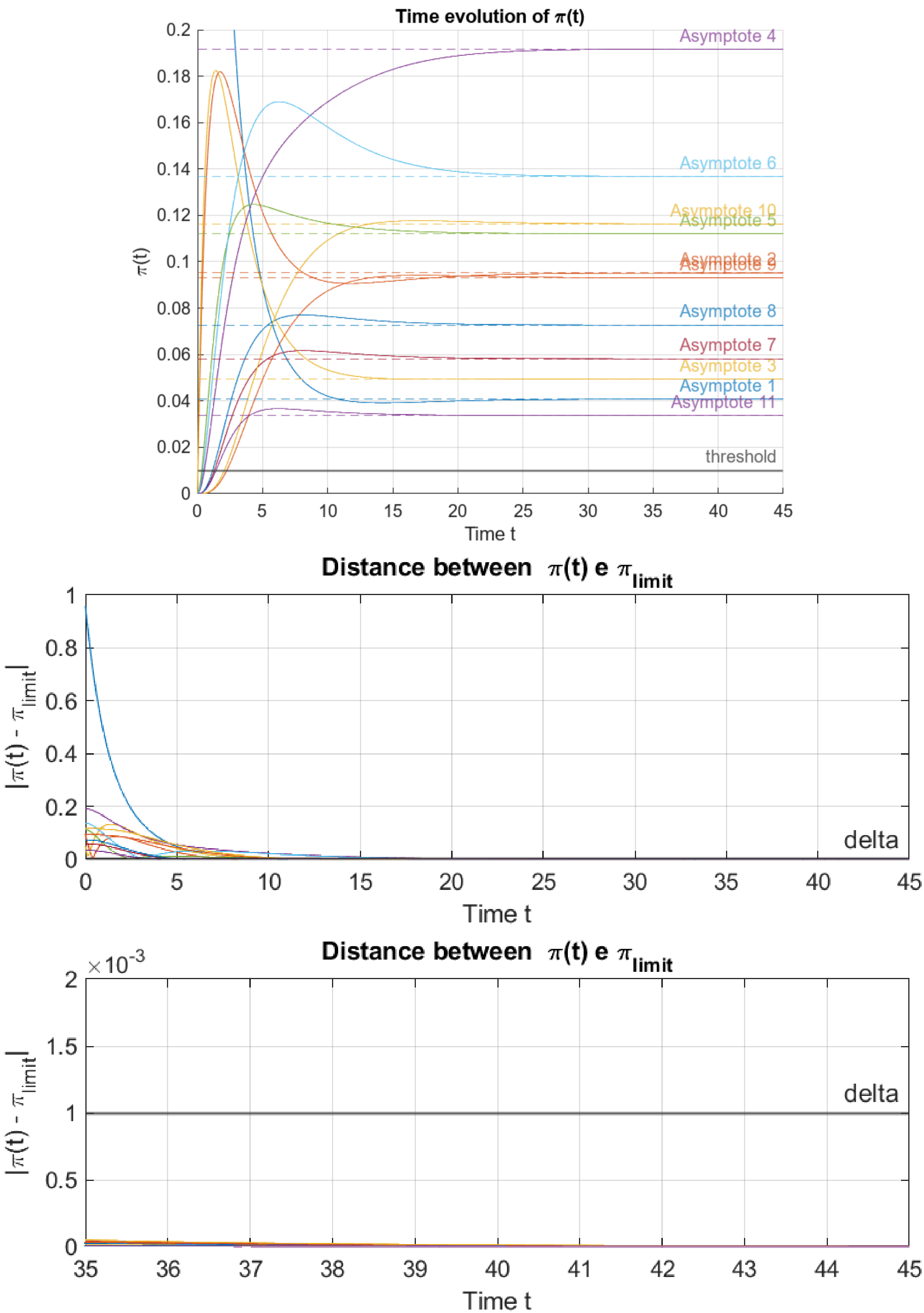
1. **$(\lambda_a, \mu_1, \mu_2) = (0.1, 0.1, 0.1)$:**



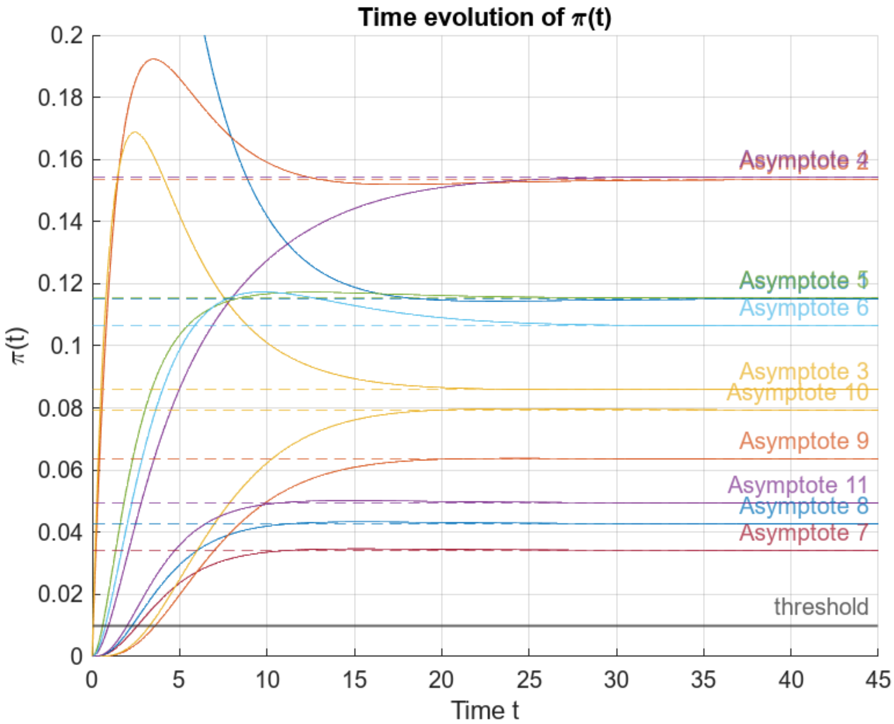


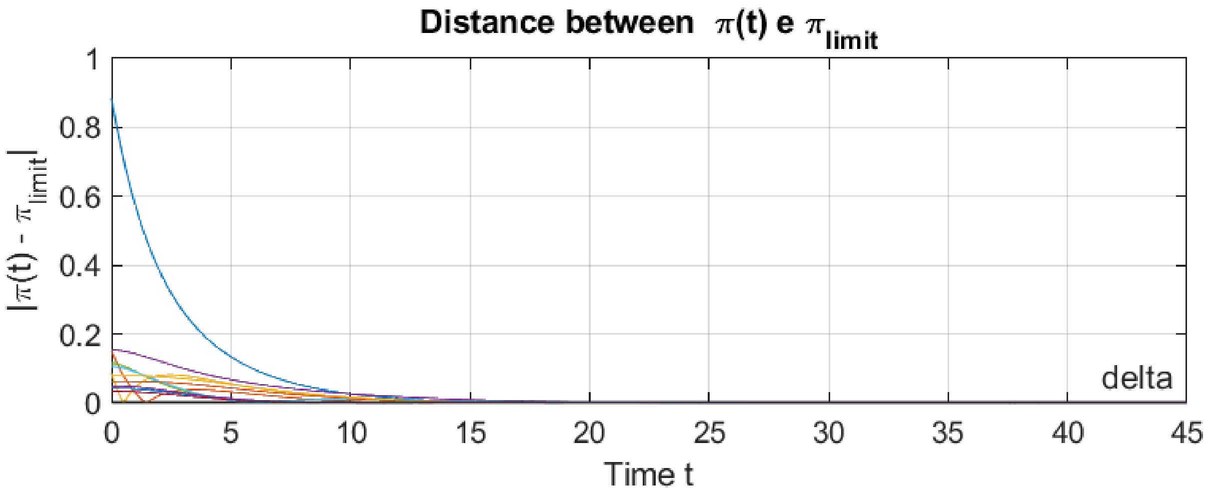


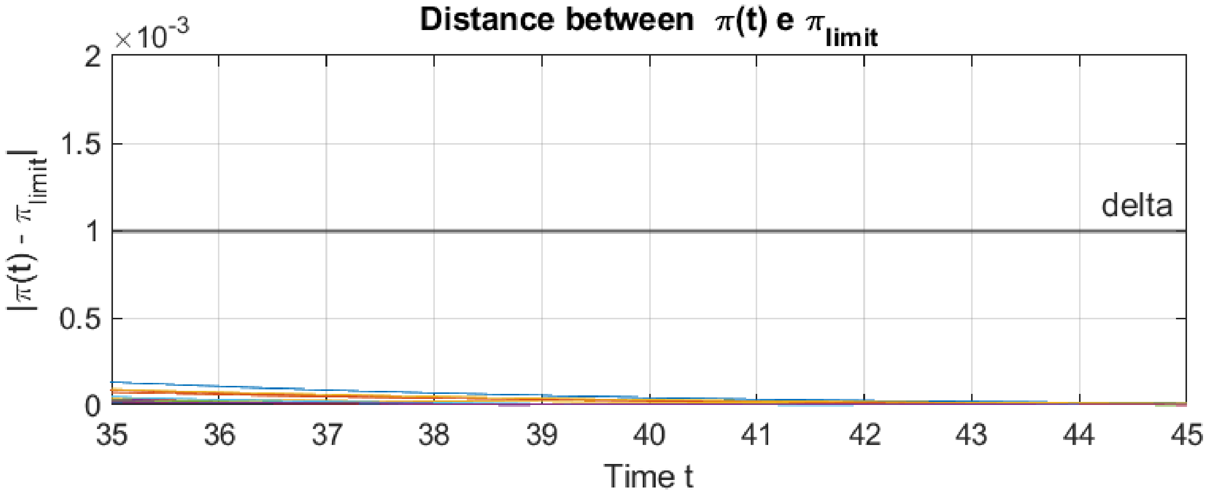
2. $(\lambda_a, \mu_1, \mu_2) = (0.7, 0.3, 0.3)$:



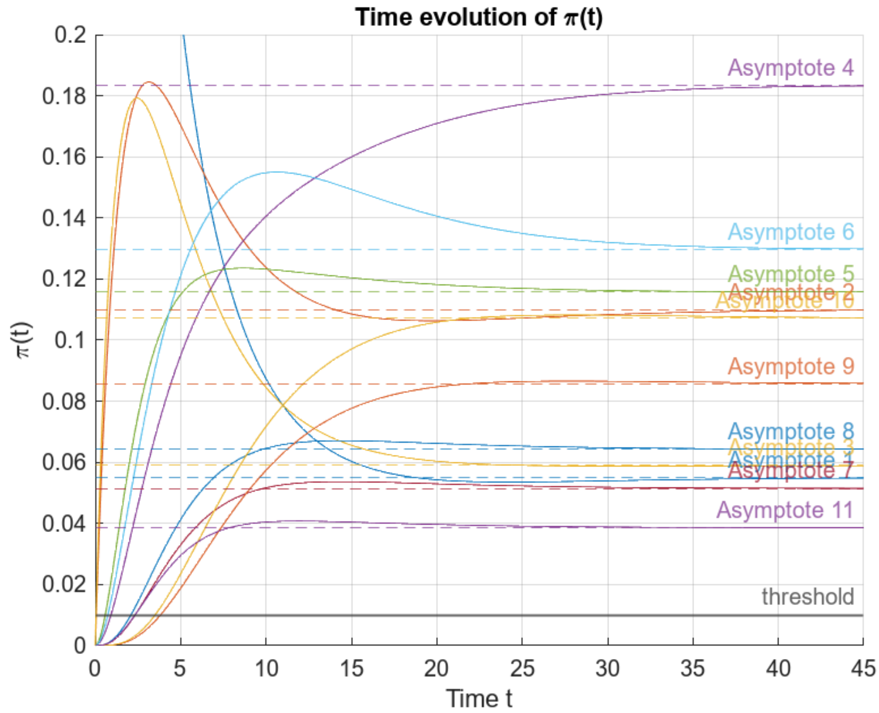
3. $(\lambda_a, \mu_1, \mu_2) = (0.4, 0.3, 0.3)$:

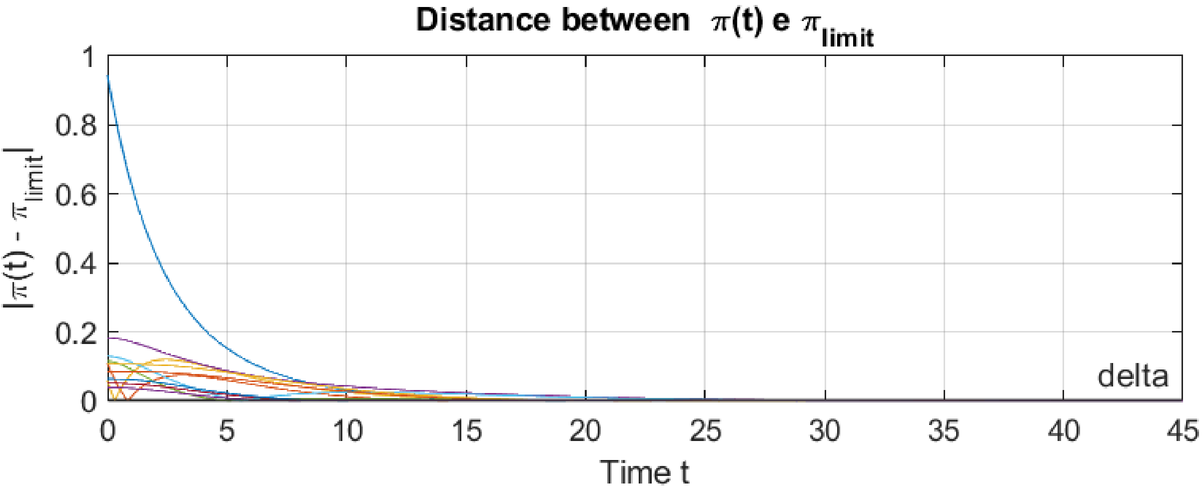


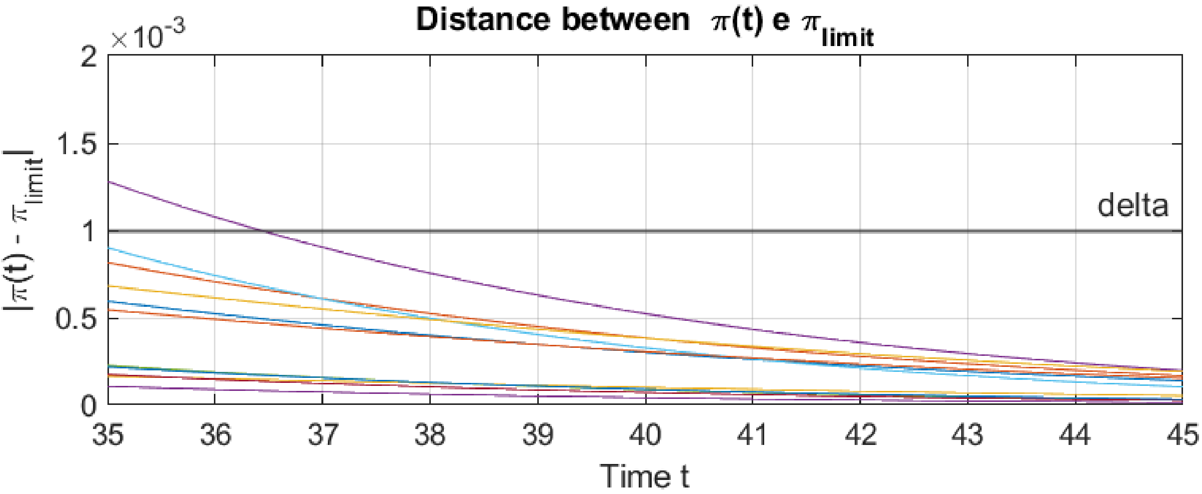




4. $(\lambda_a, \mu_1, \mu_2) = (0.4, 0.2, 0.2)$:



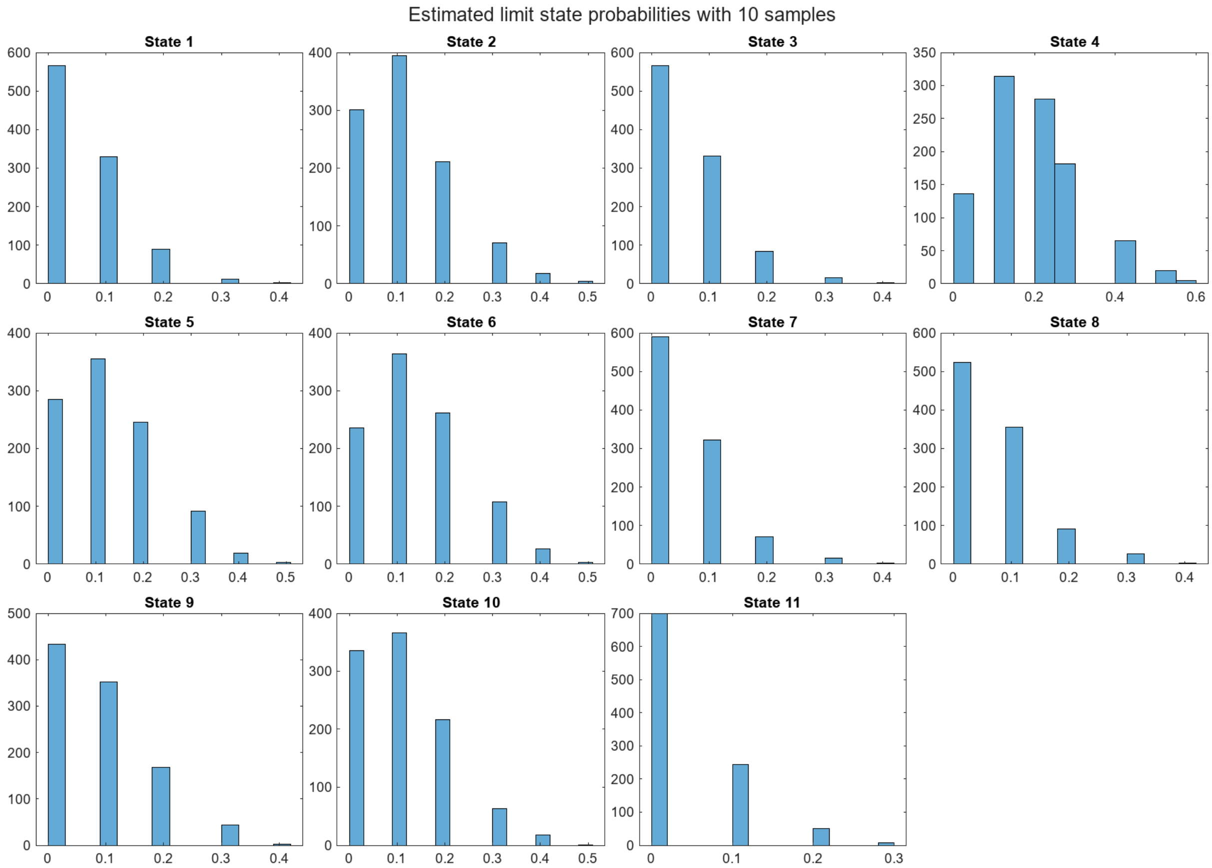


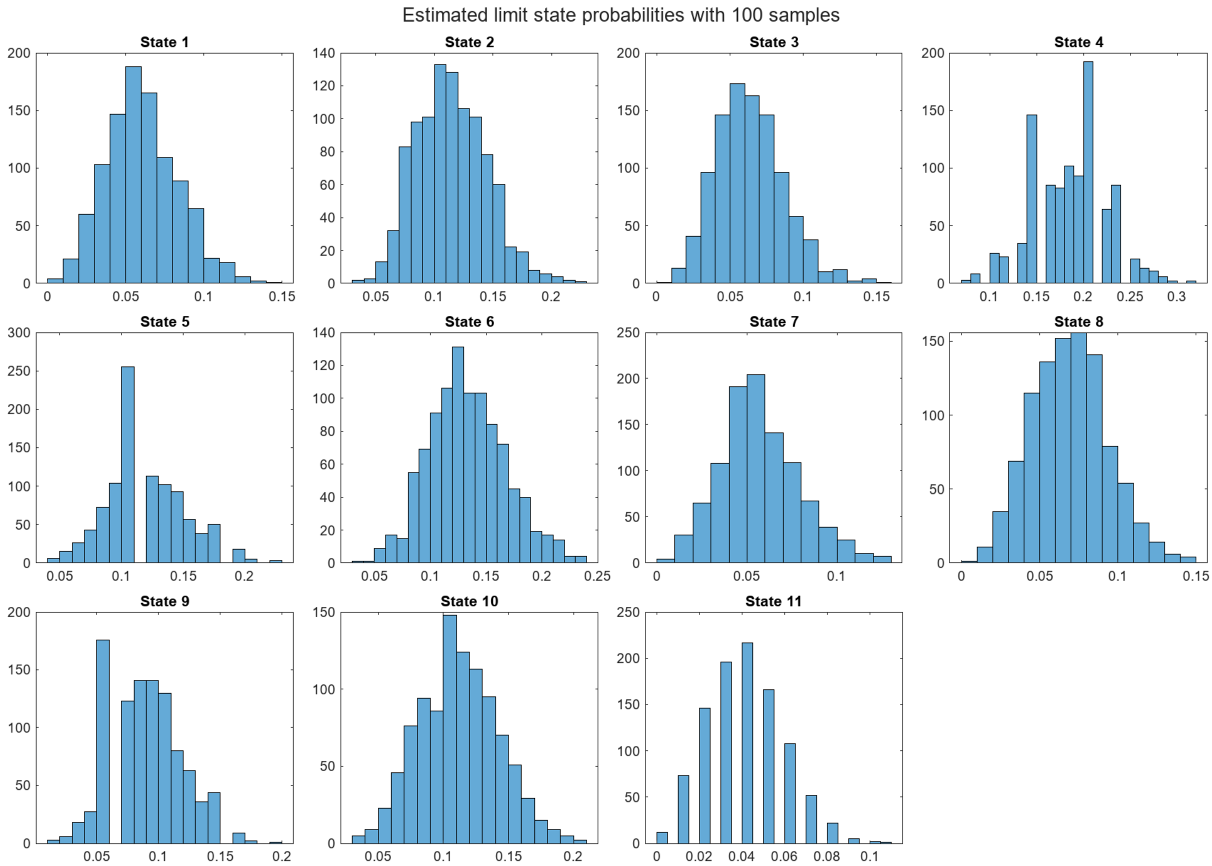


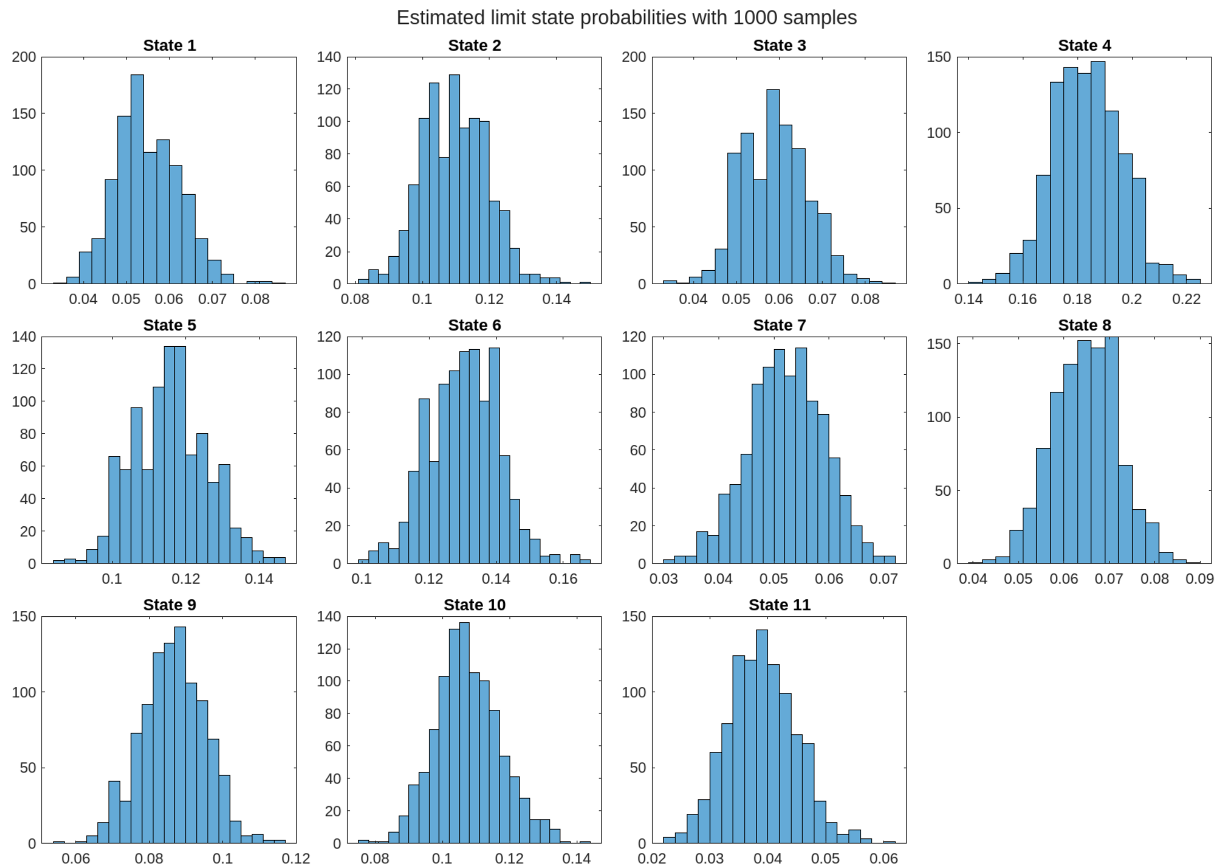
Punto 3:

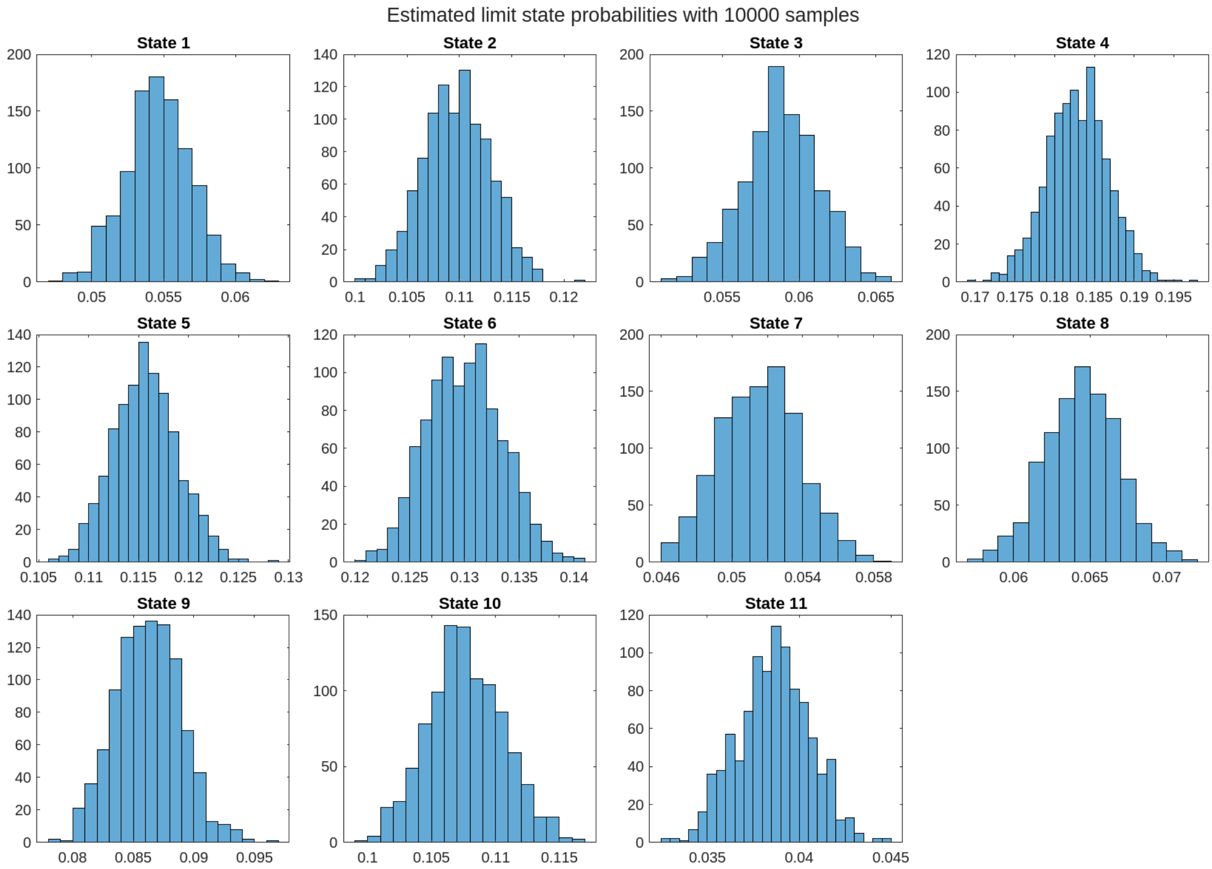
Abbiamo simulato il sistema fino a 100 eventi, il che ci dà un'altissima probabilità di essere a regime (nel caso questo non avvenga il codice interrompe la normale esecuzione e restituisce un messaggio d'errore). Abbiamo scelto 40 min come l'istante di simulazione in cui osservare gli stati, poiché possiamo ritenerci in steady state in quel momento (steady state viene raggiunto a circa 36.5 min).

Abbiamo scelto di stimare le probabilità limite degli stati **m = 1000** volte, e ogni stima è media di **n=10** osservazioni, almeno come prima iterazione. Successivamente il numero di osservazioni è cresciuto di un'ordine di grandezza per esperimento (**n=100**, **n=1000**, **n=10000**), fornendo i seguenti risultati.




Estimated limit state probabilities with 100 samples
State 1
State 2
State 3
State 4
State 5
State 6
State 7
State 8
State 9
State 10
State 11

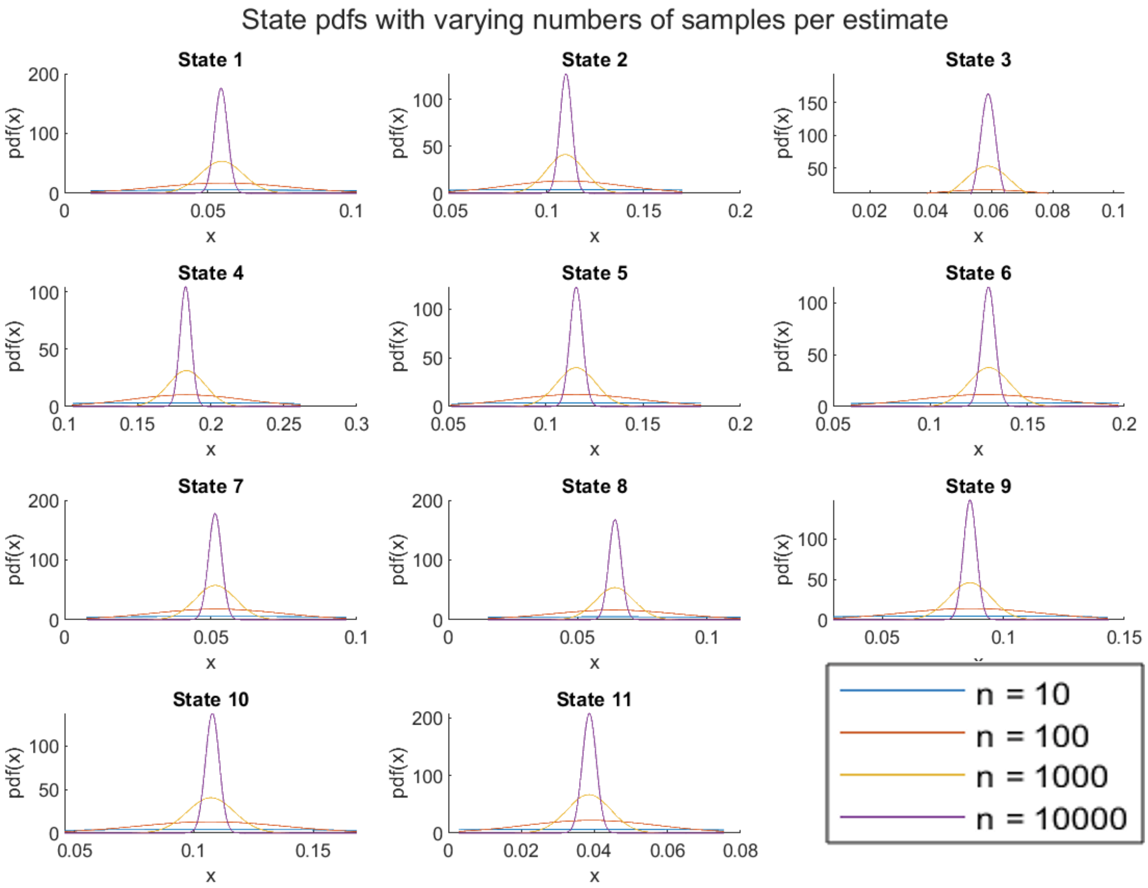

Estimated limit state probabilities with 1000 samples
State 1
State 2
State 3
State 4
State 5
State 6
State 7
State 8
State 9
State 10
State 11



Nella pagina seguente abbiamo riportato le tabelle con i valori di media e varianza delle stime, ottenuti al crescere del numero di simulazioni per stima.

	Media delle medie d’insieme al variare di n			
	n=10	n=100	n=1000	n=10000
1	0.0556	0.0556	0.0549	0.0546
2	0.1122	0.1094	0.1094	0.1097
3	0.0558	0.0585	0.0587	0.0588
4	0.1805	0.1837	0.1834	0.1829
5	0.1214	0.1157	0.1156	0.1156
6	0.1335	0.1282	0.1032	0.1300
7	0.0521	0.0521	0.0517	0.0515
8	0.0626	0.0641	0.0644	0.0644
9	0.8320	0.0865	0.0862	0.0862
10	0.1064	0.1070	0.1071	0.1077
11	0.0365	0.0391	0.0385	0.0386

	Varianza delle medie d’insieme al variare di n			
	n=10	n=100	n=1000	n=10000
1	5.348×10^{-3}	5.366×10^{-4}	5.523×10^{-5}	5.159×10^{-6}
2	1.007×10^{-2}	9.137×10^{-4}	9.353×10^{-5}	9.767×10^{-6}
3	5.465×10^{-3}	5.413×10^{-4}	5.614×10^{-5}	6.002×10^{-6}
4	1.521×10^{-2}	1.524×10^{-3}	1.617×10^{-4}	1.460×10^{-5}
5	1.072×10^{-2}	1.030×10^{-3}	9.991×10^{-5}	1.054×10^{-5}
6	1.109×10^{-2}	1.192×10^{-3}	1.127×10^{-4}	1.193×10^{-5}
7	5.176×10^{-3}	4.920×10^{-4}	4.805×10^{-5}	5.046×10^{-6}
8	5.981×10^{-3}	5.960×10^{-4}	5.483×10^{-5}	5.663×10^{-6}
9	7.758×10^{-3}	8.089×10^{-4}	7.552×10^{-5}	7.297×10^{-6}
10	9.779×10^{-3}	9.347×10^{-4}	9.619×10^{-5}	8.407×10^{-6}
11	3.738×10^{-3}	3.286×10^{-4}	3.588×10^{-5}	3.704×10^{-6}



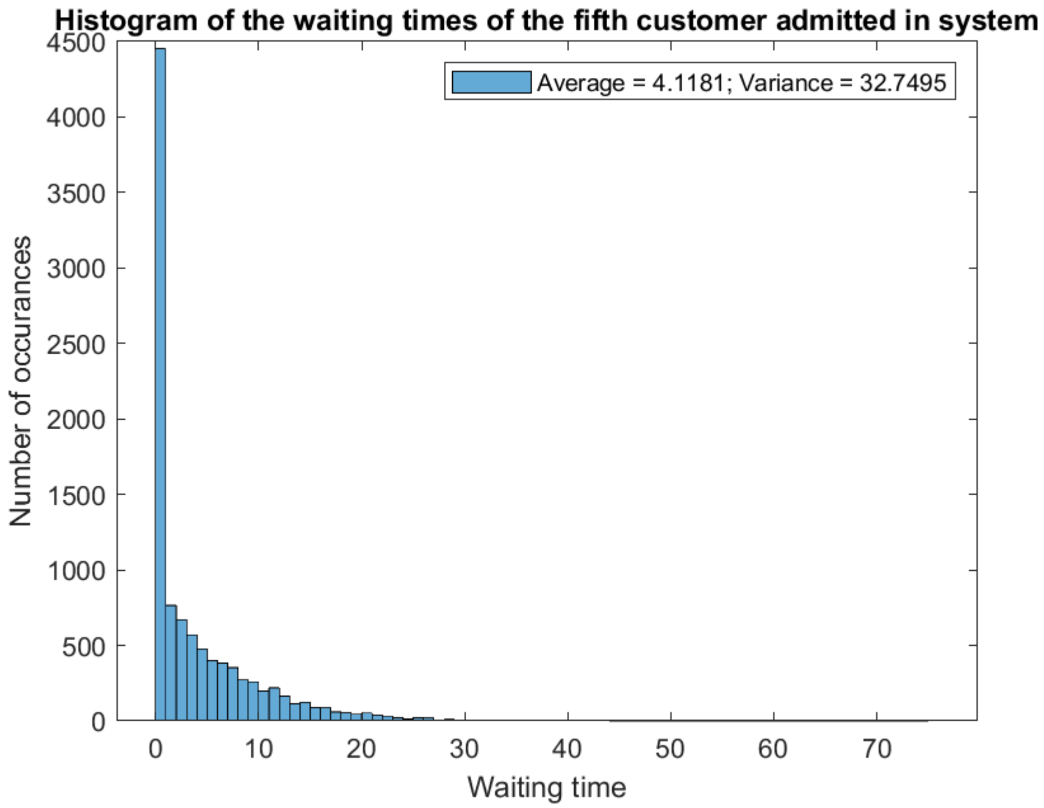
Da quest'ultimo grafico riassuntivo si evince l'effetto della legge dei grandi numeri: aumentando il numero di osservazioni per stima notiamo un chiaro restringersi della campana di probabilità per tutti gli stati.

Punto 4:

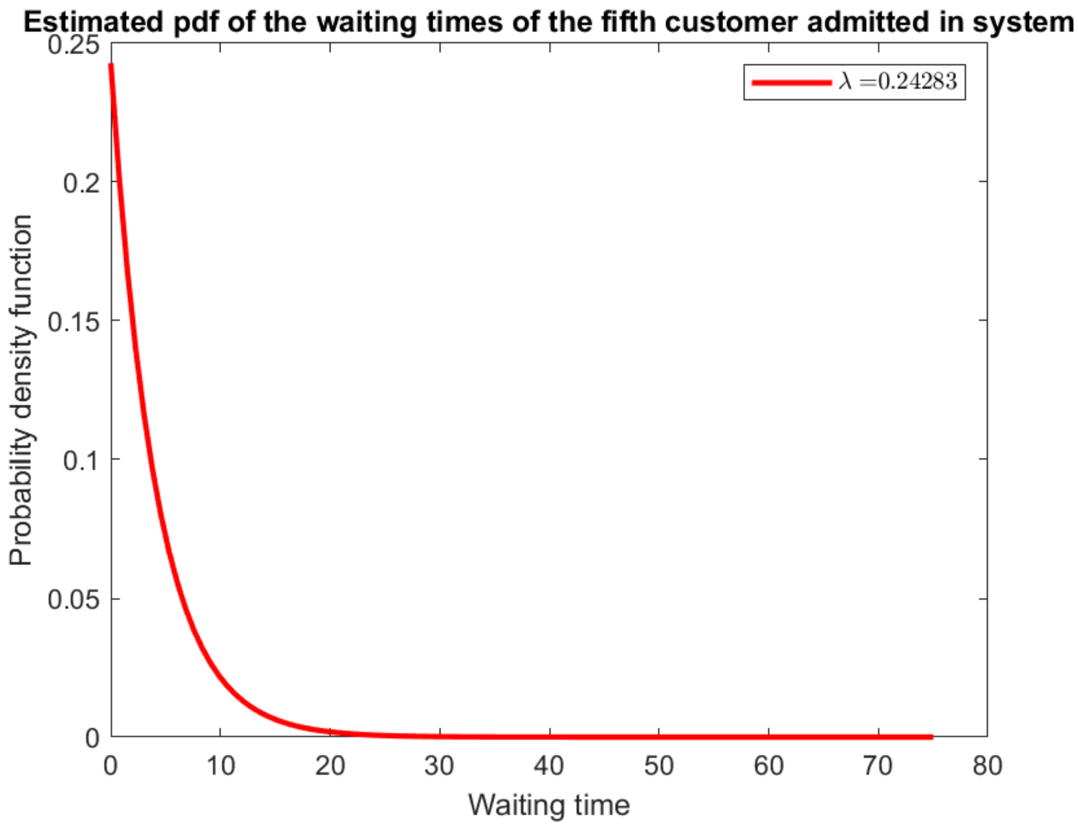
Decidiamo innanzitutto un numero di eventi simulati che garantisca l'occorrenza sia dell'ingresso del quinto cliente ammesso, sia il suo abbandono del buffer; è comunque ammesso che il cliente passi istantaneamente attraverso il buffer, rendendo il tempo di attesa nullo. Prove sperimentali indicano che 100 eventi simulati nella pratica garantiscono tali condizioni.

L'altro fattore di decisione è il numero di simulazioni: decidiamo 10'000 sia sufficientemente alto per garantire una corretta rappresentazione.

Queste scelte ci conducono alla raccolta dati rappresentata di seguito.



La distribuzione è chiaramente esponenziale, come ci aspettavamo. Quindi possiamo stimarne la pdf attraverso il tempo di attesa medio, che è effettivamente l'inverso del tasso della distribuzione.



Punto 5:

Per calcolare i ratei di ingresso e uscita (λ_{eff}, μ_{eff}) procediamo sia in modo empirico, sia analitico: empiricamente si conta dallo steady state il numero di occorrenze di arrivi/partenze diviso il tempo trascorso; analiticamente, poiché il sistema è ergodico, si effettua il prodotto tra il tasso dell'evento di partenza/arrivo, il numero di clienti in partenza/arrivo, e la probabilità limite degli stati in cui tale evento sia ammissibile.
I risultati rispettano i limiti di precisione imposti, e sono riportati di seguito:

```
estimated_lambda_eff = 0.1511

estimated_mu_eff = 0.1511

analytic_lambda_eff = 0.1513

analytic_mu_eff = 0.1513
```

Punto 6:

Anche in questo caso dobbiamo decidere un orizzonte del numero di eventi massimo della simulazione, che fissiamo a 1'000'000. Fatto ciò, definiamo da quale istante temporale ci troviamo in steady state, e scorriamo il vettore degli stati da quel momento in poi.
Definiti gli stati in cui la macchina 1 è a riposo, in lavoro, o bloccata, analizziamo i cambiamenti di stato per contare il numero di clienti in ingresso alla macchina, il tempo totale di riposo, e un vettore popolato con il tempo di sistema dei vari clienti.
Le misure richieste (λ_Σ, $E[X_\Sigma]$, $E[S_\Sigma]$) vengono quindi calcolate nei modi seguenti:

- λ_Σ: numero di clienti in ingresso fratto tempo trascorso dallo steady state;
- $E[S_\Sigma]$: media dei tempi di sistema elencati nel vettore precedentemente menzionato;
- $E[X_\Sigma]$: l'occupazione media della macchina è uguale a 1 - la percentuale di tempo in cui la macchina è vuota; questo perché o la macchina è vuota, o è piena con un solo cliente.

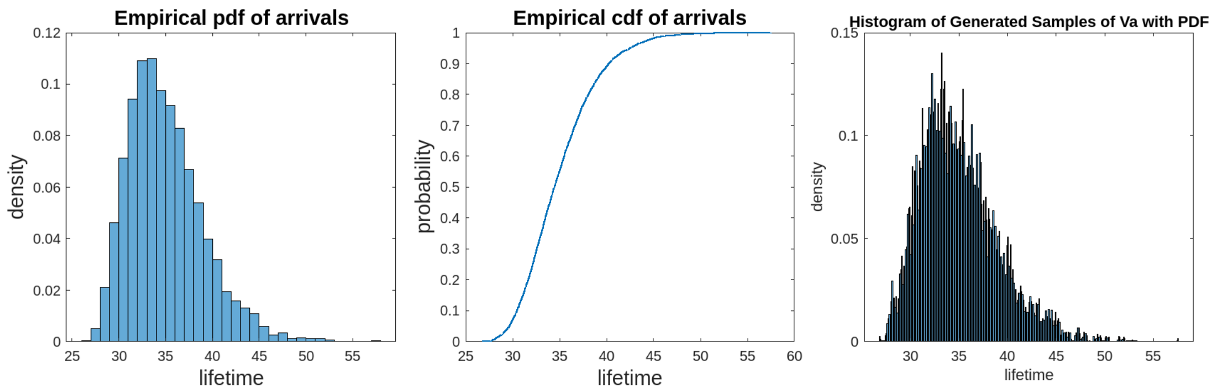
I risultati ottenuti sono elencati sotto, incluso l'errore sulla relazione imposta dalla Little's Law, e le misure analitiche.

```
estimated_lambda_sigma = 0.0367

estimated_average_number_of_customers = 0.6602

estimated_average_system_time = 17.9772

estimated_littles_law_error = 8.3837e-06


analytic_lambda_sigma = 0.0366

analytic_average_number_of_customers = 0.6516

analytic_average_system_time = 17.7810
```

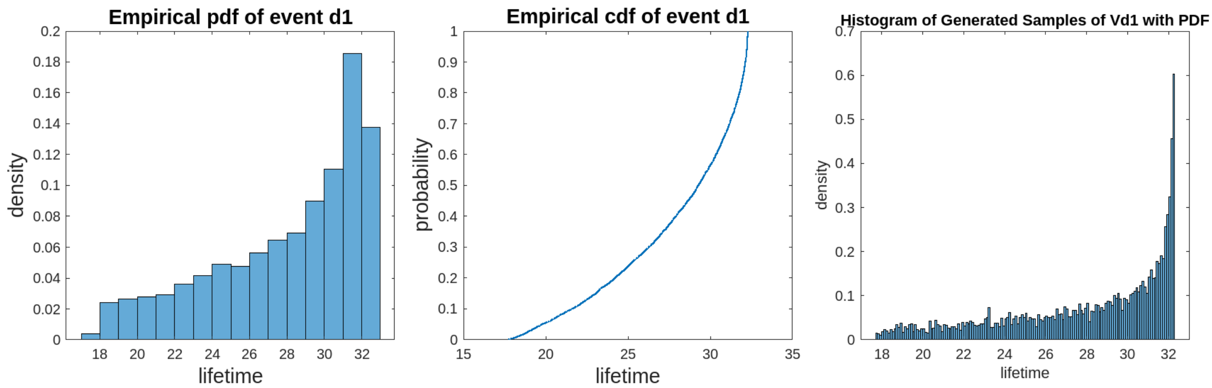
Punto 7:

Per affrontare questo punto abbiamo voluto innanzitutto poter constatare graficamente la pdf implicata dai dati, per ciascuna distribuzione di lifetimes.
Utilizzando le distribuzioni, abbiamo estratto la cdf empirica dei vari eventi. Attraverso il campionamento uniforme dell'interpolazione della cdf empirica (metodo inverso), possiamo generare nuovi campioni che appartengano alla stessa pdf già evidenziata. Questo è reso evitante per via grafica.

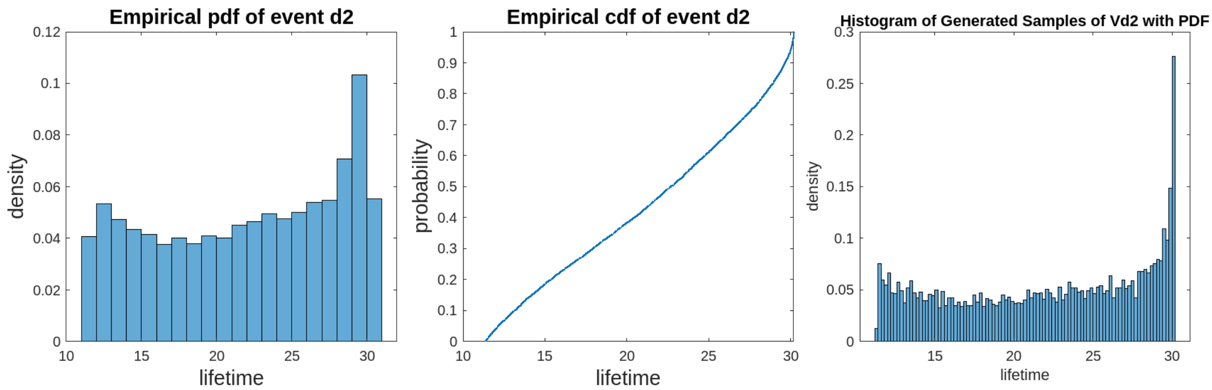
Empirical pdf and cdf for event A



Empirical pdf and cdf for event d1



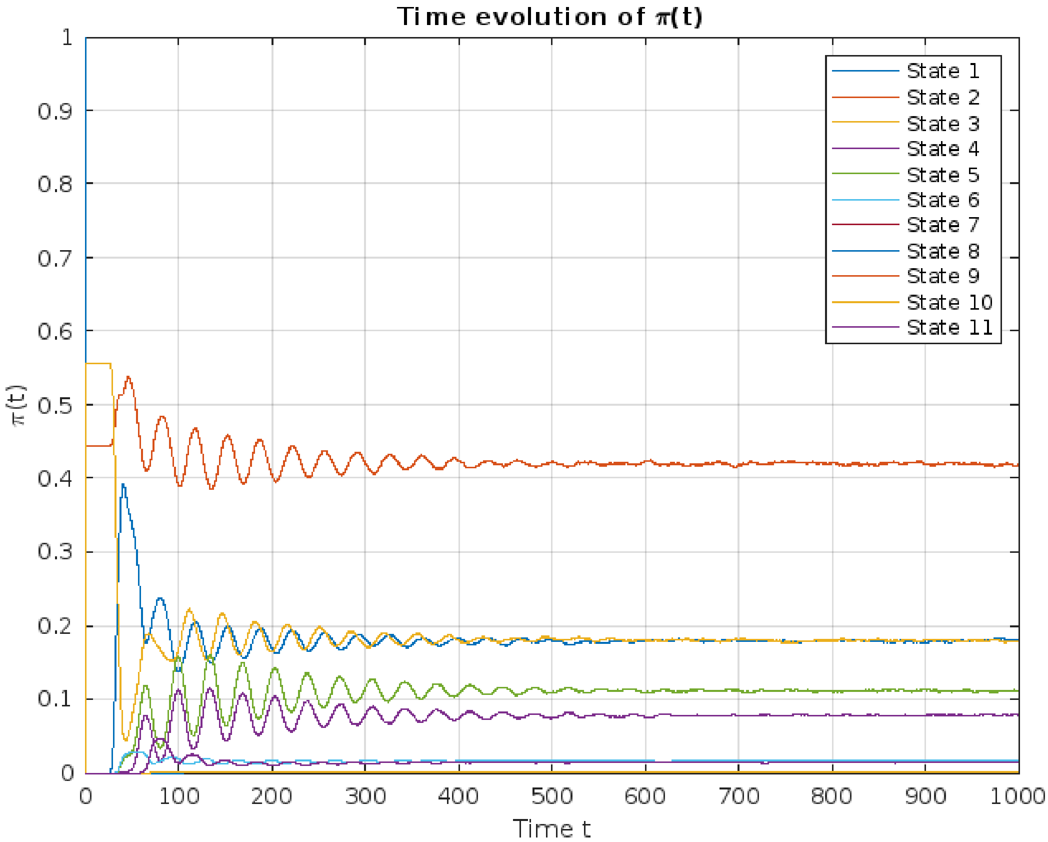
Empirical pdf and cdf for event d2



A questo punto vogliamo controllare se il sistema ammetta steady state. Per fare questo abbiamo deciso di mostrare l'evoluzione nel tempo delle medie delle probabilità degli stati.

Quindi simuliamo il sistema sfruttando i lifetime generati come spiegato sopra; fatto ciò generiamo un vettore di stati campionati a intervalli regolari di tempo (tra $\mathbf{T_{min} = 0}$ e $\mathbf{T_{max} = 1000}$ generiamo 10'000 campioni). A questo punto, partendo da T_{min}, contiamo le occorrenze degli stati in intervalli temporali crescenti; il numero di occorrenze viene diviso per la durata della finestra temporale, ottenendo così la stima empirica di π(t).

In conclusione, il sistema ammette regime, com'è chiaramente visibile dal grafico riassuntivo sottostante.



Punto 8:

Poiché il sistema ammette steady state, possiamo risolvere le richieste sfruttando le stesse tecniche usate nei punti 5 e 6. Dobbiamo tenere conto del fatto che le distribuzioni dei dati assegnati non sono esponenziali: quindi non ci è possibile un calcolo analitico delle misure richieste. Dobbiamo anche prendere un nuovo istante temporale da cui considerare il sistema a regime (**steady_state_time = 600 min**).

Date queste considerazioni, i dati ottenuti sono:

```
estimated_lambda_eff = 0.0286

estimated_mu_eff = 0.0286


estimated_lambda_sigma = 0.0151

estimated_average_number_of_customers = 0.3325

estimated_average_system_time = 22.0629

estimated_littles_law_error = 9.3441e-07
```