

Analisi Matematica 2

Edoardo Figini

a.a. 2022-2023

Indice

1	Equazioni differenziali	2
1.1	Equazioni differenziali del I ordine	3
1.1.1	Equazioni differenziali a variabili separabili	3
1.1.2	Equazioni differenziali lineari del primo ordine	4
1.1.3	Equazioni di Bernoulli	4
1.2	Equazioni differenziali lineari del II ordine	5
1.2.1	Integrale generale delle equazioni lineari del II ordine	5
1.3	Metodo di variazione delle costanti arbitrarie	7
1.4	Equazioni differenziali lineari di ordine n	7
1.5	Sistemi di equazioni differenziali lineari	8

1 Equazioni differenziali

Def. 1 (Equazione differenziale)

Si definisce equazione differenziale di ordine n un'uguaglianza del tipo

$$\boxed{F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0} \quad (1)$$

dove

- i) y dipende da $x \rightarrow y = y(x)$ è la funzione incognita
- ii) F è una funzione assegnata di $n + 2$ variabili
- iii) x è la variabile indipendente

Def. 2 (Soluzione dell'equazione differenziale)

Viene detta soluzione dell'equazione differenziale $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ in un certo intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ una funzione $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \Phi''(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0} \quad (2)$$

Verifica: inserendo Φ (e le sue derivate) al posto dell'incognita y (e delle sue derivate), ottengo un'identità ($\forall x \in I$ vale)

Def. 3 (Integrale Generale e Particolare)

Sia data $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (E), viene detto INTEGRALE GENERALE di (E) l'insieme di tutte le soluzioni di (E).

Viene detta INTEGRALE PARTICOLARE di (E) una particolare soluzione di (E).

Def. 4 (Problema di Cauchy)

Si dice PROBLEMA DI CAUCHY (o "ai valori iniziali") associata a $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ il problema

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_{0,0} \\ y'(x_0) = y_{0,1} \\ y''(x_0) = y_{0,2} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1} \end{cases} \quad (3)$$

con $y_{0,0}, y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n-1} \in \mathbb{R}$ fissati.

L'istante x_0 in cui prescriviamo i valori di $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ è sempre lo stesso, fissato.

n condizioni che dicono chi è y , insieme a tutte le sue derivate, fino all'ordine $n-1$, in un punto/istante fissato.

Def. 5 (Forma normale)

Un'equazione differenziale di ordine n è detta in FORMA NORMALE se la derivata di ordine n è esplicitata, ovvero se è della forma

$$y^{(n)} = \underbrace{g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})}_{\text{funz. di } n+1 \text{ variabili}} \quad (4)$$

1.1 Equazioni differenziali del I ordine

Equazioni del tipo

$$F(x, y, y') = 0 \quad (5)$$

Proposizione 1

L'integrale generale di (5) è dato da una famiglia di funzioni dipendente da un parametro $\bar{c} \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{condizione iniziale} \quad (6)$$

per avere esistenza e unicità della soluzione.

Equazioni considerate in forma normale, ovvero

$$y' = f(x, y) \quad (7)$$

1.1.1 Equazioni differenziali a variabili separabili

Sono nella forma:

$$y' = a(x) \cdot b(y) \quad (8)$$

con a, b funzioni continue

Risoluzione:

1. Determinare l'integrale generale dell'equazione $y' = a(x)b(y(x))$

(a) **Ricerca delle soluzioni costanti:** costanti che annullano $b(y)$
sufficiente porre $b(y) \equiv 0$

(b) **Tutte le altre soluzioni:**

- Si scrive y' in notazione di Eulero:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad (9)$$

- Si trattano dy e dx come se fossero numeri o funzioni (come se obbedissero alle tipiche regole algebriche) e si portano tutte le y al primo membro e tutte le x al secondo.

$$\frac{dy}{b(y)} = a(x) \cdot dx$$

- Si integrano entrambi i membri:

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x) dx \quad (10)$$

Si ottiene l'integrale generale dell'equazione integrale (che dipende da una costante c) nella forma

$$y(x) = f(x)$$

2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (11)$$

Per poter trovare il valore della costante c , si pone l'integrale generale in funzione di x_0 e lo si pone uguale a y_0 .

1.1.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sono nella forma:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \quad (12)$$

dove

- $f(x)$ è il termine noto
- $a(x)$ è il coefficiente

con a, f funzioni continue assegnate

Se $f(x) \not\equiv 0$ si chiama “equazione completa” (EC)

Se $f(x) \equiv 0$ si chiama “equazione omogenea associata” (EO)

Teorema 1 (Formula risolutiva per eq. lineari del primo ordine)

l'integrale generale di (12) è dato dalla famiglia di funzioni

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \cdot B(x) \quad (13)$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$, dove

$$A(x) = \int a(x) dx \quad (14)$$

$$B(x) = \int e^{A(x)} f(x) dx \quad (15)$$

Risoluzione:

1. Determinare l'integrale generale dell'equazione

- (a) Si calcola la primitiva $A(x)$
- (b) Si applica la formula

$$y(x) = \left(\int f(x)e^{A(x)} dx + c \right) e^{-A(x)} \quad (16)$$

2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (17)$$

1.1.3 Equazioni di Bernoulli

Sono nella forma:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, & \alpha \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0, & y_0 > 0 \end{cases} \quad (18)$$

Risoluzione:

1. Si divide per y^α

$$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

2. Si pone $z(x) := y^{1-\alpha}$

$$\begin{cases} z'(x) + (1-\alpha)a(x)z(x) = (1-\alpha)b(x) \\ z(x_0) = y_0^{1-\alpha} \end{cases}$$

1.2 Equazioni differenziali lineari del II ordine

Sono nella forma:

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x) \quad (19)$$

con a, b, c, f funzioni definite e continue in I ed $a \neq 0$.

Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine sono infinite e dipendono da due parametri arbitrari.

Teorema 2 (Principio di Sovrapposizione)

Se y_1 è soluzione di $ay'' + by' + cy = f_1$ e y_2 è soluzione di $ay'' + by' + cy = f_2$, allora

$$y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 \quad (20)$$

è soluzione di $ay'' + by' + cy = C_1f_1 + C_2f_2$.

1.2.1 Integrale generale delle equazioni lineari del II ordine

Teorema 3 (Struttura per le equazioni Omogenee)

L'integrale generale di $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$, con a, b, c funzioni definite e continue in I ed $a \neq 0$, è dato da tutte le combinazioni lineari

$$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (21)$$

dove y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione.

Teorema 4 (Struttura per le equazioni Complete)

L'integrale generale di $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$, con a, b, c, f funzioni definite e continue in I ed $a \neq 0$, è dato da tutte e solo le funzioni

$$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + y_P(x) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (22)$$

dove y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione e y_P è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Per la ricerca dell'integrale generale si considera il polinomio caratteristico associato

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (23)$$

e l'equazione caratteristica associata

$$P(\lambda) = 0 \quad (24)$$

Risoluzione:

1. Trovare il polinomio caratteristico
2. Studiare il segno del discriminante dell'equazione caratteristica
3. Trovare λ_1 e λ_2 e quindi y_1 e y_2
4. Tramite il Teorema di Struttura (3) trovare l'integrale generale.

Il carattere di $P(\lambda)$ è dato dal segno del discriminante:

- Se $\Delta > 0$
si hanno due soluzioni reali distinte:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \lambda_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}y_1(x) &= e^{\lambda_1 t} \\ y_2(x) &= e^{\lambda_2 t}\end{aligned}\tag{25}$$

La soluzione sarà

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\tag{26}$$

- Se $\Delta < 0$
si hanno due soluzioni complesse coniugate

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha + i\beta \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta\end{aligned}$$

dove

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

Per avere soluzioni reali, si sfrutta la linearità, ottenendo

$$\begin{aligned}u_1(t) &= e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ u_2(t) &= e^{\alpha t} \sin(\beta t)\end{aligned}\tag{27}$$

La soluzione sarà

$$y(x) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\tag{28}$$

- Se $\Delta = 0$
si hanno due soluzioni reali coincidenti

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$$

Per avere due soluzioni linearmente indipendenti si pone

$$\begin{aligned}y_1(x) &= e^{\lambda_1 t} \\ y_2(x) &= t e^{\lambda_2 t}\end{aligned}\tag{29}$$

La soluzione sarà

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}\tag{30}$$

Secondo il teorema di struttura occorre trovare una soluzione particolare dell'equazione completa.

Si usa il metodo di *Somiglianza*:

Sia

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e $f \in C(I)$.

Se f è

- polinomio (di grado n): si cerca una soluzione y polinomio.

$$\begin{cases} P_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ non è soluzione di } P(\lambda) & b \neq 0 \\ xP_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molt. } 1 & b = 0, a \neq 0 \\ x^2P_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molt. } 2 & b = 0, a = 0 \end{cases} \quad (31)$$

- esponenziale ($f = Ce^{kx}$): si cerca una soluzione y esponenziale.

$$\begin{cases} Ae^{kx} & \text{se } k \text{ non è soluzione di } P(\lambda) \\ xAe^{kx} & \text{se } k \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molteplicità } 1 \\ x^2Ae^{kx} & \text{se } k \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molteplicità } 2 \end{cases} \quad (32)$$

- trigonometrica ($f = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)$): si cerca una soluzione y trigonometrica.

$$\begin{cases} c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ non è soluzione di } P(\lambda) \\ x \cdot c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + x \cdot c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ è soluzione di } P(\lambda) \end{cases} \quad (33)$$

1.3 Metodo di variazione delle costanti arbitrarie

$$\underbrace{y' + a(x)y}_{(EO)} = f(x)$$

1. Si integra (EO):

$$y(x) = Ce^{-A(x)} \quad C \in \mathbb{R}$$

2. Serve una soluzione particolare:

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x)e^{-A(x)} \\ y'(x) &= c'(x)e^{-A(x)} - c(x)e^{-A(x)}(a(x)) \end{aligned}$$

sostituendo in $y' + a(x)y = f(x)$:

$$c'(x)e^{-A(x)} - c(x)e^{-A(x)}(a(x)) + c(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

semplificando risulta:

$$c'(x) = e^{A(x)} f(x)$$

1.4 Equazioni differenziali lineari di ordine n

Sono nella forma:

$$(EC_n) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (34)$$

Teorema 5 (Esistenza e unicità Globale per i problemi di Cauchy associati)

Se a_j , $j \in [1, n-1]$ sono continui in $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, e f è continua in $[a, b]$, allora $\forall x_0 \in [a, b]$ e $\forall (y_{0,0}, y_{0,1}, \dots, y_{0,n-1}) \in \mathbb{R}^n \exists!$ la soluzione di

$$\begin{cases} (EC_n) \\ y(x_0) = y_{0,0} \\ y'(x_0) = y_{0,1} \\ y''(x_0) = y_{0,2} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1} \end{cases} \quad (35)$$

e tale soluzione è definita su tutto $[a, b]$

Teorema 6 (Struttura)

L'integrale generale di (EC_n) è dato dal seguente insieme:

$$\Sigma = \{y = \bar{y} + y_0, \text{ dove } y_0 \text{ risolve } (EO_n)\} \quad (36)$$

essendo \bar{y} una soluzione di (EC_n)

1.5 Sistemi di equazioni differenziali lineari

Un'equazione differenziale di ordine n t.c.

$$y^{(n)} = f(t, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ed il problema di Cauchy corrispondente, può essere riscritta nella forma di sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = y_4(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = f(t, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{cases} \quad (37)$$

Oss: Mentre ogni eq. può essere convertita, non tutti i sistemi possono essere scritti in forma di equazione.

Esempio:

Posta

$$y'' + ay' + y = 0$$

si pone $z = y'$:

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = -az(t) - cy \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -a \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Risoluzione:

Dato un sistema:

$$\begin{cases} y' = ay + bz \\ z' = cy + dz \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

1. Ricerca degli autovalori λ di A :

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (39)$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Si ottiene $P(\lambda)$

2. Per ogni autovalore λ si cerca l'autovettore $\vec{\omega}$ corrispondente:

$$[A - \lambda I] \cdot \vec{\omega} = \underline{0} \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -a - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Le soluzioni esponenziali di (EO) sono del tipo:

$$\vec{u} = \vec{\omega} e^{\lambda t} \quad (41)$$

4. L'integrale generale è dato da

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = C_1 \vec{u}_1 + C_2 \vec{u}_2 \quad (42)$$