Analisi Matematica 2

Edoardo Figini

a.a. 2022-2023

Indice

1 Equazioni differenziali

Def. 1 (Equazione differenziale)
Si definisce equazione differenziale di ordine n un'uguaglianza del tipo

$$\boxed{F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \dots,\, y^{(n)}) = 0} \tag{1}$$

dove

i) y dipende da $x \to y = y(x)$ è la funzione incognita
ii) F è una funzione assegnata di $n+2$ variabili
iii) x è la variabile indipendente

Def. 2 (Soluzione dell'equazione differenziale)
Viene detta soluzione dell'equazione differenziale $F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \dots,\, y^{(n)}) = 0$ in un certo intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ una funzione $\Phi : I \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{F(x,\, \Phi(x),\, \Phi'(x),\, \Phi''(x),\, \dots,\, \Phi^{(n)}(x) = 0} \tag{2}$$

Verifica: inserendo Φ (e le sue derivate) al posto dell'incognita y (e delle sue derivate), ottengo un'identità ($\forall\, x \in I$ vale)

Def. 3 (Integrale Generale e Particolare)
Sia data $F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \dots,\, y^{(n)}) = 0$ (E), viene detto INTEGRALE GENERALE *di (E) l'insieme di* tutte le soluzioni *di (E).*
Viene detta INTEGRALE PARTICOLARE di (E) *una* particolare soluzione *di (E).*

Def. 4 (Problema di Caucy)
Si dice PROBLEMA DI CAUCHY *(o "ai valori iniziali") associata a $F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \dots,\, y^{(n)}) = 0$ il problema*

$$\begin{cases} F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \dots,\, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_{0,0} \\ y'(x_0) = y_{0,1} \\ y''(x_0) = y_{0,2} \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1} \end{cases} \tag{3}$$

con $y_{0,0},\ y_{0,1},\ y_{0,2},\ \dots, y_{0,n-1} \in \mathbb{R}$ fissati.
L'istante x_0 in cui prescrivo i valori di $y,\ y',\ y'',\ \dots, y^{(n-1)}$ è sempre lo stesso, fissato.

n condizioni che dicono chi è y, insieme a tutte le sue derivate, fino all'ordine $n-1$, in un punto/istante fissato.

Def. 5 (Forma normale)
Un'equazione differenziale di ordine n è detta in FORMA NORMALE *se la derivata di ordine n è esplicitata, ovvero se è della forma*

$$y^{(n)} = \underbrace{g(x,\, y,\, y',\, y'',\, \dots,\, y^{(n-1)})}_{\text{funz. di } n+1 \text{ variabili}} \tag{4}$$

1.1 Equazioni differenziali del I ordine

Equazioni del tipo

$$F(x,\, y,\, y') = 0 \tag{5}$$

Proposizione 1
L'integrale generale di (5) *è dato da una famiglia di funzioni dipendente da un parametro* $\overline{c} \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} F(x,\, y,\, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \qquad \textit{condizione iniziale} \end{cases} \tag{6}$$

per avere esistenza e unicità della soluzione.

Equazioni considerate in *forma normale*, ovvero

$$y' = f(x, y) \tag{7}$$

1.1.1 Equazioni differenziali a variabili separabili

Sono nella forma:

$$y' = a(x) \cdot b(y) \tag{8}$$

con a, b funzioni *continue*
Risoluzione:

1. Determinare l'integrale generale dell'equazione $y' = a(x)b(y(x))$
   (a) **Ricerca delle soluzioni costanti:** costanti che annullano $b(y)$
   sufficiente porre $b(y) \equiv 0$
   (b) **Tutte le altre soluzioni:**
   - Si scrive y' in notazione di Eulero:
   $$y' = \frac{dy}{dx} \tag{9}$$
   - Si trattano dy e dx come se fossero numeri o funzioni (come se obbedissero alle tipiche regole algebriche) e si portano tutte le y al primo membro e tutte le x al secondo.
   $$\frac{dy}{b(y)} = a(x) \cdot dx$$
   - Si integrano entrambi i membri:
   $$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\, dx \tag{10}$$

   Si ottiene l'integrale generale dell'equazione integrale (che dipende da una costante c) nella forma
   $$y(x) = f(x)$$
2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy
   $$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{11}$$

   Per poter trovare il valore della costante c, si pone l'integrale generale in funzione di x_0 e lo si pone uguale a y_0.

1.1.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sono nella forma:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \tag{12}$$

dove

- $f(x)$ è il termine noto
- $a(x)$ è il coefficiente

con a, f funzioni continue assegnate

Se $f(x) \not\equiv 0$ si chiama "equazione completa" (EC)
Se $f(x) \equiv 0$ si chiama "equazione omogenea associata" (EO)

Teorema 1 (Formula risolutiva per eq. lineari del primo ordine)
l'integrale generale di (12) *è dato dalla famiglia di funzioni*

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \cdot B(x) \tag{13}$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$, *dove*

$$A(x) = \int a(x)\, dx \tag{14}$$

$$B(x) = \int e^{A(x)} f(x)\, dx \tag{15}$$

<u>**Risoluzione:**</u>

1. Determinare l'integrale generale dell'equazione
   (a) Si calcola la primitiva $A(x)$
   (b) Si applica la formula

$$y(x) = \left(\int f(x) e^{A(x)}\, dx \; + c \right) e^{-A(x)} \tag{16}$$

2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{17}$$

1.1.3 Equazioni di Bernoulli

Sono nella forma:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}, & \alpha \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0, & y_0 > 0 \end{cases} \tag{18}$$

<u>**Risoluzione:**</u>

1. Si divide per y^{α}

$$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

2. Si pone $z(x) := y^{1-\alpha}$

$$\begin{cases} z'(x) + (1-\alpha)a(x)z(x) = (1-\alpha)b(x) \\ x(x_0) = y_0^{1-\alpha} \end{cases}$$

1.2 Equazioni differenziali lineari del II ordine

Sono nella forma:

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x) \tag{19}$$

con a, b, c, f funzioni definite e continue in I ed $a \neq 0$.
Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine sono infinite e dipendono da due parametri arbitrari.

Teorema 2 (Principio di Sovrapposizione)
Se y_1 è soluzione di $ay'' + by' + cy = f_1$ e y_2 è soluzione di $ay'' + by' + cy = f_2$, allora

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 + y_2 \tag{20}$$

è soluzione di $ay'' + by' + cy = C_1 f_1 + C_2 f_2$.

1.2.1 Integrale generale delle equazioni lineari del II ordine

Teorema 3 (Struttura per le equazioni Omogenee)
L'integrale generale di $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$, con a, b, c funzioni definite e continue in I ed $a \neq 0$, è dato da tutte le combinazioni lineari

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{21}$$

dove y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione.

Teorema 4 (Struttura per le equazioni Complete)
L'integrale generale di $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$, con a, b, c, f funzioni definite e continue in I ed $a \neq 0$, è dato da tutte e solo le funzioni

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_P(x) \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{22}$$

dove y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione e y_P è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Per la ricerca dell'integrale generale si considera il *polinomio caratteristico associato*

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \tag{23}$$

e l'*equazione caratteristica associata*

$$P(\lambda) = 0 \tag{24}$$

Risoluzione:

1. Trovare il polinomio caratteristico
2. Studiare il segno del discriminante dell'equazione caratteristica
3. Trovare λ_1 e λ_2 e quindi y_1 e y_2
4. Tramite il Teorema di Struttura (3) trovare l'integrale generale.

Il carattere di $P(\lambda)$ è dato dal segno del discriminante:

- Se $\Delta > 0$
  si hanno due soluzioni reali distinte:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \lambda_1 &= \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

  da cui

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 t} \\ y_1(x) &= e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{25}$$

  La soluzione sarà

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}} \tag{26}$$

- Se $\Delta < 0$
  si hanno due soluzioni complesse coniugate

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\beta \\ \lambda_1 &= \alpha - i\beta \end{aligned}$$

  dove

$$\alpha = -\tfrac{b}{2a} \quad \beta = \tfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

  Per avere soluzioni reali, si sfrutta la linearità, ottenendo

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ u_1(t) &= e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{aligned} \tag{27}$$

  La soluzione sarà

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}} \tag{28}$$

- Se $\Delta = 0$
  si hanno due soluzioni reali coincidenti

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$$

  Per avere due soluzioni linearmente indipendenti si pone

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 t} \\ y_1(x) &= te^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{29}$$

  La soluzione sarà

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t} \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}} \tag{30}$$

Secondo il teorema di struttra occorre trovare una soluzione particolare dell'equazione completa.
Si usa il metodo di *Sostituzione*:
Sia

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

con a, $b \in \mathbb{R}$ e $f \in C(I)$.
Se f è

- polinomio (di grado n): si cerca una soluzione y polinomio.

$$\begin{cases} P_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ non è soluzione di } P(\lambda) & b \neq 0 \\ xP_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molt. } 1 & b = 0, a \neq 0 \\ x^2 P_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molt. } 2 & b = 0, a = 0 \end{cases} \tag{31}$$

- esponenziale ($f = Ce^{kx}$): si cerca una soluzione y esponenziale.

$$\begin{cases} Ae^{kx} & \text{se } k \text{ non è soluzione di } P(\lambda) \\ xAe^{kx} & \text{se } k \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molteplicità } 1 \\ x^2 Ae^{kx} & \text{se } k \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molteplicità } 2 \end{cases} \tag{32}$$

- trigonometrica ($f = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$): si cerca una soluzione y trigonometrica.

$$\begin{cases} c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ non è soluzione di } P(\lambda) \\ x \cdot c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + x \cdot c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ è soluzione di } P(\lambda) \end{cases} \tag{33}$$

1.3 Metodo di variazione delle costanti arbitrarie

$$\underbrace{y' + a(x)y}_{(EO)} = f(x)$$

1. Si integra (EO):

$$y(x) = Ce^{-A(x)} \quad C \in \mathbb{R}$$

2. Serve una soluzione particolare:

$$y(x) = c(x)e^{-A(x)}$$

$$y'(x) = c'(x)e^{-A(x)} - c(x)e^{-A(x)}(a(x))$$

sostituendo in $y' + a(x)y = f(x)$:

$$c'(x)e^{-A(x)} - c(x)e^{-A(x)}(a(x)) + c(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

semplificando risulta:

$$c'(x) = e^{A(x)} f(x)$$