Analisi Matematica 2

Edoardo Figini

a.a. 2022-2023

Indice

1 Equazioni differenziali

Def. 1 (Equazione differenziale)
Si definisce equazione differenziale di ordine n un'uguaglianza del tipo

$$\boxed{F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}) = 0} \tag{1}$$

dove

i) *y dipende da $x \to y = y(x)$ è la funzione incognita*
ii) *F è una funzione assegnata di $n+2$ variabili*
iii) *x è la variabile* indipendente

Def. 2 (Soluzione dell'equazione differenziale)
Viene detta soluzione dell'equazione differenziale $F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}) = 0$ in un certo intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ una funzione $\Phi : I \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{F(x,\, \Phi(x),\, \Phi'(x),\, \Phi''(x),\, \ldots,\, \Phi^{(n)}(x) = 0} \tag{2}$$

Verifica: inserendo Φ (e le sue derivate) al posto dell'incognita y (e delle sue derivate), ottengo un'identità ($\forall\, x \in I$ vale)

Def. 3 (Integrale Generale e Particolare)
Sia data $F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}) = 0$ (E), viene detto INTEGRALE GENERALE *di* (E) *l'insieme di* tutte le soluzioni *di* (E).
Viene detta INTEGRALE PARTICOLARE di (E) *una* particolare soluzione *di* (E).

Def. 4 (Problema di Caucy)
Si dice PROBLEMA DI CAUCHY *(o "ai valori iniziali") associata a $F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}) = 0$ il problema*

$$\begin{cases} F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_{0,0} \\ y'(x_0) = y_{0,1} \\ y''(x_0) = y_{0,2} \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1} \end{cases} \tag{3}$$

con $y_{0,0},\; y_{0,1},\; y_{0,2},\; \ldots, y_{0,n-1} \in \mathbb{R}$ fissati.
L'istante x_0 in cui prescrivo i valori di $y,\; y',\; y'',\; \ldots, y^{(n-1)}$ è sempre lo stesso, fissato.

n condizioni che dicono chi è y, insieme a tutte le sue derivate, fino all'ordine $n-1$, in un punto/istante fissato.

Def. 5 (Forma normale)
Un'equazione differenziale di ordine n è detta in FORMA NORMALE *se la derivata di ordine n è esplicitata, ovvero se è della forma*

$$y^{(n)} = \underbrace{g(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n-1)})}_{\text{funz. di } n+1 \text{ variabili}} \tag{4}$$

1.1 Equazioni differenziali del I ordine

Equazioni del tipo

$$F(x,\, y,\, y') = 0 \tag{5}$$

Proposizione 1
L'integrale generale di (5) *è dato da una famiglia di funzioni dipendente da un parametro* $\overline{c} \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} F(x,\, y,\, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \qquad \textit{condizione iniziale} \end{cases} \tag{6}$$

per avere esistenza e unicità della soluzione.

Equazioni considerate in *forma normale*, ovvero

$$y' = f(x, y) \tag{7}$$

1.1.1 Equazioni differenziali a variabili separabili

Sono nella forma:

$$y' = a(x) \cdot b(y) \tag{8}$$

con a, b funzioni *continue*
Risoluzione:

1. Determinare l'integrale generale dell'equazione $y' = a(x)b(y(x))$
   (a) **Ricerca delle soluzioni costanti:** costanti che annullano $b(y)$
   sufficiente porre $b(y) \equiv 0$
   (b) **Tutte le altre soluzioni:**
   - Si scrive y' in notazione di Eulero:
   $$y' = \frac{dy}{dx} \tag{9}$$
   - Si trattano dy e dx come se fossero numeri o funzioni (come se obbedissero alle tipiche regole algebriche) e si portano tutte le y al primo membro e tutte le x al secondo.
   $$\frac{dy}{b(y)} = a(x) \cdot dx$$
   - Si integrano entrambi i membri:
   $$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\, dx \tag{10}$$

   Si ottiene l'integrale generale dell'equazione integrale (che dipende da una costante c) nella forma
   $$y(x) = f(x)$$
2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy
   $$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{11}$$

   Per poter trovare il valore della costante c, si pone l'integrale generale in funzione di x_0 e lo si pone uguale a y_0.

1.1.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sono nella forma:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \tag{12}$$

dove

- $f(x)$ è il termine noto
- $a(x)$ è il coefficiente

con a, f funzioni continue assegnate

Se $f(x) \not\equiv 0$ si chiama "equazione completa" (EC)
Se $f(x) \equiv 0$ si chiama "equazione omogenea associata" (EO)

Teorema 1 (Formula risolutiva per eq. lineari del primo ordine) *l'integrale generale di* (12) *è dato dalla famiglia di funzioni*

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \cdot B(x) \tag{13}$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$, dove

$$A(x) = \int a(x)\, dx \tag{14}$$

$$B(x) = \int e^{A(x)} f(x)\, dx \tag{15}$$

Risoluzione:

1. Determinare l'integrale generale dell'equazione
   (a) Si calcola la primitiva $A(x)$
   (b) Si applica la formula
   $$y(x) = \left(\int f(x) e^{A(x)}\, dx \ + c \right) e^{-A(x)} \tag{16}$$
2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy
   $$\begin{cases} y' + a(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{17}$$

1.1.3 Equazioni di Bernoulli

Sono nella forma:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, & \alpha \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0, & y_0 > 0 \end{cases} \tag{18}$$

Risoluzione:

1. Si divide per y^α
   $$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$
2. Si pone $z(x) := y^{1-\alpha}$
   $$\begin{cases} z'(x) + (1-\alpha)a(x)z(x) = (1-\alpha)b(x) \\ x(x_0) = y_0^{1-\alpha} \end{cases}$$

1.2 Equazioni differenziali lineari del II ordine

Sono nella forma:

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x) \tag{19}$$

con a, b, c, f funzioni definite e continue in I ed $a \neq 0$.
Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine sono infinite e dipendono da due parametri arbitrari.

Teorema 2 (Principio di Sovrapposizione)
Se y_1 è soluzione di $ay'' + by' + cy = f_1$ e y_2 è soluzione di $ay'' + by' + cy = f_2$, allora

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 + y_2 \tag{20}$$

è soluzione di $ay'' + by' + cy = C_1 f_1 + C_2 f_2$.

1.2.1 Integrale generale delle equazioni lineari del II ordine

Teorema 3 (Struttura per le equazioni Omogenee)
L'integrale generale di $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$, con a, b, c funzioni definite e continue in I ed $a \neq 0$, è dato da tutte le combinazioni lineari

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{21}$$

dove y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione.

Teorema 4 (Struttura per le equazioni Complete)
L'integrale generale di $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$, con a, b, c, f funzioni definite e continue in I ed $a \neq 0$, è dato da tutte e solo le funzioni

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_P(x) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{22}$$

dove y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione e y_P è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Per la ricerca dell'integrale generale si considera il *polinomio caratteristico associato*

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \tag{23}$$

e l'*equazione caratteristica associata*

$$P(\lambda) = 0 \tag{24}$$

Risoluzione:

1. Trovare il polinomio caratteristico
2. Studiare il segno del discriminante dell'equazione caratteristica
3. Trovare λ_1 e λ_2 e quindi y_1 e y_2
4. Tramite il Teorema di Struttura (3) trovare l'integrale generale.

Il carattere di $P(\lambda)$ è dato dal segno del discriminante:

- Se $\Delta > 0$
  si hanno due soluzioni reali distinte:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \lambda_1 &= \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

  da cui

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 t} \\ y_1(x) &= e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{25}$$

  La soluzione sarà

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}} \tag{26}$$

- Se $\Delta < 0$
  si hanno due soluzioni complesse coniugate

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\beta \\ \lambda_1 &= \alpha - i\beta \end{aligned}$$

  dove

$$\alpha = -\tfrac{b}{2a} \quad \beta = \tfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

  Per avere soluzioni reali, si sfrutta la linearità, ottenendo

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ u_1(t) &= e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{aligned} \tag{27}$$

  La soluzione sarà

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}} \tag{28}$$

- Se $\Delta = 0$
  si hanno due soluzioni reali coincidenti

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$$

  Per avere due soluzioni linearmente indipendenti si pone

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 t} \\ y_1(x) &= te^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{29}$$

  La soluzione sarà

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}} \tag{30}$$

Secondo il teorema di struttra occorre trovare una soluzione particolare dell'equazione completa.
Si usa il metodo di *Somiglianza*:
Sia

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

con a, $b \in \mathbb{R}$ e $f \in C(I)$.
Se f è

- polinomio (di grado n): si cerca una soluzione y polinomio.

$$\begin{cases} P_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ non è soluzione di } P(\lambda) & b \neq 0 \\ xP_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molt. } 1 & b = 0, a \neq 0 \\ x^2 P_n(x) & \text{se } \lambda = 0 \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molt. } 2 & b = 0, a = 0 \end{cases} \tag{31}$$

- esponenziale ($f = Ce^{kx}$): si cerca una soluzione y esponenziale.

$$\begin{cases} Ae^{kx} & \text{se } k \text{ non è soluzione di } P(\lambda) \\ xAe^{kx} & \text{se } k \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molteplicità } 1 \\ x^2 Ae^{kx} & \text{se } k \text{ è soluzione di } P(\lambda) \text{ con molteplicità } 2 \end{cases} \tag{32}$$

- trigonometrica ($f = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$): si cerca una soluzione y trigonometrica.

$$\begin{cases} c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ non è soluzione di } P(\lambda) \\ x \cdot c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + x \cdot c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) & \text{se } \lambda = i\beta \text{ è soluzione di } P(\lambda) \end{cases} \tag{33}$$

1.3 Metodo di variazione delle costanti arbitrarie

$$\underbrace{y' + a(x)y}_{(EO)} = f(x)$$

1. Si integra (EO):
$$y(x) = Ce^{-A(x)} \quad C \in \mathbb{R}$$

2. Serve una soluzione particolare:
$$y(x) = c(x)e^{-A(x)}$$
$$y'(x) = c'(x)e^{-A(x)} - c(x)e^{-A(x)}(a(x))$$
sostituendo in $y' + a(x)y = f(x)$:
$$c'(x)e^{-A(x)} - c(x)e^{-A(x)}(a(x)) + c(x)e^{-A(x)} = f(x)$$
semplificando risulta:
$$c'(x) = e^{A(x)}f(x)$$

1.4 Equazioni differenziali lineari di ordine n

Sono nella forma:

$$(\mathrm{EC}_n) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{34}$$

Teorema 5 (Esistenza e unicità Globale per i problemi di Caucy associati)
Se a_j, $j \in [1, n-1]$ sono continui in $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, e f è continua in $[a,b]$, allora $\forall x_0 \in [a,b]$ e $\forall (y_{0,0}, y_{0,1}, \ldots, y_{0,n-1}) \in \mathbb{R}^n$ $\exists!$ la soluzione di

$$\begin{cases} (EC_n) \\ y(x_0) = y_{0,0} \\ y'(x_0) = y_{0,1} \\ y''(x_0) = y_{0,2} \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1} \end{cases} \tag{35}$$

e tale soluzione è definita su tutto $[a,b]$

Teorema 6 (Struttura)
L'integrale generale di (EC_n) è dato dal seguente insieme:

$$\Sigma = \{y = \overline{y} + y_0, \;\; dove \; y_0 \; risolve \; (EO_n)\} \tag{36}$$

essendo $\overline{y}$ una soluzione di (EC_n)

1.5 Sistemi di equazioni differenziali lineari

Un'equazione differenziale di ordine n t.c.

$$y^{(n)} = f(t, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

ed il problema di Cauchy corrispondente, può essere riscritta nella forma di sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = y_4(t) \\ \;\vdots \\ y_n'(t) = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_{(n-1)}) \end{cases} \tag{37}$$

Oss: *Mentre ogni eq. può essere convertita, non tutti i sistemi possono essere scritti in forma di equazione.*
<u>Esempio:</u>
Posta

$$y'' + ay' + y = 0$$

si pone $z = y'$:

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = -az(t) - cy \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -a \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

<u>**Risoluzione:**</u>
Dato un sistema:

$$\begin{cases} y' = ay + bz \\ z' = cy + dz \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

1. Ricerca degli autovalori λ di A:

   $$|A - \lambda I| = 0 \tag{39}$$

   $$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

   Si ottiene $P(\lambda)$

2. Per ogni autovalore λ si cerca l'autovettore $\vec{\omega}$ corrispondente:

$$[A - \lambda I] \cdot \vec{\omega} = \underline{0} \tag{40}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -a-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Le soluzioni esponenziali di (EO) sono del tipo:

$$\vec{u} = \vec{\omega} e^{\lambda t} \tag{41}$$

4. L'integrale generale è dato da

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = C_1 \vec{u_1} + C_2 \vec{u_2} \tag{42}$$

1.5.1 Determinante Wronskiano

Def. 6
Siano $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soluzioni di (SO).
Si definisce la MATRICE WRONSKIANA *associata come*

$$W(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \end{bmatrix} \tag{43}$$

di dimensioni $n \times n$.
Il determinante di $W(x)$ è detto DETEMINANTE WRONSKIANO *associato.*

$|W(x)|$ dice se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sono linearmente indipendenti, e basta controllarlo in un punto solo (o è sempre nullo, o non è mai nullo).

- $|W(x)| = 0$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ linearmente indipendenti
- $|W(x)| \neq 0$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ linearmente dipendenti

1.5.2 Sistemi non omogenei

2 Serie di funzioni

Def. 7
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f_n : I \to R$.
Si definisce

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \tag{44}$$

come la successione delle ridotte $S_N : I \to \mathbb{R}$ con

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n \tag{45}$$

Def. 8 (Convergenza puntuale)
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f_n : I \to \mathbb{R}$. Si dice che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ se

$$\sum f_n(\overline{x})$$

converge.

Oss: $\sum f_n(\overline{x})$ *è una serie numerica.*

Def. 9 (Convergenza assoluta)
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ *e siano* $f_n : I \to \mathbb{R}$. *Si dice che* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge* ASSOLUTAMENTE *su* I *se,* $\forall x \in I$ *la serie numerica* $\overline{x} \in \mathbb{R}$ *se*

$$\sum |f_n(\overline{x})|$$

converge.

Def. 10 (Convergenza totale)
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ *e siano* $f_n : I \to \mathbb{R}$. *Si dice che* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge* TOTALMENTE *nell'intervallo* I *se,* $\forall n = 1, 2, \ldots \exists\, k_n > 0$ *t.c.*

i)
$$|f_n(x)| \leq k_n \qquad \forall\, x \in I$$

ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \qquad \textit{converge}$$

Per poter verificare la convergenza totale di una serie di funzioni basta verificare che

$$\sum \sup_{x \in I} \qquad \text{converge}$$

2.1 Serie di potenze

Sono nella forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega^n \tag{46}$$

Def. 11 (Raggio di convergenza)
$R \in [0, +\infty]$ *t.c. la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega^n$ *converge per* $|\omega| > R$ *e diverge per* $|\omega| < R$ *è detto* RAGGIO DI CONVERGENZA.

2.2 Serie di Fourier

Sia f una funzione $2T$-periodica ($f(x) = f(x + 2T)\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ T > 0$), e $|f|$ è integrabile. Allora

$$f \sim S_{[f]}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{47}$$

<u>**Risoluzione:**</u>

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(x)\, dx \tag{48}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(x) \cos(nx)\, dx \tag{49}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(x) \sin(nx)\, dx \tag{50}$$

Teorema 7 (Criterio di Dirichlet)
Se a_n *e* b_n *monotone decrescenti, allora* $S_{[f]}(x)$ *converge puntualmente in tutti i punti di* $[0, 2\pi]$*, eccetto al più* $x = 2K\pi$*.*

Def. 12 (Funzione Regolare a tratti)
$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *è detta* REGOLARE A TRATTI *se*

i) f *è limitata su* $[0, 2\pi]$*.*

ii) si può dividere $[0, 2\pi]$ *in un numero* finito *di sottointevalli su cui ciascuno dei quali* f *è continua e derivabile, inoltre nei limiti di tali intervalli esistono finiti i limiti di* $f(x)$ *e* $f'(x)$*.*

Teorema 8 (Convergenza puntuale di serie di Fourier)
Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *regolare a tratti. Allora la sua serie di Fourier converge puntualmente in ogni punto* $x_0 \in [0, 2\pi]$ *alla* MEDIA DEI LIMITI DESTRO E SINISTRO *di* f *in* x_0*, cioè* $\forall\, x_0 \in [0, 2\pi]$ *si ha*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} \tag{51}$$

dove $f(x_0^{\pm}) = lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$*.*

3 Curve Parametriche

Def. 13 (Curva parametrica)
Si chiama CURVA PARAMETRICA *in* $\mathbb{R}^n$ *una funzione continua*

$$\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \tag{52}$$

dove φ *è data da* $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$*, che è equivalente a*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases}$$

$\varphi(I)$ (l'immagine) è detta *SOSTEGNO DELLA CURVA* φ.

Def. 14 (Curve semplici)
Una curva parametrica $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *è detta* SEMPLICE *se* $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ *è iniettiva.*

Def. 15 (Curve regolari)
Una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *è detta* REGOLARE *se* $\varphi \in C^1((a, b))$ *e* $\varphi'(x) \neq \underline{0}\ \forall\, t \in (a, b)$*.*

Def. 16 (Curve regolari a tratti)
Una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *è detta* REGOLARE A TRATTI *esiste una suddivisione in un numero finitop di sottointervalli* $[t_k, t_{k+1}]$ *di* $[a, b]$ *in modo che* $\varphi\big|_{[t_k, t_{k+1}]}$ *sia regolare* $\forall\, k$*.*

3.1 Lunghezza di una curva

la lunghezza di una curva si calcola con

$$L(\varphi) = \int_a^b ||\varphi'(t)||\, dt \tag{53}$$

Dove $\varphi'(t)$ è detto *VETTORE TANGENTE* alla curva φ nell'istante t e la sua norma $||\varphi'(t)||$ è detta *VELOCITA' SCALARE* di φ.

3.2 Curve equivalenti (Riparametrizzazioni)

Def. 17 (Curve equivalenti)
Due curve $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ sono dette equivalenti ($\varphi \sim \psi$) se esiste una funzione $\eta : [a,b] \to [c,d]$, di classe C^1 e invertibile (t.c. $\eta'(t) \neq 0 \, \forall t \in [a,b]$), detta "CAMBIO DI PARAMETRO" *t.c.*

$$\varphi(t) = \psi(\eta(t)) \qquad \forall\, t \in [a,b] \tag{54}$$

Def. 18
φ è detta RIPARAMETRIZZAZIONE *di ψ.*

3.3 Integrali curvilinei

Def. 19 (Integrale curvilineo)
Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ parametrizzazione di una curva regolare γ con sostegno Γ.
Sia data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Gamma \subseteq A$.
Si dice INTEGRALE CURVILINEO *di prima specie di f lungo Γ l'espressione*

$$\int_\gamma f\, dl = \int_a^b f(\varphi(t))\, ||\varphi'(t)||\, dt \tag{55}$$

3.3.1 Baricentro

$$G = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$$

Si calcola con

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\int_\gamma f\, dl} \int_\gamma x_1\, f\, dl \\ x_2 = \frac{1}{\int_\gamma f\, dl} \int_\gamma x_2\, f\, dl \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{\int_\gamma f\, dl} \int_\gamma x_n\, f\, dl \end{cases} \tag{56}$$

che è la media pesata.
In $\mathbb{R}^2$ è $G = (x_G,\, y_G)$.

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{\int_\gamma f\, dl} \int_\gamma x\, f\, dl \\ y_G = \frac{1}{\int_\gamma f\, dl} \int_\gamma y\, f\, dl \end{cases}$$

4 Funzioni in più variabili

$$f : \underset{(x_1,\ldots,x_n)}{A \subseteq \mathbb{R}^n} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f(x_1,\ldots,x_n)}{\mathbb{R}} \tag{57}$$

Def. 20 (Funzione scalare)
Viene detta FUNZIONE SCALARE (VETTORIALE) *di più variabili una funzione*

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \ (n > 1) \tag{58}$$

4.1 Limiti

Risoluzione:

1. **Trovare un candidato limite**
   Segliere restrizioni facili per determinare il candidato
   Esempio: $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)}$ posso usare gli assi come restrizione:

   $$\lim_{x\rightarrow 0} f(x,0) = l$$

   $$\lim_{y\rightarrow 0} f(0,y) = l$$

   e l sarà il candidato.

2. **Verificare che il limite sia uguale al candidato su altre restrizioni**
   $lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)}$, si usano restrizioni del tipo

   $$y - y_0 = m(x - x_0)^\alpha \qquad \alpha > 0$$

   che sono rette, parabole ecc.
   Esempio: restrizione con parabola:

   $$\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x, mx^2)$$

3. **Esistenza del limite**
   Ci sono due modi:

   - Maggiorazioni

     $$|f(x,y) - l| \leq \varepsilon, \qquad \varepsilon \rightarrow 0$$

   - Coordinate polari

     $$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

     Teorema 9
     Esiste $\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ *se e solo se esistono* $r > 0$ *e* $g : (0,r) \rightarrow \mathbb{R}$ *tali che*

     i)

     $$|f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) - l| \leq g(\rho)$$

     per ogni $\rho \in (0,r)$ *ed ogni* $\theta \in [0, 2\pi)$

     ii)

     $$\lim_{\rho\rightarrow 0^+} g(\rho) = 0$$

4.2 Derivate parziali e gradiente

In $\mathbb{R}^2$:

Def. 21 (Derivate parziali)
Sia $f : \underset{aperto}{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, con* $(x_0, y_0) \in A$*, si dicono* DERIVATE PARZIALI *di* f *in* (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad o \quad f_x(x_0, y_0) \tag{59}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad o \quad f_y(x_0, y_0) \tag{60}$$

Risoluzione:
Si calcolano come derivate dell'Analisi 1: nel caso di $\frac{\partial f}{\partial x}$ si calcola la derivata rispetto a x, trattando y come se fosse un parametro.

Esempio:
$f(x, y) = x^2y + \sin(x^3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3x^2 \sin(x^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

4.2.1 Gradiente

Def. 22 (Gradiente)
Si dice GRADIENTE *di* f *in* (x_0, y_0) *il vettore*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \tag{61}$$

Risoluzione:
Si devono calcolare le singole derivate parziali

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

4.2.2 Derivate direzionali e formula del gradiente

Sia $\vec{v}$ un vettore t.c $||\vec{v}|| = 1$.
Una derivata direzionale lungo una direzione $\vec{v}$ in un punto (x_0, y_0) è

$$\partial_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + \vec{v}_x t,\ y_0 + \vec{v}_y t) - f(x_0, y_0)}{t} \tag{62}$$

Se f è differenziabile in (x_0, y_0), vale la *FORMULA DEL GRADIENTE*

$$\partial_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = < \nabla f(x_0, y_0),\ \vec{v} > \tag{63}$$

4.2.3 Differenziabilità

Una funzione $f : \underset{\text{aperto}}{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è *DIFFERENZIABILE* in $(x_0, y_0) \in A$ se e solo se

1. Esistono le derivate parziali in (x_0, y_0) (esiste $\nabla f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$)
2. $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,\ y_0+k) - f(x_0,\ y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

4.3 Ottimizzazione

Ricerca di punti di massimo e di minimo realtivi e assoluti

<u>**Risoluzione:**</u>

1. Ricerca dei punti critici

$$\nabla f(x,\ y) = (0, 0)$$
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

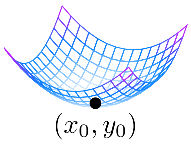
2. Scrittura della martice Hessiana:

$$H_f(x,\ y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\ y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\ y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\ y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\ y) \end{bmatrix} \tag{64}$$

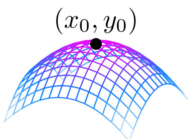
3. Classificazione dei punti critici:

Teorema 10 (Criterio dell'Hessiana)
Sia $f : \underset{aperto}{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$ e sia $(x_0,\ y_0) \in A$ punrio critico per f.
Allora

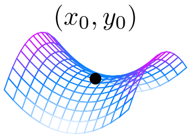
i) Se tutti gli autovalori di $H_f(x_0,\ y_0)$ sono > 0, $(x_0,\ y_0)$ è punto di MINIMO RELATIVO



ii) Se tutti gli autovalori di $H_f(x_0,\ y_0)$ sono < 0, $(x_0,\ y_0)$ è punto di MASSIMO RELATIVO



iii) Se $\exists \lambda_1,\ \lambda_2$ autovalori di $H_f(x_0,\ y_0)$ discordi, $(x_0,\ y_0)$ è punto di SELLA



iv) In tutti gli altri casi serve un'analisi ulteriore.

In $\mathbb{R}^2$, dato che serve conoscere solo il segno degli autovalori, basta studiare il segno del determinante dell'Hessiana:

- Se $det(H_f(x_0,\, y_0)) < 0$, gli autovalori sono discordi e $(x_0,\; y_0)$ è un punto di sella
- Se $det(H_f(x_0,\, y_0)) > 0$, gli autovalori sono concordi ed il segno è determinato dal primo elemento della matrice (metodo dei minimi da nord-ovest):
  - se $f_{xx}(x_0,\; y_0) < 0$, $(x_0,\; y_0)$ è un punto di massimo relativo
  - se $f_{xx}(x_0,\; y_0) > 0$, $(x_0,\; y_0)$ è un punto di minimo relativo

nel caso di uno o più autovalori nulli (punto *iv* del Criterio dell'Hessiana (10))

4. Ricerca dei punti di massimo e minimo assoluti:
è necessario studiare il segno di

$$\Delta f(x,\, y) = f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0) \tag{65}$$

- Se $\Delta f \leq 0$, $\forall\,(x,\, y) \in D$, $(x_0,\; y_0)$ è punto di massimo assoluto o globale
- Se $\Delta f \geq 0$, $\forall\,(x,\, y) \in D$, $(x_0,\; y_0)$ è punto di minimo assoluto o globale