

Algoritmi Avanzati  
**Esame scritto**

Roberto Battiti

Paolo Campigotto

18 febbraio 2011

**Istruzioni e regole:**

Si usino unicamente una penna ed i fogli protocollo forniti dai docenti.

Si scriva subito il proprio nome su ciascun foglio e lo si firmi.

Segnare con chiarezza a quale quesito si sta rispondendo. Si scriva con chiarezza la propria risposta e si dimostri-  
no i propri risultati. **(I risultati senza dimostrazione o spiegazione non verranno presi in considerazione).**

Un atteggiamento disonesto (come copiare) porterà all'espulsione immediata dall'aula.

*Buon lavoro!*

**Esercizio 1**

Considerare un sistema di ipertesti il cui grafo è rappresentato dalla seguente matrice di adiacenza:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**1.1)** Definire e motivare l'algoritmo di PageRank per il calcolo del "prestigio" dei vari ipertesti.

**1.2)** Calcolare analiticamente i valori esatti di PageRank per i quattro nodi, normalizzando il vettore di PageRank in modo che abbia norma unitaria.

**1.3)** A partire dalla matrice  $G$ , derivare la matrice  $A$  per l'applicazione dell'algoritmo di PageRank. Iniziando con l'utente Web al nodo 1 con probabilità 1, mostrare i primi due passi del metodo delle potenze per calcolare i valori di PageRank dei quattro nodi.

**Esercizio 2**

**2.1)** Si dia la definizione di problema di ottimizzazione combinatoria.

**2.2)** Si mostri che il problema SAT è un problema di ottimizzazione combinatoria (ossia soddisfa la definizione data al punto 2.1).

**2.3)** Si spieghi in generale le motivazioni ed il funzionamento della ricerca locale dinamica ("dynamic local search").

**2.4)** Si scriva lo pseudo-codice (motivandone la logica) per un algoritmo basato su ricerca locale dinamica per il problema SAT rappresentato in forma normale congiuntiva (CNF).

### Esercizio 3

**3.1)** Definire la formulazione di un problema di programmazione lineare.

**3.2)** Utilizzando il metodo grafico, si discuta la soluzione del seguente programma lineare al variare del parametro  $C \geq 0$  (mostrare i vincoli, il semplice, il gradiente e la soluzione ottima, qualora esista):

$$\text{maximize} \quad 4x_1 + 2x_2 \quad (1)$$

subject to

$$-x_1 + 5x_2 \geq 5 \quad (2)$$

$$-2x_1 + x_2 \leq -4 \quad (3)$$

$$2x_1 + x_2 \geq C \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (5)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (6)$$

**3.3)** Per migliorare il servizio di smaltimento dei rifiuti, si decide l'apertura di nuove discariche per servire sei comunità, nel seguito indicate mediante le lettere  $c_i, i = 1 \dots 6$ . Un comitato misto di cittadini e rappresentanti delle istituzioni individua tre zone candidate all'apertura di una nuova discarica:  $d_1, d_2$  e  $d_3$ . Le comunità  $c_1, c_2$  e  $c_3$  distano 9 Km da  $d_1$ , 4 km da  $d_2$  e 5 km da  $d_3$ . Le comunità  $c_4$  e  $c_5$  distano 3 km da  $d_1$ , 5 km da  $d_2$  e 15 km da  $d_3$ . La comunità  $c_6$ , infine, dista 3 km da  $d_1$  e 20 km da  $d_2$  e  $d_3$ . Per ridurre i costi di raccolta dei rifiuti, si vuole che ogni comunità disti non più di 6 km da almeno una delle discariche aperte.

L'apertura di una discarica in  $d_1$  costa 5 milioni di Euro, in  $d_2$  costa 7 milioni di Euro ed in  $d_3$  costa 6 milioni di Euro. Per il potenziamento del sistema di smaltimento dei rifiuti, è stato messo a disposizione un budget di 11 milioni Euro. Formulare in termini di programmazione matematica il problema di stabilire in quali delle tre zone candidate aprire una discarica, in modo da garantire la qualità del servizio (cioè distanza non superiore a 6 km per ogni comunità), da non superare il budget e da minimizzare il numero di discariche aperte.

### Esercizio 4

**4.1)** Definire l'algoritmo di Rabin-Karp per il riconoscimento di stringhe, scrivendone lo pseudo-codice e spiegandone la logica.

**4.2)** Fornire un'analisi della complessità dell'algoritmo di Rabin-Karp nel caso peggiore.

**4.3)** Supponendo di avere un alfabeto di cinque caratteri  $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$ , mostrare un esempio del caso peggiore per il tempo di esecuzione dell'algoritmo.

**4.4)** Supponendo di avere un alfabeto di cardinalità 10 e di cercare un pattern di tre caratteri, esistono dei valori per il modulo  $q$  usato dall'algoritmo di Rabin-Karp tali per cui il tempo di esecuzione diventa  $O(n)$ , dove  $n$  è la lunghezza del testo in input? In caso di risposta affermativa, indicare i valori di  $q$  individuati.

### Esercizio 5

**5.1)** Definire il metodo di approssimazione ai minimi quadrati.

**5.2)** Spiegare e motivare la definizione data.

**5.3)** Siano A (1,1,4) e B (3,2,8) due punti di coordinate (x,y,z) in  $\mathbb{R}^3$ . Si vuole trovare una dipendenza funzionale della forma  $z = F(x, y) = a + de^{x+y} + ce^{-2x+y}$  dove  $a, b, c$  sono i coefficienti da determinare in base al criterio dei minimi quadrati. Rispondere alle seguenti domande:

- scrivere le funzioni base;
- formulare la risoluzione del problema come sistema di equazioni lineari;
- scrivere una qualsiasi funzione  $G(x, y)$  che sia una combinazione non-lineare delle funzioni di base individuate.