



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria
e Scienza dell'Informazione

Teoria dei Segnali

Parte Seconda: Fondamenti di
elaborazione dei segnali

Lezione 1: Rappresentazione in
frequenza di segnali deterministici
periodici: la serie di Fourier

Docente: Prof. Claudio Sacchi



Contenuti

- Analisi armonica di segnali periodici: la serie di Fourier;
- Il criterio di Dirichelet;
- Spettri in ampiezza e fase;
- Esempi di calcolo di spettri;
- Il fenomeno di Gibbs;
- L'identità di Bessel-Parseval.

Analisi armonica di segnali periodici: la serie di Fourier

■ Premessa

- Nella lezione 1 della parte prima del corso abbiamo definito un generico segnale periodico non sinusoidale;
- Esso è, in pratica, la ripetizione con un certo periodo, di una forma d'onda nota a durata finita;
- Come si può analizzare un segnale di questo genere? L'idea venne al matematico e fisico francese Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), che nel 1807 formalizzò la scomposizione di un segnale periodico in una serie infinita di seni e coseni.

Serie di Fourier

■ Definizione

- Dato un generico segnale periodico di periodo T_0 , esso può essere sviluppato mediante la seguente serie (detta serie di Fourier):

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0} + \theta_k\right)$$

- Si noti che le oscillazioni della serie hanno frequenza multipla intera della frequenza $1/T_0$, detta frequenza fondamentale;
- Il termine k -esimo della serie è detto armonica di ordine k , mentre il primo termine della serie ($k=1$) è detto armonica fondamentale. Il termine non oscillante a_0 è detto componente continua.

Serie di Fourier

■ Sviluppo in forma complessa (1)

- Per effettuare i calcoli, è molto più semplice esprimere la serie di Fourier in maniera complessa, partendo dall'espressione di Eulero del coseno:

$$\cos(2\pi k f_0 t + \theta_k) = \frac{e^{j(2\pi k f_0 t + \theta_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \theta_k)}}{2} \quad f_0 = 1/T_0$$

- La serie di Fourier della slide precedente viene, pertanto così riscritta:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2} e^{j\theta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2} e^{-j\theta_k} e^{-j2\pi k f_0 t}$$

Serie di Fourier

■ Sviluppo in forma complessa (2)

- E' anche possibile esprimere questa formula in modo assai più compatto:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Ove:

$$X_k \triangleq \frac{a_k}{2} e^{j\theta_k} \quad k = 1, 2, \dots \quad X_k \triangleq \frac{a_{-k}}{2} e^{j\theta_{-k}} \quad k = \dots, -2, -1$$

$$X_0 \triangleq a_0$$

Serie di Fourier

■ Coefficienti della serie di Fourier

- Il coefficiente X_n (n generico) della serie di Fourier complessa si ricava nella seguente maniera (si dimostra ripetendo la stessa operazione sulla serie):

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-2\pi j n f_0 t} dt$$

- Si nota facilmente che per $n=0$, il coefficiente X_0 è il valor medio della forma d'onda nel periodo.

Serie di Fourier

■ Relazioni di Fourier: analisi e sintesi

- La serie di Fourier, quindi, si esprime in due relazioni:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-2\pi j k f_0 t} dt$$

- La seconda relazione (quella dei coefficienti) consente di analizzare un segnale periodico sulla base del cosiddetto “contenuto armonico”: il coefficiente X_k tiene conto del peso dell'armonica di ordine k nel segnale $x(t)$;
- La prima relazione (quella a sinistra) permette, invece, di sintetizzare il segnale $x(t)$ sulla base del suo contenuto armonico, e, noti i coefficienti X_k , consente di ricostruire $x(t)$.

Criterio di Dirichelet

■ Quando converge la serie di Fourier?

- Essendo una serie di funzioni, dobbiamo preoccuparci di quando la serie di Fourier converge almeno in maniera puntuale al segnale $x(t)$;
- Solo in quel caso, essa potrà descrivere il segnale periodico nei termini delle sue componenti armoniche;
- Un insieme di condizioni sufficienti che garantiscono la possibilità di sviluppare un segnale in serie di Fourier è il cosiddetto criterio di Dirichelet.

Criterio di Dirichelet

■ Enunciazione del criterio

□ Se:

- $x(t)$ è assolutamente integrabile nel periodo;
- $x(t)$ è continua nel periodo o presenta in un periodo un numero finito di discontinuità di prima specie;
- $x(t)$ è derivabile rispetto al tempo nel periodo, al più escluso un numero finito di punti nei quali esiste derivata destra e sinistra;

□ Allora:

- la serie di Fourier converge al valore assunto da $x(t)$ nei punti in cui questa è continua, ed alla semisomma dei limiti destro e sinistro nei punti in cui presenta eventuali discontinuità di prima specie.

Spettri in ampiezza e fase

■ Come si usa la serie di Fourier?

- Sostanzialmente, il segnale periodico può essere rappresentato dalla successione dei coefficienti complessi di Fourier, ovvero:

$$x(t) \Leftrightarrow \{X_k \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$$

- Infatti, noti tali coefficienti, è possibile ricostruire $x(t)$ mediante la relazione di sintesi;
- Quale informazione contengono i coefficienti di Fourier? Sostanzialmente, l'ampiezza e la fase delle diverse armoniche in cui è scomposto il segnale.

Spettri in ampiezza e fase

■ Spettro: definizione

- Si può, quindi, disegnare un grafico (anzi: due grafici) che, per ogni armonica di ordine k , tracci i valori di ampiezza e di fase di quell'armonica, ovvero:

$$|X_k| = \begin{cases} \left| \frac{a_k}{2} \right| & k = 1, 2, \dots \\ \left| \frac{a_{-k}}{2} \right| & k = -1, -2, \dots \\ |a_0| & k = 0 \end{cases} \quad \arg(X_k) = \begin{cases} \theta_k & k = 1, 2, \dots \\ \theta_{-k} & k = \dots, -2, -1, \dots \\ \theta_0 & k = 0 \end{cases}$$

Tali grafici prendono il nome, rispettivamente, di spettro in ampiezza e spettro in fase.

Spettri in ampiezza e fase

■ Spettro: significato fisico

- La parola “spettro”, in questo senso, deve intendersi come “gamma di rappresentazione” o “gamma di visione” e nasce dalla Fisica;
- Infatti, nel campo della spettroscopia, si analizza la composizione dei materiali attraverso le “righe” di emissione luminosa (corrispondenti a colori) caratteristiche dei diversi elementi chimici;
- Nel caso dello spettro dei segnali periodici, noi riferiremo le righe spettrali al valore dell’ampiezza e/o della fase delle armoniche costituenti il segnale sviluppato in serie di Fourier.

Spettri in ampiezza e fase

■ Proprietà degli spettri

- I coefficienti (complessi) di Fourier sono caratterizzati dalla cosiddetta simmetria coniugata o hermitiana, ovvero:

$$X_k = X_{-k}^* \Leftrightarrow \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| \\ \arg(X_k) = -\arg(X_{-k}) \end{cases}$$

- Altra proprietà è relativa alla linearità, dati due segnali periodici $x(t)$ ed $y(t)$ avremo che:

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \Rightarrow Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$$

$z(t)$ è periodico con lo stesso periodo di x e y

Spettri in ampiezza e fase

■ Effetti della simmetria hermitiana (1)

- Se il segnale periodico $x(t)$ è pari ($x(t)=x(-t)$) si verifica che:

$$X_k = X_{-k} \in \mathfrak{R}$$

- Pertanto, la serie di Fourier potrà essere così riscritta:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} = \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \left(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t} \right) = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t) \end{aligned}$$

Diventa una serie di soli coseni ed è a valori reali.

Spettri in ampiezza e fase

■ Effetti della simmetria hermitiana (2)

- Il coefficiente di Fourier per $x(t)$ pari si ottiene in forma semplificata:

$$X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \in \mathfrak{R}$$

- In maniera del tutto analoga si verifica che per una segnale periodico $x(t)$ dispari ($x(-t) = -x(t)$):

$$X_{-k} = -X_k \in \mathfrak{I} \Rightarrow X_0 = 0$$

Spettri in ampiezza e fase

■ Effetti della simmetria hermitiana (3)

- Quindi una funzione $x(t)$ dispari, si potrà esprimere in serie di seni e sarà puramente immaginaria:

$$x(t) = 2j \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \sin(2\pi k f_0 t)$$

- I coefficienti di Fourier, puramente immaginari, si calcolano con la seguente formula semplificata

$$X_k = -\frac{2j}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \in \Im$$

Spettri in ampiezza e fase

■ Effetti della simmetria hermitiana (4)

- Se avessimo un segnale periodico $x(t)$ di tipo alternativo, ovvero:

$$x\left(t + T_0/2\right) = -x(t)$$

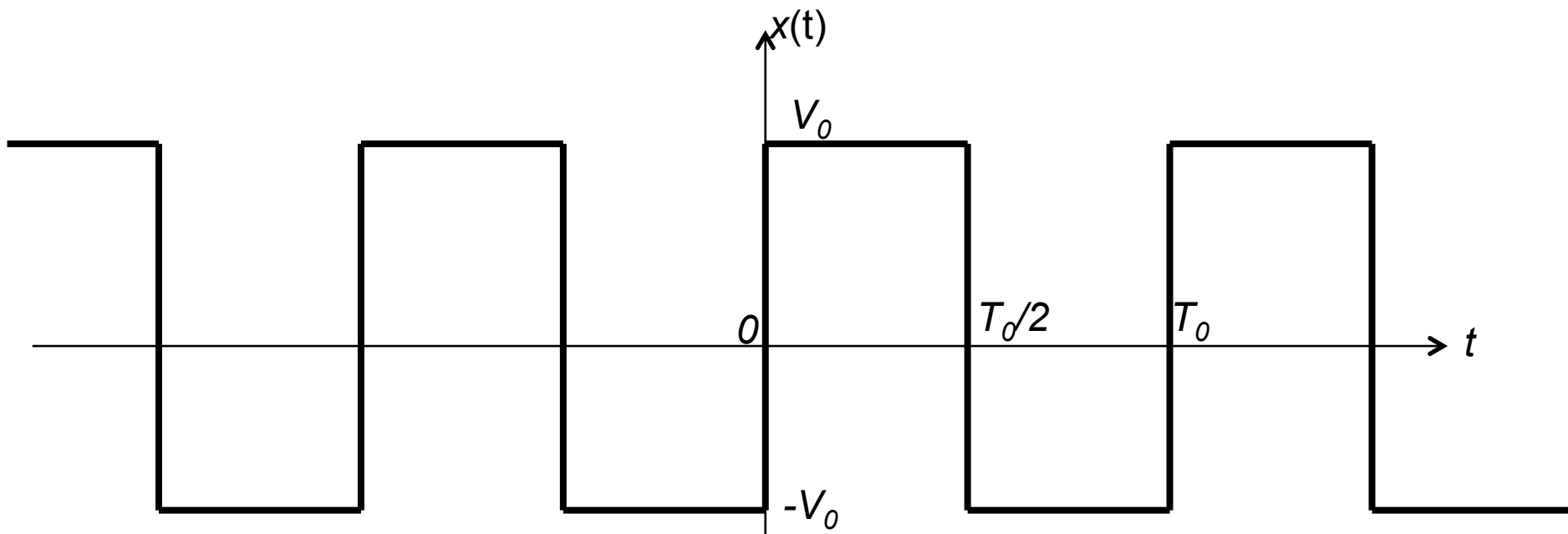
- Allora, il coefficiente della serie di Fourier X_k è nullo per tutti i valori pari dell'indice k (si dimostra facilmente calcolando l'integrale).
- Pertanto, nel caso di segnali alternativi, la serie di Fourier può essere scritta in maniera convenientemente semplificata:

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} X_{2p+1} e^{j2\pi(2p+1)f_0 t}$$

Esempi di calcolo di spettri

■ Onda quadra (1)

- E' un segnale deterministico che vale alternativamente $+V_0$ e $-V_0$, con un periodo pari a T_0 ;



Esempi di calcolo di spettri

■ Onda quadra (2)

- La condizione di Dirichelet è soddisfatta per il nostro segnale, quindi si può sviluppare in serie di Fourier;
- Notiamo, innanzitutto, che è un segnale dispari e quindi i coefficienti di Fourier sono puramente immaginari;
- Ma non solo: essendo anche un segnale alternativo, i coefficienti di Fourier di indice pari sono identicamente nulli;
- Quindi si possono applicare formulazioni semplificate.

Esempi di calcolo di spettri

■ Onda quadra (3)

- Per valori di k dispari, si ottengono i coefficienti di Fourier non nulli e quindi la serie di Fourier:

$$\begin{aligned} X_k &= -\frac{2j}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt = -\frac{2j}{T_0} \int_0^{T_0/2} V_0 \sin(2\pi k f_0 t) dt = \\ &= j \frac{2V_0 \cos(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0 T_0} \Big|_0^{T_0/2} = j \frac{V_0}{\pi k} [\cos(\pi k) - 1] = j \frac{V_0}{\pi k} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -2jV_0/\pi k & k \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2\pi k f_0 t} = \frac{2V_0}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi(2p-1)f_0 t)}{(2p-1)}$$

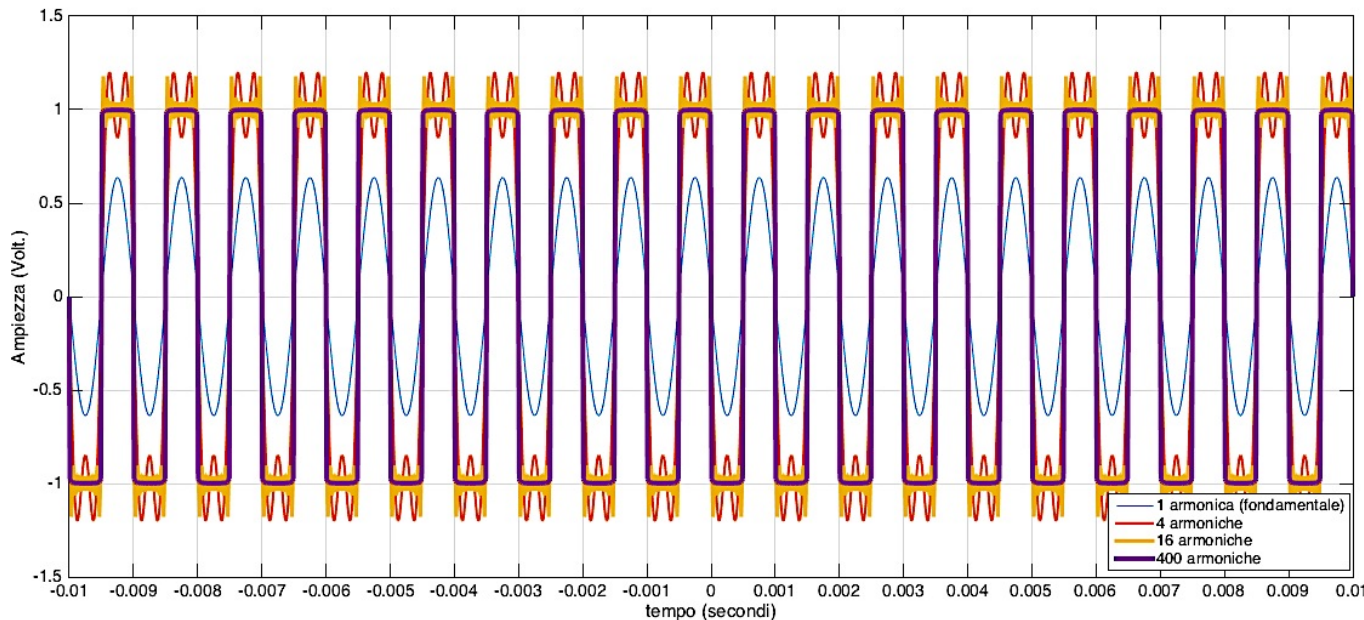
$x(t)$ è espresso in serie di seni, poiché ha simmetria dispari

Esempi di calcolo di spettri



■ Onda quadra: sintesi

- Mostriamo che la serie vista nella slide precedente in qualche modo converge al segnale desiderato (implementazione MATLAB della serie):



Parametri numerici:

- $T_0 = 1 \text{ msec}$
($f_0 = 1 \text{ KHz}$)
- $V_0 = 1 \text{ Volt}$

Esempi di calcolo di spettri

■ Onda quadra: analisi degli spettri in ampiezza e fase

- Innanzitutto dovremo scrivere il modulo e la fase dei coefficienti di Fourier:

$$|X_k| = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ 2V_0/\pi|k| & k \text{ dispari} \end{cases} \quad \arg(X_k) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -\pi/2 & k \text{ dispari, } k \geq 0 \\ +\pi/2 & k \text{ dispari, } k < 0 \end{cases}$$

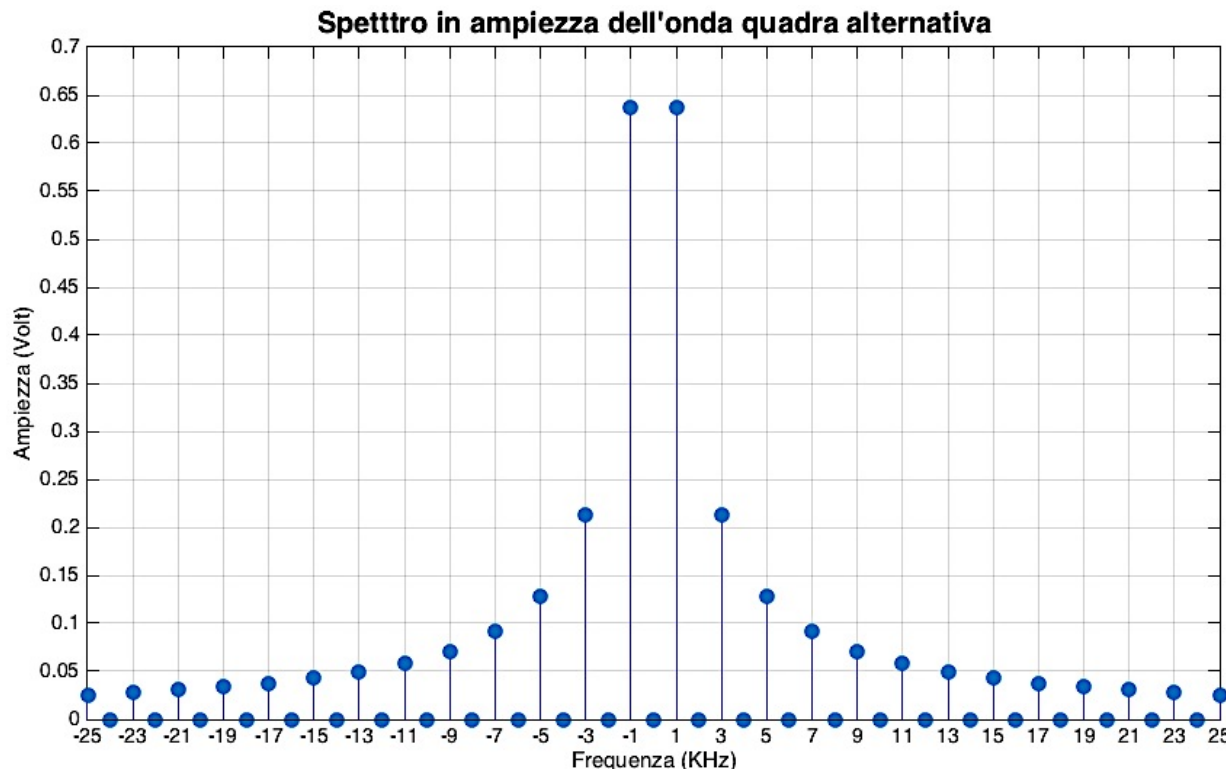
- Si tratta di due successioni reali, che rispettano le proprietà di simmetria hermitiana della serie di Fourier. I relativi grafici degli spettri di ampiezza e fase sono dati nelle due slide seguenti:

Esempi di calcolo di spettri



■ Onda quadra – spettro in ampiezza:

- Il grafico è plottato fino all'armonica di indice 25 (frequenza: 25 KHz):



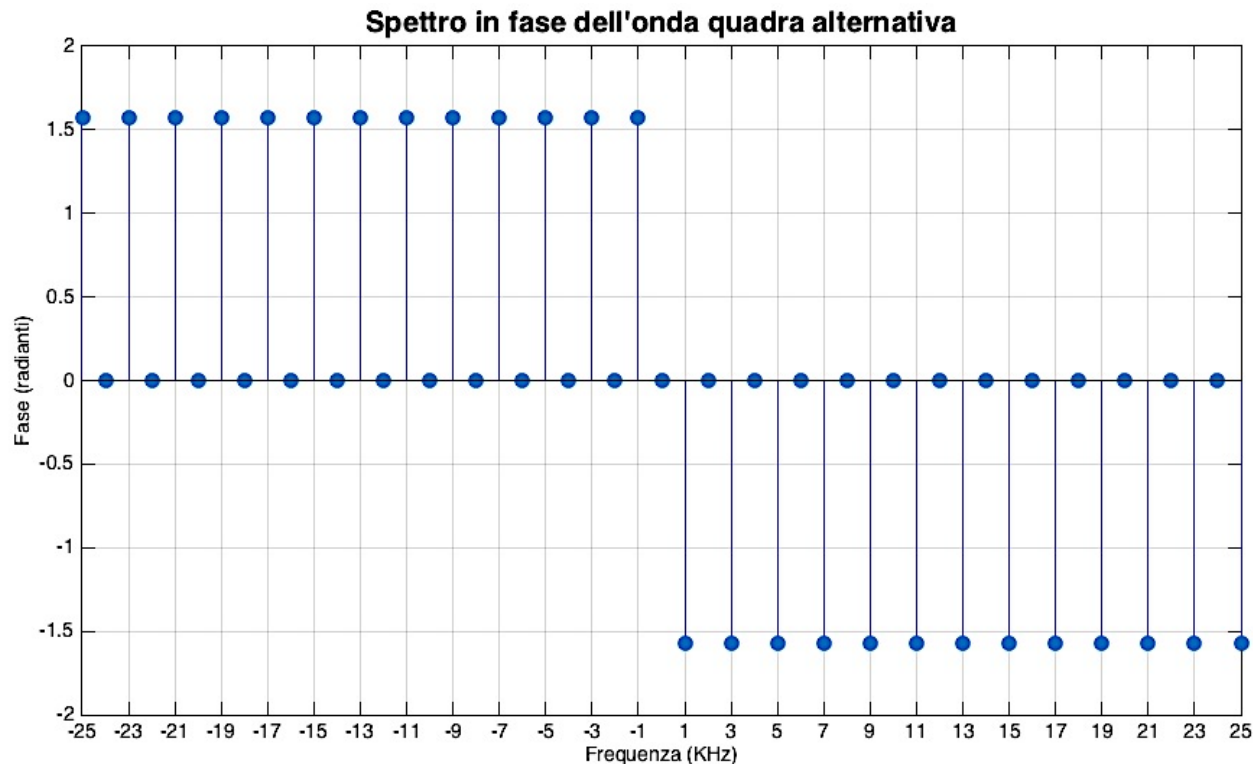
Armonica
fondamentale a
frequenza
 $f_0=1\text{KHz}$

Esempi di calcolo di spettri



■ Onda quadra – spettro in fase:

□ Vedi slide precedente:

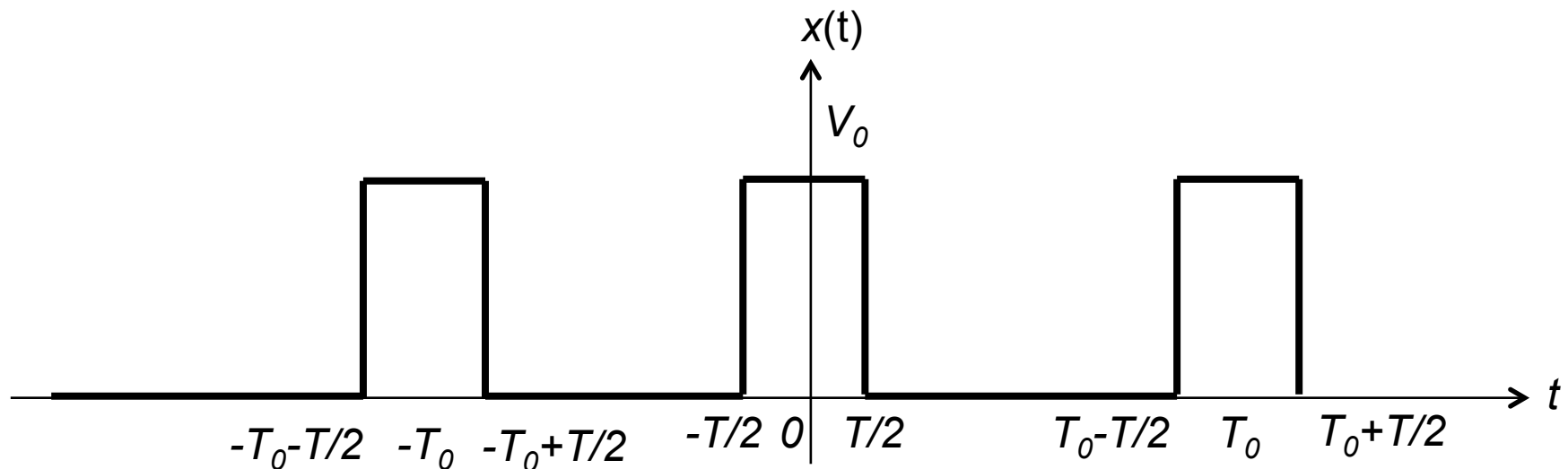


La fase è sempre uguale a $-\pi/2$ per frequenze positive (è, in effetti, la fase del seno)

Esempi di calcolo di spettri

■ Onda quadra con ritorno a zero (1)

- E' un'onda quadra che vale alternativamente V_0 e 0 e la cui durata dell'impulso "alto" è $T < T_0$;



Esempi di calcolo di spettri

■ Onda quadra con ritorno a zero (2)

- Si tratta di una funzione a simmetria pari, pertanto ci aspettiamo che i coefficienti siano reali e che lo sviluppo del segnale sia in serie di coseni:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{-T_0/2} x(t) e^{-2\pi j k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} V_0 e^{-2\pi j k f_0 t} dt = \frac{V_0}{2\pi j f_0 T_0 k} \left[e^{\pi j f_0 k T} - e^{-\pi j f_0 k T} \right] =$$
$$\frac{V_0 T}{\pi f_0 T_0 k T} \frac{\left[e^{\pi j f_0 k T} - e^{-\pi j f_0 k T} \right]}{2j} = \frac{V_0 T}{T_0} \frac{\sin(\pi f_0 k T)}{\pi f_0 k T} = \frac{V_0 T}{T_0} \text{sinc}(k f_0 T)$$

$$x(t) = \frac{V_0 T}{T_0} + 2 \frac{V_0 T}{T_0} \sum_{k=1}^{+\infty} \text{sinc}(k f_0 T) \cos(2\pi k f_0 t)$$

Esempi di calcolo di spettri

■ Onda quadra con ritorno a zero: analisi degli spettri in ampiezza e fase

- Scriviamo il modulo e la fase dei coefficienti di Fourier del segnale visto in precedenza:

$$|X_k| = \frac{V_0 T}{T_0} \left| \text{sinc}(kf_0 T) \right| \quad \arg(X_k) = \begin{cases} -\pi & \text{se } X_k < 0 \quad k < 0 \\ 0 & \text{se } X_k > 0 \\ \pi & \text{se } X_k < 0 \quad k \geq 0 \end{cases}$$

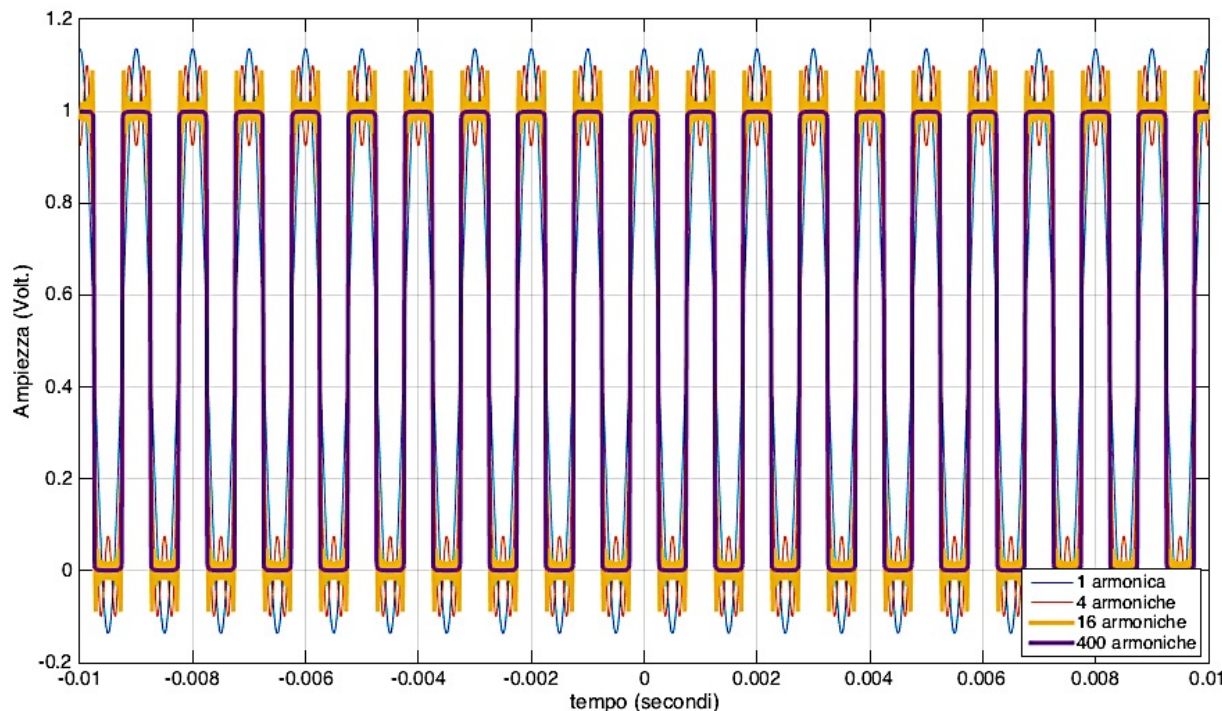
- L'espressione della fase scritta sopra garantisce la simmetria hermitiana dei coefficienti di Fourier della serie.

Esempi di calcolo di spettri



■ Onda quadra RZ: sintesi

- Mostriamo che, anche in questo caso la serie vista nella slide precedente in qualche modo converge al segnale desiderato (implementazione MATLAB della serie):



Parametri numerici:

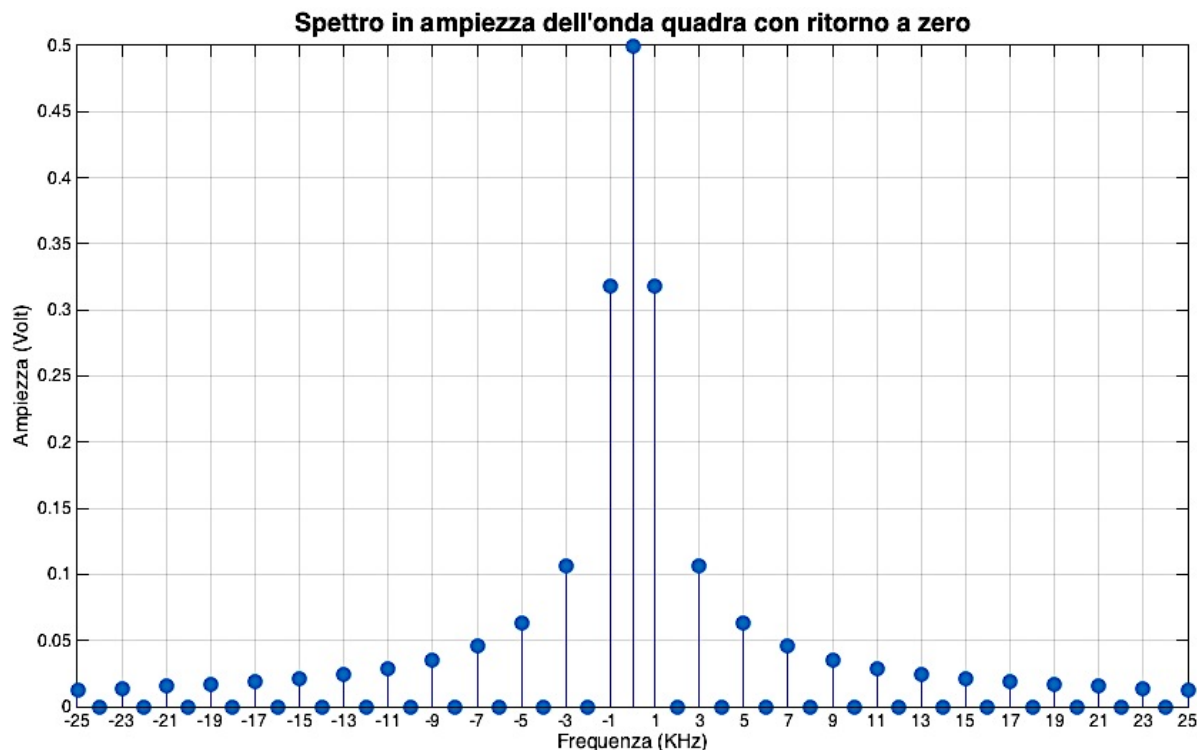
- $T_0 = 1 \text{ msec}$
($f_0 = 1 \text{ KHz}$)
- $T = 0.5 \text{ msec}$
- $V_0 = 1 \text{ Volt}$

Esempi di calcolo di spettri



■ Onda quadra con ritorno a zero – spettro in ampiezza

□ Valori numerici: $T_0=1\text{msec}$, $T=0.5\text{msec}$, $V_0=1\text{Volt}$



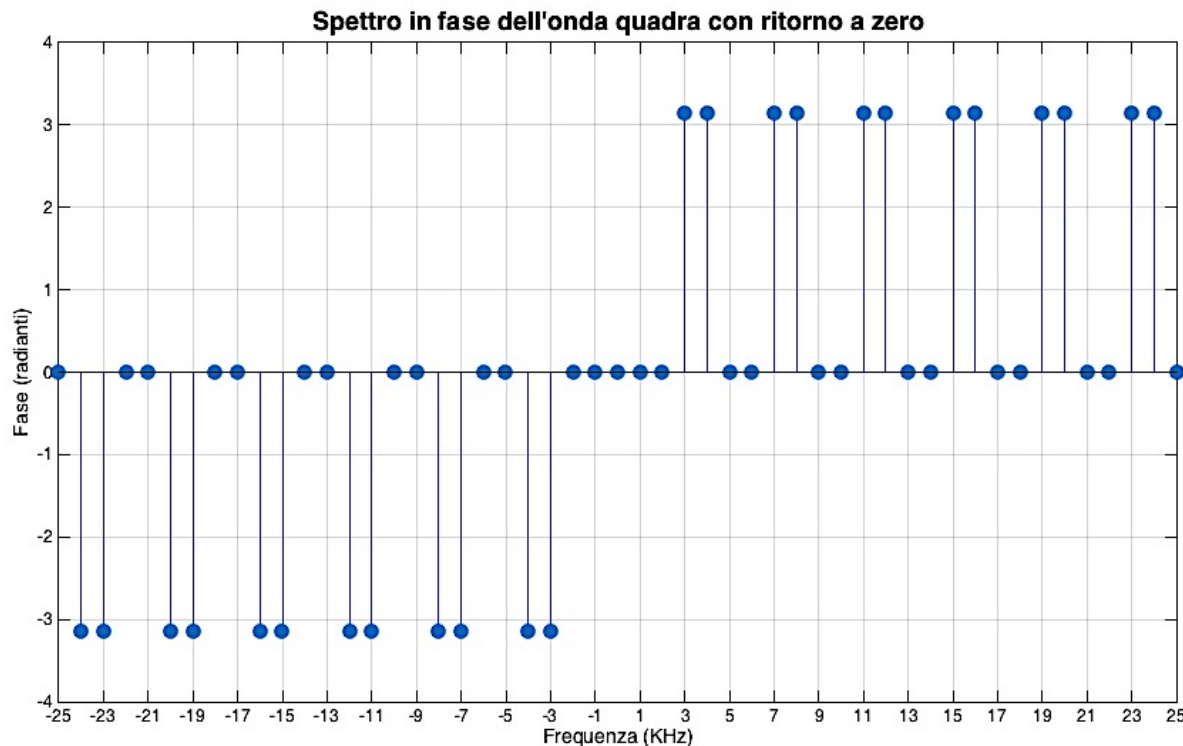
Massimo contenuto
spettrale sta nella
continua (ed è il valor
medio del segnale nel
periodo)

Esempi di calcolo di spettri



■ Onda quadra con ritorno a zero – spettro in fase

□ Valori numerici: $T_0=1\text{msec}$, $T=0.5\text{msec}$, $V_0=1\text{Volt}$

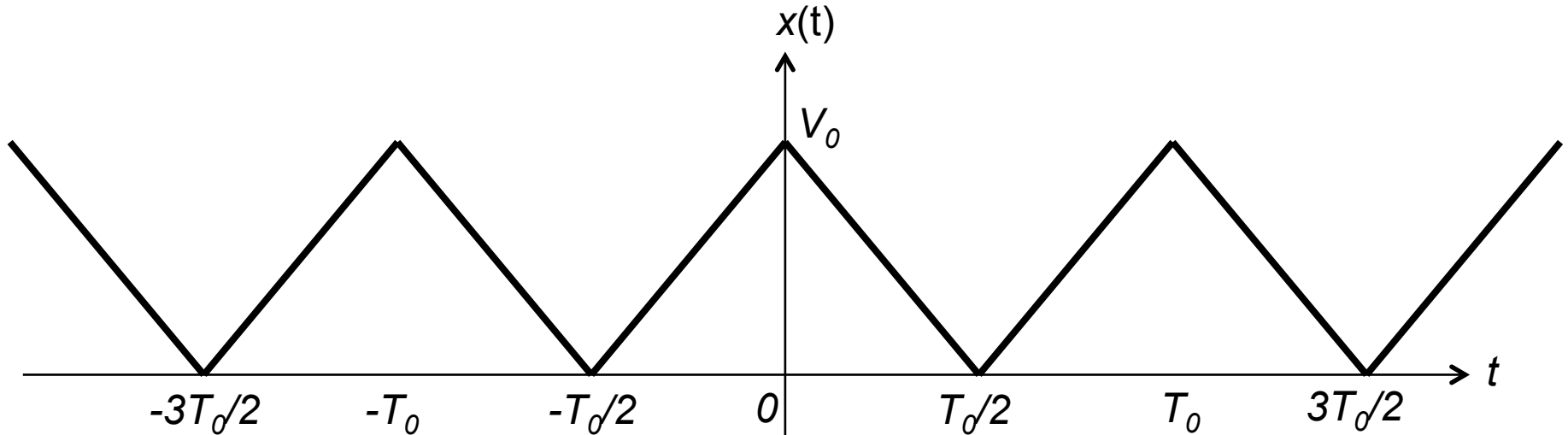


Si noti la simmetria dispari della fase (che deve essere sempre verificata e, se non lo è, la si impone)

Esempi di calcolo di spettri

■ Onda triangolare (1)

- E' un segnale periodico, la cui forma d'onda è un triangolo di durata T , che si ripete con periodo $T_0 \geq T$



Esempi di calcolo di spettri

■ Onda triangolare (2)

- Come per l'onda quadra (anzi: a maggior ragione) è soddisfatta la condizione di Dirichelet, pertanto la serie di Fourier per tale segnale esiste;
- Si tratta di una funzione a simmetria pari, pertanto ci aspettiamo che abbia coefficienti di Fourier reali e che sia sviluppabile in serie di coseni.
- Di seguito, effettueremo il calcolo dei coefficienti e della serie, partendo dall'espressione della forma d'onda:

$$w(t) = V_0 \left(1 - \frac{2|t|}{T_0} \right) \quad |t| \leq T_0/2$$

Esempi di calcolo di spettri

■ Onda triangolare (3)

□ Ecco il calcolo dei coefficienti:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} V_0 \left(1 - \frac{2|t|}{T_0} \right) \cos(2\pi k f_0 t) dt = \frac{2V_0}{T_0} \int_0^{T_0/2} \left(1 - \frac{2t}{T_0} \right) \cos(2\pi k f_0 t) dt = \\ &= \frac{2V_0}{T_0} \int_0^{T_0/2} \cos(2\pi k f_0 t) dt - \frac{4V_0}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{t}{T_0} \cos(2\pi k f_0 t) dt = \frac{2V_0}{T_0} \sin(\pi k) + \\ &- \frac{4V_0}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{t}{T_0} \cos(2\pi k f_0 t) dt = 0 - \frac{4V_0}{T_0^2 (2\pi k f_0)^2} \left[\alpha \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \right] \Big|_0^{k\pi} = \\ &= \frac{4V_0}{T_0^2} \left[\frac{1 - \cos(\pi k)}{(2\pi k f_0)^2} \right] = \frac{V_0}{2T_0^2 f_0^2} \frac{\sin^2(\pi k/2)}{(\pi k/2)^2} = \frac{V_0}{2} \text{sinc}^2(k/2) \end{aligned}$$

$\alpha = 2\pi k f_0 t$

Esempi di calcolo di spettri

■ Onda triangolare: analisi degli spettri in ampiezza e fase

- Scriviamo il modulo e la fase dei coefficienti di Fourier del segnale visto in precedenza:

$$|X_k| = \frac{V_0}{2} \text{sinc}^2(k/2) \quad \arg(X_k) = 0 \quad \forall k$$

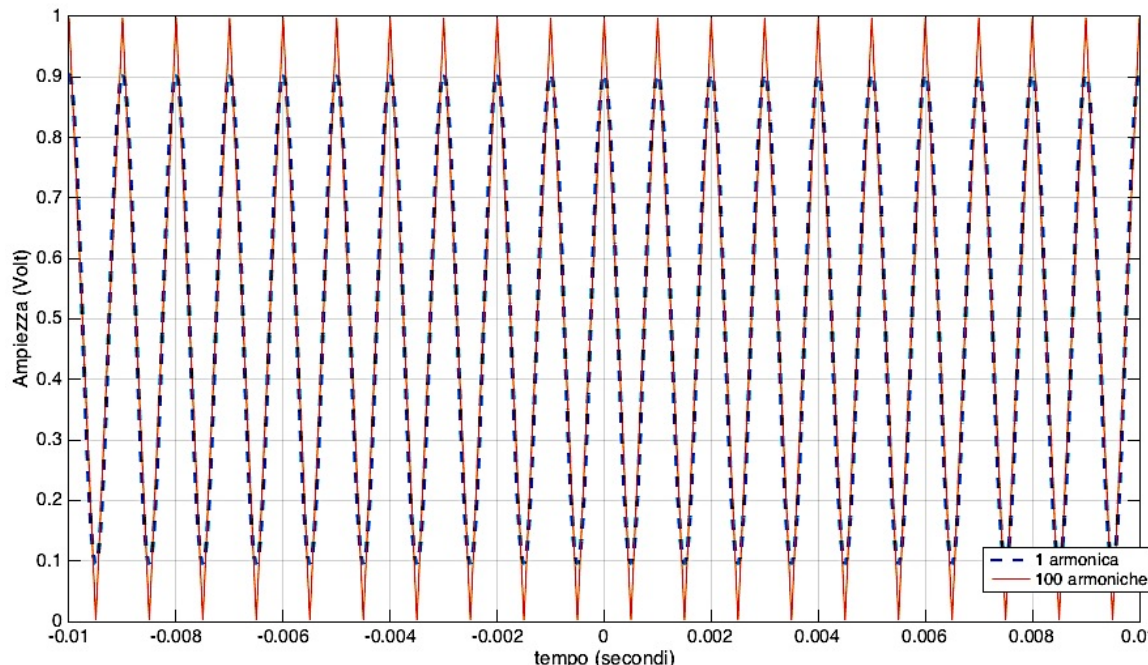
- I coefficienti di Fourier dell'onda triangolare sono reali e sempre positivi, per cui la loro fase è identicamente zero (la simmetria hermitiana è rispettata sebbene in senso "lato").

Esempi di calcolo di spettri



■ Onda triangolare: sintesi

- Mostriamo che, anche in questo caso la serie vista nella slide precedente in qualche modo converge al segnale desiderato (implementazione MATLAB della serie):



Parametri numerici:

- $T_0 = 1 \text{ msec}$
($f_0 = 1 \text{ KHz}$)
- $V_0 = 1 \text{ Volt}$

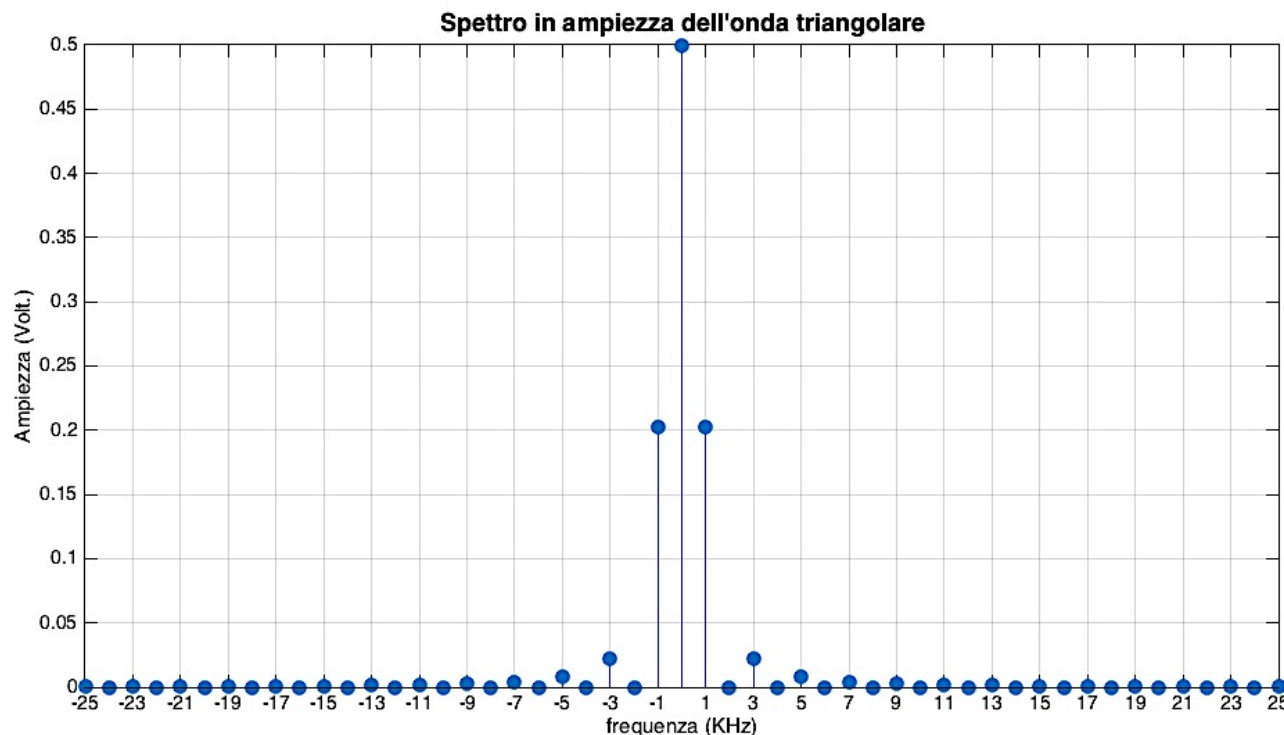
LA SERIE DI FOURIER
CONVERGE MOLTO
PIU' VELOCEMENTE
RISPETTO AL CASO
DELL'ONDA
RETTANGOLARE

Esempi di calcolo di spettri



■ Onda triangolare– spettro in ampiezza

□ Valori numerici: $T_0=1\text{msec}$, $V_0=1\text{Volt}$



Il contenuto spettrale del segnale è concentrato nella continua, nella fondamentale e nella terza armonica. Il resto è nullo o quasi trascurabile.

Esempi di calcolo di spettri

■ Considerazioni generali (1)

- Lo spettro (in ampiezza e fase) di un segnale periodico è tracciato su un dominio frequenziale discreto (ovvero l'indice di armonica);
- Lo spettro di un segnale periodico è formato da tante righe, ognuna delle quali corrispondenti ad una frequenza armonica;
- La simmetria hermitiana ci consente di analizzare gli spettri considerando solamente le armoniche di indice positivo; per quelle di indice negativo, il tracciato è simmetrico (pari quello dell'ampiezza, dispari quello della fase);
- La frequenza, di per sé, è una grandezza positiva, quindi le frequenze negative non hanno un senso "fisico", ma dal punto di vista matematico lo hanno.

Esempi di calcolo di spettri

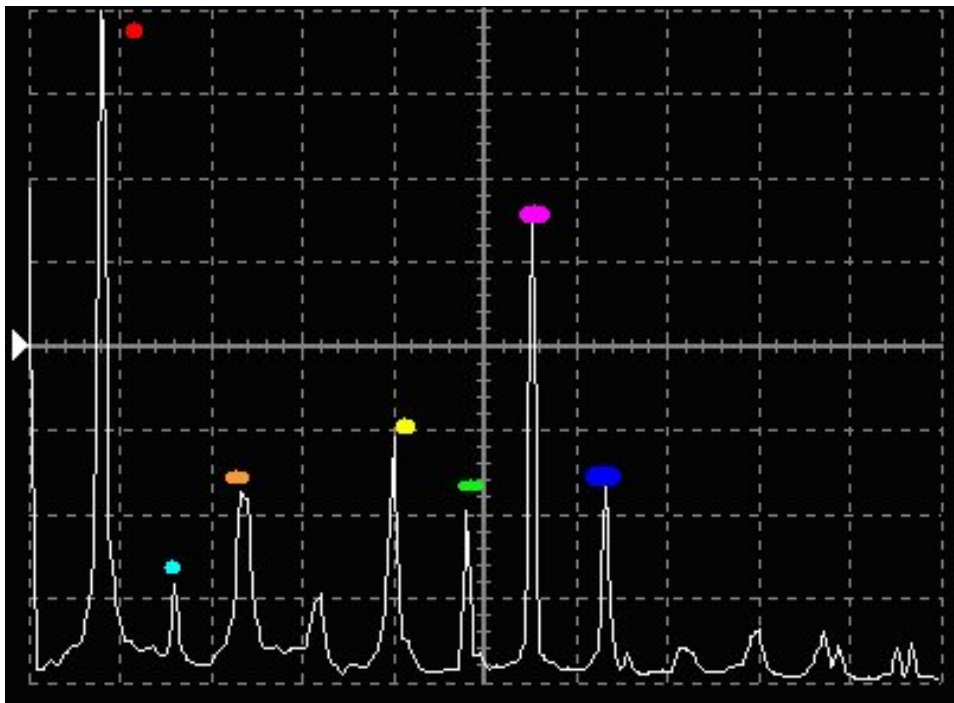
■ Considerazioni generali (2)

- Segnali che presentano discontinuità e transizioni ripide, come l'onda quadra, hanno un elevato contenuto spettrale in corrispondenza di armoniche di ordine elevato (alte frequenze);
- Segnali dall'andamento "dolce", come l'onda triangolare, hanno il loro contenuto spettrale concentrato presso le armoniche di ordine basso (basse frequenze);
- L'estensione spettrale di un segnale sull'asse delle frequenze è detto BANDA. Segnali con significativi contenuti spettrali alle alte frequenze sono detti segnali a banda larga, segnali con contenuti spettrali concentrati attorno alla continua sono detti segnali a banda stretta.

Esempi di calcolo di spettri

■ Esempio pratico: segnale musicale

- Questo è lo spettro di un segnale musicale emesso da un clarino (nota “La”), registrato da un microfono e misurato da uno strumento (analizzatore di spettro):



E' noto che i segnali musicali sono generati dalla sovrapposizione ordinata di frequenze armoniche: quindi hanno una loro periodicità. In effetti, lo spettro evidenzia le righe corrispondenti alle frequenze armoniche proprie dello strumento;

Agendo esternamente sul contenuto armonico è possibile cambiare il suono dello strumento.

Il fenomeno di Gibbs

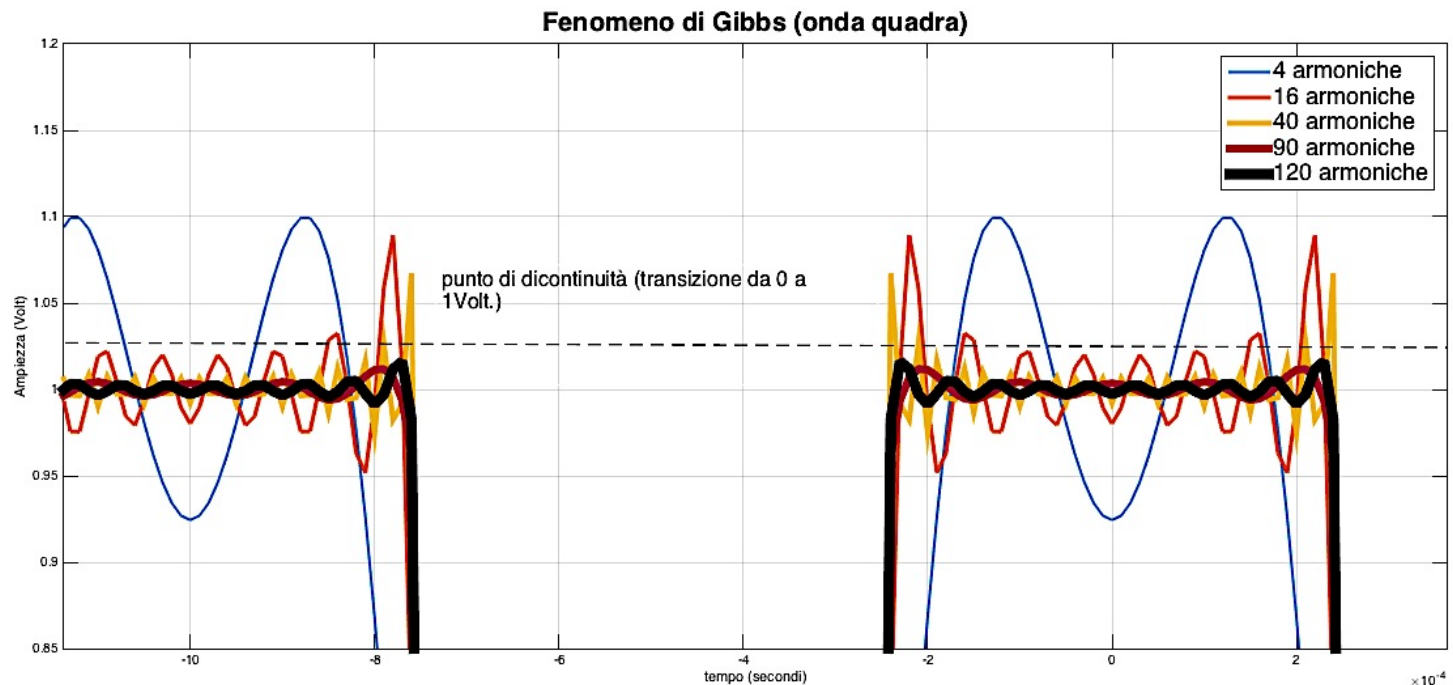
■ Descrizione

- Questo fenomeno, relativo alle serie di Fourier troncate ed osservato dal fisico statunitense W. Gibbs nel 1899, lo abbiamo già intuito analizzando la sintesi dell'onda quadra partendo dalle sue armoniche;
- Quando si ricostruisce il segnale, a partire dalla serie troncata si ottengono delle sovraelongazioni del valore della funzione ricostruita nell'intorno del punto di discontinuità;
- All'aumentare del numero delle componenti della serie il valore di picco di detta sovraelongazione rimane costante, mentre le oscillazioni alle quali tali sovraelongazioni si riferiscono si avvicinano al punto di discontinuità.

Il fenomeno di Gibbs

■ Visualizzazione (da MATLAB)

□ Si può notare bene dalla figura sottostante:



L'identità di Bessel-Parseval

■ Enunciato

- L'identità di Bessel-Parseval (conosciuta anche come formula di Parseval) si enuncia così:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{-T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

- In pratica, la sommatoria dei moduli quadrati dei coefficienti di Fourier è pari alla potenza media del segnale, calcolata nel periodo;
- La potenza media del segnale è data quindi dalla somma delle potenze di ogni singola armonica.