# CORSO DI TEORIA DEI SEGNALI ESERCIZI SU ANALISI DI SISTEMI E PROCESSI ALEATORI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA – ANNO ACCADEMICO 2017-2018

## ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema lineare e tempo-invariante, avente la seguente funzione di trasferimento:

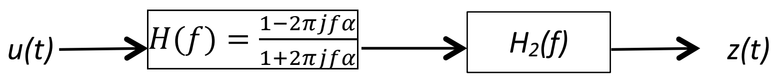
$$H(f) = \frac{1 - 2\pi j f \alpha}{1 + 2\pi j f \alpha}$$

Ove $\alpha$ è un parametro costante. Si richiede di:

1) Calcolare l'espressione analitica della risposta in ampiezza e della risposta in fase del sistema LTI di cui sopra;
2) Si supponga di porre in ingresso al sistema LTI, di cui è stata fornita la funzione di trasferimento *H(f)*, una sinusoide con ampiezza *A*, periodo *T* e fase $\phi$. Si calcoli, dapprima, l'espressione dello spettro *Y(f)* del segnale prodotto in uscita dal sistema e, poi, l'espressione analitica della stessa uscita, ma nel dominio del tempo (ovvero *y(t)*);

Si supponga di porre in cascata al sistema LTI di cui sopra un altro sistema LTI, la cui risposta in frequenza $H_2(f)$ deve essere ricavata (vedi figura sottostante). Il segnale *u(t)* è generico e non assegnato. Si richiede di:

3) Calcolare $H_2(f)$ tale per cui: $z(t) = Ku(t - t_0)$ con *K* e $t_0$ costanti assegnate.




## ESERCIZIO 2

Sia dato il seguente segnale deterministico:

$$x(t) = Asinc^2(tf_s)sin^2(\omega_0 t)$$

dove: *A*=10 [microvolt], $f_s$=15 [KHz], mentre $\omega_0 = 12.566\times10^6$ [rad./sec]. Supponiamo di inviare il segnale *x(t)* in ingresso ad un sistema lineare e tempo-invariante la cui risposta è da ricavare. Si calcoli la risposta in frequenza del sistema LTI a cui *x(t)* è inviato in ingresso, affinché, in uscita dal suddetto sistema, si ottenga il segnale $y(t) = 100Asinc^2(tf_s)$.

## ESERCIZIO 3

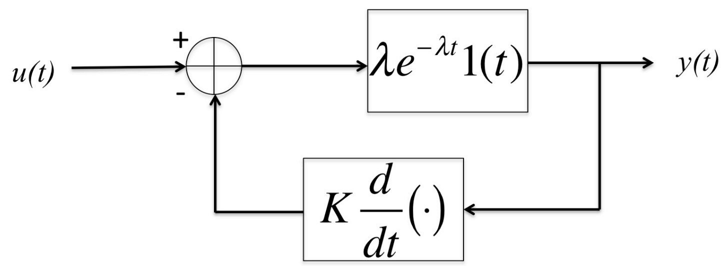
Sia dato un processo aleatorio Gaussiano bianco di densità spettrale di potenza bilatera assegnata pari a $\eta/2$. Si richiede di calcolare la densità spettrale di potenza e l'autocorrelazione del processo aleatorio uscente da un filtro RC, la cui costante di tempo è pari a RC sec. (detto anche processo di *Ornstein-Uhlenbeck*).

## ESERCIZIO 4

Un processo aleatorio, gaussiano, stazionario in senso lato, la cui funzione di autocorrelazione è: $R_x(\tau) = 1 + 2sinc(Bt)$, dove $B$=10 KHz viene inviato in ingresso ad un filtro passa-alto ideale, la cui banda passante è 1 KHz e il cui guadagno in ampiezza è pari a 2. Si richiede di calcolare la funzione di autocorrelazione del processo aleatorio *y(t)* uscente dal filtro passa-alto.

## ESERCIZIO 5

Si consideri un processo aleatorio Gaussiano bianco *u(t)* la cui densità spettrale di potenza bilatera $N_0/2 = 1.36\times10^{-12}$ [W/Hz]. Tale processo viene mandato in ingresso al blocco lineare e tempo invariante mostrato in figura sottostante:




dove: $\lambda = 880$ [KHz] e $K$=3 [nsec]. Sotto queste ipotesi, è richiesto di:

1) Calcolare il valor medio del processo aleatorio *y(t)*;
2) Calcolare l'autocorrelazione del processo aleatorio *y(t)*.

## ESERCIZIO 6

Sia dato un sistema lineare e tempo-invariante la cui risposta all'impulso ha la seguente formulazione:

$$h(t) = \frac{1}{a}\left[e^{-|t|/T_0} + sinc(t/T_1)\right]$$

dati numerici: $a$=80 microsecondi, $T_0$=120 microsecondi e $T_1$ = 20 microsecondi. Supponendo che, in ingresso al sistema LTI, venga posto un processo aleatorio cosinusoidale di ampiezza pari a 10 millivolt e periodo pari a 60 microsecondi, si calcoli l'espressione analitica della densità spettrale di potenza del processo uscente dal sistema e la potenza media di tale processo.

## ESERCIZIO 1 – DOMANDA 1

È richiesto di calcolare: $|H(f)|$ e $\angle H(f)$

$$H(f) = \frac{(1-2\pi j f \alpha)(1-2\pi j f \alpha)}{1+(2\pi f \alpha)^2}$$

(ho razionalizzato per ricavare $\mathrm{Re}(H(f))$ e $\mathrm{Im}(H(f))$)

$$H(f) = \frac{(1-2\pi j f \alpha)^2}{1+(2\pi f \alpha)^2} = \frac{1-4\pi j f \alpha-(2\pi f \alpha)^2}{1+(2\pi f \alpha)^2}$$

da cui: $$\mathrm{Re}\{H(f)\} = \frac{1-(2\pi f \alpha)^2}{1+(2\pi f \alpha)^2}$$

$$\mathrm{Im}\{H(f)\} = -\frac{4\pi f \alpha}{1+(2\pi f \alpha)^2}$$

CALCOLO RISPOSTA IN AMPIEZZA

$$|H(f)| = \sqrt{[\mathrm{Re}\{H(f)\}]^2+[\mathrm{Im}\{H(f)\}]^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{[1-(2\pi f \alpha)^2]^2+(4\pi f \alpha)^2}}{1+(2\pi f \alpha)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-2(2\pi f \alpha)^2+(2\pi f \alpha)^4+(4\pi f \alpha)^2}}{1+(2\pi f \alpha)^2} = \frac{\sqrt{1+2(2\pi f \alpha)^2+(2\pi f \alpha)^4}}{1+(2\pi f \alpha)^2}$$

$$|H(f)| = \frac{\cancel{\sqrt{\left\{1+(2\pi f\alpha)^2\right\}^2}}}{\cancel{1+(2\pi f\alpha)^2}} = 1 \ \forall f$$

quindi il nostro sistema è una sorta di "FILTRO PASSA-TUTTO"

Presumibilmente, introdurrà solo uno sfasamento sul segnale che passa attraverso di esso. Verifichiamo, come richiesto dal problema, il suo spettro in fase:

$\boxed{\text{CALCOLO RISPOSTA IN FASE}}$

$$\angle H(f) = \arctan\left(\frac{Im\{H(f)\}}{Re\{H(f)\}}\right) =$$

$$= \arctan\left(\frac{-4\pi f\alpha}{\cancel{1+(2\pi f\alpha)^2}}\cdot\frac{\cancel{1+(2\pi f\alpha)^2}}{1-(2\pi f\alpha)^2}\right) =$$

$$= -\arctan\left(\frac{4\pi f\alpha}{1-(2\pi f\alpha)^2}\right)$$

in effetti, la risposta in fase dipende da $f$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 1 - DOMANDA 2}}$

In ingresso al sistema LTI di cui abbiamo fornito $H(f)$ viene posto il segnale $x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$

È richiesto di calcolare:

$$Y(f) = H(f)\,X(f)$$

$$X(f) = \frac{A}{2} e^{-j\phi}\,\delta(f - 1/T) + \frac{A}{2} e^{j\phi}\,\delta(f + 1/T)$$

e quindi:

$$Y(f) = H(f)\cdot\left[A e^{-j\phi}\,\delta(f - 1/T) + A e^{j\phi}\,\delta(f + 1/T)\right] =$$

$$= A\,H(1/T)\,e^{-j\phi}\,\delta(f - 1/T) + A\,H(-1/T)\,e^{j\phi}\,\delta(f + 1/T)$$

$$H(1/T) = 1\cdot e^{j\angle H(1/T)} = e^{-j\,\mathrm{arctang}\left(\frac{4\pi\alpha/T}{1-(2\pi\alpha/T)^2}\right)} =$$

$$= e^{-j\theta} \qquad \theta \triangleq \mathrm{arctang}\left(\frac{4\pi\alpha/T}{1-(2\pi\alpha/T)^2}\right)$$ è

un ANGOLO ESPRIMIBILE IN RADIANTI

$$H(-1/T) = 1\,e^{j\angle H(-1/T)} = e^{j\theta}$$

poiché la fase ha simmetria dispari.

Quindi:
$$Y(f) = \frac{A}{2} e^{-j(\phi+\theta)}\,\delta(f - 1/T) +$$

$$+ \frac{A}{2} e^{j(\phi+\theta)}\,\delta\left(f + \frac{1}{T}\right)$$ con $\theta$ definito sopra.

pertanto $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = A\cos(2\pi t/T + \phi$ [illegible] $\theta)$

# ESERCIZIO 1 - DOMANDA 3

Occorre ragionare SUBITO nel dominio della frequenza.

$$Z(f) = H(f)\,H_2(f)\,U(f) = K\,U(f)\,e^{-2\pi j f t_0}$$

pertanto, si ricava subito che:

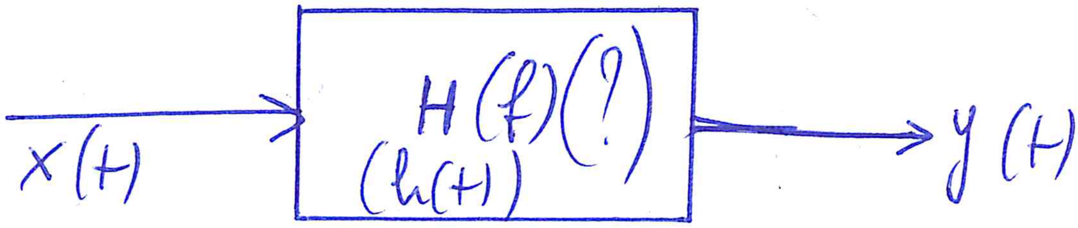
$$H(f)\,H_2(f) = K e^{-2\pi j f t_0}$$

e quindi:

$$H_2(f) = \frac{K e^{-2\pi j f t_0}}{H(f)} =$$

$$= \frac{K e^{-2\pi j f t_0}\,(1+2\pi j f \alpha)}{(1-2\pi j f \alpha)}$$

# ESERCIZIO 2 - DOMANDA UNICA




$$y(t) = h(t) * x(t) = 100\,A\,\mathrm{sinc}^2(t f_s)$$

Bisogna determinare $H(f)$ tale che:

$$Y(f) = H(f)X(f) = \underbrace{\frac{100A}{f_s}\,\Lambda\left(\frac{f}{f_s}\right)}_{= \mathcal{F}\left\{100\,A\,\mathrm{sinc}^2(f_s t)\right\}}$$

$\Downarrow$

Questa forma del problema appare risolubile, a patto che riusciamo a calcolare $X(f)$

$$X(t) = \frac{A}{2}\,\mathrm{sinc}^2(f_s t)\left[\frac{1-\cos(2\omega_0 t)}{2}\right]$$ (usando le consuete formule trigonometriche)

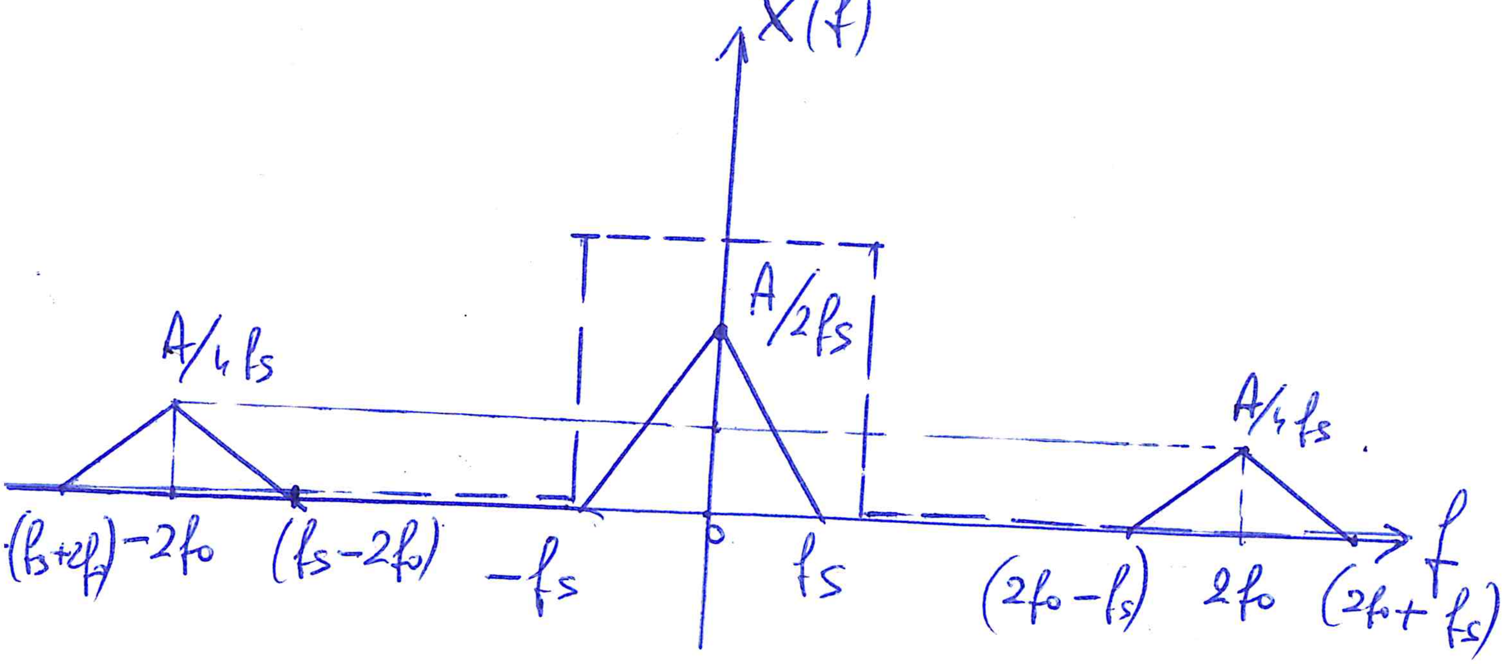
$\omega_0 = 2\pi f_0$ [rad/sec]

Quindi: $x(t) = \frac{A}{2}\,\mathrm{sinc}^2(f_s t) - \frac{A}{2}\,\mathrm{sinc}^2(f_s t)\cos(2\omega_0 t)$

$$X(f) = \frac{A}{2f_s}\,\Lambda\left(\frac{f}{f_s}\right) - \frac{A}{4f_s}\,\Lambda\left(\frac{f-2f_0}{f_s}\right) + \frac{A}{4f_s}\,\Lambda\left(\frac{f+2f_0}{f_s}\right)$$ (x il teorema della modulazione)

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^6 \text{ Hz} \quad (2 \text{ MHz})$$

Quindi, lo spettro del segnale $X(f)$ può essere riportato in un grafico:




Praticamente, voglio che il sistema LTI al quale mando in ingresso $X(f)$ fornisce in uscita IL SOLO TRIANGOLO POSTO IN BANDA-BASE, moltiplicato al più per un guadagno di ampiezza. Quale tipo di sistema LTI può far questo? Solamente un filtro PASSABASSO IDEALE di banda passante ~~B~~ che rispetta la seguente condizione:

$$\boxed{f_s \leq B < (2f_0 - f_s)}$$

e di altezza pari a 200. Infatti se considerassimo il filtro LPF ideale di altezza pari a 1 otterremmo in uscita:

$$Y(f) = \frac{A}{2f_s} \Lambda\left(\frac{f}{f_s}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t) = \frac{A}{2} \operatorname{sinc}^2(f_s t)$$

Invece con un guadagno del filtro pari a 200 si ottiene l'uscita desiderata.

## ESERCIZIO 3 – DOMANDA UNICA

$$\{x(t)\} \longrightarrow \boxed{h(t)=\frac{1}{RC}e^{-t/RC}\cdot 1(t)} \longrightarrow \{y(t)\}$$

(FILTRO RC)

$$R_x(\tau) = \eta/2 \ \delta(\tau)$$

– **DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA**

$$S_y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2$$

- $S_x(f) = \eta/2 \quad \forall f$
- $|H(f)|^2 = G(f) = \dfrac{1}{1+(2\pi f RC)^2}$ (vedere slides)

$$\boxed{S_y(f) = \frac{\eta}{2}\,\frac{1}{1+(2\pi f RC)^2}}$$

è evidente che $y(t)$ è un processo "COLORATO"

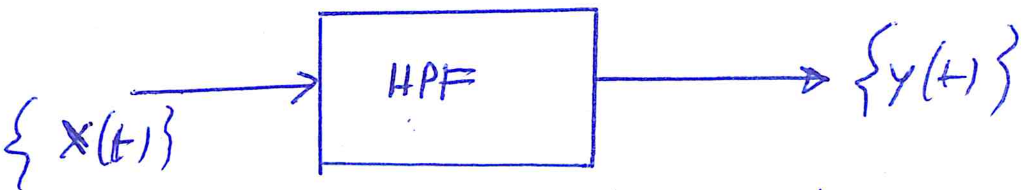
– **AUTOCORRELAZIONE**

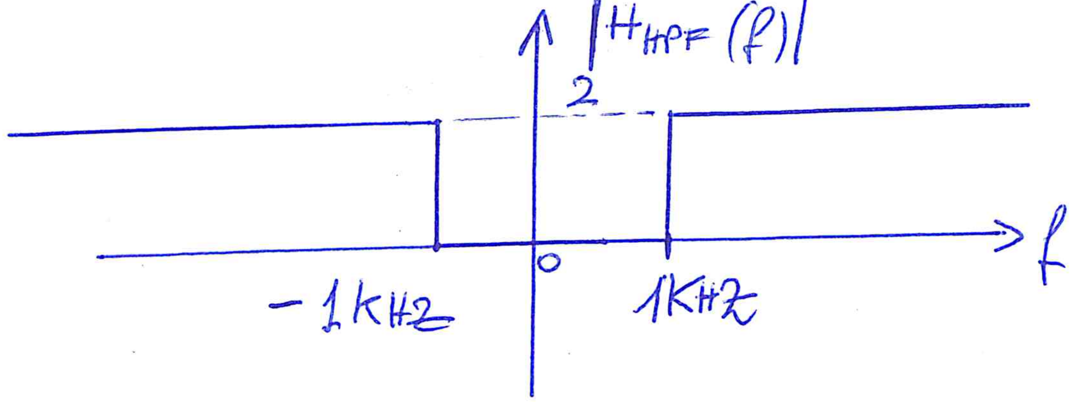
$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\eta}{2}\,\frac{1}{1+(2\pi f RC)^2}\right\} =$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\eta}{4RC}\,\frac{\left(\frac{2}{RC}\right)}{(1/RC)^2+(2\pi f)^2}\right\} = \frac{\eta}{4RC}\,e^{-|\tau|/RC}$$

# ESERCIZIO 4 — DOMANDA UNICA

$$R_x(\tau) = 1 + 2\,\mathrm{sinc}(B\tau)$$



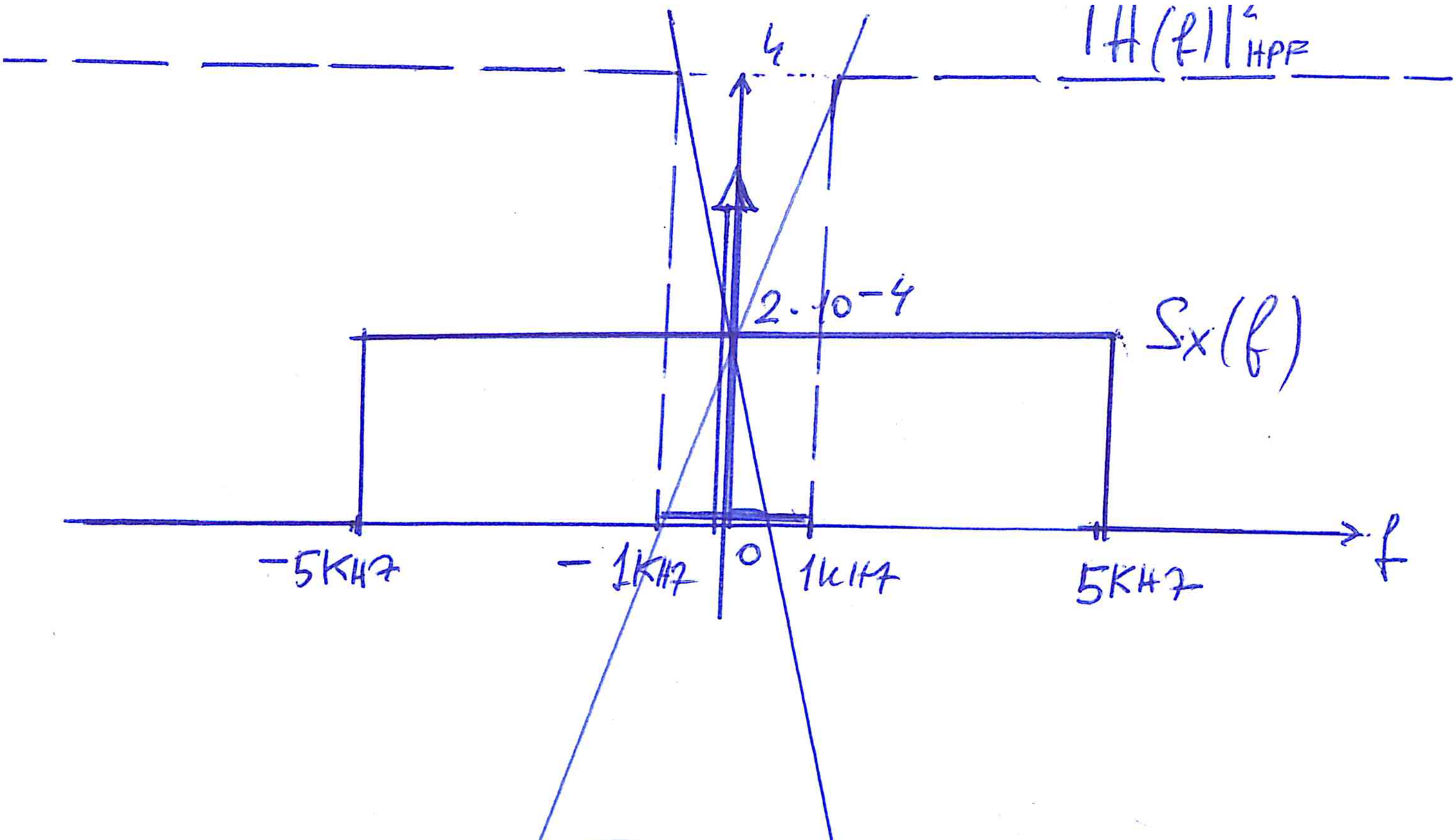

Occorre, chiaramente, operare nel dominio della frequenza e poi, se possibile, antitrasformare. Quindi, si procede così:

- $S_y(f) = |H(f)|^2_{HPF}\, S_x(f)$
- $R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_y(f)\}$

Vediamo di risolvere il primo punto:

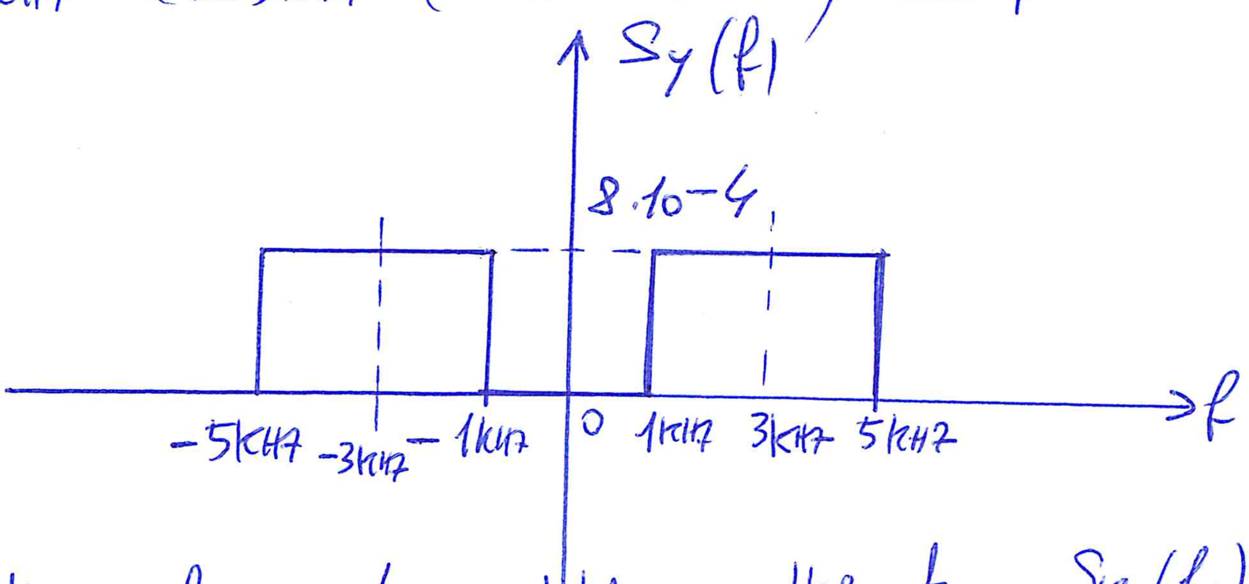
$$S_x(f) = \delta(f) + \frac{2}{B}\,\Pi\left(\frac{f}{B}\right) \quad (B = 10\,\mathrm{KHz})$$

Il prodotto tra $|H_{HPF}(f)|^2$ e $S_x(f)$ deve essere risolto in maniera grafica.




Tutto ciò che sta nei dintorni della banda-base viene eliminato dal filtro passa-alto.

Il prodotto avrà componenti frequenziali non nulle solo tra 1 KHz e 5KHz e -1KHz e -5KHz (o viceversa...). In particolare:




Quindi, graficamente, abbiamo ottenuto $S_y(f)$

Qual'è l'espressione <u>ANALITICA</u> di $S_y(f)$?
Osserviamo che nel grafico ci sono due rettangoli di banda 4KHz e centrati in $\pm$ 3KHz.
Quindi:

$$S_y(f) = 8 \cdot 10^{-4} \Pi\left(\frac{f-f_0}{B_1}\right) + 8 \cdot 10^{-4} \Pi\left(\frac{f+f_0}{B_1}\right)$$

$f_0 = 3KHz$, $B_1 = 4KHz$

$$S_y(f) = 8 \cdot 10^{-4} \Pi\left(\frac{f}{B_1}\right) * \left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{S_y(f)\right\} = 8 \cdot 10^{-4} B_1 \operatorname{sinc}(\tau B_1) \cdot 2\cos(2\pi\tau f_0) =$$

$$= 16 \cdot 10^{\cancel{-4}\,-1} \cdot 4 \cdot \cancel{10^3} \operatorname{sinc}(\tau B_1)\cos(2\pi f_0 \tau) =$$

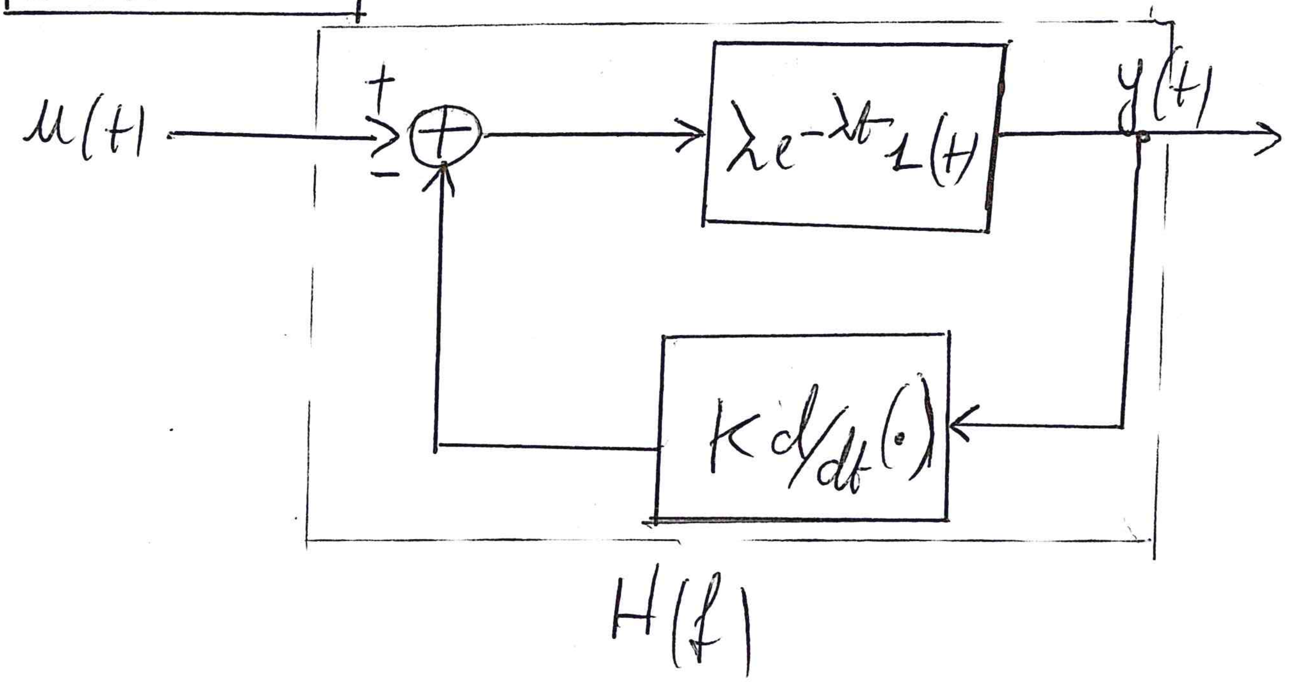
$$\frac{\cancel{64}^{\,32}}{\cancel{10}_{\,5}} \operatorname{sinc}(\tau B_1)\cos(2\pi f_0 \tau) \qquad \begin{aligned} B_1 &= 4KHz \\ f_0 &= 3KHz \end{aligned}$$

$$\boxed{R_y(\tau) = \frac{32}{5} \operatorname{sinc}(4 \cdot 10^3 \tau)\cos(6000\pi\tau)}$$

# ESERCIZIO 2

TLC 16/17

## DOMANDA 1




$$\bar{y} = \bar{u}\, H(0) = 0 \quad \text{poiché } \bar{u} = 0 \ (u(t) \text{ BIANCO})$$

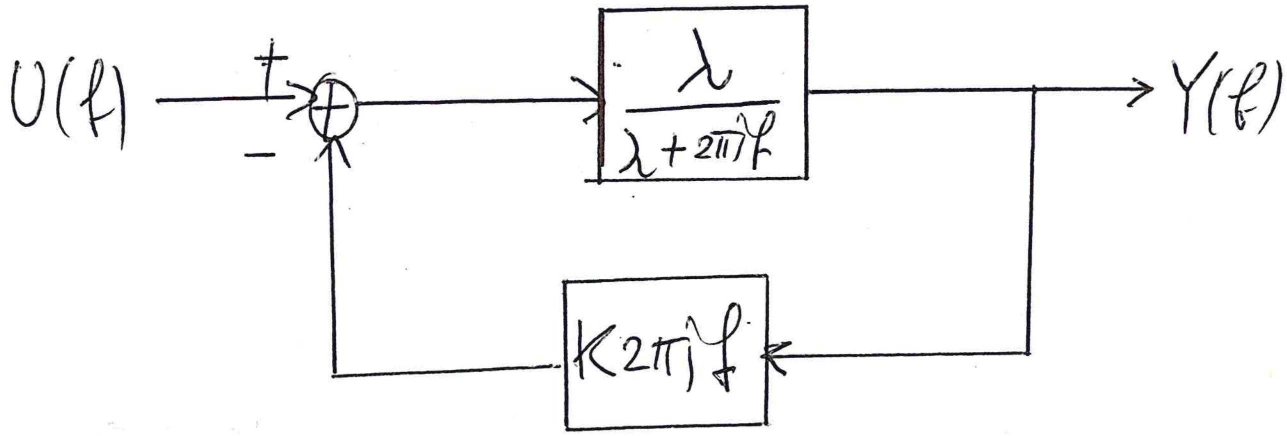
## DOMANDA 2

Bisogna ragionare nel DOMINIO DELLA FREQUENZA, calcolando:

$$S_y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\,|H(f)|^2$$

e poi anti-trasformare.

Nel dominio della frequenza, il sistema LTI viene così rappresentato:




$$H(f) = \frac{\dfrac{\lambda}{\lambda + 2\pi j f}}{1 + \dfrac{K 2\pi j f \lambda}{\lambda + 2\pi j f}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\lambda}{\lambda + 2\pi j f}}{\dfrac{\lambda + 2\pi j f + K\lambda 2\pi j f}{\lambda + 2\pi j f}} =$$

$$= \frac{\lambda}{\cancel{(\lambda + 2\pi j f)}} \; \frac{\cancel{(\lambda + 2\pi j f)}}{\lambda + 2\pi j f(1+K\lambda)} =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + 2\pi j f(1+K\lambda)}$$

$$|H(f)|^2 = \left[Re\{H(f)\}\right]^2 + \left[Im\{H(f)\}\right]^2$$

$$H(f) = \frac{\lambda\left[\lambda - 2\pi j f(1+k\lambda)\right]}{\lambda^2 + (2\pi f)^2(1+k\lambda)^2} =$$

$$= \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 + (2\pi f)^2(1+k\lambda)^2} - \frac{2\pi j f(1+k\lambda)}{\lambda^2 + (2\pi f)^2(1+k\lambda)^2}\right]\lambda$$

Facendo il calcolo si ottiene:

$$|H(f)|^2 = \lambda^2 / \left[\lambda^2 + (2\pi f)^2 \cdot (1+k\lambda)^2\right]$$

$$S_y(f) = \frac{N_0 \lambda^2}{2} \frac{1}{\lambda^2 + (2\pi f)^2(1+k\lambda)^2}$$

Si può antitrasformare?

Guardando le tabelle si nota la seguente anti-trasformata

$$\frac{2b}{b^2 + (2\pi f)^2} \longrightarrow e^{-b|t|}$$

Nel nostro caso, per ricondurci a quella formula, occorre fare qualche aggiustamento:

$$S_y(f) = \frac{N_0\lambda^2}{2} \; \frac{\dfrac{1}{(1+k\lambda)^2}}{\left(\dfrac{\lambda}{1+k\lambda}\right)^2 + (2\pi f)^2}$$

$$b^2 = \left(\frac{\lambda}{1+k\lambda}\right)^2 \Rightarrow b = \frac{\lambda}{1+k\lambda}$$

Ci si riesce se ci riportiamo a questa forma:

$$S_y(f) = \frac{N_0\lambda^2}{2} \; \frac{\dfrac{2\lambda}{1+k\lambda} \cdot \dfrac{1}{2\lambda(1+k\lambda)}}{\left(\dfrac{\lambda}{1+k\lambda}\right)^2 + (2\pi f)^2} =$$

$$= \frac{N_0\lambda^{\cancel{2}}}{4\cancel{\lambda}(1+k\lambda)} \; \frac{2\lambda / (1+k\lambda)}{\left(\lambda / (1+k\lambda)\right)^2 + (2\pi f)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_y(\tau) = \frac{N_0\lambda}{4(1+k\lambda)} \, e^{-\lambda\tau/(1+k\lambda)}}$$

**ESERCIZIO 6 - DOMANDA UNICA**

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{\alpha}\left[e^{-|t|/T_0} + \text{sinc}\left(\frac{t}{T_1}\right)\right]$$

$T_0 = 120\,\mu sec$, $T_1 = 20\,\mu sec$, $\alpha = 80\,\mu sec$

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_u(f)$$

$$u(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right) \qquad T = 60\,\mu sec \quad A = 10\,mV$$

(PROCESSO ALEATORIO COSINUSOIDALE)

$\theta$ v.a. uniformemente distribuita tra 0 e $2\pi$

$$S_u(f) = \mathcal{F}\{R_u(\tau)\} \qquad R_u(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)$$

quindi: $$S_u(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f - 1/T) + \frac{A^2}{4}\delta(f + 1/T)$$

$$S_y(f) = \frac{A^2}{4}|H(f)|^2\delta(f - 1/T) + \frac{A^2}{4}|H(f)|^2\delta(f + 1/T) =$$

$$= \frac{A^2}{4}|H(1/T)|^2\delta(f - 1/T) + \frac{A^2}{4}|H(-1/T)|^2\delta(f + 1/T) =$$

$$= \frac{A^2}{4}|H(1/T)|^2\left[\delta(f - 1/T) + \delta(f + 1/T)\right]$$ x la simmetria hermitiana

Quanto vale $|H(1/T)|^2$ ?

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \frac{2}{\alpha T_0 \left[\left(\frac{2}{T_0}\right)^2 + (2\pi f)^2\right]} + \frac{T_1}{\alpha} \Pi\left(\frac{f}{1/T_1}\right)$$

Meglio esprimerla come:

$$H(f) = \begin{cases} \dfrac{2}{\alpha T_0 \left[(2/T_0)^2 + (2\pi f)^2\right]} + T_1/\alpha & -\dfrac{1}{2T_1} \le f \le \dfrac{1}{2T_1} \\ \dfrac{2}{\alpha T_0 \left[(2/T_0)^2 + (2\pi f)^2\right]} & |f| > \dfrac{1}{2T_1} \end{cases}$$

$$|H(f)|^2 = \begin{cases} \left[\dfrac{2}{\alpha T_0 \left[(2/T_0)^2 + (2\pi f)^2\right]} + T_1/\alpha\right]^2 & |f| \le 1/2T_1 \\ \dfrac{4}{\alpha^2 T_0^2 \left[(2/T_0)^2 + (2\pi f)^2\right]^2} & |f| > 1/2T_1 \end{cases}$$

$$1/T = \frac{1}{60 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{60} = 16.67 \text{ KHz}$$

$$|1/T| \le \frac{1}{40 \cdot 10^{-6}} = 25 \text{ KHz} \; ?$$ Sì, e quindi:

$$|H(1/T)|^2 = \left[\frac{2}{\alpha T_0 \left[(2/T_0)^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right]} + \frac{T_1}{\alpha}\right]^2 =$$

$$= \boxed{0.0718}$$

Numericamente, abbiamo che:

$$S_y(f) = \frac{A^2}{4} \cdot 0.0718 \left[\delta(f - 1/T) + \delta(f + 1/T)\right] =$$

$$= \frac{(10^{-2})^2}{4} \cdot 0.0718 \left[\delta(f - 1/T) + \delta(f + 1/T)\right] =$$

$$1.795 \cdot 10^{-6} \left[\delta(f - 1/T) + \delta(f + 1/T)\right]$$

$$\bar{P}_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)\, df = 1.795 \cdot 10^{-6} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - 1/T)\, df}_{= 1} +$$

$$+ 1.795 \cdot 10^{-6} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - 1/T)\, df}_{= 1} = \boxed{3.59 \cdot 10^{-6}\, W}$$

OPPURE:

$$\bar{P}_y = R_y(0) = \mathcal{F}^{-1}\left\{S_y(f)\right\}\Big|_{\tau=0} = 3.59 \cdot 10^{-6} \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right) =$$

$3.59 \cdot 10^{-6}$ [W]