Prima prova parziale esame Teoria dei Segnali (3/11/2016)

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni / Corso di laurea in Informatica

Studenti anno accademico 2016-2017

COGNOME ______________________ **NOME** ____________________

Esercizio 1 (segnali)

Sia dato il seguente segnale:

$$s(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)1(t-t_0)$$

dove A=1W, T=10 micro secondi, t_0=4 micro secondi e $\alpha = \pi/3$

1) Indicare se il segnale è o no periodico;
2) Indicare (motivando l'affermazione) se il segnale presenta simmetria pari o dispari;
3) E' possibile calcolare l'energia del segnale *s(t)*? Ovvero: è tale energia finita? (motivare la risposta).

UTILIZZARE SOLAMENTE LO SPAZIO BIANCO DISPONIBILE (FRONTE E RETRO) PER RISPONDERE (VALORE: <u>7 PUNTI</u>)

1) $$x(t) = \begin{cases} A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right) & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

Chiaramente il segnale NON È PERIODICO.

2) $\forall t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x(t) \neq x(-t) & \text{segnale non è PARI} \\ x(-t) \neq -x(t) & \text{segnale non è DISPARI} \end{cases}$

3) $$\int_0^{+\infty} s^2(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{A}{2}\left(1+\cos\left(\frac{4\pi t}{T}+2\alpha\right)\right)dt = +\infty$$

NON È POSSIBILE

Esercizio 2 (processi aleatori)

Sia dato il seguente processo aleatorio:

$z(t) = x(t) + y(t)$ ove:

$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta)$

A, ω_0 sono costanti deterministiche note, θ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $[0,2\pi]$, mentre *y(t)* è un processo aleatorio Gaussiano, stazionario in senso lato, con media nulla ed autocorrelazione data dalla seguente espressione:

$$R_y(\tau) = P_y \mathrm{sinc}^4\left(\frac{4\tau}{T}\right)$$

P_y e *T* sono costanti note. Il processo aleatorio *y(t)* è statisticamente indipendente da θ.
Si richiede di calcolare la media e l'autocorrelazione del processo aleatorio *z(t)*.

UTILIZZARE SOLAMENTE LO SPAZIO BIANCO DISPONIBILE (FRONTE E RETRO) PER RISPONDERE (VALORE: 13 PUNTI)

– media:

$$E[z(t)] = E(x(t)) + \underbrace{E(y(t))}_{=0} = E(x(t))$$

$$E(x(t)) = \underset{\theta}{E}\{A\sin(\omega_0 t + \theta)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A\sin(\omega_0 t + \theta)\,d\theta$$

$$E(x(t)) = \frac{A}{2\pi}\left[-\cos(\omega_0 t + 2\pi) + \cos(\omega_0 t)\right] = 0$$

$$E[z(t)] = 0$$

– autocorrelazione:

$$R_z(\tau) = E\{[x(t) + y(t)][x(t+\tau) + y(t+\tau)]\} =$$

$= R_x(\tau) + R_y(\tau)$ (si vede sviluppando il calcolo dentro la media, sapendo che $x(t)$ e $y(t)$ sono SSL, a media nulla e tra loro indipendenti.

$$R_y(\tau) = A^2 \underset{\theta}{E} \left\{ \sin(\omega_0 t + \theta) \sin(\omega_0 (t+\tau) + \theta) \right\} =$$

$$= \underset{\theta}{E} \left\{ A^2/2 \cos(\omega_0 \tau) - A^2/2 \cos(\omega_0 (2t+\tau) + 2\theta) \right\} =$$

$$= A^2/2 \cos(\omega_0 \tau) - \underbrace{\underset{\theta}{E} \left\{ \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 (2t+\tau) + 2\theta) \right\}}_{=0 \text{ (si verifica dal calcolo)}}$$

Quindi: $R_y(\tau) = A^2/2 \cos(\omega_0 \tau)$

e $R_z(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) + P_X \, \text{sinc}^4\left(\frac{4\tau}{T}\right)$

Esercizio 3 (sistemi LTI)

Sia dato il seguente sistema LTI, per il quale è assegnata la seguente risposta all'impulso:

$$h(t)=\Pi\left(\frac{t-3}{4}\right)$$

Si richiede di:

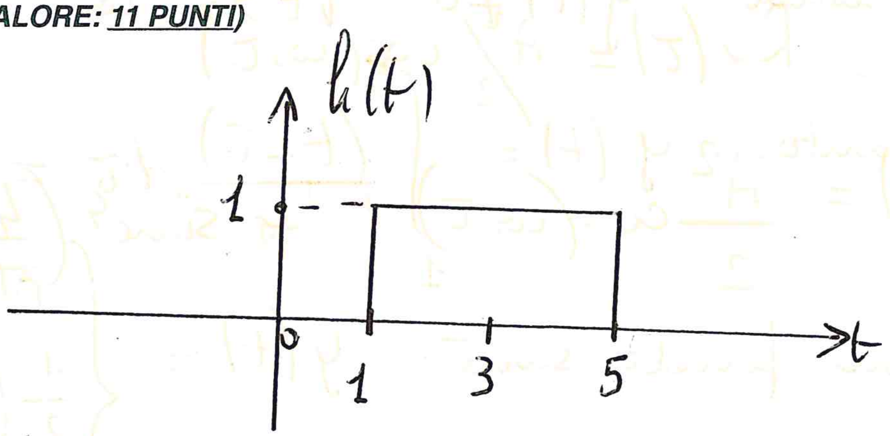
1) Indicare (motivando l'affermazione) se il sistema è causale;
2) Si richiede di calcolare la risposta del sistema al seguente ingresso:

$$u(t)=\left(\frac{t}{2}\right)1(t)$$

e di disegnarne il grafico.

UTILIZZARE SOLAMENTE LO SPAZIO BIANCO DISPONIBILE (FRONTE E RETRO) PER RISPONDERE (VALORE: <u>11 PUNTI</u>)

1)



$h(t) \equiv 0 \quad \forall t < 1$ sec. $\Rightarrow$ il sistema è causale

2) $$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau \qquad h(\tau) = \begin{cases} 1 & 1 \le \tau \le 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$y(t) \neq 0 \Leftrightarrow u(t-\tau)\, h(\tau) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-\tau)}{2}\, 1(t-\tau)\, u(\tau) \neq 0 \quad \forall t, \tau$$

Ciò avviene se:

$$1(t-\tau)\, u(\tau) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 1(t-\tau) \neq 0 \Rightarrow \tau \le t \\ u(\tau) \neq 0 \Rightarrow 1 \le \tau \le 5 \end{cases}$$

Poichè nella prima disequazione τ è confrontato con $t \in \mathbb{R}$, occorre distinguere tre casi:

i) $t < 1 \Rightarrow \tau > t \ \forall t \Rightarrow y(t) = 0$

ii) $1 \leq t \leq 5 \qquad y(t) \neq 0 \Leftrightarrow \tau \leq t \ \forall \tau : 1 \leq \tau \leq 5$

quindi: $$y(t) = \int_1^t \frac{(t-\tau)}{2} d\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\right)$$

iii) $t > 5$ poichè $1 \leq \tau \leq 5 \quad \tau < t \ \forall t$

e quindi: $y(t) \neq 0 \quad \forall t > 5$ con $1 \leq \tau \leq 5$

pertanto: $$y(t) = \int_1^5 \frac{(t-\tau)}{2} d\tau = 2(t-3)$$

L'espressione finale sarà: $$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\right) & 1 \leq t \leq 5 \\ 2(t-3) & t > 5 \end{cases}$$

GRAFICO