Esercizi di Teoria dei Segnali

Anno accademico 2017-2018

Argomento: SISTEMI LTI E CONVOLUZIONI ELEMENTARI

Esercizio 1

Determinare se sono lineari e tempo-invarianti i seguenti sistemi:

$$y(t) = 2x(t)\cos(t) \text{ (i)}$$
$$y(t) = x(t)e^{x(t)} \text{ (ii)}$$

Esercizio 2

Considerare il sistema LTI caratterizzato dalla risposta all'impulso:

$$h(t) = 2\delta(t-2) + 1(t-2)$$

Si richiede di:
1) Verificare che il sistema sia causale;
2) Calcolare la risposta del sistema al gradino unitario e disegnarne il grafico.

Esercizio 3

Considerare il sistema LTI causale caratterizzato dalla risposta all'impulso:

$$h(t) = e^{-t}1(t)$$

Si richiede di calcolare la risposta del sistema al segnale:

$$u(t) = 2rect\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

utilizzando la convoluzione nel dominio del tempo.

Esercizio 1

Primo sistema: $y(t) = 2x(t)\cos(t)$

Lineare? Proviamo, sulla base della definizione.

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = 2x_1(t)\cos(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = 2x_2(t)\cos(t)$

$[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \longrightarrow y_3(t) = 2[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]\cos(t) =$

$= 2\alpha x_1(t)\cos(t) + 2\beta x_2(t)\cos(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Sì, è lineare.

Tempo-invariante? No, perché è a coefficienti non costanti. È comunque:

$x(t) \longrightarrow y(t) = 2x(t)\cos(t)$

$x(t-\tau) \longrightarrow y_1(t) = 2x(t-\tau)\cos(t) \neq y(t-\tau)$

Esercizio 2

$h(t) = 2\delta(t-2) + 1(t-2) \Rightarrow$ è la SOMMA DI DUE FUNZIONI CAUSALI e quindi è CAUSALE.

$$y(t) = h(t) * 1(t) = 2\delta(t-2) * 1(t) + 1(t-2) * 1(t)$$

$$y(t) = \underbrace{2\,1(t-2)} + 1(t-2) * 1(t)$$

↳ per una nota proprietà della Delta di Dirac.

Interessante calcolare: $1(t) * 1(t-2) = 1(t-2) * 1(t)$

$$1(t-2) * 1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t-2-\tau)\, 1(\tau)\, d\tau$$

Bisogna analizzare dove l'integranda è diversa da zero (rispetto a τ, con $t \in \mathbb{R}$ parametro)

$$1(t-2-\tau)\, 1(\tau) \neq 0 \iff \tau \geq 0 \text{ e } \tau \leq (t-2)$$

quindi $\iff \boxed{0 \leq \tau \leq (t-2)}$ $t \in \mathbb{R}$

Per quale valore di t la disuguaglianza di sopra è verificata? Naturalmente per $\underline{t \geq 2}$.

Quindi: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 1(t-2-\tau)\, 1(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{(t-2)} 1\, d\tau \quad \underline{\forall t \geq 2}$

Altrimenti, $\underline{\text{l'integrale vale } 0.}$ (SISTEMA CAUSALE)

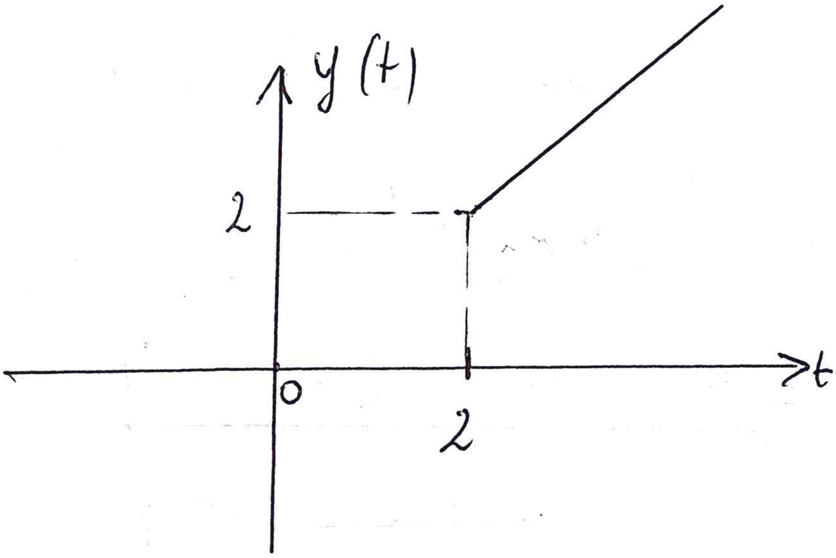
Alla fine otteniamo che:

$$1(t) * 1(t-2) = \begin{cases} (t-2) & t \geq 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases} =$$

$$= (t-2)\,1(t-2) \quad \text{da cui:}$$

$$y(t) = \cancel{2\,1(t-2)} + t\,1(t-2) \cancel{-2\,1(t-2)} =$$

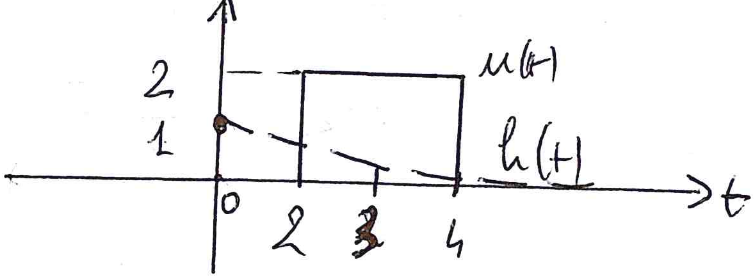
$$= t\,1(t-2)$$



$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$

$$y(t) = h(t) * u(t) \qquad h(t) = e^{-t}\,1(t)$$

$$u(t) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) = \begin{cases} 2 & 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

Quale delle due conviene? $u(\tau)$ è una costante a tratti nel dominio delle τ, mentre $h(\tau)$ è un'esponenziale. Conviene di più la seconda.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\tau)}\, 1(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

Solita domanda: quando e dove l'integranda è non nulla?

Risposta: quando $1(t-\tau)\, u(\tau) \neq 0$, ciò avviene se $\boxed{\tau \leq t \text{ e se } 2 \leq \tau \leq 4}$. t, al solito è un parametro <u>reale</u>. Bisogna capire per quali valori di t le due disuguaglianze sopra sono verificate. "Rovesciamo" la condizione su t:

(*) $t \geq \tau$ con $2 \leq \tau \leq 4$

se $t < 2$ (*) non è di sicuro verificata. Quindi l'integranda $\equiv 0$ per $t < 2$, $\forall \tau$.

se $t > 4$ (*) è SEMPRE verificata e quindi l'integranda sarà sempre $\neq 0$ $\forall \tau$

• se $t \in [2, 4]$, $(*)$ è verificata per quei valori di t che sono superiori a τ e quindi $\forall \tau \leq t$

Quindi l'integrando non è nullo vale $2e^{-(t-\tau)}$, per la somma!

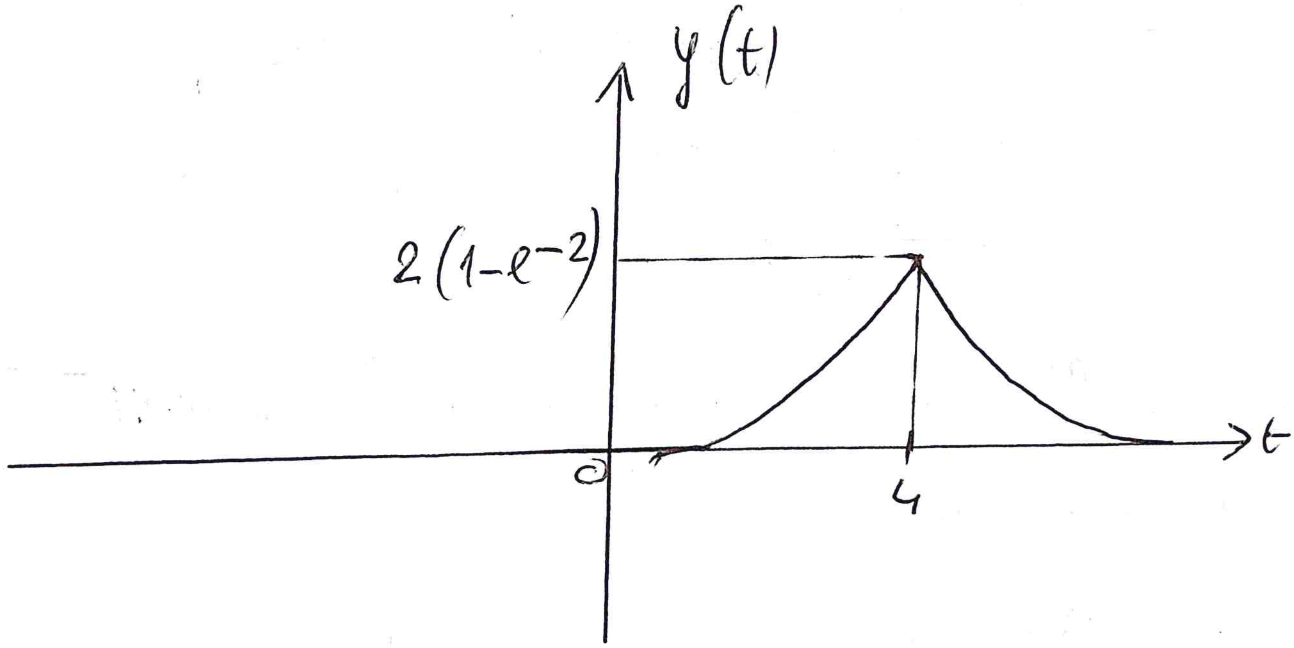
Quindi $*)$ $y(t) \equiv 0 \quad \forall t < 2$

$$**) \; y(t) = 2 \int_2^4 e^{-(t-\tau)} d\tau \quad \forall t > 4$$

$$***) \; y(t) = 2 \int_2^t e^{-(t-\tau)} d\tau \quad \forall t : t \in [2, 4]$$

Concludendo:

$$\begin{cases} y(t) = 0 & t < 2 \\ y(t) = 2\left\{1 - e^{-(t-2)}\right\} & 2 \leq t \leq 4 \\ y(t) = 2(e^4 - e^2)e^{-t} & t > 4 \end{cases}$$


y(t)
2(1-e^-2)
0
4
t