



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO**  
**ANNO ACCADEMICO 2012-2013**

**Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle  
Telecomunicazioni / Corso di Laurea in Ingegneria  
dell'Informazione e dell'Organizzazione d'Impresa**

**CORSO DI MODELLI STOCASTICI PER L'INGEGNERIA**

**ESERCIZIO 2 (anche recuperi seconda parte della prova scritta)**

Un processo aleatorio Gaussiano, stazionario  $n(t)$  a valor medio nullo e con densità spettrale di potenza pari a  $N_0/2$  per  $|f| \leq B$  e 0 altrove, passa attraverso un sistema lineare e tempo-invariante che ha la seguente risposta all'impulso:

$$h(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t - T)$$

Si denoti con  $x(t)$  il processo aleatorio così generato. Sotto queste ipotesi si richiede di:

- 1) Calcolare la densità spettrale di potenza e la potenza media del processo aleatorio  $x(t)$ .
- 2) Calcolare l'espressione analitica della densità di probabilità del processo aleatorio  $x(t)$  nonché la probabilità che  $x(t)$  assuma valori compresi tra 0 e metà della sua deviazione standard.
- 3) Si supponga di elevare al quadrato  $x(t)$ , ottenendo un processo aleatorio  $y(t)$ . Calcolare il valor medio di  $y(t)$ .

Es. 2

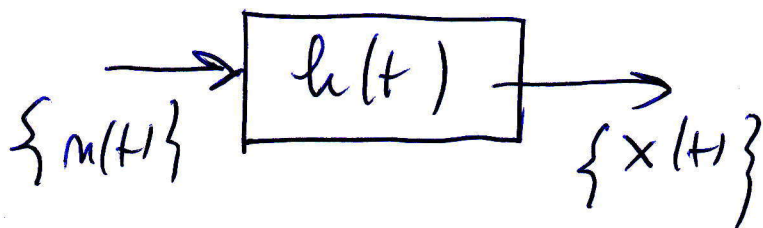
(2)

DOMANDA 1

$n(t)$  processo Gaussiano a media nulla

$$(E(n(t))=0)$$

$$e S_n(f) = \begin{cases} N_0/2 & |f| \leq B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2} \delta(t - T)$$

$$S_x(f) = |H(f)|^2 S_n(f)$$

$$|H(f)|^2 = \left| 1 + \frac{1}{2} e^{-2\pi j f T} \right|^2 =$$

$$= \left| \left( 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi f T) \right) - j \frac{1}{2} \sin(2\pi f T) \right|^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \cos(2\pi f T) = \frac{5}{4} + \cos(2\pi f T)$$

$$S_x(f) = \begin{cases} N_0/2 \left[ \frac{5}{4} + \cos(2\pi f T) \right] & |f| \leq B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\bar{P}_x = \int_{-B}^B \frac{N_0}{2} \left[ \frac{5}{4} + \cos(2\pi f T) \right] df = \quad (2)$$

(integrale Lamele...)

$$= \frac{5}{4} N_0 B + \frac{N_0}{2\pi T} \sin(2\pi T B) \quad (\text{potenza media})$$

**Es. 2 - Dom. 2**

$X(t)$  è distribuito in maniera Gaussiana, poiché ~~SS e trasformata~~ ottenuto dalla trasformazione LTI di un processo SSL.

Quindi:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-x^2/2\sigma_x^2} \quad \text{poiché:}$$

$$E\{X(t)\} = E\{n(t)\} H(0) = 0$$

e dove  $\sigma_x^2 = \bar{P}_x$

$$P\left\{0 \leq x \leq \frac{\sigma_x}{2}\right\} = 1 - Q\left(\frac{\sigma_x/2}{\sigma_x}\right) - 1 + Q(0) = Q(0) - Q(0.5) = 0.2$$



# Es. 2 - Dom. 3

(3)

$$Y(t) = x^2(t) \rightarrow E\{Y(t)\} = ?$$

Conviene operare sulla media di insieme di  $y(t) = [u(t) * n(t)]^2 = \left[ n(t) + \frac{1}{2} n(t - T) \right]^2$ :

$$E\{Y(t)\} = E\left\{ \left[ n(t) + \frac{1}{2} n(t - T) \right]^2 \right\} =$$

$$= E\left\{ n^2(t) + \frac{1}{4} n^2(t - T) + n(t) n(t - T) \right\} =$$

$$= \sigma_n^2 + \frac{1}{4} \sigma_n^2 + E(n(t) n(t - T)) =$$

poiché  
 $n(t)$  è  
 SSL!

→ autocorrelazione  
 di  $n(t)$

$$= \sigma_n^2 + \frac{1}{4} \sigma_n^2 + R_n(T)$$

ove:

$$\sigma_n^2 = \bar{P}_n = \int_{-B}^B \frac{N_0}{2} df = N_0 B$$

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_n(f)\} = N_0 B \text{sinc}(2B\tau) \text{ da cui}$$

$$R_n(T) = N_0 B \text{sinc}(2BT) \text{ ed il calcolo è completo!}$$