UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Ingegneria
e Scienza dell'Informazione

Teoria dei Segnali

Parte Prima: Segnali e Sistemi

Lezione 5: Esempi di processi aleatori

Docente: Prof. Claudio Sacchi

Contenuti

- Processo binario casuale;
- Processo cosinusoidale;
- Processo di Poisson;
- Processo telegrafico casuale;
- Rumore bianco.

Premessa

- In questo capitolo mostreremo alcuni esempi didattici (ma anche tecnologici) di processi aleatori significativi;

- Per ognuno di questi processi discuteremo le proprietà di stazionarietà (in senso lato), calcolandone quindi il valor medio e l'autocorrelazione;

- Laddove possibile, discuteremo anche l'ergodicità degli esempi forniti.

Processo binario casuale

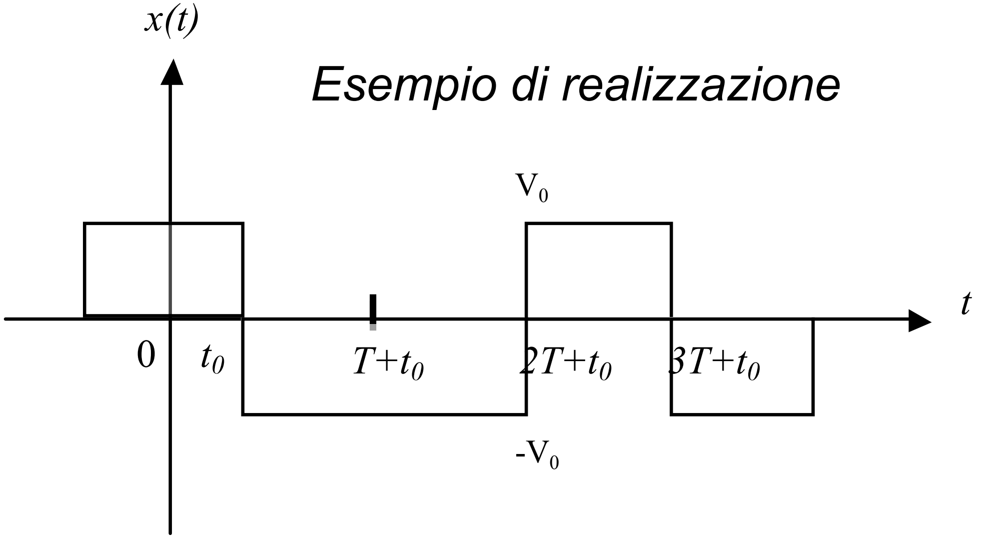
- **Definizione**
  - Il processo binario casuale è una successione di impulsi ad onda quadra di durata fissata pari a T secondi (detta: *periodo di segnalazione*) ed il cui valore può essere pari a $+V_0$ o $-V_0$;

  - Nel processo binario casuale, l'emissione dei due stati (positivo o negativo) ogni T secondi è del tutto casuale ed il valore in un periodo è statisticamente indipendente dal valore nei periodi precedenti o successivi (in pratica, ogni T secondi si rilancia la monetina);

  - I due valori sono equiprobabili ed, infine, il ritardo iniziale del processo (t_0) è ignoto, generalmente compreso tra 0 e T.

Processo binario casuale

- **Realizzazioni del processo aleatorio**
  - Si tratta di un processo parametrico a tempo-discreto la cui ampiezza è una variabile aleatoria binaria a valori equiprobabili ed il cui ritardo iniziale t_0 è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e T:



Processo binario casuale

- **Calcolo del valor medio**
  - Il processo aleatorio, in qualunque istante *t* e per qualunque realizzazione noi consideriamo potrà assumere solo due valori: $+V_0$ e $-V_0$ con probabilità pari a 0.5;
  - Il valor medio è pertanto calcolato facilmente ed è pari a zero (si poteva anche capire osservando le realizzazioni):

$$E\left\{x\left(t\right)\right\} = \frac{1}{2}V_0 + \frac{1}{2}\left(-V_0\right) = 0$$

Processo binario casuale

- **Calcolo dell'autocorrelazione (1)**
  - Questo calcolo è un po' più complicato, perché dipende da dove sono messi t_1 e t_2 rispetto a T;
  - Si distinguono <u>tre casi distinti</u> (supponiamo $t_1 > t_2$):

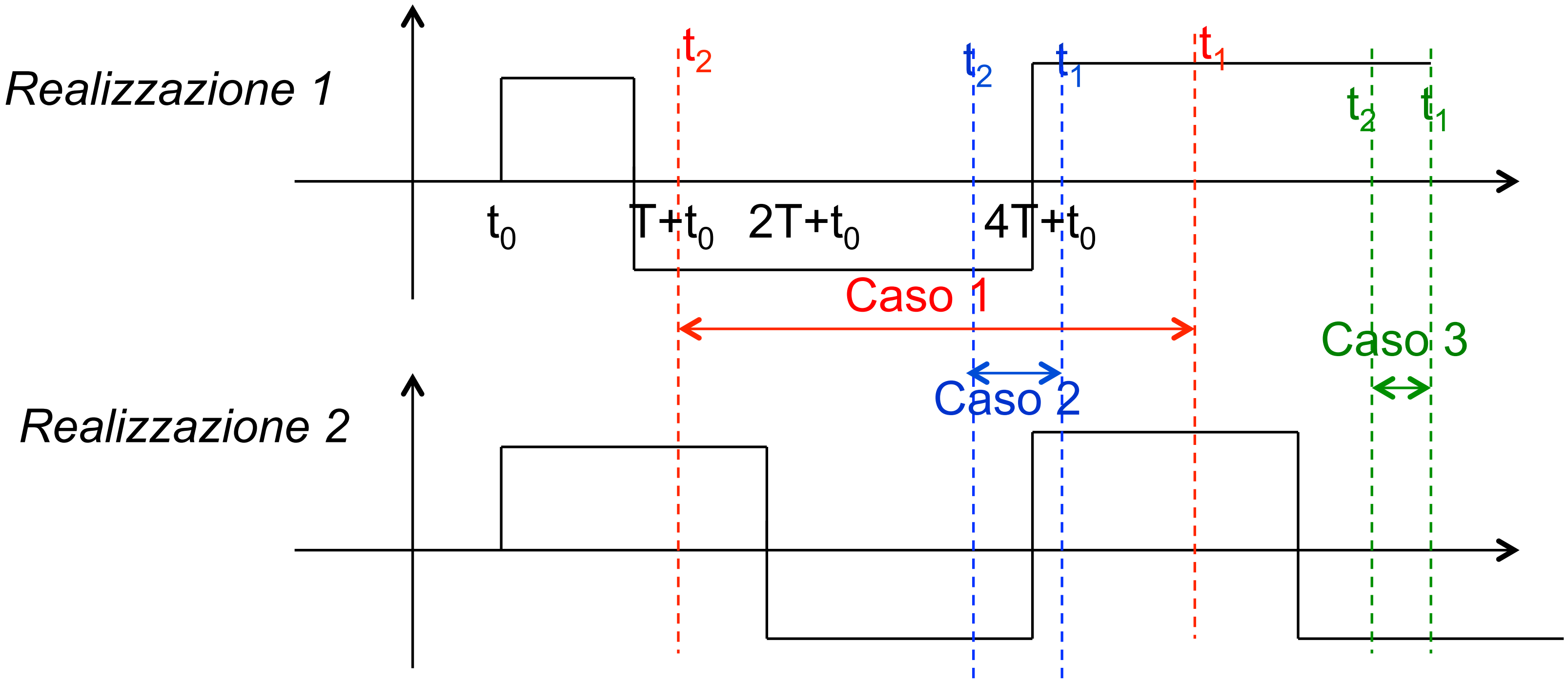
$$E\{x(t_1)x(t_2)\} = \begin{cases} E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\} = 0 & se \quad (t_1 - t_2) \geq T \\ E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\} = 0 & se \quad (t_1 - t_2) < T \,\&\, (t_2 \leq t_0 \leq t_1) \\ V_0^2 & se \quad (t_1 - t_2) < T \,\&\, (t_1 > t_2 > t_0 \, OR \, t_0 < t_2 < t_1) \end{cases}$$

Processo binario casuale

- **Calcolo dell'autocorrelazione (2)**
  - Spiegazione dei tre casi:
    - Nel primo caso, t_1 e t_2 sono in intervalli di segnalazione diversi e lontani e quindi l'emissione dei due valori è statisticamente indipendente, pertanto la media del prodotto delle due variabili aleatorie è uguale al prodotto delle medie (che sono zero);
    - Nel secondo caso, t_1 e t_2 sono posti in intervalli di segnalazione diversi, ma adiacenti. Il valore dell'autocorrelazione è nuovamente nullo perché l'emissione dei due valori è statisticamente indipendente;
    - Nel terzo caso, t_1 e t_2 sono posti nello stesso intervallo di segnalazione. In questo caso, il valore di $x(t)$ nei due istanti è lo stesso per entrambi. In tal caso, la media del prodotto è costante ed è pari al quadrato di V_0.

Processo binario casuale

- **Calcolo dell'autocorrelazione (3)**
  - Questo grafico può (forse) essere d'aiuto:



Processo binario casuale

- **Calcolo dell'autocorrelazione (4)**
  - L'autocorrelazione non vale zero solo nel caso 3, calcoliamo tale valore:

$$R_x\left(t_1,t_2\right)=V_0^2\,\Pr\left\{t_1>t_2>t_0\,OR\,t_0<t_2<t_1\right\}\quad \forall t_1,t_2:\left(t_1-t_2\right)<T\quad t_1>t_2$$

  - Dato che t_0 è uniformemente distribuita tra 0 e T:

$$R_x\left(t_1,t_2\right)=V_0^2\left[1-\Pr\left\{t_1<t_0<t_2\right\}\right]\quad \forall t_1,t_2:\left(t_1-t_2\right)<T\quad t_1>t_2$$

$$R_x\left(t_1,t_2\right)=V_0^2\left[1-\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{T}dt\right]=V_0^2\left[1-\frac{\left(t_1-t_2\right)}{T}\right]\quad \forall t_1,t_2:\left(t_1-t_2\right)<T\quad t_1>t_2$$

Processo binario casuale

- **Calcolo dell'autocorrelazione (5)**
  - Se $t_2 > t_1$ si ottiene la stessa cosa, a segni invertiti e quindi:

$$R_x(t_1,t_2) = V_0^2\left[1-\frac{|t_1-t_2|}{T}\right] \quad \forall t_1,t_2 : |t_1-t_2| < T$$

  - Mentre, se il modulo della differenza tra i due istanti di tempo è maggiore di T, rientriamo nel caso 1 e l'autocorrelazione vale zero. L'espressione completa sarà pertanto:

$$R_x(t_1,t_2) = V_0^2\left[1-\frac{|t_1-t_2|}{T}\right] \quad \forall t_1,t_2 : |t_1-t_2| < T$$

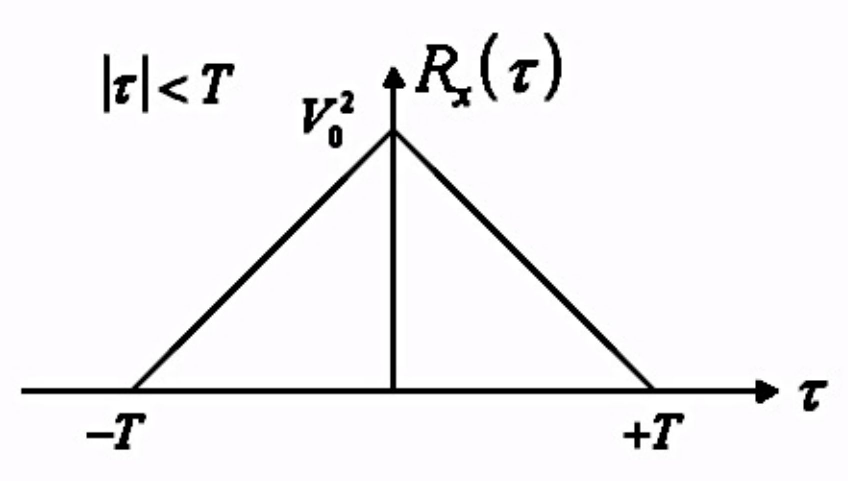
$$R_x(t_1,t_2) = 0 \quad \forall t_1,t_2 : |t_1-t_2| \geq T$$

Processo binario casuale

- **Analisi di stazionarietà**
  - Il processo binario casuale è quindi stazionario in senso lato. La sua autocorrelazione può quindi essere espressa come:

$$R_x(\tau) = V_0^2\left[1 - \frac{|\tau|}{T}\right] \quad |\tau| < T$$

$$R_x(\tau) = 0 \quad |\tau| \geq T \qquad P_x = R_x(0) = V_0^2$$



L'autocorrelazione è una funzione triangolare, che, analiticamente, si esprime con la seguente notazione:

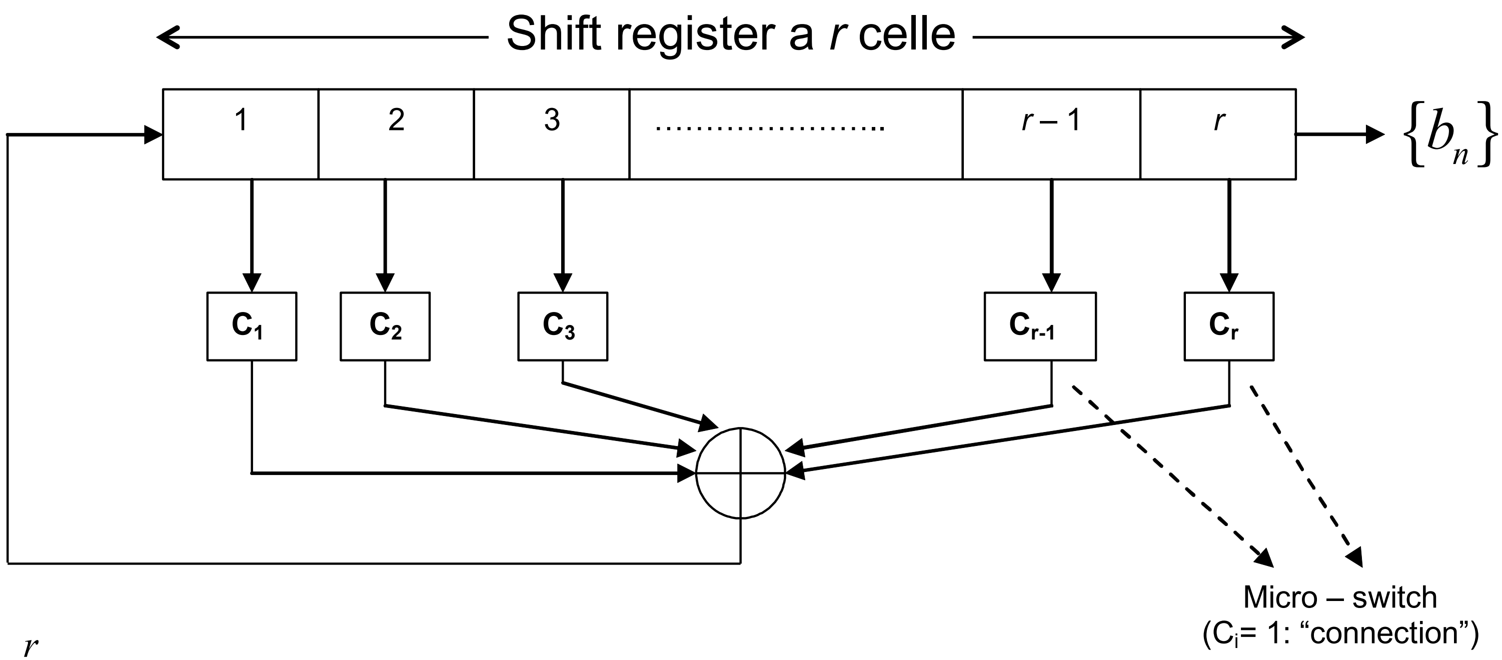
$$R_x(\tau) = V_0^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

Processo binario casuale

- **Analisi di ergodicità**
  - Il processo binario casuale è sicuramente ergodico in media, poiché la media temporale di tutte le realizzazioni è sicuramente pari a zero e coincide con la media statistica;
  - Per capire se è ergodico rispetto all’autocorrelazione, occorre calcolare l’autocorrelazione temporale su una realizzazione generica del processo e verificare che coincida con la funzione triangolo;
  - Si può verificare (omettiamo i calcoli) che questo è vero. Quindi il processo binario casuale è ergodico sia rispetto alle statistiche di primo che di secondo ordine.

Processo binario casuale

- **Esempio di generatore di segnale binario (pseudo)-casuale**



$$b_n = \sum_{i=1}^{r} C_i b_{n-i} \quad b_n \in \{0,1\} \quad C_i \in \{0,1\}$$

La sommatoria è <u>logica</u> (EXOR), non aritmetica

Processo cosinusoidale

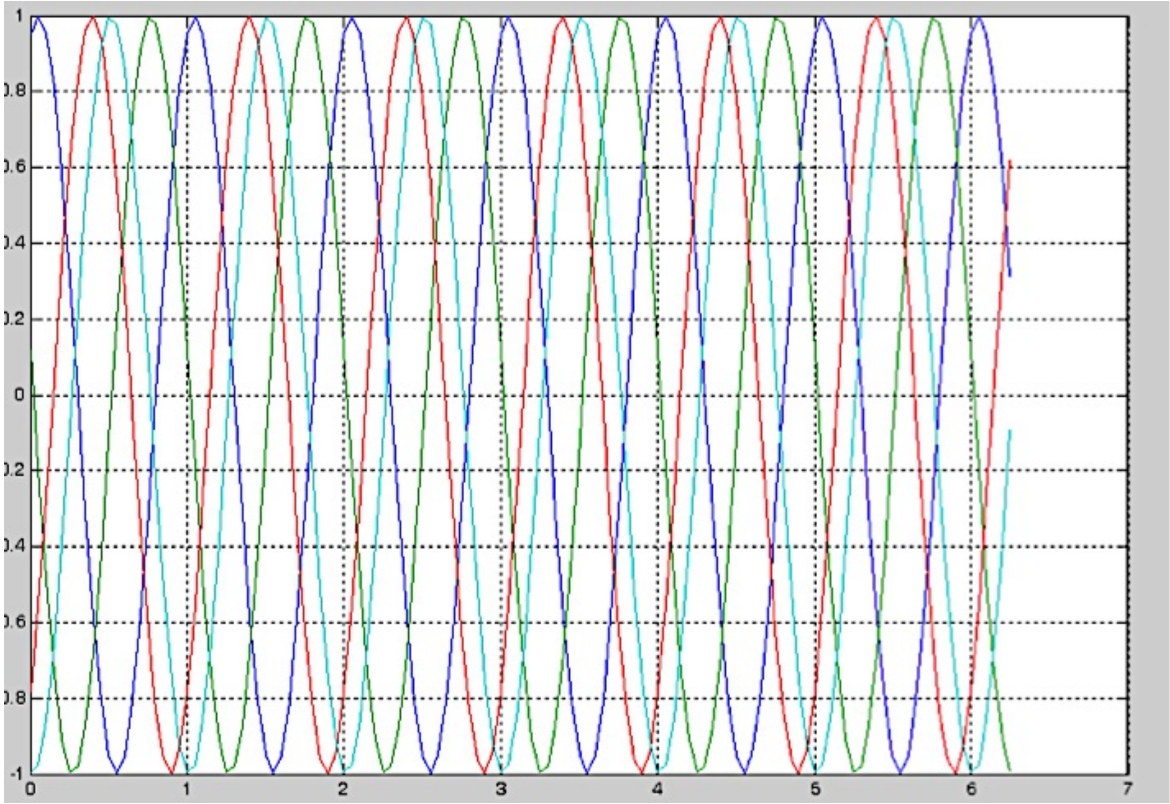
- **Definizione**
  - E' un processo parametrico a tempo-continuo, le cui realizzazioni sono funzioni sinusoidali con ampiezza e frequenza fissate e fase iniziale ignota (è una variabile aleatoria);
  - Questa è la tipica uscita di circuiti oscillanti, i quali sono (o almeno dovrebbero) essere stabili per quel che riguarda la l'ampiezza e la frequenza, ma l'istante iniziale di generazione del segnale (ovvero la sua fase) non può essere predetto;
  - E' un meccanismo simile a quello visto per il processo binario casuale. Diverse sono le funzioni generate.

Processo cosinusoidale

- **Definizione**
  - E’ un processo parametrico a tempo-continuo, le cui realizzazioni sono funzioni sinusoidali con ampiezza e frequenza fissate e fase iniziale ignota (è una variabile aleatoria);
  - Questa è la tipica uscita di circuiti oscillanti, i quali sono (o almeno dovrebbero) essere stabili per quel che riguarda la l’ampiezza e la frequenza, ma l’istante iniziale di generazione del segnale (ovvero la sua fase) non può essere predetto;
  - E’ un meccanismo simile a quello visto per il processo binario casuale. Diverse sono le funzioni generate.

Processo cosinusoidale

- **Realizzazioni del processo cosinusoidale**



Sono sinusoidi sfasate l'una rispetto all'altra in maniera casuale, ma con periodo ed ampiezza fissate.
La fase è uniformemente distribuita in [0,2pi]

Processo cosinusoidale

- **Calcolo del valor medio e dell'autocorrelazione**

$$E\{x(t)\} = \int_0^{2\pi} A\cos(\omega_0 t + \Phi)\frac{1}{2\pi}d\Phi = \frac{A}{2\pi}[\sin(\omega_0 t + 2\pi) - \sin\omega_0 t] = 0$$

Per una delle **note proprietà** del valor medio di variabili aleatorie trasformate

$$E\{x(t_1)x(t_2)\} = A^2 E\{\cos(\omega_0 t_1 + \Phi)\cos(\omega_0 t_2 + \Phi)\} =$$

$$= \frac{A^2}{2}E\{\cos(\omega_0(t_1 - t_2))\} + \frac{A^2}{2}E\{\cos(\omega_0(t_1 + t_2 + 2\Phi))\} = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0(t_1 - t_2))$$

=0 (vedi sopra)

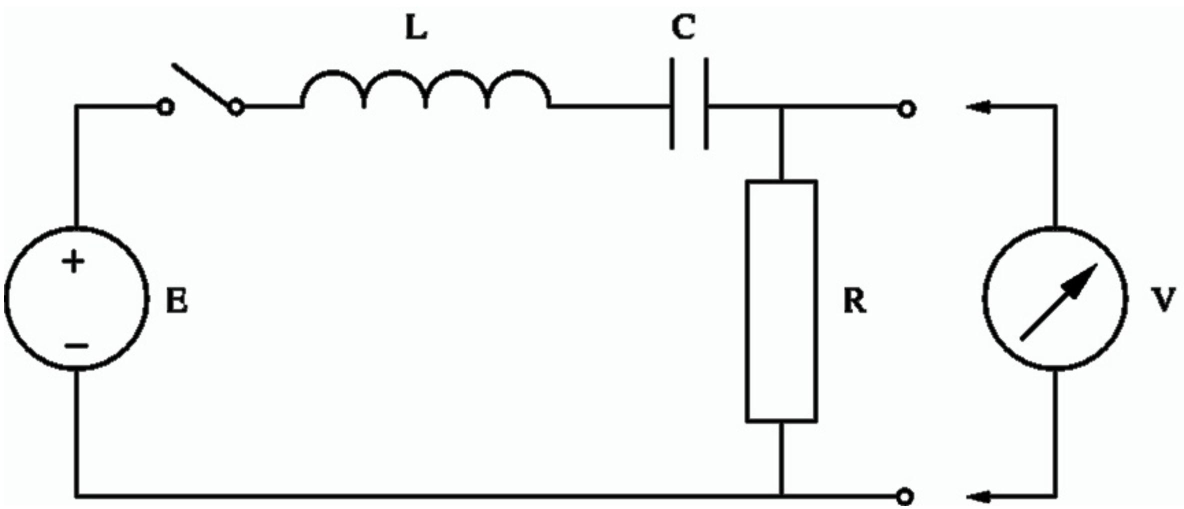
Processo cosinusoidale

- **Analisi di stazionarietà ed ergodicità**
  - E’ evidente che il processo cosinusoidale è stazionario in senso lato. La sua potenza media è pari ad $A^2/2$;
  - E’ anche un processo ergodico, sia rispetto alla media che rispetto all’autocorrelazione. E’ evidente, infatti, che la media temporale delle singole realizzazioni è nulla (sono sinusoidi), mentre si verifica che l’autocorrelazione temporale delle sinusoidi sfasate è pari a quella statistica (vedi libro Vitetta per i calcoli):

$$\lim_{W \to +\infty} \frac{1}{W} \int_{-W}^{W} A \cos(\omega_0 t + \Phi) \cos(\omega_0 (t + \tau) + \Phi) dt = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

Processo cosinusoidale

- **Esempio di circuito oscillante (generatore di segnali sinusoidali)**



$$V(t) \approx \sqrt{2E}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}+\theta\right)$$

A meno di smorzamenti dovuti all'effetto Joule su *R*.
La fase iniziale teta non è sempre nota (variabile aleatoria) a causa di non idealità nel circuito.

Processo di Poisson

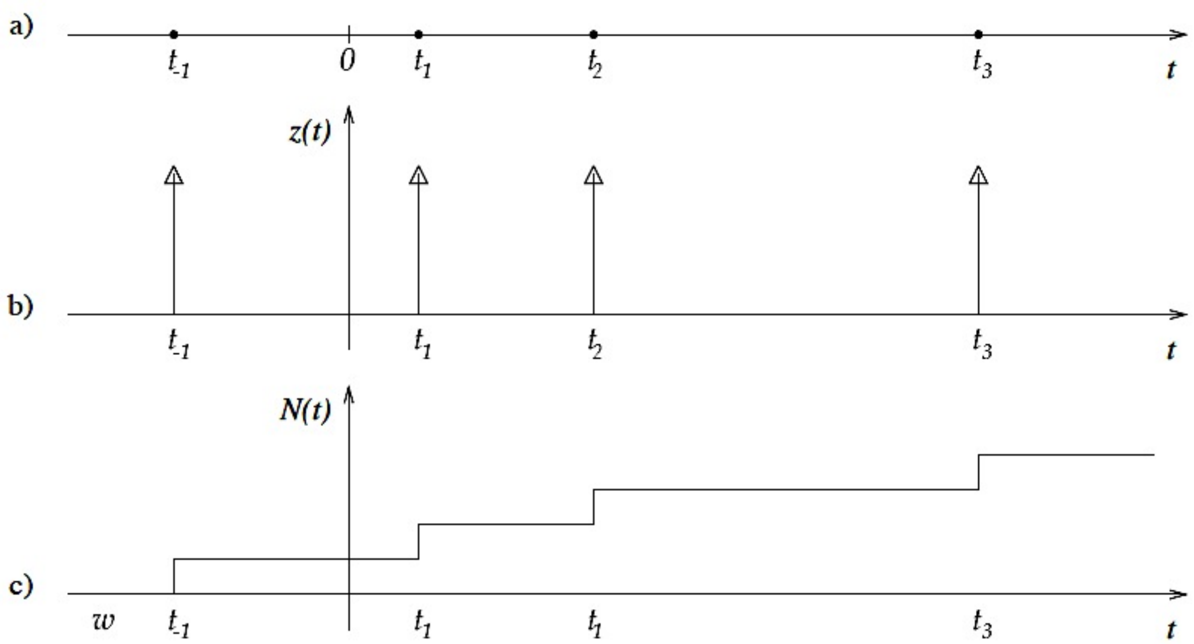
- **Definizione**
  - E' detto processo di Poisson, un processo *x(t)* a valori discreti la cui funzione-frequenza è la seguente:

$$\Pr\{x(t)=k\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

  - Il parametro *lambda* è detto frequenza di Poisson (è in effetti misurata in sec^{-1}), o anche densità;
  - I processi di Poisson sono legati a fenomeni statistici quali conteggi di chiamate telefoniche, arrivi di pacchetti nelle code dei server di rete, ecc. Lambda è il numero medio di arrivi al secondo.

Processo di Poisson

- **Esempio di realizzazione del processo di Poisson**



a) Asse temporale, b) Realizzazione puntuale (ogni arrivo è un impulso), c) Contatore associato x(t) nelle slides.

Processo di Poisson

- **Calcolo di valor medio ed autocorrelazione**
  - Il valor medio del processo di Poisson è il seguente:

$$E\{x(t)\}=\sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=(\lambda t)e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}=(\lambda t)$$

  - E' sufficiente a dire che il processo di Poisson <u>non è stazionario</u> (e, quindi, nemmeno ergodico);
  - L'autocorrelazione si può calcolare in maniera analoga (omettiamo i calcoli, che sono pesanti):

$$E\{x(t_1)x(t_2)\}=e^{-2\lambda|t_1-t_2|}$$

L'autocorrelazione, però, <u>soddisfa la condizione di stazionarietà</u>, pur non essendo il processo stazionario!

Processo telegrafico casuale

- **Definizione**
  - Si definisce processo telegrafico casuale un processo aleatorio binario parametrico ad onda quadra che assume valori + 1 o -1 in dipendenza di un arrivo di Poisson *A(t)*;

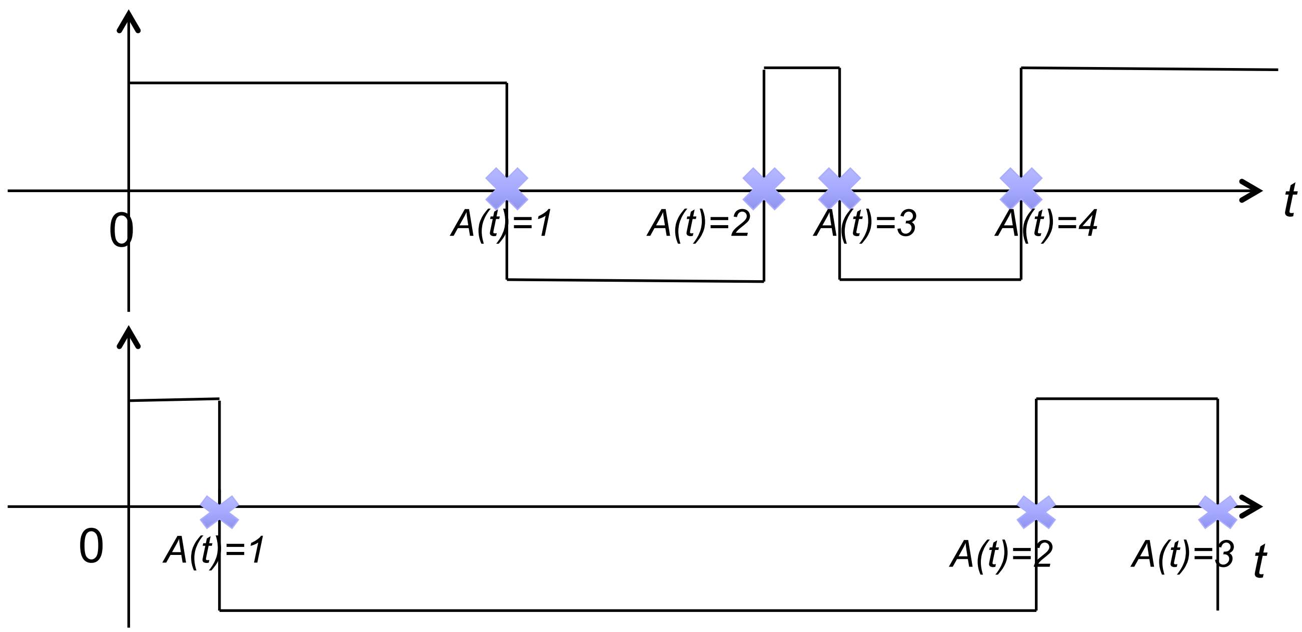
  - Fissiamo il valore nell'origine dei tempi: supponiamo che in *t*=0, il processo di Poisson valga +1. Esso cambierà valore e passerà a -1 se in *[0,t]* si verifica un arrivo di Poisson e ritornerà a +1 se si verifica un secondo arrivo e così via;

  - La regola generale è quindi la seguente:

$$x(t) = \begin{cases} +1 & \text{se } A(t) \text{ e' pari} \\ -1 & \text{se } A(t) \text{ e' dispari} \end{cases}$$

Processo telegrafico casuale

- **Esempi di realizzazioni**
  - Sono successioni di impulsi binari <u>causali</u>, ad onda quadra <u>di durata variabile</u> (dipende dal valore di *A(t)*):



Processo telegrafico casuale

- **Calcolo del valor medio (1)**
  - Il valor medio è condizionato da *A(t)*, per cui si deve utilizzare il teorema di Bayes:

$$E\{x(t)\} = 1 \cdot \Pr\{A(t)\,pari\} - 1 \cdot \Pr\{A(t)\,dispari\}$$

  - Le due probabilità dell'equazione soprastante si possono calcolare nella seguente maniera:

$$\Pr\{A(t)\,pari\} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda t}\left[\frac{e^{+\lambda t}+e^{-\lambda t}}{2}\right] = \frac{1+e^{-2\lambda t}}{2}$$

$$f(t) = \left[\frac{e^{+\lambda t}+e^{-\lambda t}}{2}\right]$$

è conosciuta con il nome di coseno iperbolico (o curva catenaria)

Processo telegrafico casuale

- **Calcolo del valor medio (2)**
  - Continuiamo con il calcolo di:

$$\Pr\{A(t)\,dispari\} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-\lambda t}\left[\frac{e^{+\lambda t}-e^{-\lambda t}}{2}\right] = \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2}$$

$$g(t) = \left[\frac{e^{+\lambda t}-e^{-\lambda t}}{2}\right]$$

è conosciuta con il nome di seno iperbolico

  - A questo punto si ottiene il valor medio:

$$E\{x(t)\} = e^{-2\lambda t}$$

Il processo aleatorio non è stazionario e quindi nemmeno ergodico (potevamo aspettarcelo)

Processo telegrafico casuale

- **Calcolo dell'autocorrelazione**
  - Non preoccupiamoci (per ora) del valor medio non stazionario e proviamo a calcolare l'autocorrelazione del processo;
  - Il calcolo è il seguente:

$$E\left\{x(t_1)x(t_2)\right\} = +1\Pr\left\{A(t_1-t_2)\,pari\right\} - 1\Pr\left\{A(t_1-t_2)\,dispari\right\} = e^{-2\lambda(t_1-t_2)}$$

$$t_1 > t_2$$

  - Ed, in conclusione: $E\left\{x(t_1)x(t_2)\right\} = e^{-2\lambda\left|(t_1-t_2)\right|}$

Processo telegrafico casuale

- **Processo telegrafico casuale stazionario (1)**
  - Esiste una versione stazionaria in senso lato del processo telegrafico casuale?
  - La risposta è si, ma bisogna rimuovere l'ipotesi che il processo in t=0 parta da +1. Se supponiamo di non conoscere il valore di partenza del processo, ovvero:

$$y(t) = ax(t)$$

  - *a* variabile aleatoria binaria che vale +1 o -1 con probabilità 0.5, indipendente da *x(t)*. Sotto queste ipotesi, andiamo a ricalcolare le statistiche.

Processo telegrafico casuale

- **Processo telegrafico casuale stazionario (2)**
  - Calcolo valor medio:

$$E\{y(t)\} = E\{a\} \cdot E\{x(t)\} = 0 \quad \text{poichè } E\{a\} = 0$$

  - E dell'autocorrelazione:

$$E\{y(t_1)y(t_2)\} = E\{ax(t_1) \cdot ax(t_2)\} = E\{a^2\} \cdot R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$$

  - <u>Ora il processo è stazionario</u>, come volevasi dimostrare. Quindi il processo telegrafico casuale diviene stazionario quando non è noto a priori il suo valore iniziale.

Rumore bianco

- **Definizione**
  - E' un processo aleatorio molto particolare. E' un processo ergodico a tempo continuo e valori reali, caratterizzato dalle seguenti statistiche di primo e second'ordine:

$$E\{x(t)\}=0 \qquad R_x(t_1,t_2)=\frac{\eta}{2}\delta(t_1-t_2)$$

  - L'autocorrelazione è identicamente nulla per istanti di tempo diversi e va all'infinito se t_1 e t_2 coincidono;
  - In pratica, questo processo aleatorio non ha alcuna memoria. I campioni in istanti diversi sono statisticamente indipendenti. La generazione di un campione non influenza in alcun modo la generazione di un campione successivo.

Rumore bianco

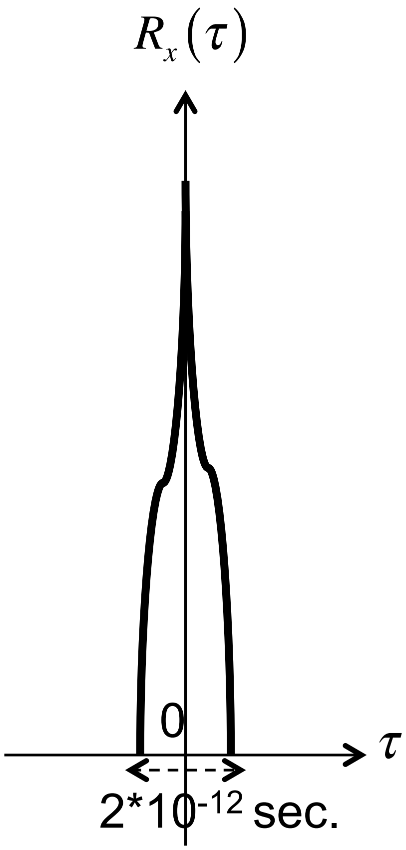
- **Implicazione immediata**
  - Il rumore bianco è un processo <u>a potenza media infinita</u> (l'autocorrelazione in 0). Questo, apparentemente, va contro quanto finora detto sui segnali reali, ovvero che hanno energia finita;
  - Inoltre, appare poco realistico che un processo a tempo-continuo sia "senza memoria" (ciò significa che "lancio la monetina" infinite volte in infiniti istanti di tempo);
  - Infatti, il rumore bianco <u>non è un processo reale</u>, ma è un'ottima approssimazione matematica per parecchi processi reali di interesse tecnico;

Rumore bianco

- **Esempio: rumore termico**
  - Un esempio molto importante di rumore bianco è il rumore termico prodotto da una resistenza o un componente elettrico/elettronico;
  - Il rumore termico è una tensione parassita misurata ai capi di un conduttore per il solo fatto che si trova a temperatura termodinamica superiore a 0°K (ovvero: sempre);
  - La presenza di energia termodinamica, produce un moto spontaneo (e casuale) degli elettroni dentro il conduttore, che si traduce in corrente elettrica e quindi in tensione.

Rumore bianco

- **Rumore termico reale (1)**
  - La Fisica quantistica ha analizzato il fenomeno del rumore termico;
  - Il rumore termico è una sequenza di impulsi di corrente di ampiezza aleatoria, che arrivano ad un tempo aleatorio: ogni impulso corrisponde ad un elettrone che si muove nel conduttore. La durata degli impulsi è di circa 1 picosecondo;
  - Ha senso considerare gli impulsi di corrente tra loro scorrelati (sono generati da elettroni che si muovono in maniera indipendente). Quindi, la funzione di autocorrelazione sarà pressoché nulla per un ritardo maggiore (in modulo) di un picosecondo: a lato è descritto un andamento di massima.



Rumore bianco

- **Rumore termico "bianco" (1)**
  - Per un'autocorrelazione del tipo mostrato in precedenza, appare del tutto sensato pensare ad un modello matematico "bianco", basato sulla delta di Dirac;
  - E' vero che la potenza di questo processo è infinita, ma come vedremo in seguito, quando un rumore bianco viene processato, la sua potenza diviene finita;
  - Si assume, in particolare che il rumore termico abbia la seguente autocorrelazione "bianca":

$$R_x(\tau) \approx 2RkT_R\delta(\tau)$$

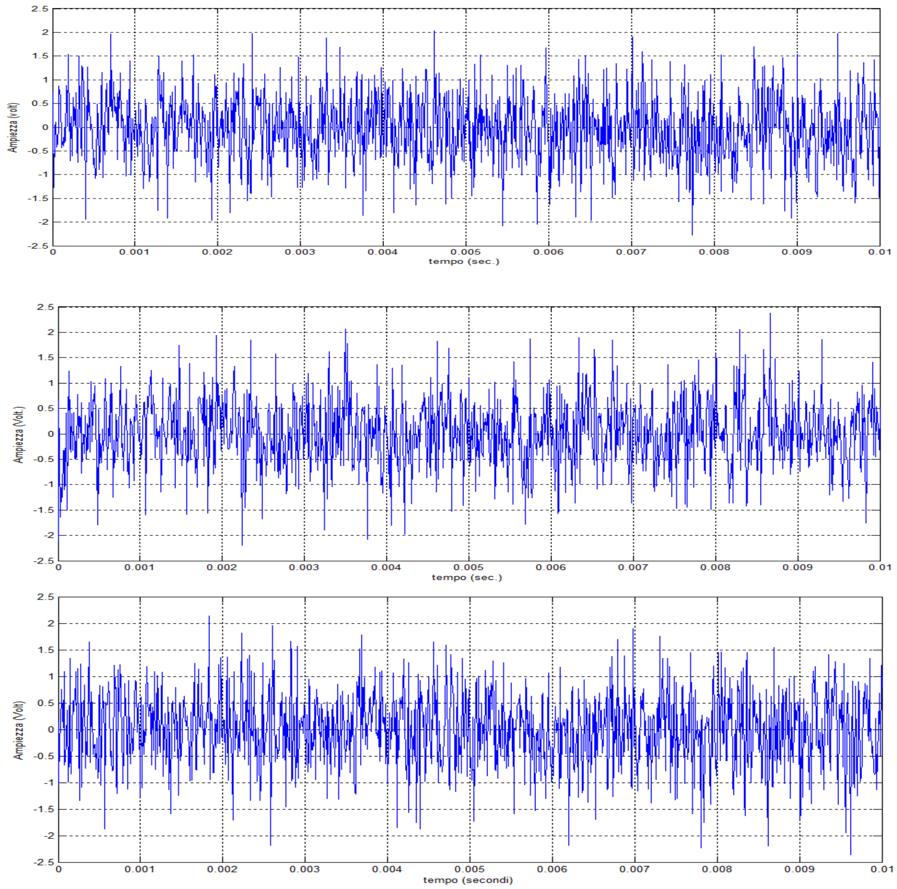
R= resistenza del conduttore (Ohm)
k=costante di Boltzmann ($1.38*10^{-23}$ J/°K)
T_R=temperatura termodinamica del conduttore (°K)

Rumore bianco

- **Rumore termico "bianco" (2)**
  - Domanda: qual è la distribuzione statistica dei campioni del rumore bianco? Si può rispondere pensando a come è fatto il processo: l'energia termica muove un gran numero di elettroni, i quali generano ognuno un piccolissimo impulso di corrente;
  - Le piccolissime correnti si sommano insieme, dando luogo al processo aleatorio. Siamo nelle ipotesi classiche del teorema del limite centrale. Pertanto, possiamo dire che il rumore termico è distribuito in maniera Gaussiana;
  - Si tratta, pertanto di un rumore Gaussiano, bianco, che si somma al segnale desiderato (additivo). Questo genere di rumori è identificato dall'acronimo inglese **AWGN** (Additive White Gaussian Noise), che hanno una rilevanza enorme nell'Ingegneria.

Rumore bianco

- **Esempi di realizzazioni del rumore bianco**



- L'andamento analitico della famiglia di funzioni componenti il p.a. **è assolutamente caotico** e non descrivibile mediante forme matematiche note;
- Dalle singole realizzazioni si può evincere che il valor medio del p.a. è nullo. Da qui si può arguire **l'ergodicità** del rumore bianco;
- Campionando (in verticale) la famiglia di funzioni in diversi istanti di tempo, i campioni appaiono effettivamente **scorrelati** (non presentano particolari similarità).