Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica
A.A. 2013-2014

Linguaggi Formali e Compilatori

Automi

Giacomo PISCITELLI

Automi

Generalità sugli Automi

In informatica teorica e in matematica discreta, un **automa** è un dispositivo di calcolo ideale, o un suo modello in forma di macchina sequenziale, creato per eseguire un particolare compito, di solito costituito da operazioni elementari semplici.

Il dispositivo automa può trovarsi in diverse **configurazioni**, più o meno complesse, caratterizzate primariamente da una variabile che appartiene ad un determinato insieme di **stati**, e che evolve in base agli stimoli od ordini ricevuti in ingresso, schematizzati da simboli appartenenti ad un determinato alfabeto.

Quando l'automa si trova in un dato stato, esso può accettare solo un sottoinsieme dei simboli del suo alfabeto. L'evoluzione di un automa parte da un particolare stato detto **stato iniziale**. Un sottoinsieme privilegiato dei suoi stati è detto insieme degli **stati finali** o *marcati*.

Automi

In teoria dei sistemi un automa si definisce anche come un sistema dinamico (evolve nel tempo), discreto (nella scansione del tempo e nella descrizione del suo stato) e invariante (il sistema si comporta alla stessa maniera indipendentemente dall'istante di tempo in cui agisce).

Nel corso della storia della teoria dei linguaggi e degli automi, gli automi sono andati arricchendosi, come testimoniano la macchina di calcolo di Turing e gli automi di Chomsky per le varie costruzioni del linguaggio naturale.

In realtà molto pochi degli automi proposti sono impiegati nell'elaborazione dei linguaggi di programmazione. E nel seguito ci si limiterà a tali automi.

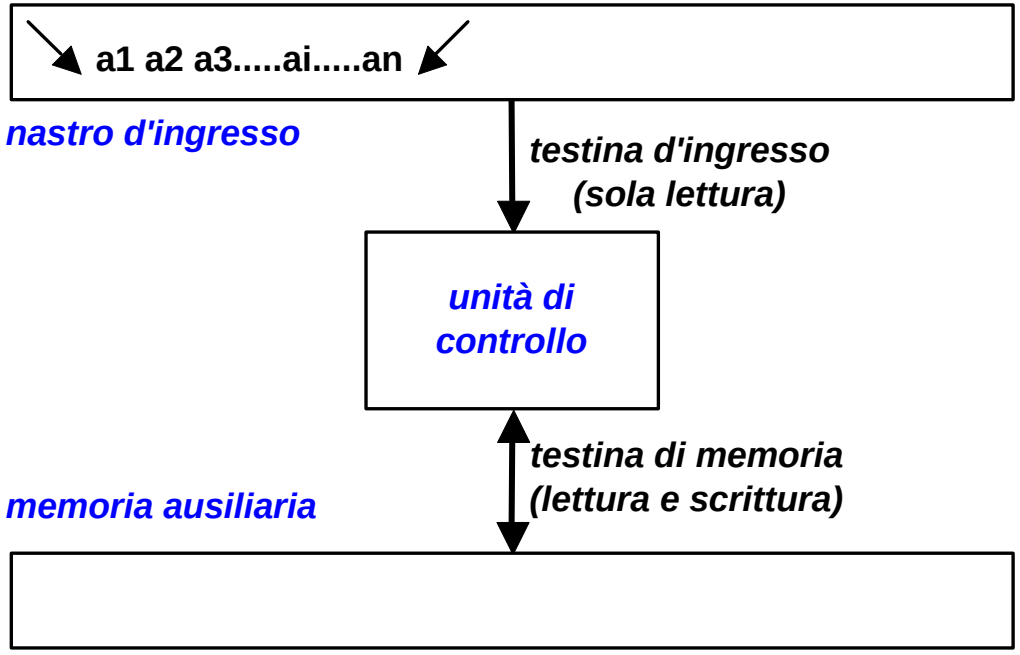
Automi

Automi e linguaggi

Gli **automi** sono spesso utilizzati per descrivere linguaggi formali, e per questo sono chiamati **accettori o riconoscitori di un linguaggio**.

Nella sua forma più generale un automa riconoscitore è costituito da 3 parti:

- il ***nastro d'ingresso***
- l'***unità di controllo***
- la ***memoria ausiliaria***.



Automi

Il **nastro d'ingresso** è suddiviso in caselle, ciascuna contenente un simbolo (o stimolo o carattere) dell'alfabeto d'ingresso Σ. A volte s'impone che la stringa d'ingresso sia delimitata a sinistra e a destra da due simboli riservati alla delimitazione, detti marca d'inizio (↘) e marca di fine (↙).

L'automa opera in istanti discreti: esso legge il simbolo sottostante la testina (o cursore) d'ingresso, che può muoversi, rispetto al nastro, di una posizione verso sinistra o destra.

L'**unità di controllo** è dotata, al suo interno, di una quantità finita di memoria (si dice che ha un *numero finito di stati*, nel qual caso l'automa si dice a stati finiti), mentre ……

… la **memoria ausiliaria** ha, in generale, una capacità illimitata; anche essa può essere immaginata come un nastro, contenente simboli di un *alfabeto di memoria*. A differenza del nastro d'ingresso, la memoria ausiliaria può essere letta e scritta e quindi può funzionare come deposito (o contenitore) di risultati intermedi determinati dal programma dell'unità di controllo.

La posizione di memoria a cui si accede è quella posta sotto la testina di memoria, che può scorrere avanti o indietro a secondo del controllo.

Automi: il funzionamento

Un automa esamina la stringa sul nastro d'ingresso compiendo una serie di *mosse*; *ogni mossa dipende dai simboli presenti sotto le testine e dallo stato dell'unità di controllo*.

Ogni mossa consiste in:

- lo spostamento della testina d'ingresso di una posizione (a destra o sinistra);
- la scrittura di un simbolo nella memoria;
- lo spostamento della testina di memoria di una posizione (a destra o sinistra);
- il cambiamento di stato dell'unità di controllo.

Alcune di queste azioni possono mancare.

Se la testina d'ingresso si può muovere soltanto verso destra, *il nastro è detto monodirezionale*, che è il caso che prenderemo in esame.

Lo spostamento della testina di memoria può essere automatico, se la memoria ausiliaria è organizzata secondo una particolare struttura, lo **stack** (o *pila*), che esamineremo in seguito.

Automi: la configurazione

Una configurazione dell'automa è definita da:

- la porzione di nastro d'ingresso alla destra della testina d'ingresso,
- lo stato dell'unità di controllo;
- la posizione della testina di memoria ed il contenuto di quest'ultima.

L'automa, all'origine, viene posto nella *configurazione iniziale*:

- la testina d'ingresso è sul simbolo che segue la marca d'inizio (↘);
- l'unità di controllo è in un particolare stato detto stato iniziale;
- la memoria contiene l'informazione iniziale.

Attraverso una serie di mosse (computazione) la configurazione dell'automa evolve.

Automi: la configurazione

Una **configurazione** è **finale** se l'unità di controllo è in uno stato finale e la testina d'ingresso è posta sulla marca di fine (↙).

A volte, in alternativa, la configurazione è finale se la memoria si trova in una particolare condizione (ad es. è vuota).

Una stringa (o parola) **x è accettata dall'automa** se esso, partendo dalla configurazione iniziale con ↘ **x** ↙ sul nastro d'ingresso, può eseguire almeno una sequenza di mosse che lo porta in una configurazione finale.

L'insieme delle stringhe accettate dall'automa costituisce il **linguaggio accettato** (o *riconosciuto* o *definito*) da esso.

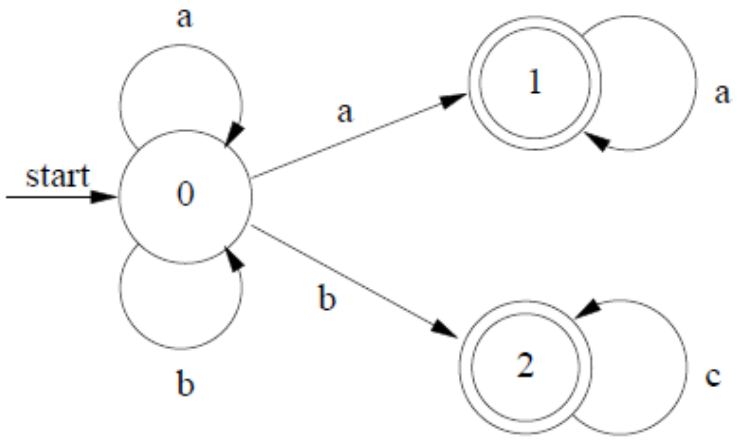
L'automa si ferma o perché ha raggiunto una configurazione finale o perché la mossa non è definita, nel qual caso la stringa non è accettata.

Allo schema prima illustrato di automa appartiene la macchina di Turing, che può assumere diverse varianti e che è accettata come formalizzazione di ogni procedura di calcolo.

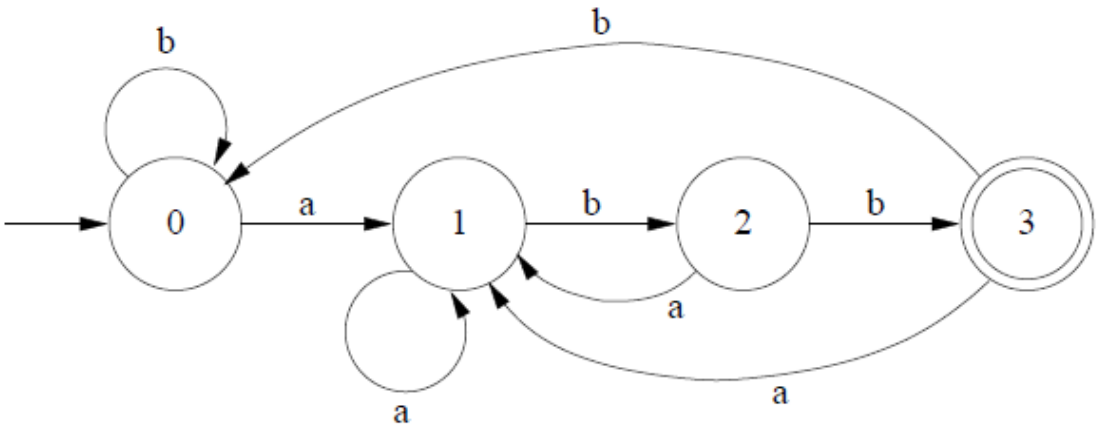
Automi e indeterminismo

Il cambiamento che si produce con le mosse, e quindi **l'automa**, è **deterministico** se in ogni configurazione è ammessa non più di una mossa per ciascun simbolo in input, mentre è **non deterministico** se in almeno una configurazione sono possibili più mosse alternative in corrispondenza dello stesso simbolo o anche se l'alfabeto dei simboli prevede il simbolo vuoto **ε**.

Un automa non deterministico è un modo astratto di rappresentare un algoritmo che può *procedere per tentativi, esaminando due o più percorsi alternativi*.



Un automa non deterministico



Un automa deterministico

Indeterminismo e computazione parallela

Che tipo di computazione è quella di un automa non deterministico?

Una **computazione parallela**. Infatti, in corrispondenza di un simbolo a cui corrispondono più mosse alternative, la macchina "splitta" in più copie quante sono le alternative e ogni copia, in parallelo con le altre, procede separatamente. Se incontra un'altra alternativa, "splitta" ancora. Se il prossimo simbolo in input non è previsto in nessuna delle transizioni in uscita dallo stato corrente di una copia della macchina, quest'ultima muore assieme a tutta la computazione corrispondente.

Se una delle copie della macchina si trova in uno stato finale alla fine della stringa d'ingresso, l'automa non deterministico accetta la stringa.

In corrispondenza del simbolo vuoto **ε**, l'automa si suddivide in diverse copie, una per ciascun simbolo **ε**, ed una ferma allo stato corrente.

Approccio riconoscitivo dei linguaggi

Nell'**approccio riconoscitivo,** quindi**,** un linguaggio può essere definito mediante macchine astratte (automi) o algoritmi che accettano le stringhe che ne fanno parte e rifiutano quelle che non ne fanno parte.

Un Automa a stati finiti è il riconoscitore per il linguaggi regolari.

Un automa a stati finiti è il tipo più semplice di macchina per riconoscere linguaggi.

Un **automa a stati finiti** può essere **deterministico** (FSA) o **non deterministico** (NFSA).

In genere gli automi sono deterministici, ovvero dato uno stato ed un simbolo in ingresso è possibile una sola transizione.

Automi a stati finiti e *scanner*

Gli Automi a stati finiti sono largamente usati come **Analizzatori lessicali** (scanner).

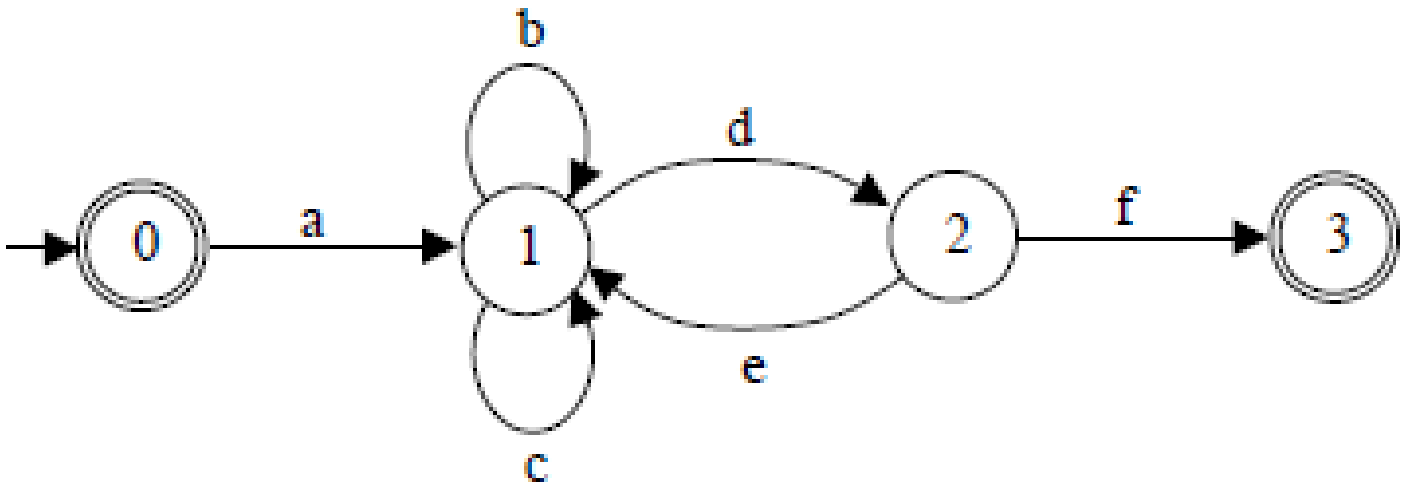
Nei 'compiler of compiler' e nei generatori di analizzatori lessicali (tipo **Lex** di UNIX) si utilizzano tutti i diversi formalismi di definizione dei linguaggi regolari.

Il generatore prende in input l'espressione regolare e:

- costruisce l'automa a stati finiti non deterministico corrispondente
- lo trasforma in automa a stati finiti deterministico
- fornisce come output il programma di analisi lessicale (scanner) per il linguaggio dato.

Esempio di automi a stati finiti e linguaggi

Esprimere la grammatica BNF del linguaggio regolare definito dal seguente automa:



A_0 ::= a A_1 | ε
A_1 ::= b A_1 | c A_1 | d A_2
A_2 ::= e A_1 | f A_3
A_3 ::= ε

Automi a stati finiti e *scanner*

Un **Deterministic Finite State Automata** (**FSA**) **M** = **$<\Sigma, Q, \delta, q_0, F>$** è, in generale, una quintupla costituita da:

- un alfabeto di input Σ
- un numero finito e non vuoto di stati **$Q = \{q_0,\ldots,q_n\}$**
- un insieme di transizioni di stato δ da uno stato ad un altro stato etichettato da caratteri di un alfabeto Σ **$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$**
- uno stato iniziale **q_0**
- un insieme di stati finali **F** **$F \subseteq Q$** (stringa valida)

La funzione δ codifica le mosse dell'automa. **$\delta(q_i, a) = q_j$** significa che **M**, trovandosi nello stato **q_i** e leggendo **a**, si porta nello stato **q_j**.

In particolare si conviene che, per ogni **q_i**, **$\delta(q_i, \varepsilon) = q_i$**.

Automi a stati finiti e *scanner*

La funzione di transizione di un FSA può essere rappresentata mediante:

- una matrice (tabella) di transizione
- un diagramma degli stati

Esempio.
Dato il linguaggio

$\{a^n b \mid n \geq 0\}$ generato da **$S \rightarrow aS \mid b$**

l'automa che lo riconosce è l'automa

$<\{a,b\}, \{q_0,q_1,q_2\}, \delta, q_0, \{q_1\}>$

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_2	q_2

matrice di transizione di stato
dell'automa riconoscitore del linguaggio
$\{a^n b \mid n \geq 0\}$

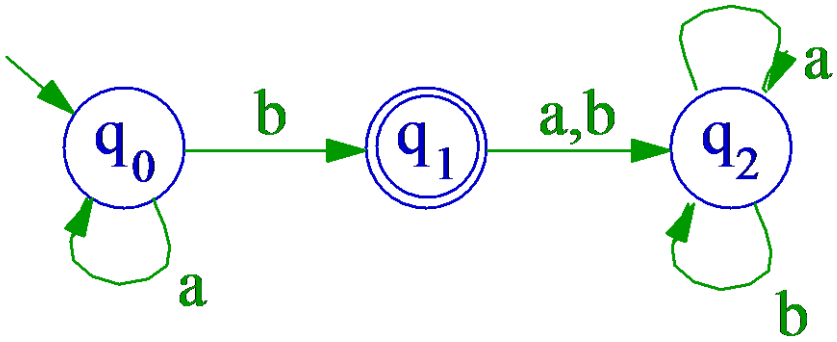
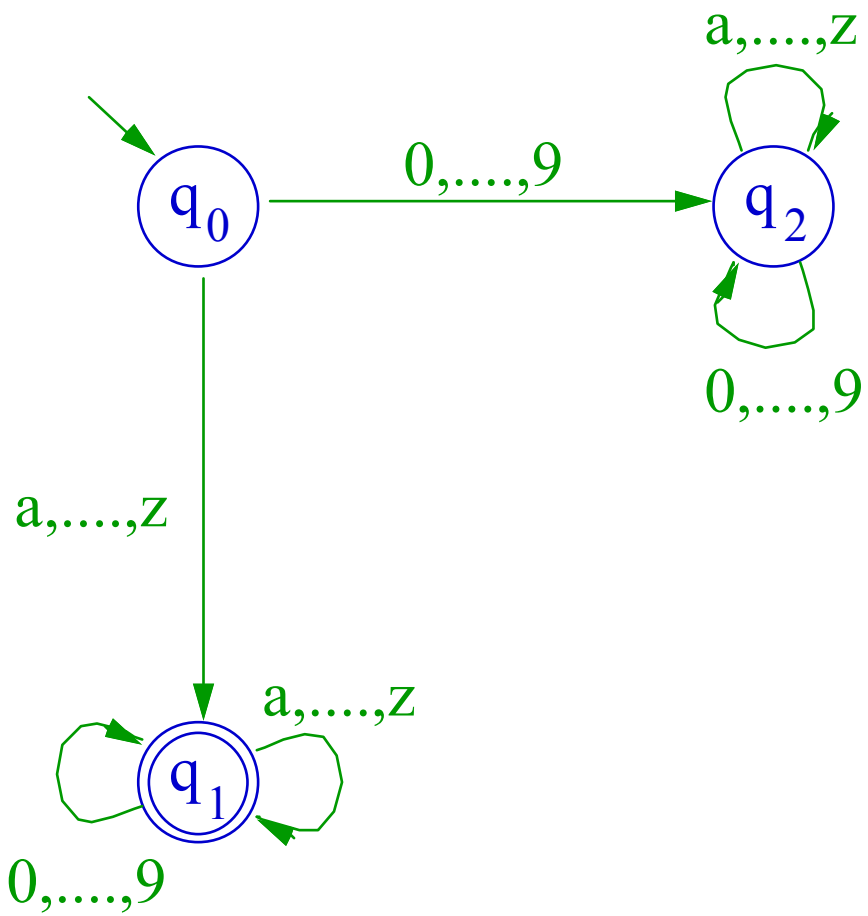


diagramma degli stati dell'automa

Automi a stati finiti e *scanner*

Esempio.

Automa che riconosce gli identificatori.



Automi a stati finiti e *scanner*

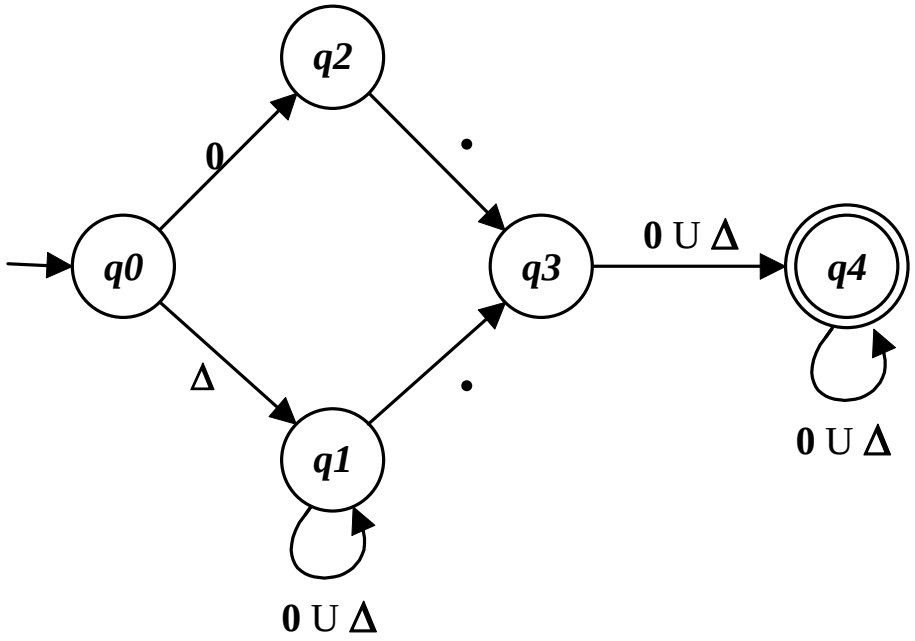
Esempio.

Automa che riconosce le costanti reali.

$\Delta = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\Sigma = \Delta \cup \{0,\bullet\}$

$L_1 = (0 \cup \Delta(0 \cup \Delta)^*) \bullet \Delta(0 \cup \Delta)^+$



stato presente	carattere letto				
	0	1	. . . . .	9	•
q0	**q2**	**q1**	. . . . .	**q1**	----
q1	**q1**	**q1**	. . . . .	**q1**	**q3**
q2	----	----	. . . . .	----	**q3**
q3	**q4**	**q4**	. . . . .	**q4**	----
q4	**q4**	**q4**	. . . . .	**q4**	----

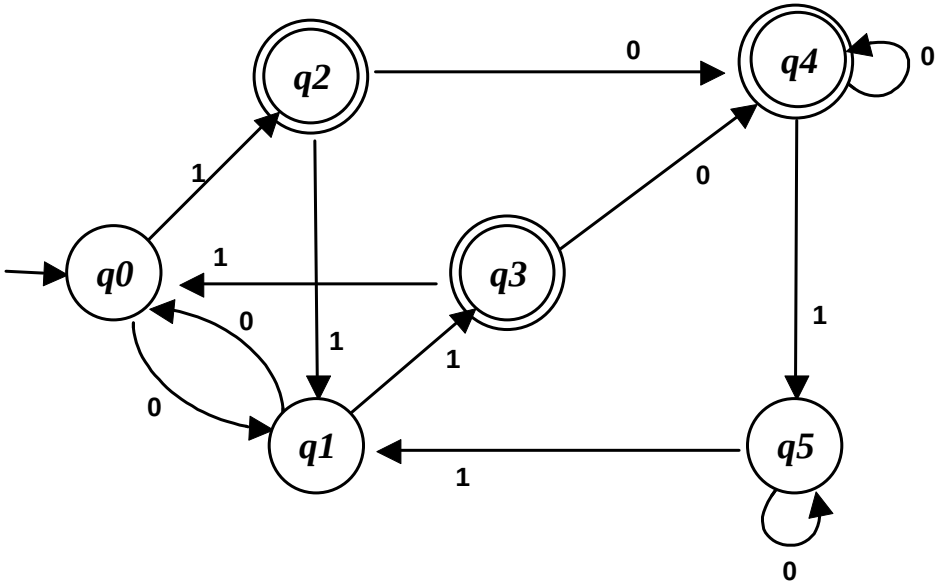
Automa minimo

In generale esistono infiniti automi equivalenti (che, cioè, accettano lo stesso linguaggio), differenti per il numero degli stati.

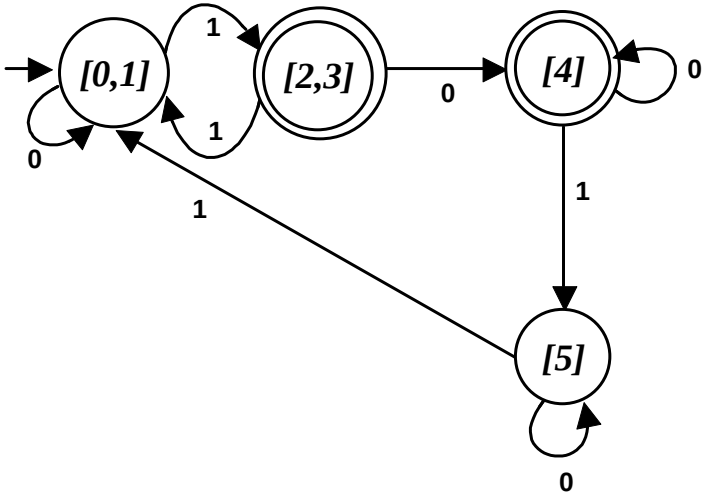
Un risultato teorico utile è che, a meno di un isomorfismo (cioè a meno di una ridenominazione degli stati), è unico il riconoscitore minimo o **automa minimo** (rispetto alla cardinalità |Q| dell'insieme degli stati) di un linguaggio **L**.

Automa minimo

Esempio



a) automa originale



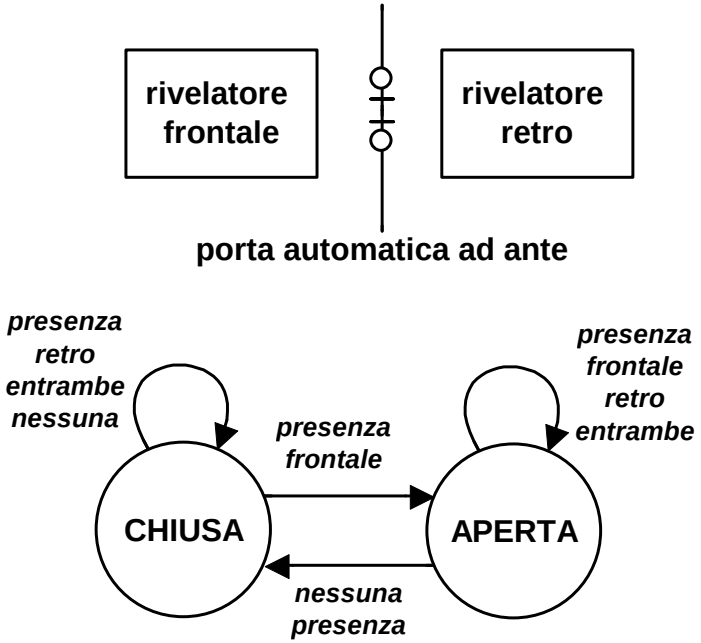
b) automa minimo

Automi come sistemi di transizione

Gli automi consentono in generale di rappresentare sistemi di transizione in un insieme finito di stati:

- un ascensore
- un distributore di biglietti dell'autobus
- il sistema elettrico di un'automobile
- un dispositivo elettronico digitale
- .....

Esempio: Il controllore di una porta automatica a 2 ante



Automi come sistemi di transizione

Esercizio

Realizzare un automa che riconosce tutte le sequenze di monete da 0.10 €, 0.20 €, 0.50 €, 1.00 €, che consentono di raggiungere il costo di un biglietto dell'autobus (1.50 €). Nello stato iniziale la somma disponibile e' 0. La macchina non da' resto.

Automi non deterministici

Un **Non-deterministic Finite State Automata** (NFSA) è un modelllo matematico che consiste di:

S – un insieme finito di stati
Σ - un insieme finito di simboli di input (alfabeto)
mosse – una funzione (di transizione) che, data una coppia stato-simbolo, restituisce uno stato, cioè

$$\text{Mossa} : S \times (\Sigma \cup \varepsilon) \rightarrow S$$

s_0 - uno stato iniziale, $s_0 \in S$
F – un insieme di stati finali $F \in S$

- In un NFSA sono consentite **ε-** mosse. In altre parole, esistono transizioni che non consumano simboli.
- Un NFSA accetta una stringa **x**, se e solo se esiste un cammino dallo stato iniziale ad uno stato finale tale che ogni arco sia etichettato con i simboli in **x**

Automi non deterministici

Eliminazione dell'indeterminismo

Un automa non deterministico è difficile da realizzare mediante un programma, poiché i linguaggi di programmazione non consentono (salvo eccezioni) scelte non deterministiche. Un NFSA è, perciò, una rappresentazione astratta di un algoritmo per riconoscere le stringhe di un certo linguaggio, mentre un FSA è un semplice, concreto algoritmo di riconoscimento di stringhe.

D'altra parte, spesso l'algoritmo di riconoscimento più immediato per talune applicazioni è di tipo non deterministico.

Ne deriva che risulta molto utile la trasformazione di un automa da non deterministico a deterministico. Tale trasformazione, sempre possibile per gli automi finiti, si svolge in 2 fasi:

1) eliminazione degli archi corrispondenti a **ε-** mosse
2) sostituzione delle transizioni non deterministiche con altre deterministiche che portano in nuovi stati

Automi e classi di linguaggi

A diverse classi di automi corrispondono diverse classi di linguaggi, caratterizzate da diversi livelli di complessità.

Due *automi* sono *equivalenti* se hanno la caratteristica di accettare lo stesso linguaggio.

Due automi equivalenti non è detto che siano dello stesso tipo, né che abbiano la stessa complessità. In particolare si dimostra che:

TEOREMA: **Ogni automa finito non deterministico ha un equivalente automa finito deterministico**.

Un **FSA** e l'equivalente **NFSA** riconoscono la stessa classe di linguaggi.

Ciò è sorprendente ed utile.

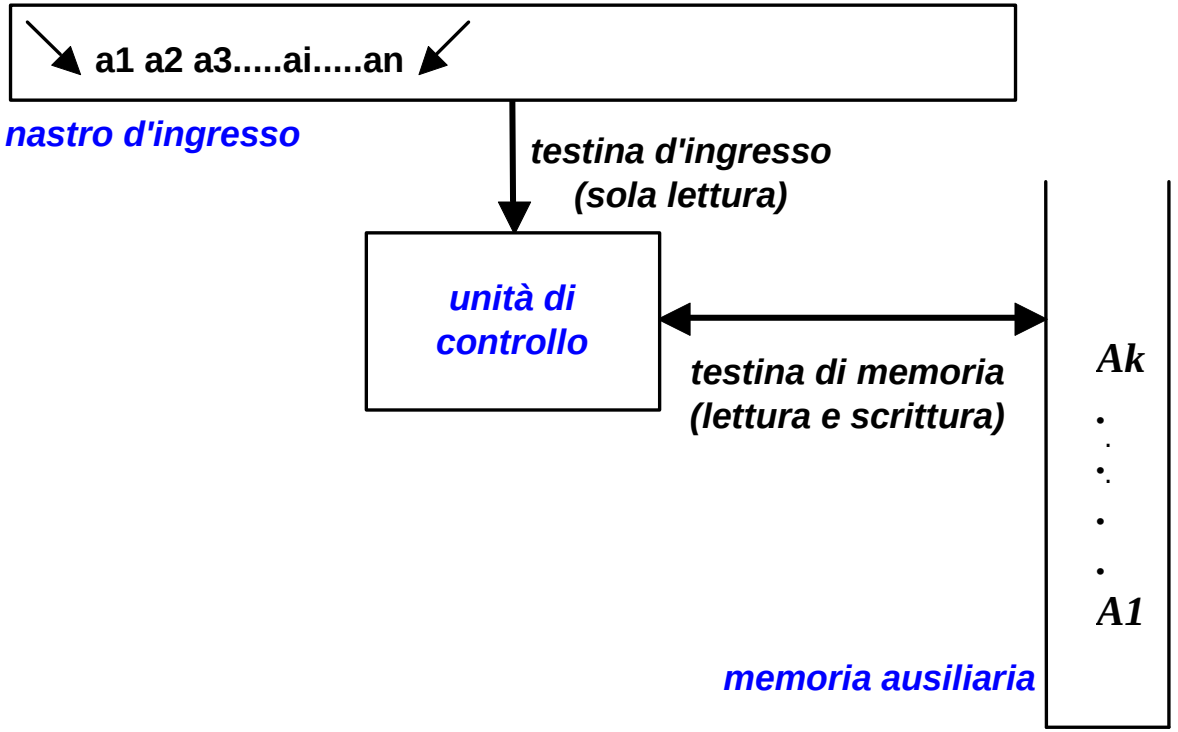
È sorprendente perché ci si aspetterebbe che un **NFSA** sia più potente di un **FSA** e che sia perciò capace di riconoscere più linguaggi.

È utile perché descrivere un **NFSA** per un dato linguaggio è a volte più facile di descrivere lo stesso linguaggio con l'equivalente **FSA**.

- ✓ deterministic – faster recognizer, but it may take more space
- ✓ non-deterministic – slower, but it may take less space

AUTOMI A PILA
(*PUSH DOWN AUTOMATA o* PDA).

Gli automi possono anche essere dotati di memoria ausiliaria organizzata secondo una particolare struttura, lo **stack** (o *pila*).



Un automa a pila può essere pensato come un automa finito, esteso con un nastro illimitato usato come pila.

Automi a pila

Il movimento della testina è unidirezionale verso destra. Ad ogni mossa l'automa può avanzare con la testina, cambiare stato e fare un'operazione **push** o **pop**.

L'automa inizia il calcolo (configurazione iniziale) nello **stato q_0**, con il solo **simbolo Z_0 in fondo alla pila** e la testina d'ingresso posizionata sul **primo simbolo della stringa x** sul nastro d'ingresso.

Le mosse possibili sono:

- ✓ se, nello stato q_0, legge un simbolo (ad es. una ***a*** o una ***b***) esegue una **push(A)** (oppure **push(B)**);
- ✓ se, nello stato q_0, legge un particolare simbolo (ad es. una ***c***) passa allo stato q_1;
- ✓ se, nello stato q_1, legge un simbolo ***a*** (oppure ***b***) e in cima alla pila trova **A** (oppure **B**), esegue una **pop**;
- ✓ in ogni altro caso si ferma rigettando la stringa.

Perché l'automa termini di leggere, il nastro d'ingresso deve essere delimitato dalla marca di fine ↙.

La stringa è accettata se, dopo la lettura di ↙, lo stato è q_2 o, in alternativa, se la pila è vuota o è presente solo Z_0, sul quale non si può eseguire né **push** né **pop**.

NOTA BENE. La testina sul nastro di ingresso può anche non spostarsi.

Questa situazione e' espressa dicendo che la testina legge **ε** sul nastro di ingresso.

Automi a pila: il funzionamento

Si consideri la stringa ***a b c b a*** ↙ e si osservi come cambia il contenuto della pila e lo stato dell'unità di controllo (cioè la configurazione).

Pila	Nastro						Stato controllo
Z_0	***a***	***b***	***c***	***b***	***a***	↙	q_0
Z_0	A	***b***	***c***	***b***	***a***	↙	q_0
Z_0	A	B	***c***	***b***	***a***	↙	q_0
Z_0	A	B		***b***	***a***	↙	q_1
Z_0	A				***a***	↙	q_1
Z_0						↙	q_1
Z_0							q_2

Si noti come l'effetto di una mossa dipende, oltre che dal simbolo in ingresso, dal contenuto del top dello stack e dallo stato dell'unità di controllo.

Si noti ancora che il carattere Z_0 di fondo della pila non viene toccato durante la computazione, quasi che esso fosse inamovibile sul fondo.

Automi a pila e parser (o analizzatore sintattico)

Gli automi a pila sono in grado di riconoscere una classe più ampia di linguaggi rispetto agli automi a stati finiti.

Mentre gli automi a stati finiti sono in grado, infatti, di riconoscere solo linguaggi regolari, gli automi a pila possono riconoscere anche linguaggi liberi dal contesto.

Gli automi a pila sono, cioè, un sovrainsieme di quelli a stati finiti.

Alcune loro sottoclassi sono sufficientemente ampie da consentire di descrivere linguaggi di programmazione e al tempo stesso sufficientemente ristrette da consentire la costruzione di **Analizzatori sintattici** (parser) che operano in tempo lineare, se, come vedremo in seguito, l'automa a pila riconoscitore è di tipo deterministico.

Automi a pila e parser (o analizzatore sintattico)

Un Push Down Automata **PDA** = **$<\Sigma, \Gamma, Z_0, Q, q_0, F, \delta>$** è una eptupla costituita da:

- **Σ** un alfabeto di input
- **Γ** alfabeto dei simboli della pila
- **$Z_0 \in \Gamma$** simbolo di pila iniziale
- **Q** insieme finito di stati dell'unità di controllo
- **$q_0 \in Q$** stato iniziale
- **$F \subseteq Q$** insieme di stati finali
- **$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$** funzione di transizione

Se abbiamo una regola di transizione $\delta(q_i,a,A)=\{(q_j,BA),(q_h,\varepsilon)\}$ essa significa che se nello stato interno q_i, leggiamo a sul nastro ed A è il simbolo affiorante sulla pila, si realizzano, non deterministicamente, due transizioni; la prima sostituisce il simbolo affiorante sulla pila con la stringa di caratteri BA e si porta nel nuovo stato interno q_j, la seconda sostituisce il simbolo affiorante sulla pila con la stringa vuota ε, in altre parole cancella A dalla pila, e si porta nel nuovo stato interno q_h.

Convenzione**:** se metto BA in pila, B e' il nuovo simbolo affiorante.

Automi a pila e parser (o analizzatore sintattico)

L'automa così come formalmente definito è, in generale, non deterministico, sia perché prevede che, in corrispondenza di un simbolo sul nastro d'ingresso e di un elemento affiorante sulla pila, possano essere svolte due attività diverse con transizioni di stato diverse, sia perché vi possono essere delle ε-mosse.

L'uso di un PDA non deterministico come riconoscitore di stringhe ha una complessità di calcolo eccessiva, essendo il relativo algoritmo della classe $\mathbf{O}(n^3)$ oppure $\mathbf{O}(n^2)$ se la grammatica non è ambigua.

Poiché per applicazioni pratiche si cerca di impiegare riconoscitori di complessità lineare, si capisce bene come siano preferibili automi a pila di tipo deterministico.

Macchina di Turing

Il massimo livello di complessità di un automa è raggiunto dalla macchina di Turing, modello che generalizza gli automi a pila (e *a fortiori* gli automi a stati finiti).

Ha una capacità computazionale che si presume essere la massima: si dimostra infatti che essa è equivalente, ossia in grado di effettuare le stesse elaborazioni di tutti gli altri modelli di calcolo di più ampia portata.

Di conseguenza si è consolidata la convinzione che per ogni problema calcolabile esista una MdT in grado di risolverlo: questa è la cosiddetta **congettura di Church-Turing**, la quale postula in sostanza che per ogni funzione calcolabile esista una macchina di Turing equivalente, ossia che l'insieme delle funzioni calcolabili coincida con quello delle funzioni ricorsive.

Per le sue caratteristiche, il modello della MdT è un efficace strumento teorico che viene largamente usato nella teoria della calcolabilità e nello studio della complessità degli algoritmi.