ESERCIZI SU CALCOLO DI SPETTRI, SEGNALI PERIODICI E CAMPIONAMENTO DEL 30/11/2017

ESERCIZIO 1

Sia dato un segnale periodico *x(t)* di periodo pari a *2T* secondi, ove *T*=10 microsecondi. La forma d'onda replicata ha la seguente espressione analitica:

$$w(t) = A\left[4 + cos\left(\frac{8\pi t}{T}\right)\right]\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad -T \leq t \leq T$$

Il valore di *A* è pari a 1 Volt. Si richiede di:

1) Indicare, motivando la risposta sulla base delle simmetrie del segnale, se i coefficienti della serie di Fourier sono reali, immaginari oppure complessi;
2) Calcolare i coefficienti della serie di Fourier del segnale periodico *x(t)* e disegnare il grafico dello spettro in ampiezza;
3) Scrivere l'espressione completa della serie di Fourier relativa al segnale *x(t)*.

ESERCIZIO 2

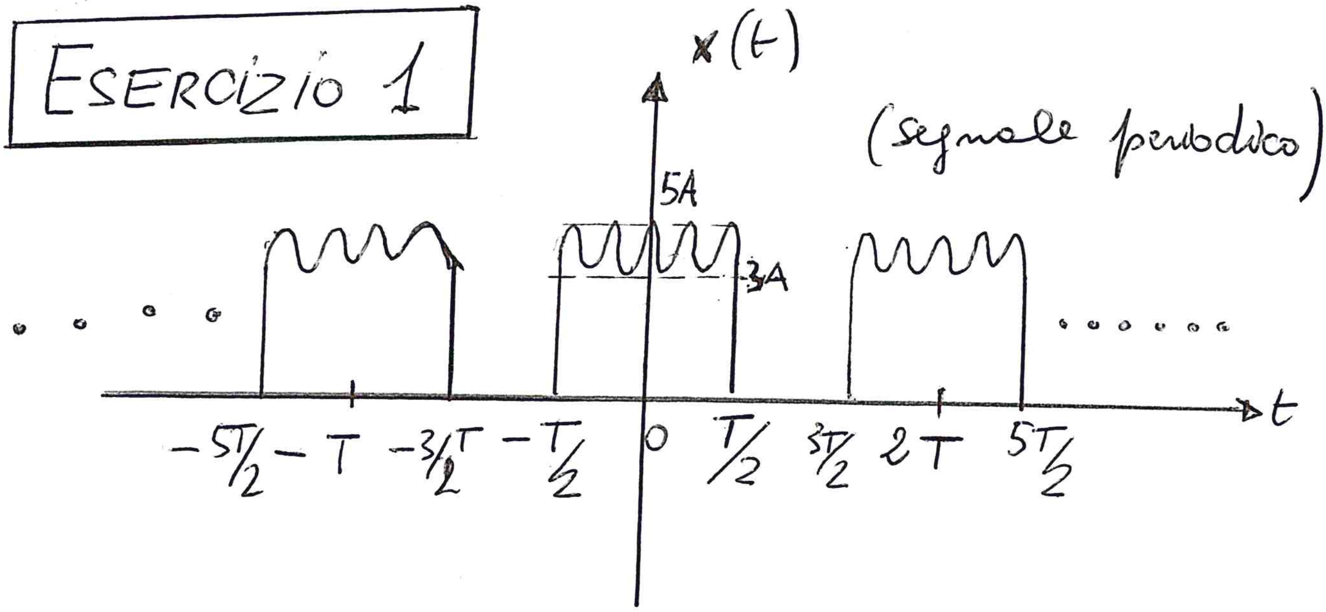
Sia dato il seguente segnale non periodico:

$$s(t) = Aexp\left(-\left|\frac{t}{\tau}\right|\right) + Bsinc(tW)$$

Ove *A*=10 milliWatt, τ = 1 microsecondo, *B*=2 milliWatt e *W*=100 KHz. Si richiede di calcolare la minima frequenza di campionamento del segnale *s(t)*, richiesta per ricostruire il segnale senza aliasing, supponendo di utilizzare, per il calcolo della banda, il teorema di Parseval (99% dell'energia del segnale deve essere contenuta nella larghezza di banda considerata).

ESERCIZIO 1

(segnale periodico)



$$w(t) = A\left[4 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T/4}\right)\right]\Pi\left(t/T\right)$$ periodo $2T$ sec.

$A = 1\,V$. $T = 10\,\mu sec$

DOMANDA 1

Il segnale periodico presenta simmetria pari e, quindi, ha ~~[illegible]~~ spettro reale e la serie sarà formata da soli coseni.

DOMANDA 2

Per calcolare i coefficienti della serie di Fourier, conviene usare la formula di Poisson:

$$X_K = \frac{1}{2T} W\left(\frac{K}{2T}\right) \quad \text{con } W(f) = \mathcal{F}\{w(t)\}$$

$$w(t) = \underbrace{4A\,\Pi(t/T)}_{\text{rettangolo}} + \underbrace{A\cos\left(2\pi t/_{T/4}\right)\Pi(t/T)}_{\text{coseno finestrato}}$$

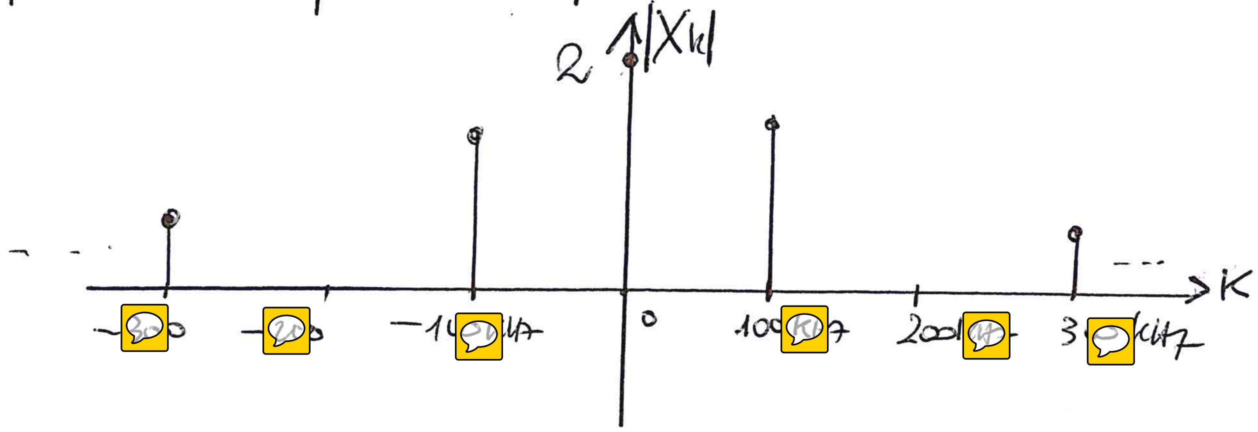
$$W(f) = 4AT\,\mathrm{sinc}(fT) + AT\,\mathrm{sinc}(fT) * \left\{ \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{4}{T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{4}{T}\right) \right\} =$$

$$= 4AT\,\mathrm{sinc}(fT) + \frac{AT}{2}\mathrm{sinc}\left(\left(f - \frac{4}{T}\right)T\right) + \frac{AT}{2}\mathrm{sinc}\left(\left(f + \frac{4}{T}\right)T\right)$$

$$X_K = \frac{1}{2\cancel{T}}\left[4A\cancel{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{K}{2}\right) + \frac{A\cancel{T}}{2}\mathrm{sinc}\left(\left(\frac{K}{2T} - \frac{4}{T}\right)T\right) + \frac{A\cancel{T}}{2}\mathrm{sinc}\left(\left(\frac{K}{2T} + \frac{4}{T}\right)T\right)\right]$$

$$X_K = 2A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{A}{4}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2} - 4\right) + \frac{A}{4}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2} + 4\right)$$

In effetti, i coefficienti sono reali. Lo spettro in ampiezza si può disegnare:



Ampiezze armoniche:

- Valore della componente continua: 2V
- Valore della prima armonica ≃ 1.27V

DOMANDA 3

$$x(t) = 2A + \sum_{k=1}^{+\infty} X_K \cos\left(\frac{2\pi K}{2T} t\right)$$ (serie di solo coseno)

ESERCIZIO 2 – SOLUZIONE

Per calcolare la banda, occorre calcolare <u>lo spettro di densità di energia</u>, prima di tutto, ovvero:

$|S(f)|^2$

$$S(f) = A \frac{2/\tau}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + (2\pi f)^2} + \left(\frac{B}{W}\right) \Pi\left(\frac{f}{W}\right) =$$

$$= \frac{2A}{\cancel{\tau}} \frac{1 \cdot \tau^{\cancel{2}}}{1 + (2\pi f \tau)^2} + \left(\frac{B}{W}\right) \Pi\left(\frac{f}{W}\right) =$$

$$= \frac{2A\tau}{1 + (2\pi f \tau)^2} + \left(\frac{B}{W}\right) \Pi\left(\frac{f}{W}\right)$$

Per calcolarne il modulo in maniera tale da farne il quadrato e poi integrarlo, è meglio "spezzare" la formula in maniera analitica, ovvero:

$$S(f) = \begin{cases} \frac{2A\tau}{1 + (2\pi f \tau)^2} + \left(\frac{B}{W}\right) & -W/2 \leq f \leq W/2 \\ \frac{2A\tau}{1 + (2\pi f \tau)^2} & \text{altrove} \end{cases}$$

$$|S(f)|^2 = \begin{cases} \dfrac{4A^2\tau^2}{[1+(2\pi f\tau)^2]^2} + \dfrac{2A\tau B}{W[1+(2\pi f\tau)^2]} + \left(\dfrac{B}{W}\right)^2 & -W/2 \leq f \leq W/2 \\ \dfrac{4A^2\tau^2}{[1+(2\pi f\tau)^2]^2} & \text{altrove} \end{cases}$$

Forniamo un paio di integrali indefiniti utili:

$$(*) \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{atan}(x) + K$$

$$(**) \quad \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{atan}(x)\right] + K$$

$$E_{TOT} = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{4A^2\tau^2}{[1+(2\pi f\tau)^2]^2}\,df +$$

$$+ \int_{-W/2}^{W/2} \frac{2AB\tau}{W[1+(2\pi f\tau)^2]}\,df + \int_{-W/2}^{W/2} \left(\frac{B}{W}\right)^2 df +$$

$$+ 2\int_{W/2}^{+\infty} \frac{4A^2\tau^2}{[1+(2\pi f\tau)^2]^2}\,df$$

poniamo $(2\pi f\tau) = \alpha \Rightarrow f = \frac{\alpha}{2\pi\tau}$ e

$$df = \frac{1}{2\pi\tau}\, d\alpha$$

Da cui:

1) $$\int_{-W/2}^{W/2} \frac{4A^2\tau^2 \, df}{[1+(2\pi f\tau)^2]^2} = \int_{-\pi W\tau}^{\pi W\tau} \frac{2\cancel{4}A^2\tau^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\pi\cancel{\tau}} \frac{1}{(1+\alpha^2)^2}\, d\alpha =$$

$$= \frac{\cancel{2}A^2}{\pi}\tau \left[\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+1} + \operatorname{atan}(\alpha)\right)\right]_{-\pi W\tau}^{\pi W\tau} =$$

$$= \frac{A^2\tau}{\pi}\, 2 \left[\frac{(\pi W\tau)}{(\pi W\tau)^2+1} + \operatorname{atan}(\pi W\tau)\right]$$

2) $$2\int_{W/2}^{+\infty} \frac{4A^2\tau^2}{[1+(2\pi f\tau)^2]^2}\, df = \frac{\cancel{2}A^2\tau}{\pi}\left[\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\alpha}{(\alpha^2+1)} + \operatorname{atan}(\alpha)\right)\right]_{\pi W\tau}^{+\infty}$$

$$= \frac{A^2\tau}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{2}\right) - \frac{A^2\tau}{\pi}\left[\frac{(\pi W\tau)}{(\pi W\tau)^2+1} + \operatorname{atan}(\pi W\tau)\right]$$

3) $$\int_{-W/2}^{W/2} \frac{2AB\tau}{W[1+(2\pi f\tau)^2]}\, df = \int_{-\pi W\tau}^{\pi W\tau} \frac{\cancel{2}AB\cancel{\tau}}{W}\,\frac{1}{\cancel{2}\pi\cancel{\tau}}\,\frac{1}{1+\alpha^2}\, d\alpha =$$

Quindi:

$$E_{TOT} = \frac{2A^2\tau}{\pi}\left[\frac{(\pi W\tau)}{(\pi W\tau)^2+1} + \operatorname{atan}(\pi W\tau)\right] +$$

$$+ \frac{2AB}{\pi W}\operatorname{atan}(\pi W\tau) + \frac{B^2}{W} + \frac{A^2\tau}{2} +$$

$$- \frac{A^2\tau}{\pi}\left[\frac{(\pi W\tau)}{(\pi W\tau^2)+1} + \operatorname{atan}(\pi W\tau)\right]$$

poniamo $U = \dfrac{(\pi W\tau)}{(\pi W\tau)^2+1} + \operatorname{atan}(\pi W\tau) =$

$$= \frac{0.3142}{1+(0.3142)^2} + 0.3044 =$$

$$= \boxed{0.5904}$$

$$E_{TOT} = \frac{A^2\tau}{\pi}U + \frac{A^2\tau}{2} + \frac{B^2}{W} + \frac{2AB}{\pi W}\operatorname{atan}(\pi W\tau)$$

$$= A^2\tau\left(\frac{U}{\pi} + \frac{1}{2}\right) + \frac{B^2}{W} + \frac{2AB}{\pi W}\operatorname{atan}(\pi W\tau) =$$

$$= (10^{-2})^2 \cdot 10^{-6}(0.6879) + (2\cdot 10^{-3})^2 \cdot 10^{-5} +$$

$$+ \frac{2\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 10^5}\cdot 0.3044 = 6.879\cdot 10^{-11} + 4\cdot 10^{-11} +$$

$$+ \frac{4\cdot 0.3044\cdot 10^{-10}}{\pi} = \boxed{1.4755\cdot 10^{-10}\,J}$$

Per calcolare la larghezza di banda secondo il teorema di Parseval, occorre fare un'ipotesi ragionevole: $\boxed{B > W/2}$ ovvero il nostro segnale occupa più della banda del "rettangolo" (sinc) duale dei nostri termini integrali è stato calcolato per $B > W/2$? Il numero 2), ovvero:

$$2\int_{W/2}^{B \to [\text{non tende più a } +\infty]} \frac{4A^2\tau^2}{\left[1+(2\pi f\tau)^2\right]^2}\,df = \frac{A^2\tau}{\pi}\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+1} + \text{atan}(\alpha)\right]_{\cancel{2}\pi W \tau/\cancel{2}}^{2\pi B\tau} =$$

$$= \frac{A^2\tau}{\pi}\left[\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \text{atan}(\alpha)\right]_{\pi W\tau}^{2\pi B\tau} =$$

$$= \underbrace{\frac{A^2\tau}{\pi}\left[\frac{2\pi B\tau}{1+(2\pi B\tau)^2} + \text{atan}(2\pi B\tau)\right]}_{F(B)} - \frac{A^2\tau}{\pi}U$$

$F(B)$: per $B \to +\infty$, questo termine è $A^2\tau/2$

Quindi, dove ho sostituito i numeri, al posto di $A^2\tau/2$, ci devo mettere il termine di cui sopra. L'equazione risulterà:

$$F(B) + \underbrace{9.755 \cdot 10^{-11}}_{\text{residuo togliendo } A^2\tau/2} = 0.99 \cdot E_{TOT} = 1.4607 \cdot 10^{-10}$$

$$F(B) = 4.8520 \cdot 10^{-11}$$ ovvero:

$$\frac{A^2\tau}{\pi}\left[\frac{2\pi B\tau}{1+(2\pi B\tau)^2} + \operatorname{atan}(2\pi B\tau)\right] = 4.8520 \cdot 10^{-11}$$

$$\frac{A^2\tau}{\pi} = 3.1831 \cdot 10^{-11}$$

da cui:
$$\frac{2\pi B\tau}{1+(2\pi B\tau)^2} + \operatorname{atan}(2\pi B\tau) = 1.5243$$

poniamo: $2\pi B\tau = y \Rightarrow B = \dfrac{y}{2\pi\tau}$

L'equazione è:
$$\frac{y}{1+y^2} + \operatorname{atan}(y) = 1.5243$$

equazione trascendente, si vuole risoluzione grafica, vedi codice MATLAB annesso. La risoluzione è per $y \geq \cancel{2}\pi \, W/\cancel{2} \, \tau = 0.3142$ rad.

Dalla risoluzione grafica trovo che $y = 7.21$

Quindi: $$B = \frac{7.21}{2\pi \cdot 10^{-6}} = \frac{7.21}{2\pi} \cdot 10^{6} = 1.147 \cdot 10^{6} =$$

$$= \boxed{1.15 \text{ MHZ}}$$

Quindi la frequenza <u>minima</u> di campionamento del segnale è $f_c = 2W = 2.$[illegible] MHz. Una piccola banda di guardia è sicura: $f_c = 2.4\,MHz$ e siamo a posto!