CORSO DI MODELLI STOCASTICI PER L'INGEGNERIA – ANNO ACCADEMICO 2012-2013: ESERCIZI AGGIUNTIVI SU RAPPRESENTAZIONE DI SISTEMI, SEGNALI E PROCESSI ALEATORI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Esercizio 1

Sia dato il sistema di elaborazione del segnale mostrato in Figura 1.

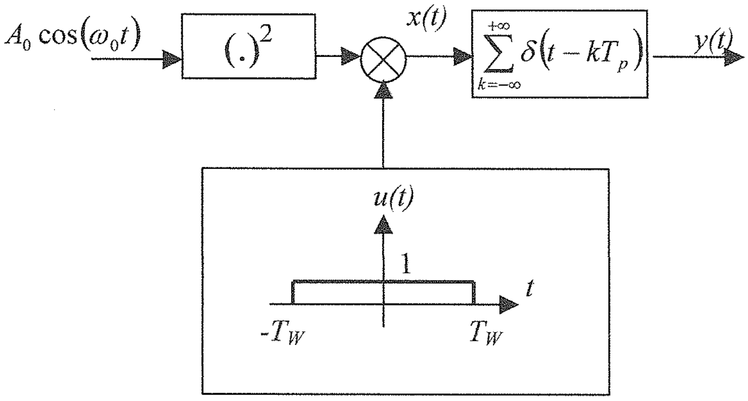


Figura 1

Il valore del periodo della sinusoide in ingresso al blocco T_0 è pari 4μsec, mentre la sua ampiezza A_0 è pari a 2 Volt. La durata del rettangolo di ampiezza unitaria *u(t)* T_W è pari a 8μsec e l'intervallo di spaziatura delle delta di Dirach T_p è pari a 32μsec. Sotto queste ipotesi si richiede di:

1) Disegnare un andamento di massima del segnale *y(t)*;
2) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale *y(t)*;

Supponiamo, ora, di inserire un filtro RC a valle del segnale *y(t)*. La costante di tempo del filtro τ=RC=20μsec. Si richiede, sotto queste ipotesi di:

3) Indicare, motivando la risposta fornita, quale può essere un andamento ragionevole del segnale *z(t)* in uscita dal filtro di cui sopra.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema (vedi Fig. 1), ove un processo aleatorio Gaussiano, bianco, a media nulla $\{X(t)\}$ viene inviato in ingresso ad un blocco LTI costituito da un circuito RC_(valori assegnati per R=1[KΩ] e per C=0.1[μF]). La densità spettrale di potenza bilatera del processo aleatorio $\{X(t)\}$ indicata con η/2 è pari a 4*10^{-6}[W/Hz].

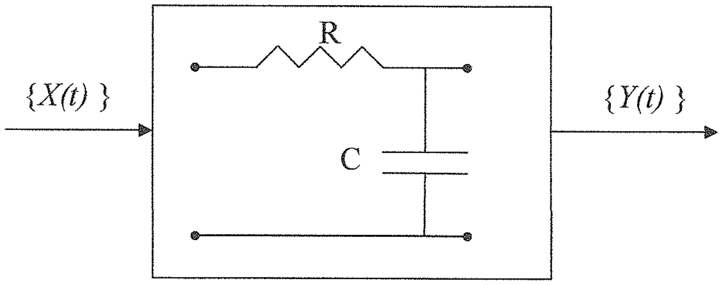


Figura 1

Sotto queste ipotesi si richiede di:

1. Calcolare lo spettro di densità di potenza e la funzione di autocorrelazione del processo aleatorio $\{Y(t)\}$ in uscita dal circuito RC. Di quest'ultima, si richiede inoltre di disegnare il grafico;
2. Calcolare media e varianza del processo aleatorio $\{Y(t)\}$ e ricavare l'espressione analitica della sua funzione di densità di probabilità (p.d.f.);

Sia dato, ora, il sistema mostrato in Figura 2, che riceve in ingresso il processo aleatorio $\{Y(t)\}$ di cui al punto 2.

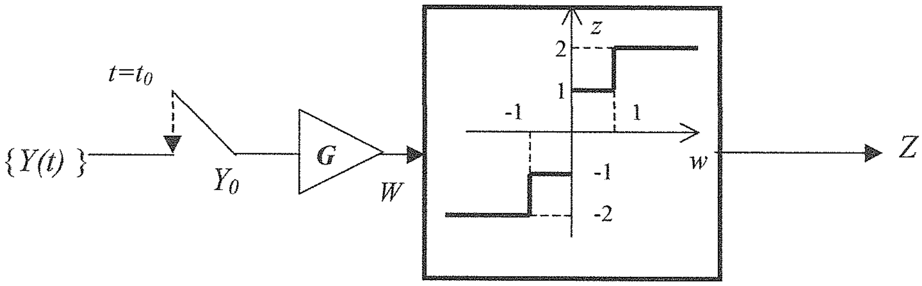


Figura 2

Il tasto viene abbassato in un istante arbitrario t_0 e poi immediatamente sollevato, in modo tale da acquisire un singolo campione $Y(t_0)=Y_0$ del processo aleatorio $\{Y(t)\}$. Il valore della costante moltiplicativa G è pari a 10. Sotto queste ipotesi si richiede di:

3. Ricavare la funzione di densità di probabilità (eventualmente in senso "improprio") della variabile aleatoria Z, prodotta in uscita dal blocco non lineare di trasformazione mostrato in Figura 2, nonché la sua funzione di distribuzione cumulativa di probabilità (c.d.f.) e disegnare, di entrambe le funzioni, il grafico.

Esercizio 3

In Figura 1 è illustrato il sistema dove un processo aleatorio *{X(t)}* viene processato da un filtro passa-alto ideale, la cui risposta in frequenza *H(f)* è data in Figura. Il processo aleatorio *{Y(t)}* in uscita dal filtro viene, poi, fatto passare attraverso un blocco di trasformazione non lineare (la cui caratteristica è anch'essa data in Figura), dal quale si ottiene in uscita il processo aleatorio *{Z(t)}*.

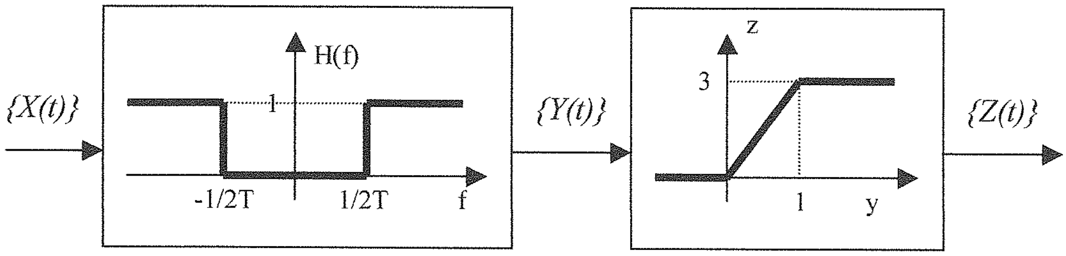


Figura 1

Il processo aleatorio *{X(t)}* è un processo SSL a media nulla, ed è caratterizzato da densità di probabilità Gaussiana. La densità spettrale di potenza di *{X(t)}* è, invece, data in Figura 2:

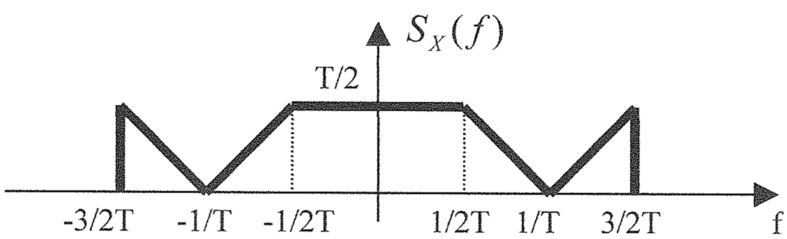


Figura 2

Sotto queste ipotesi si richiede di:

1. Calcolare l'espressione analitica della densità spettrale di potenza del processo *{Y(t)}*;
2. Calcolare l'espressione analitica dell'autocorrelazione del processo *{Y(t)}*;
3. Calcolare la densità di probabilità del processo aleatorio *{Z(t)}* e se ne disegni il grafico.

Esercizio 4

Siano dati due processi aleatori $\{x_1(t)\}$ ed $\{x_2(t)\}$ gaussiani, bianchi e tra loro indipendenti. La densità spettrale di potenza bilatera di $\{x_1(t)\}$ è pari a 0.1 μwatt/Hz, mentre la densità spettrale di potenza bilatera di $\{x_2(t)\}$ è pari a 0.5 μwatt/Hz.

Il processo $\{x_1(t)\}$ viene processato da un filtro passabasso ideale, la cui risposta in frequenza è costante nella larghezza di banda passante, pari a 10 MHz ed è di altezza pari a 5.

Il processo $\{x_2(t)\}$ viene processato da un altro filtro passabasso ideale, la cui risposta in frequenza è costante nella larghezza di banda passante pari, questa volta, a 20 MHz ed è di altezza pari a 4.

Siano denotati con *{$y_1(t)$}* ed *{$y_2(t)$}* i due processi aleatori uscenti dai due filtri passabasso di cui sopra e con *{z(t)}* la loro somma.

Sotto queste ipotesi si richiede di:

1) Calcolare media e varianza del processo aleatorio *{z(t)}*, nonché la sua funzione di densità di probabilità (si ricordi che la convoluzione di due densità di probabilità Gaussiane è una Gaussiana);

2) Calcolare l'espressione analitica dell'autocorrelazione del processo aleatorio *{z(t)}*, giustificando opportunamente l'espressione ricavata.

Al processo aleatorio *{z(t)}* viene poi sommato un altro processo aleatorio *{u(t)}*, che è stazionario, indipendente rispetto a *{z(t)}* e la cui funzione di densità di probabilità è uniforme nell'intervallo compreso tra 25 e 75. Sia *{w(t)}= {z(t)}+{u(t)}*. Sotto queste ipotesi si richiede di:

3) Calcolare, eventualmente in maniera approssimata, la probabilità che il processo *{w(t)}* produca valori che cadano al di fuori di un intorno del suo valor medio di larghezza assegnata pari a 100.

Esercizio 5

È dato il sistema illustrato in figura 1.

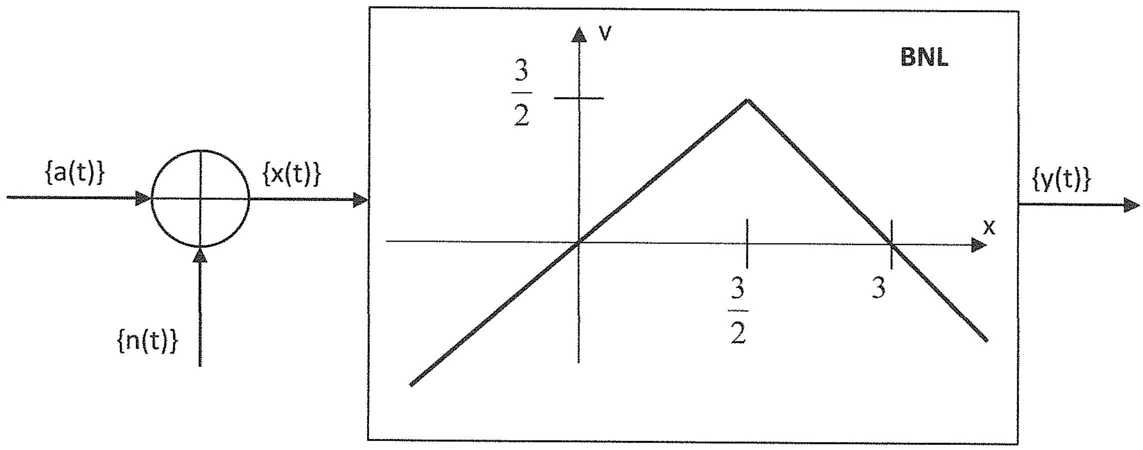


Figura 1

Il processo aleatorio {a(t))} è un processo aleatorio stazionario multi-livello che assume valori indipendenti ed equiprobabili per intervalli di tempo di durata *T*. I valori possibili sono 0, +V, +2V, +3V ($V=10^{-4}$ [V]). Il processo aleatorio {n(t)} è un processo gaussiano stazionario, a media nulla, indipendente dal processo {a(t)} la cui densità spettrale di potenza è illustrata in figura 2.

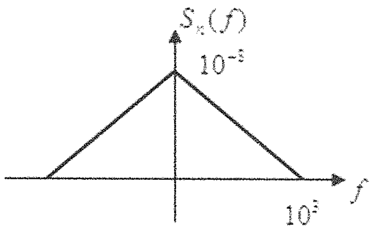


Figura 2

Si richiede di:

a) Calcolare il valore medio, la varianza e la potenza media del processo {a(t)};
b) Calcolare l'autocorrelazione del processo{a(t)};
c) Calcolare la densità di probabilità del processo {x(t)} generato dalla somma dei processi {a(t)} e {n(t)};
d) Calcolare la densità di probabilità del processo {y(t)} generato dal trattamento del processo {x(t)} tramite il blocco non lineare **BNL** la cui relazione ingresso-uscita è illustrata in figura 1.

Soluzione

Esercizio

aggiuntivo

1

ES. 1 – Domanda 1

1.1

$$y(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(t - K T_p)$$

replicazione periodica a T_p sec. di periodo di $x(t)$

$$x(t) = A_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \, \Pi\left(\frac{t}{2T_W}\right)$$

ma: $\cos^2(\omega_0 t) = \dfrac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2}$

e quindi:

$$x(t) = \left[\frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2}{2}\cos(2\omega_0 t)\right] \Pi\left(\frac{t}{2T_W}\right)$$

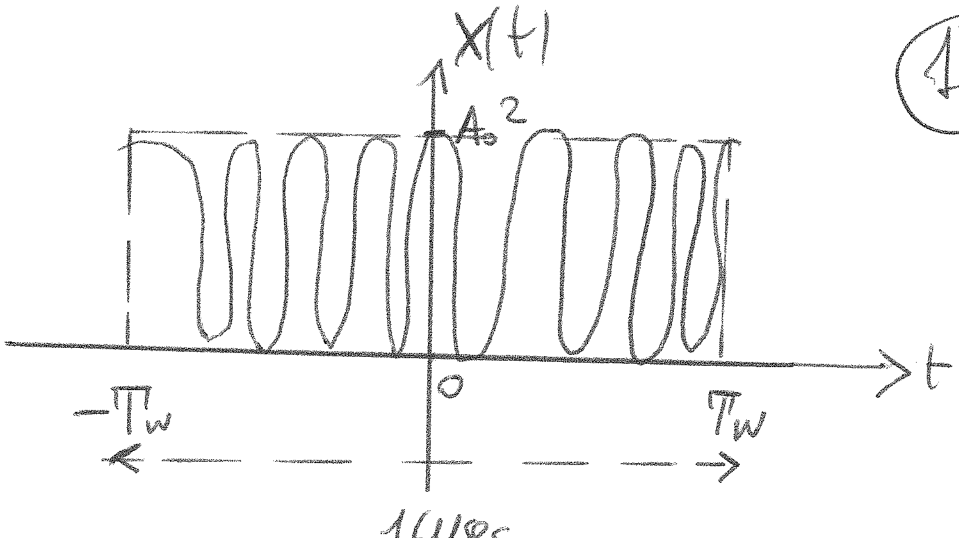
ovvero:

$$x(t) = \begin{cases} A_0^2/2 + A_0^2/2 \cos(2\omega_0 t) & |t| \leq T_W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$T_W = 8\,\mu\text{sec}$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ $\quad T_0 = 4\,\mu\text{sec}$

il periodo di $\cos(2\omega_0 t)$ è: $T_0/2 = 2\,\mu\text{sec}$



qualcosa del genere...

Y(t) è disegnato replicando X(t) ogni 32 μsec

ES. 1 – Domanda 2

Si deve procedere per gradi:

1) $$y(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_p) \Longrightarrow$$

$$Y(f) = X(f) \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_p}\right) =$$

$$= \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{T_p}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_p}\right)$$

(per una delle proprietà della delta di Dirac)

2) Calcolo di $X(f)$

$$x(t) = \left[\frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2}{2}\cos(2\omega_0 t)\right]\Pi\left(t/2T_W\right) \Rightarrow$$

$$X(f) = \mathcal{F}\left\{A_0^2/2 + A_0^2/2\,(\cos 2\omega_0 t)\right\} * \left\{2T_W \operatorname{sinc}(2T_W f)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{A_0^2}{2}\delta(f) + \left[\frac{A_0^2}{4}\delta\left(f - \frac{2}{T_0}\right) + \frac{A_0^2}{4}\delta\left(f + 2/T_0\right)\right]\right\} *$$

$$* \left\{2T_W \operatorname{sinc}(2fT_W)\right\}$$

per la proprietà distributiva delle convoluzione e per una nota proprietà delle delta di Dirach si ha:

$$X(f) = A_0^2 T_W \operatorname{sinc}(2fT_W) + \frac{A_0^2}{2}T_W \operatorname{sinc}\left[2T_W\left(f - \frac{2}{T_0}\right)\right] +$$

$$+ \frac{A_0^2}{2}T_W \operatorname{sinc}\left[2T_W\left(f + 2/T_0\right)\right] =$$

$$= A_0^2 T_W \operatorname{sinc}(2fT_W) + \frac{A_0^2 T_W}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(2fT_W - \frac{4T_W}{T_0}\right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sinc}\left(2fT_W + \frac{4T_W}{T_0}\right)\right]$$

ma: $T_W / T_0 = 2$ e quindi: (1.5)

$$X(f) = A_0^2 T_W \operatorname{sinc}(2fT_W) + \frac{A_0^2 T_W}{2}\left[\operatorname{sinc}(2fT_W - 8) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{sinc}(2fT_W + 8)\right]$$

Ed ora sostituiamo in (1):

$$X\left(\frac{n}{T_p}\right) = A_0^2 T_W \operatorname{sinc}\left(\frac{2nT_W}{T_p}\right) + \frac{A_0^2 T_W}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{2nT_W}{T_p} - 8\right) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{sinc}\left(\frac{2nT_W}{T_p} + 8\right)\right]$$

$T_W / T_p = \frac{1}{4}$ e quindi

$$X\left(\frac{n}{p}\right) = A_0^2 T_W \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{A_0^2 T_W}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2} - 8\right) +$$
$$+ \frac{A_0^2 T_W}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2} + 8\right) =$$

$$= A_0^2 T_W \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2} - 8\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2} + 8\right)\right]$$

concludendo:

$$Y(f) = \frac{A_0^2 T_W}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2} - 8\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2} + 8\right)\right] \cdot$$
$$\cdot \delta\left(f - \frac{n}{T_p}\right)$$

peraltro: $\Pi_W / \Pi_p = 1/4$ e $\frac{A_0^2 \Pi_W}{\Pi_p} = \frac{A_0^2}{4}$ (15)

(ulteriore semplificazione)

$\boxed{\text{Es. 2 – DOMANDA 3}}$

In questa domanda NON OCCORRE fare convoluzioni e si deve ragionare PRIMA nel dominio delle frequenze.

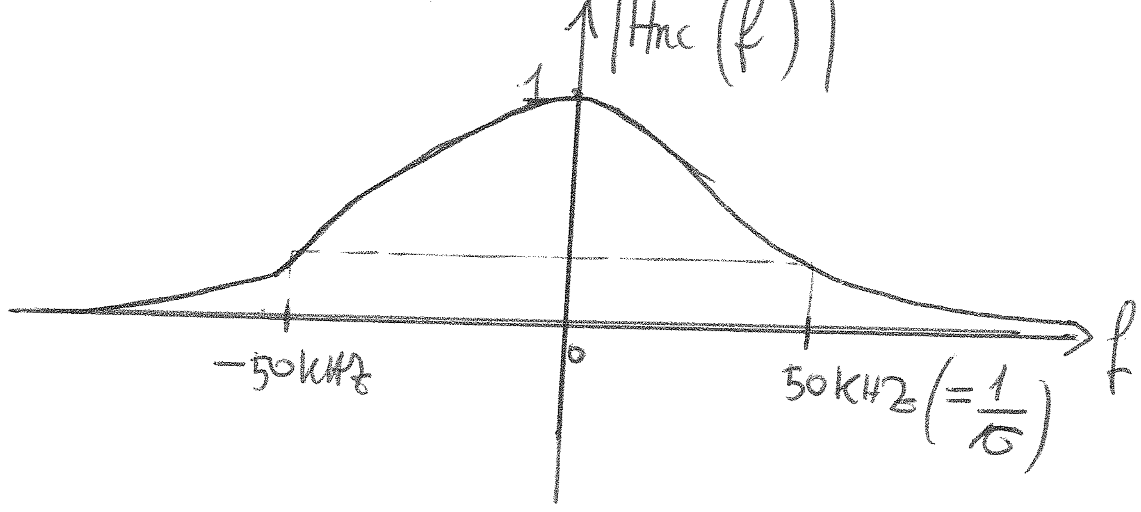
Il filtro RC ha funzione di trasferimento passa-basso:

$$H_{RC}(f) = \frac{1}{1 + 2\pi j f \tau}$$

$\tau = 20\,\mu sec$ (assegnata)

$$|H_{RC}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f \tau)^2}} \qquad \angle H_{RC}(f) = \operatorname{atan}(-2\pi f \tau)$$

Proviamo a disegnare $|H_{RC}(f)|$:



Moltiplicando $|Y(f)||H_{RC}(f)|$ "prendo" le armoniche che stanno DENTRO LA CAMPANA DEL FILTRO e "taglio via" le altre. La campana del filtro ha ampiezza spettrale pari a 50 KHZ (banda passante). Le armoniche oltre i 50 KHZ saranno brutalmente attenuate e posso non considerarle nella mia analisi.

Sicuramente nel filtro rientrerà la continua ($n=0$) che ha ampiezza: $\frac{A_0^2}{4}$

La <u>"fondamentale"</u> ($n=1$) ha frequenza pari a $1/T_p =$ 31.25 KHZ. La sua ampiezza (non attenuata) è pari a: $0.63\frac{A_0^2}{4}$

Il filtro la attenua <u>di 0,4505.</u>

Quindi la "fondamentale" passa con ampiezza: $0.63 \cdot 0.4505 \frac{A_0^2}{4} \simeq 0.28 A_0^2/4$

La <u>seconda armonica</u> a frequenza 62.5KHZ ($n=2$) è attenuata <u>di 0.33</u> dal filtro. Ma la sua ampiezza non attenuata è già alquanto ridotta; ovvero $\frac{A_0^2}{4}\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 0.2122$.

Complessivamente, la seconda armonica esce dal filtro con un'ampiezza di:

$$(2^a \text{ armonica}) \quad \boxed{\frac{A_0^2}{4} \cdot 0.2122 \cdot 0.33 \simeq \frac{A_0^2}{4} \cdot 0.07}$$

Chiaramente, armoniche di ordine (e frequenza) superiore sono trascurabili.

Ragionevolmente possiamo dire che il filtro RC trattiene un contenuto armonico di ordine 0, 1 e 2. Pertanto, un andamento "di massima" del segnale è del tipo:

$$z(t) = \underbrace{K_1}_{\text{CONTINUA}} + \underbrace{K_2 \cos(\omega_p t)}_{\text{ARMONICA FONDAMENTALE}} + \underbrace{K_3 \cos(2\omega_p t)}_{\text{ARMONICA DI ORDINE 2}}$$

K_1, K_2 e K_3 possono essere individuate come costanti generiche.

Soluzione
Esercizio
aggiuntivo
#2

Esercizio 2 7/12/11 — Domanda 1

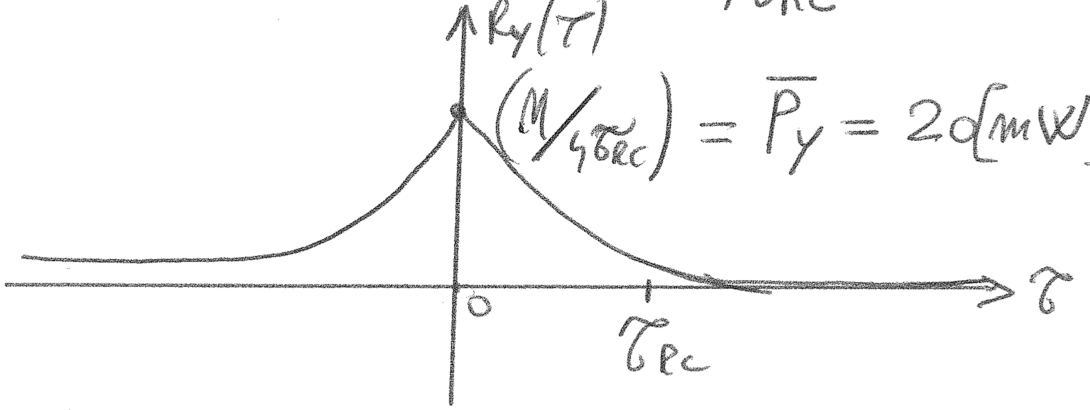
$$H_{RC}(f) = \frac{1}{1 + 2\pi j f \tau_{RC}} \qquad \tau_{RC} = RC = 10^{-4}\,\text{sec.}$$

$$|H_{RC}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f \tau_{RC})^2}}$$

$$S_Y(f) = S_X(f)\,|H_{RC}(f)|^2 =$$

$$= \frac{\eta}{2}\,\frac{1}{\left(1 + (2\pi f \tau_{RC})^2\right)}$$

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_Y(f)\} = \frac{\eta}{4\tau_{RC}}\, e^{-|\tau|/\tau_{RC}}$$



(è un'esponenziale simmetrica)

Esercizio 2 – 7/12/2011 – Domanda 2

$$E(Y(t)) = H_{RC}(0)\,\overline{X} = 0$$

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) = R_Y(0) = 2 \cdot 10^{-2}\,W$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}}\, e^{-y^2/2\sigma_Y^2} \quad \text{(gaussiana)}$$

Esercizio 2 – 7/12/2011 – Domanda 3

$\{Y(t_0)\} = Y_0 \rightarrow$ variabile aleatoria

poiché il processo è SSL, sarà distribuita in maniera GAUSSIANA

$W = G Y_0$ è un'altra variabile aleatoria distribuita in maniera Gaussiana con media nulla e varianza $\sigma_W^2 = G^2 \sigma_Y^2$

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi G^2 \sigma_Y^2}}\, e^{-w^2/2G^2\sigma_Y^2}$$

W entra nel blocco di trasformazione non lineare ed, in uscita avremo una variabile aleatoria Z che assumerà SOLO 4 VALORI: $\{-2, -1, 1, 2\}$. Quindi Z è una variabile aleatoria DISCRETA.

Non avremo, quindi, una DENSITÀ DI PROBABILITÀ, ma una FUNZIONE FREQUENZA:

$$Z = -2 \rightarrow P(Z=-2) = P(W<-1)$$
$$Z = -1 \rightarrow P(Z=-1) = P(-1 \leq W \leq 0)$$
$$Z = 1 \rightarrow P(Z=1) = P(0 \leq W \leq 1)$$
$$Z = 2 \rightarrow P(Z=2) = P(W>1)$$

È evidente (per la simmetria della Gaussiana) che:

$$P(Z=-2) = P(Z=2)$$
$$P(Z=1) = P(Z=-1)$$

Calcoliamo quindi: $P(Z=2) =$

$$= 1 - \underset{\substack{\parallel \\ P_r\{W \leq 1\}}}{F_W(1)} = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{1}{G\sigma_Y}\right)\right) = Q\left(\frac{1}{G\sigma_Y}\right)$$

(Ricordare che $F_W(w) = 1 - Q\left(\frac{w}{\sigma_W}\right)$ poiché W è Gaussiana ed ha media nulla)

$$P(Z=2) = Q\left(\frac{1}{10\cdot\sqrt{2\cdot 10^{-2}}}\right) = Q\left(\frac{1}{10\cdot 10^{-1}\sqrt{2}}\right) =$$

$$= Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = Q(0.7) \cong 0.25$$

$$P(Z=1) = F_W(1) - F_W(0) = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) +$$

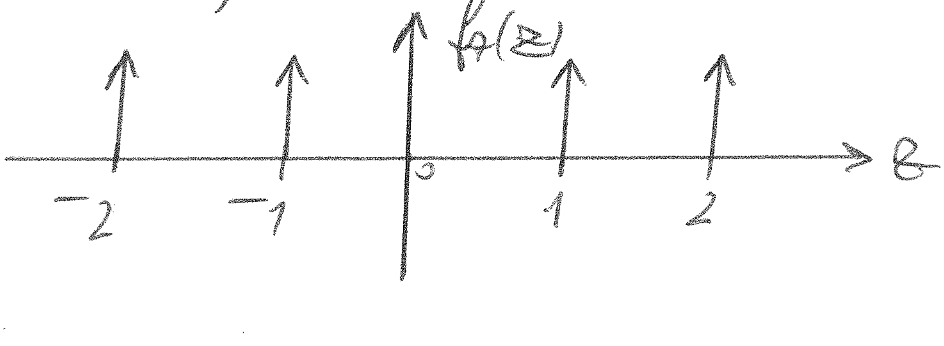
$$- \left(1 - Q(0)\right) = Q(0) - Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.5 - 0.25 =$$

$$= 0.25$$

Quindi i quattro valori sono pressoché equiprobabili. In senso improprio possiamo definire la <u>DENSITÀ DI PROBABILITÀ</u>:

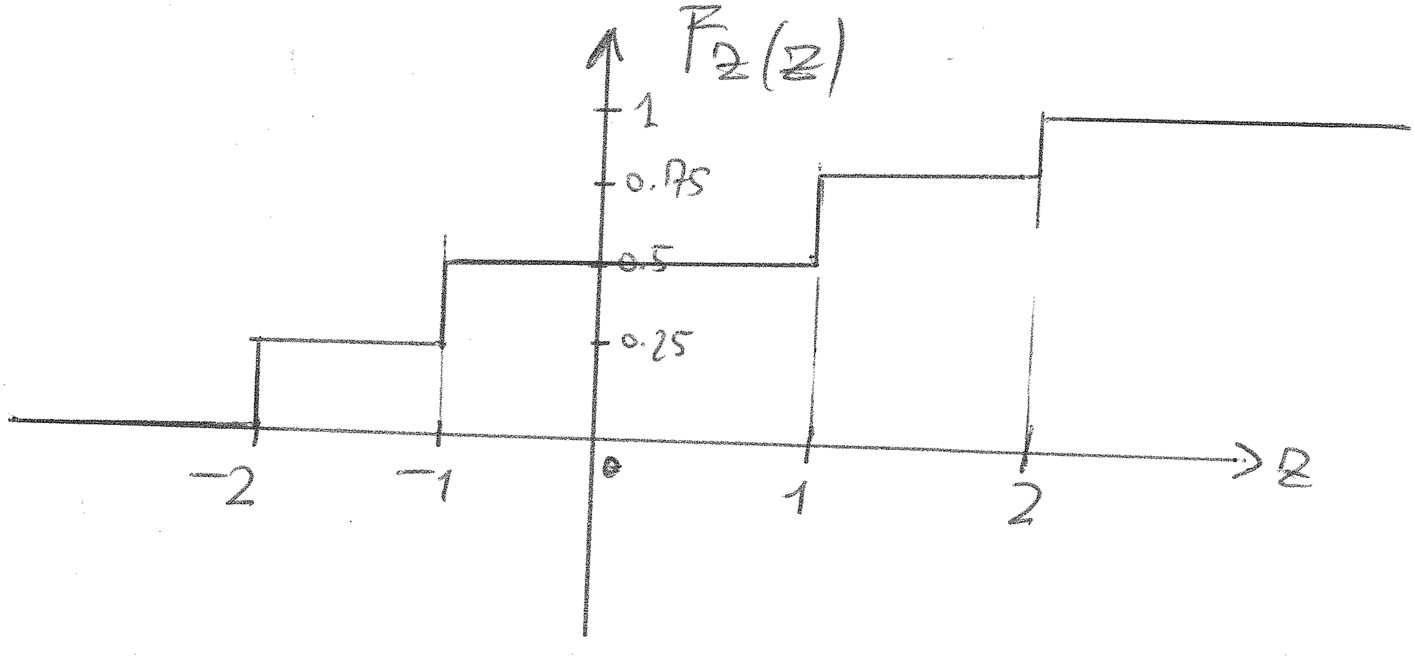
$$f_Z(z) = 0.25\,\delta(z+2) + 0.25\,\delta(z+1) +$$

$$+ 0.25\,\delta(z-1) + 0.25\,\delta(z-2)$$



Mentre in senso non improprio si può definire la C.D.F:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < -2 \\ 0.25 & -2 \le z < -1 \\ 0.5 & -1 \le z < 1 \\ 0.75 & 1 \le z < 2 \\ 1 & z \ge 2 \end{cases}$$



Soluzione

esercizio

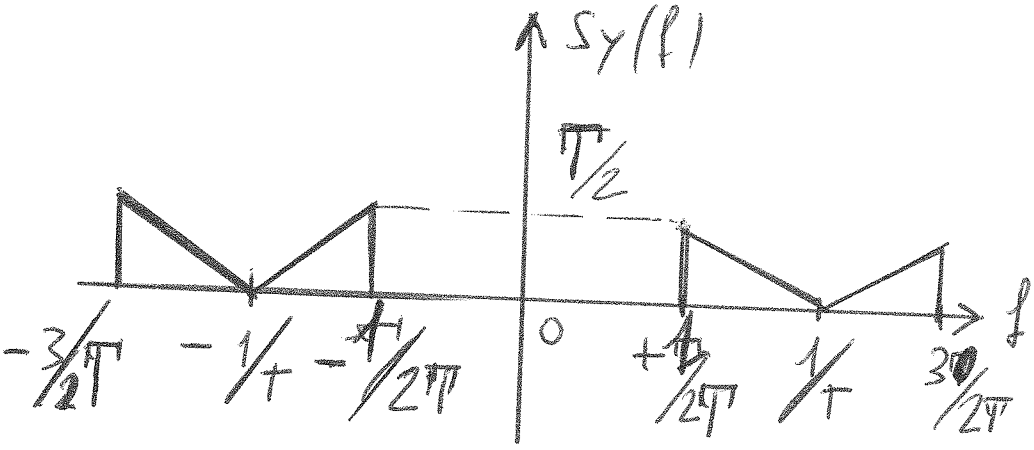
aggiuntivo

\# 3

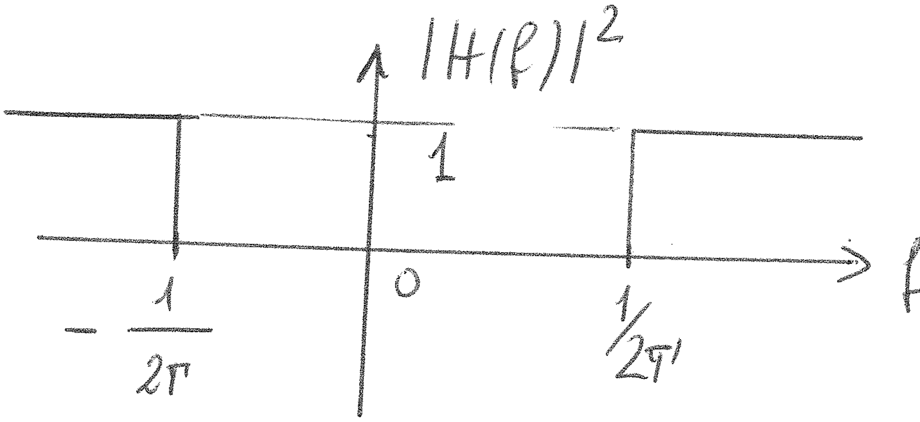
Esercizio 1 – Domanda 1 (20/12/2011)

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

Si calcola in maniera grafica:



poichè:



che è un passa-alto e fa passare solo le componenti di frequenza maggiori di $1/2T$ (e non le cambia, poichè il guadagno è unitario).
L'espressione analitica è:

$$S_y(f) = G\left(f - 1/T\right) + G\left(f + 1/T\right)$$

dove: $G(f) = \frac{T}{2}\left[-\Lambda\left(\frac{f}{1/2\pi}\right) + \pi\left(\frac{f}{1/\pi}\right)\right]$ (4.2)

DOMANDA 2 - ES. 1 (20/12/2011)

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_Y(f)\}$$

$$S_Y(f) = G(f) * \left[\delta\left(f - \tfrac{1}{\pi}\right) + \delta\left(f + \tfrac{1}{\pi}\right)\right] =$$

$$= 2G(f) * \left\{\frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \tfrac{1}{\pi}\right) + \delta\left(f + \tfrac{1}{\pi}\right)\right]\right\}$$

e quindi:

$$R_Y(\tau) = 2\,\mathcal{F}^{-1}(G(f))\cos\left(\frac{2\pi\tau}{\pi}\right)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} = \frac{\cancel{\pi}}{2}\left[-\frac{1}{2\cancel{\pi}}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau}{2\pi}\right) + \frac{1}{\cancel{\pi}}\operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{\pi}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{\pi}\right) - \frac{1}{4}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)$$

concludendo:

$$R_Y(\tau) = \left\{\operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{\pi}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)\right\}\cos\left(\frac{2\pi\tau}{\pi}\right)$$

Es. 1 – Domanda 3 (20/12/2011)

$$\{Z(t)\} = \{F(Y(t))\}$$ (trasformazione non lineare)

dove:
$$F(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 3y & 0 < y \leq 1 \\ 3 & y > 1 \end{cases}$$

$\{Y(t)\}$ è un processo aleatorio, <u>gaussiano</u>, SSL la cui p.d.f. è:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{-y^2/2\sigma_Y^2}$$

ove $\sigma_Y^2 = E(y^2) = R_Y(0) = 0.5$ [W]

quindi:
$$\{Z(t)\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \{y(t)\} \leq 0 \\ 3\{y(t)\} & \text{se } 0 < \{y(t)\} \leq 1 \\ 3 & \text{se } \{y(t)\} > 1 \end{cases}$$

$F(y)$ è monotona ed invertibile, ma solo nell'intervallo $y \in [0, 1]$.

$$F^{-1}(z) = \frac{1}{3} z \qquad z \in [0, 3]$$

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \, e^{-\frac{\left(\frac{1}{3}z\right)^2}{2\sigma_y^2}} \left|\frac{1}{3}\right|$$

applicando la formula usuale.

ovvero: $$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{18\pi\sigma_y^2}} \, e^{-z^2/18\sigma_y^2} \qquad z \in [0, 3]$$

Ma $z(t)$ può valere anche 0 e 3 (valori discreti) con probabilità:

$$P_r\{z(t) = 0\} = P_r\{y \leq 0\} \triangleq \alpha$$

$$P_r\{z(t) = 3\} = P_r\{y \geq 1\} \triangleq \beta$$

quindi:

$$f_z(z) = \alpha\,\delta(z) + \beta\,\delta(z-3) + \frac{1}{\sqrt{18\pi\sigma_y^2}} \, e^{-z^2/18\sigma_y^2}$$

$\forall\, z \in [0, 3]$

4.5

$$\alpha = P_r\{y \leq 0\} = Q\left(\frac{0}{\sigma_Y}\right) = Q(0) = \frac{1}{2}$$

$$\beta = P_r\{Y \geq 1\} = Q\left(\frac{1}{\sigma_Y}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{1/2}}\right) =$$

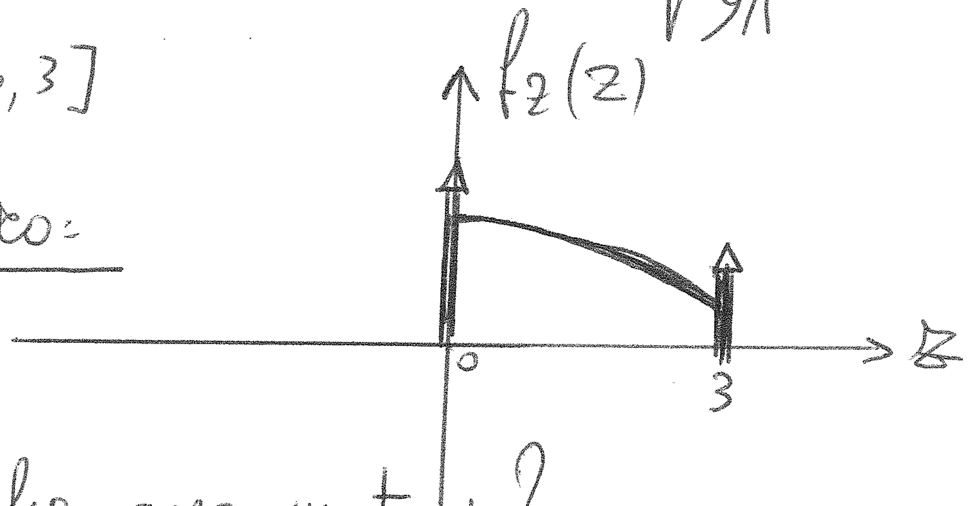
$$= Q(\sqrt{2}) = 0.0786$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}\delta(z) + 0.0786\,\delta(z-3) + \frac{1}{\sqrt{18\pi\sigma_Y^2}} e^{-z^2/18\sigma_Y^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\delta(z) + 0.0786\,\delta(z-3) + \frac{1}{\sqrt{9\pi}} e^{-z^2/9}$$

$\forall z \in [0,3]$

GRAFICO:



Verifico: ha area unitaria?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)\,dz = \int_{0}^{3} f_Z(z)\,dz = \frac{1}{2} + \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9\pi}} e^{-z^2/9} + 0.07$$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9\pi}} e^{-z^2/9}\,dz = \frac{1}{2} - \int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{9\pi}} e^{-z^2/9}\,dz =$$

46

$$= \frac{1}{2} - Q\left(\frac{3}{\sqrt{9/2}}\right) \quad \left(\text{poiché } \frac{z^2}{2\sigma_y^2} = z^2/9\right.$$

$$\left.\text{e quindi } 2\sigma_y^2 = 9 \Rightarrow \sigma_y^2 = \frac{9}{2}\right)$$

concludendo:

$$\int_0^3 f_Z(z)\,dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cancel{Q(\sqrt{2})} + \cancel{0.0786} = 1$$

$\cancel{\| \; 0.0786}$

~~(calcolato prima)~~

OK

Soluzione

esercizio

aggiuntivo

4

5.1

1

$\boxed{\text{Domanda 1}}$

PROVA IN ITINERE
21/12/09

$$\{z(t)\} = \{y_1(t)\} + \{y_2(t)\}$$

$$E\left(z(t)\right) = E\left(y_1(t)\right) + E\left(y_2(t)\right) = 0 \quad \text{(media)}$$

poiché $E\left(y_1(t)\right) = E\left(x(t)\right) H_1(0) = 0$

$E\left(y_2(t)\right) = E\left(x(t)\right) H_2(0) = 0$

$$\sigma_z^2 = E\left(y_1^2(t)\right) + E\left(y_2^2(t)\right)$$

poiché sono entrambi a media nulla ed indipendenti

$$E\left(y_1^2(t)\right) = \bar{P}_1 = \int_{-W_1}^{W_1} \eta_1/2 \, |H_1(f)|^2 \, df =$$

$$= \int_{-W_1}^{W_1} \eta_1/2 \cdot 25 \, df = 25 \int_{-10^7}^{10^7} 10^{-7} \cdot df =$$

$$= 25 \cdot \cancel{10^{-7}} \cdot 2 \cdot \cancel{10^7} = 50 \text{ W}$$

$$E\left(y_2^2(t)\right) = \int_{-W_2}^{W_2} \eta_2/2 \; 16 \, df = 16 \int_{-2\cdot 10^7}^{2\cdot 10^7} 5 \cdot 10^{-7} \, df =$$

(vedi sopra)

$$= 80 \cdot \cancel{10^{-7}} \cdot 4 \cdot \cancel{10^7} = 320 \text{ W}$$

5.2

2

Pertanto $\sigma_z^2 = 320 + 50 = 370\ W = E(z^2)$

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}}\, e^{-z^2/2\sigma_z^2}$$

(è una Gaussiana, come si è detto...)

$\boxed{\text{Domanda 2}}$

$$E\big(z(t)z(t+\tau)\big) = E\Big(\big[y_1(t)+y_2(t)\big]\big[y_1(t+\tau)+y_2(t+\tau)\big]\Big)$$

$$= E\big(y_1(t)\,y_1(t+\tau) + y_1(t)\,y_2(t+\tau) + y_2(t)\,y_1(t+\tau) + y_2(t)\,y_2(t+\tau)\big) =$$

$$= R_{y_1}(\tau) + R_{y_2}(\tau)$$

<u>poiché</u>: $E\big(y_1(t)\,y_2(t+\tau)\big) = E\big(y_1(t)\big)E\big(y_2(t+\tau)\big) = 0$ poiché indipendenti ed ~~[illegible]~~ a media nulla

$$R_{y_1}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{y_1}(f)\}$$

$$R_{y_2}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{y_2}(f)\}$$

$$S_{y_1}(f) = 25\cdot 0.1\cdot 10^{-6}\ \Pi\left(\frac{f}{2W_1}\right)$$

$$S_{y_2}(f) = 16\cdot 0.5\cdot 10^{-6}\ \Pi\left(\frac{f}{2W_2}\right)$$

$$S_{y_1}(f) = 2.5 \cdot 10^{-6}\, \Pi\left(\frac{f}{2 \cdot 10^{7}}\right)$$ ③ 5.3

$$S_{y_2}(f) = 8 \cdot 10^{-6}\, \Pi\left(\frac{f}{4 \cdot 10^{-7}}\right)$$

Antitrasformando:

$$R_{y_1}(\tau) = 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{+7}\, \mathrm{sinc}(2 \cdot 10^{7}\tau)$$

$$R_{y_2}(\tau) = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{7}\, \mathrm{sinc}(4 \cdot 10^{7}\tau)$$

$$R_{y_1}(\tau) = 50 \cdot \mathrm{sinc}(2 \cdot 10^{7}\tau)$$

$$R_{y_2}(\tau) = 320\, \mathrm{sinc}(4 \cdot 10^{7}\tau)$$

$$\rightarrow R_{z}(\tau) = 50\, \mathrm{sinc}(2 \cdot 10^{7}\tau) + 320\, \mathrm{sinc}(4 \cdot 10^{7}\tau)$$

$\boxed{\text{Domanda 3}}$

$$E(w(t)) = E(\underbrace{\cancel{z}(t)}_{=0}) + E(u(t)) = E(u(t))$$

$$E(u(t)) = \frac{25 + 75}{2} = \cancel{100}\ 50$$

Quindi Chebyschev mi dice che:

$$\Pr\{|w(t) - \overline{w}| \geq K\sigma_u\} \leq \frac{1}{K^2}$$

oppure:

$$P_r\left\{|w(t)-\bar{w}|>\delta\right\}<\frac{\sigma_w^2}{\delta^2}$$

Nel nostro caso:

$$P_r\left\{|w(t)-50|>10^2\right\}<\frac{\sigma_w^2}{10^4}$$

$$P_r\left\{|w(t)-50|>100\right\}<\frac{\sigma_w^2}{10000}$$

Bisogna, ora, calcolare la varianza di u.

$$\sigma_w^2 = E\left[(w(t)-\bar{w})^2\right] = E(w^2(t)) - \bar{w}^2$$

$$E(w^2(t)) = E\left[(z(t)+u(t))^2\right] =$$

$$= E\left(z^2 + 2uz + u^2\right) =$$

$$= E(B^2) + \underbrace{2E(u)\,\overset{=0}{\cancel{E(z)}}}_{\text{poiché indipendenti}} + E(u^2)$$

5.5

$$\boxed{E(R^2) = \sigma_R^2 = 370\ W}$$

$$\boxed{E(u^2) = \sigma_u^2 + \bar{u}^2}$$

Dalle formule sulla d.d.p. uniforme si ha che:

$$\sigma_u^2 = \frac{(X_2 - X_1)^2}{12} = \frac{(75-25)^2}{12} = \frac{50^2}{12} =$$

$$= \frac{2500}{12}$$

$$E(u^2) = \frac{2500}{12} + 2500 = \frac{32.500}{12}\ W$$

$$\sigma_W^2 = 370 + \frac{32'500}{12} - 2500 =$$

$$= \cancel{370 + 32'500} \quad \frac{4440 + 32'500 - 30000}{12} =$$

$$= \frac{4400 + 2500}{12} = \frac{6940}{12}$$

$$P_r\{|W(t) - 50| > 100\} < \frac{6940}{12 \cdot 10^4} = \frac{6.94 \cdot \cancel{10^3}}{12 \cdot 10^4} =$$

$$= 6.94/120 = 0.058$$

Soluzione

esercizio

aggiuntivo

#5

6.1

ES. 3 – DOMANDA 1

$$\bar{a} = \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}V + \frac{1}{4}2V + \frac{1}{4}3V = \frac{3V}{2} = 1.5 \cdot 10^{-} \ [V]$$

$$\sigma_a^2 = E(a^2) - \bar{a}^2 = E(a^2) - \frac{9}{4}V^2$$

$$E(a^2) = \sum_{i=1}^{4} P(a_i) a_i^2 = \frac{1}{4}(2V)^2 + \frac{1}{4}(3V)^2 + \frac{1}{4}(V)^2 =$$

$$= \frac{7}{2}V^2 = \bar{P}_a \quad (\text{potenza media di } \{a(t)\} = \frac{7}{2} \cdot 10^{-8} \ [W])$$

$$\sigma_a^2 = \frac{7}{2}V^2 - \frac{9}{4}V^2 = \frac{5}{4}V^2 = \frac{5}{4} \cdot 10^{-8} \ [W]$$

ES. 3 – DOMANDA 2

Si distinguono i 3 casi:

t e $t+\tau$ $(\tau \geq 0)$

- i) sono nello stesso intervallo di durata T
- ii) sono in intervalli differenti di durata T
- iii) sono in due intervalli adiacenti

caso i) $0 \leq \tau < T$ — t e $t+\tau$ sono in una stessa commutazione

caso ii) $\tau \geq T$ — t e $t+\tau$ sono in intervalli "lontani" appartenenti a commutazioni diverse

caso iii) $0 \leq \tau < T$ — t e $t+\tau$ sono in commutazioni diverse, ma ADIACENTI caso (ii) (più semplice)

$$E\{a(t)\,a(t+\tau)\} = \underset{(\text{INDIPENDENZA})}{E(a(t))\,E(a(t+\tau))} =$$

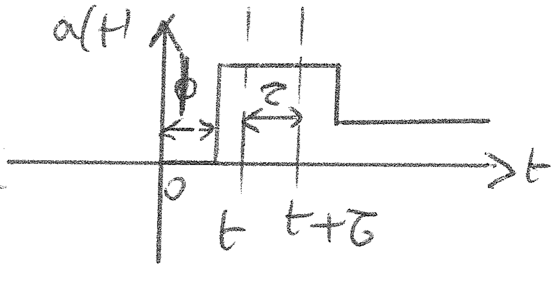
$$= \bar{a}^2 \text{ (per la stazionarietà)}$$

e quindi $R_a(\tau) = \frac{9}{4}V^2 \quad \forall \tau \geq T$

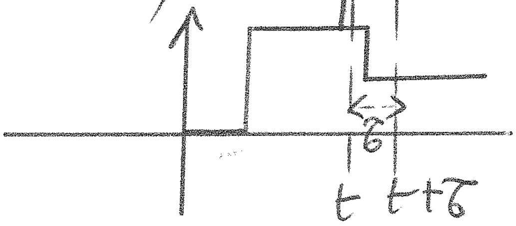
caso (i) $E\{a(t)\,a(t+\tau)\} = E\{a^2(t)\} = \frac{17}{2}V^2$

poiché t e $t+\tau$ sono in uno stesso intervallo di commutazione

ϕ = ritardo iniziale casuale unif. distribuito in $[0, T)$



caso (iii) si rientra nell'indipendenza vista al caso (ii) e quindi $R_a(\tau) = \frac{9}{4}V^2$



Concludendo: $R_a(\tau) = \begin{cases} \frac{9}{4}V^2 & |\tau| \geq T \\ \frac{9}{4}V^2 P(\text{I.A.}) + \frac{17}{2}V^2 P(\text{S.I.}) & 0 \leq |\tau| < T \end{cases}$

$$P_2(I.A.) = P_2\left\{ t < \phi < |\tau| + t \right\}$$

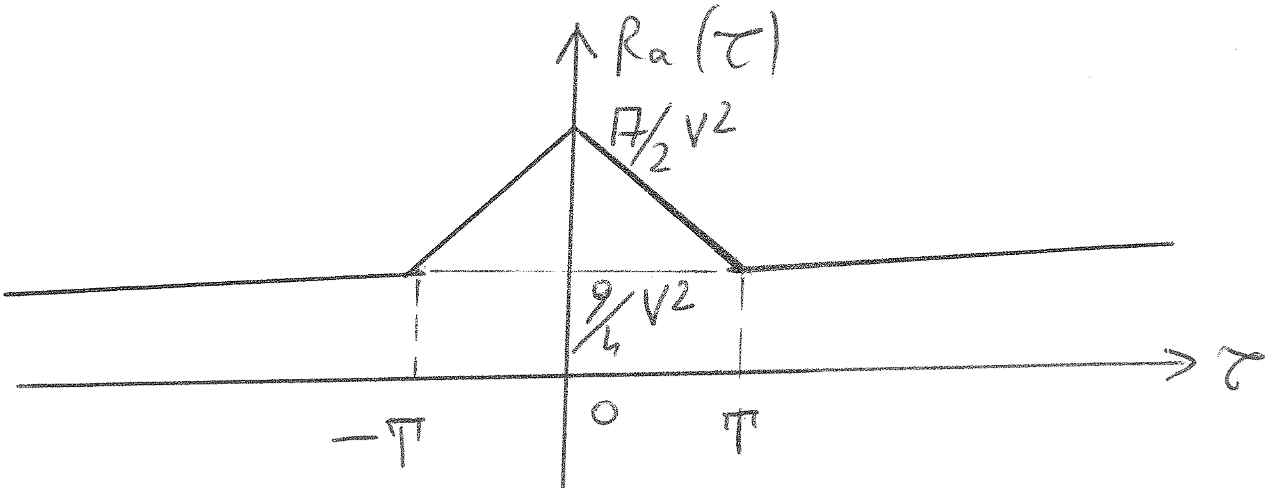
ovvero: t e $t+\tau$ sono nell'adiacenza di due intervalli di commutazione e ϕ è compreso in mezzo a loro.

$$P_2(I.A.) = \int_t^{t+\tau} \frac{1}{T}\,dt = \frac{|\tau|}{T}$$

$$P_2(S.I.) = 1 - P_2(I.A.) = 1 - \frac{|\tau|}{T} = \frac{T - |\tau|}{T}$$

L'espressione analitica è:

$$R_a(\tau) = \begin{cases} \dfrac{9}{4}V^2 & \text{per } |\tau| \geq T \\[2ex] \dfrac{9}{4}V^2 \cdot \dfrac{|\tau|}{T} + \dfrac{17}{2}V^2 \dfrac{T-|\tau|}{T} = \\[2ex] = \dfrac{17}{2}V^2 - \dfrac{5}{4}V^2 \dfrac{|\tau|}{T} & \text{per } 0 \leq |\tau| < T \end{cases}$$



$$R_a(\tau) = \frac{5}{4}V^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) + \frac{9}{4}V^2$$

ES. 3 – DOMANDA 3

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-x^2/2\sigma_n^2}$$ densità di probabilità di $\{n(t)\}$

$$\sigma_n^2 = E(n^2) = 10^{-8} [W]$$

$$f_x(x) = f_n(x) * \left\{ \frac{1}{4}\delta(x) + \frac{1}{4}\delta(x-V) + \frac{1}{4}\delta(x-2V) + \frac{1}{4}\delta(x-3V) \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} f_n(x) + \frac{1}{4} f_n(x-V) + \frac{1}{4} f_n(x-2V) + \frac{1}{4} f_n(x-3V)$$ e può bastare

Presumibilmente le diverse campane traslate sovrapponranno le loro code (da verificare)