Esercizi svolti di Teoria dei Segnali

Enrico Magli, Letizia Lo Presti, Gabriella Olmo, Gabriella Povero

Versione 1.0

Prefazione

A partire dall'anno accademico 2005/2006 viene fornita agli studenti dei corsi di Teoria dei Segnali del Politecnico di Torino questa dispensa per aiutarli nella preparazione dell'esame. La dispensa contiene un campionario di esercizi svolti che coprono la maggior parte del programma, e contengono alcuni dei metodi di soluzione più tipici per diverse classi di esercizi.

Come in ogni raccolta di esercizi svolti, dato l'elevato numero di formule è inevitabile che siano presenti degli errori. Al fine di migliorare la qualità delle edizioni successive di questa dispensa, si prega di segnalare eventuali errori inviando un'e-mail a `enrico.magli@polito.it`.

Gli autori ringraziano Pietro Macchi per l'aiuto nella stesura della versione preliminare di questa dispensa.

Sommario

Unità 1

1.1 Calcolo di energia e potenza media di un segnale

Esercizio 1

Calcolare l'energia del segnale

$$x(t) = \mathrm{e}^{-Kt}\cos(2\pi f_0 t)u(t)$$

con $K > 0$.

Soluzione

Come in molti altri casi, anche in questo semplice esercizio la soluzione si può trovare calcolando l'energia sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza. Procediamo per esempio nel dominio del tempo:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$$

$$E_x = \int_{0}^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-Kt}\cos(2\pi f_0 t)\right|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2Kt}\cos^2(2\pi f_0 t) dt$$

Ricordando la formula di duplicazione del coseno si ottiene

$$E_x = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2Kt} dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2Kt}\cos(4\pi f_0 t) dt$$

Al secondo termine conviene applicare la formula di Eulero ed esprimere il coseno come somma di esponenziali complessi:

$$E_x = -\frac{1}{4K}\,\mathrm{e}^{-2Kt}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2Kt}\left(\frac{\mathrm{e}^{j4\pi f_0 t} + \mathrm{e}^{-j4\pi f_0 t}}{2}\right) dt$$

$$E_x = \frac{1}{4K} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2(K-j2\pi f_0)t}dt + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2(K+j2\pi f_0)t}dt$$

$$E_x = \frac{1}{4K}+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{-1}{2(K-j2\pi f_o)}\mathrm{e}^{-2(K-j2\pi f_0)t}dt\right|_0^{\infty} + \left(\frac{-1}{2(K+j2\pi f_o)}\mathrm{e}^{-2(K+j2\pi f_0)t}dt\right|_0^{\infty}\right]$$

$$E_x = \frac{1}{4K} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2(K-j2\pi f_0)} + \frac{1}{2(K+j2\pi f_o)}\right] = \frac{1}{4K} + \frac{1}{4}\frac{2K}{2(K^2+4\pi^2 f_0^2)}$$

$$E_x = \frac{1}{4K}\left[1 + \frac{K^2}{K^2+4\pi^2 f_0^2}\right]$$

Esercizio 2

Calcolare la potenza media del segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT)$$

dove $p(t)$ è riportato in Fig. 1.1.

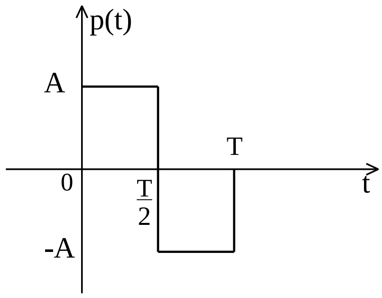

Figura 1.1

Soluzione

$x(t)$ è periodico di periodo T. Quindi, indicando con E_p l'energia del segnale $p(t)$ in un periodo, si ottiene

$$P_x = \frac{E_p}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T |p(t)|^2 \, dt$$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 dt = A^2$$

1.2 Sviluppi in serie di Fourier e trasformate di Fourier

Esercizio 3

Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier del segnale, definito nell'intervallo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

$$x(t) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau}t} & t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Soluzione

È necessario calcolare i coefficienti μ_n dello sviluppo in serie di Fourier applicando la definizione. Si ottiene

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{T}nT}dt = \frac{A}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{e}^{j2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{n}{T}\right)t}dt$$

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{A}{T}\frac{1}{j2\pi\left(\frac{1}{\tau}-\frac{n}{T}\right)}\left[\mathrm{e}^{j2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{n}{T}\right)\frac{\tau}{2}} - \mathrm{e}^{-j2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{n}{T}\right)\frac{\tau}{2}}\right] \\ &= \frac{A}{T}\frac{\sin\left[\pi\tau\left(\frac{1}{\tau}-\frac{n}{T}\right)\right]}{\pi\left(\frac{1}{\tau}-\frac{n}{T}\right)} = \frac{A\tau}{T}\frac{\sin\left[\pi\tau\left(\frac{1}{\tau}-\frac{n}{T}\right)\right]}{\pi\tau\left(\frac{1}{\tau}-\frac{n}{T}\right)} \end{aligned}$$

$$\mu_n = \frac{A\tau}{T}\frac{\sin\left[\pi\left(1-\frac{n\tau}{T}\right)\right]}{\pi\left(1-\frac{n\tau}{T}\right)} = \frac{A\tau}{T}\text{sinc}\left(1-\frac{n\tau}{T}\right)$$

Si noti che, per certi valori di τ, alcuni dei coefficienti μ_n potrebbero diventare nulli. Per esempio, prendendo $\tau = T/2$, si ottiene

$$\mu_n = \frac{A\tau}{T}\text{sinc}\left(1-\frac{n}{2}\right)$$

e quindi $\mu_n = 0$ per n pari e diverso da 2.

Esercizio 4

Determinare lo spettro del segnale $x(t)$ rappresentato in Fig. 1.2, usando opportunamente le proprietà della trasformata di Fourier.

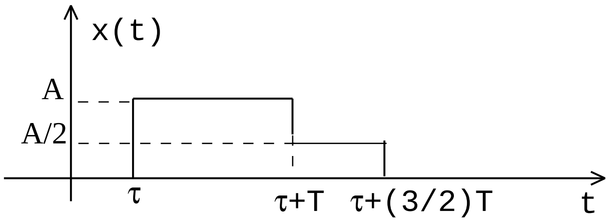

Figura 1.2

Soluzione

Possiamo scrivere il segnale $x(t)$ come somma di due contributi:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

La scomposizione si può fare in modi diversi, si veda p.es. la Fig. 1.3. Nel seguito scriviamo il segnale seguendo l'esempio B come

$$x(t) = Ap_T(t - (T + \tau/2)) + \frac{A}{2} p_{T/2}\left(t - (\tau + 5T/4)\right)$$

Quindi per linearità si ottiene la trasformata di Fourier

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$

$$\begin{aligned} X_1(f) &= A\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{-j2\pi f\left(\frac{T}{2}+\tau\right)} \\ X_2(f) &= \frac{A}{2}\frac{\sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)}{\pi f} e^{-j2\pi f\left(\frac{5}{4}T+\tau\right)} \end{aligned}$$

Utilizzando alcune proprietà trigonometriche si può scrivere $X(f)$ in modo più elegante:

$$\begin{aligned} X(f) &= A\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{-j\pi f T} e^{-j2\pi f \tau} + \frac{A}{2}\frac{\sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)}{\pi f} e^{-j\pi f \frac{5}{2}T} e^{-j2\pi f\tau} = \\ &= \frac{AT}{\pi f T} e^{-j2\pi f\tau} \left\{ 2\sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)\cos\left(\pi f\frac{T}{2}\right) e^{-j\pi f T} + \frac{1}{2}\sin\left(\pi f\frac{T}{2}\right) e^{-j\pi f \frac{5}{2}T} \right\} = \\ &= \frac{AT}{2\pi f \frac{T}{2}} e^{-j2\pi f\tau} \sin\left(\pi f\frac{T}{2}\right) \left\{ 2\cos\left(\pi f \frac{T}{2}\right) e^{-j\pi f T} + \frac{1}{2} e^{-j\pi f \frac{5}{2}T} \right\} \end{aligned}$$

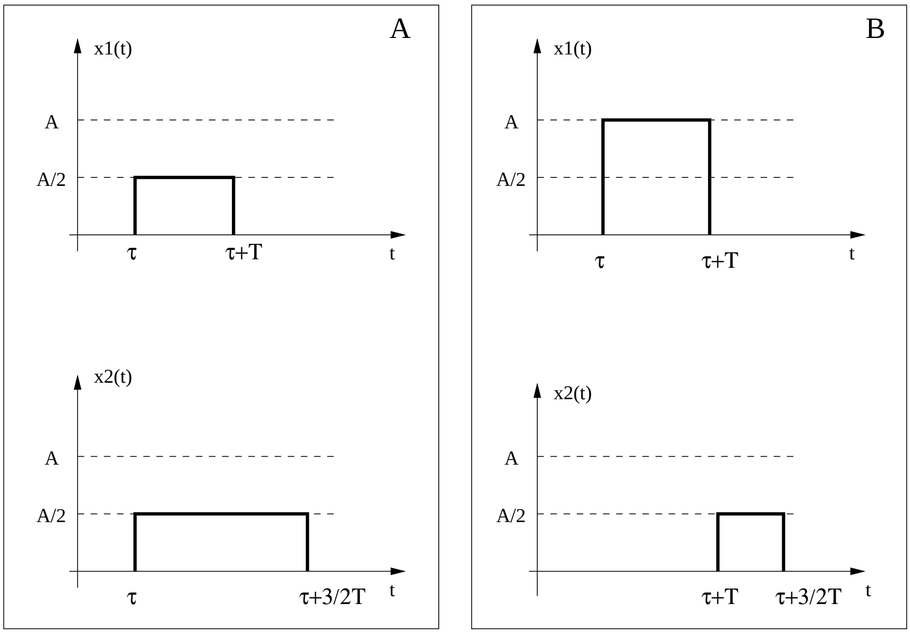

Figura 1.3

$$X(f) = \frac{AT}{2} \frac{\sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)}{\pi f \frac{T}{2}} \mathrm{e}^{-j2\pi f\left(\tau + \frac{T}{2}\right)} \left\{ 2\cos\left(\pi f \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j\pi f \frac{3}{2}T} \right\}$$

Esercizio 5

Si considerino i due segnali

$$x(t) = \mathrm{e}^{-kt}u(t)$$

$$y(t) = x(t) * \frac{\sin(\theta t)}{\pi t}$$

dove "$*$" denota il prodotto di convoluzione. Si determini la relazione che deve intercorrere tra le costanti k e θ affinchè l'energia di $y(t)$ sia pari alla metà dell'energia di $x(t)$.

Soluzione

$$x(t) = \mathrm{e}^{-kt}u(t)$$

L'energia di $x(t)$ si può calcolare facilmente nel dominio del tempo:

$$E_x = \int_0^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-kt}\right|^2 dt = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2kt} dt = \frac{1}{2k}$$

Per calcolare l'energia di $y(t)$ è opportuno lavorare nel dominio della frequenza, dove il prodotto di convoluzione viene trasformato in un prodotto semplice. (Per semplicità indichiamo con $\mathcal{F}$ la trasformazione di Fourier di una funzione del tempo).

$$y(t) = x(t) * \frac{\sin(\theta t)}{\pi t}$$

$$Y(f) = X(f)\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(\theta t)}{\pi t}\right\} = \frac{1}{k + j2\pi f} p_{\frac{\theta}{\pi}}(f)$$

dove per il calcolo di $\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(\theta t)}{\pi t}\right\}$ si è utilizzata la proprietà di dualità.

$$\begin{aligned} E_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 \, df = \int_{-\frac{\theta}{2\pi}}^{\frac{\theta}{2\pi}} \left|\frac{1}{k + j2\pi f}\right|^2 df \\ &= 2\int_0^{\frac{\theta}{2\pi}} \frac{1}{k^2 + 4\pi^2 f^2} df \\ &= \frac{2}{k2\pi} \arctan\left(\frac{2\pi}{k} f\right)\Bigg|_0^{\frac{\theta}{2\pi}} \end{aligned}$$

Imponiamo ora la condizione richiesta dall'esercizio.

$$E_y = \frac{1}{k\pi} \arctan\frac{\theta}{k}$$

$$E_y = \frac{1}{2} E_x$$

$$\frac{1}{k\pi} \arctan\left(\frac{\theta}{k}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2k} \rightarrow \arctan\frac{\theta}{k} = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\theta}{k} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Quindi la soluzione è

$$\theta = k \qquad k \neq 0$$

Esercizio 6

Si consideri il segnale

$$x(t) = a(t - T)e^{j2\pi f_0 t}$$

dove

$$a(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\pi t}$$

e $f_0 = \frac{k}{T}$ con k una costante strettamente positiva.

- Calcolare lo spettro di ampiezza di $x(t)$
- Calcolare l'energia di $x(t)$

Soluzione

Il segnale $x(t)$ si può scrivere come

$$x(t) = a(t - T)e^{j2\pi f_0 t} = y(t)e^{j2\pi f_0 t}$$

dove si è posto $y(t) = a(t - T)$. Per la proprietà di traslazione in frequenza la $X(f)$ vale

$$X(f) = Y(f - f_0)$$

A sua volta, per la proprietà di traslazione nel tempo, la $Y(f)$ vale

$$Y(f) = A(f)e^{-j2\pi fT}$$

e quindi lo spettro del segnale $x(t)$ si può scrivere come

$$X(f) = A(f - f_0)e^{-j2\pi fT}e^{j2\pi f_0 T}$$

Ponendo $f_0 = \frac{k}{T}$ si ottiene

$$X(f) = A(f - f_0)e^{-j2\pi fT}e^{j2\pi k} = A(f - f_0)e^{-j2\pi fT}$$

Inoltre la trasformata di Fourier di $a(t)$ si può calcolare facilmente grazie alla proprietà di dualità, che permette di stabilire che la trasformata di una funzione di tipo *sinc* è una porta:

$$A(f) = p_{\frac{1}{T}}(f)$$

A questo punto è banale calcolare l'energia di $x(t)$ nel dominio della frequenza sfruttando l'uguaglianza di Parseval, ricordando che il modulo quadro di un esponenziale complesso vale sempre 1:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df = \frac{1}{T}$$

Unità 2

2.1 Studio di sistemi LTI

Esercizio 7

Un sistema LTI ha risposta all'impulso $h(t)$ rettangolare, causale, di ampiezza unitaria e durata T. L'ingresso vale

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

Si denoti come $y(t)$ l'uscita del sistema. Determinare per quali valori di f_0 l'uscita è identicamente nulla: $y(t) = 0 \quad \forall t$.

Soluzione

La risposta all'impulso del sistema si può scrivere come $h(t) = p_T(t - T/2)$, dove $p_T(t)$ è una porta di ampiezza unitaria e durata T, con supporto nell'intervallo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$. La trasformata di Fourier di $h(t)$ è molto facile da calcolare; inoltre la trasformata di $x(t)$ sarà formata da delta di Dirac, dal momento che $x(t)$ è periodico. Queste considerazioni ci fanno propendere per una soluzione nel dominio della frequenza. In particolare la funzione di trasferimento vale

$$H(f) = \frac{\sin(\pi f t)}{\pi f} \mathrm{e}^{-j\pi f}$$

$$X(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$$

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

La condizione $Y(f) = 0$ è verificata se le delta di Dirac nello spettro di $X(f)$ cadono in corrispondenza degli zeri di $H(f)$, cioè per $\quad f_0 = \frac{k}{T} \quad k = 1, 2...$

Esercizio 8

Si consideri lo schema in Fig. 2.1, dove ϕ e f_0 sono costanti, e $x(t)$ è un segnale strettamente limitato in banda: $X(f) = 0$ per $|f| > B$.

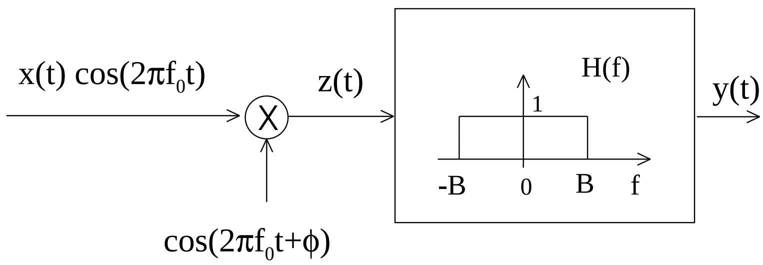

Figura 2.1

Si supponga $f_0 = 10B$.

- Ricavare un'espressione analitica per $y(t)$.
- E' possibile trovare un valore di ϕ affinchè $y(t) = 0 \ \ \forall t$?

Soluzione

Scriviamo esplicitamente il segnale $z(t)$, applichiamo le formule di Werner, e quindi quelle di Eulero:

$$\begin{aligned}
z(t) &= x(t)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t + \phi) \\
&= \frac{1}{2}x(t)\left[\cos(\phi) + \cos(4\pi f_0 t + \phi)\right] \\
&= \frac{1}{2}x(t)\cos(\phi) + \frac{1}{4}x(t)\mathrm{e}^{j(4\pi f_0 t + \phi)} + \frac{1}{4}x(t)\mathrm{e}^{-j(4\pi f_0 t + \phi)}
\end{aligned}$$

A questo punto si può calcolare facilmente la sua trasformata di Fourier.

$$Z(f) = \frac{1}{2}\cos\phi X(f) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{j\phi}X(f - 2f_o) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-j\phi}X(f + 2f_o)$$

Come si può notare, questa trasformata contiene tre termini, ovvero lo spettro originale $X(f)$ e due sue versioni traslate. Ci chiediamo come questo spettro venga modificato passando attraverso il sistema LTI, ed in particolare se alcuni di questi termini vengano cancellati. Ciò si può determinare più facilmente per via grafica, facendo un disegno qualitativo, come in Fig. 2.2, della trasformata di Fourier $Z(f)$ e della funzione di trasferimento $H(f)$, e disegnando quindi lo spettro del segnale di uscita $Y(f)$.

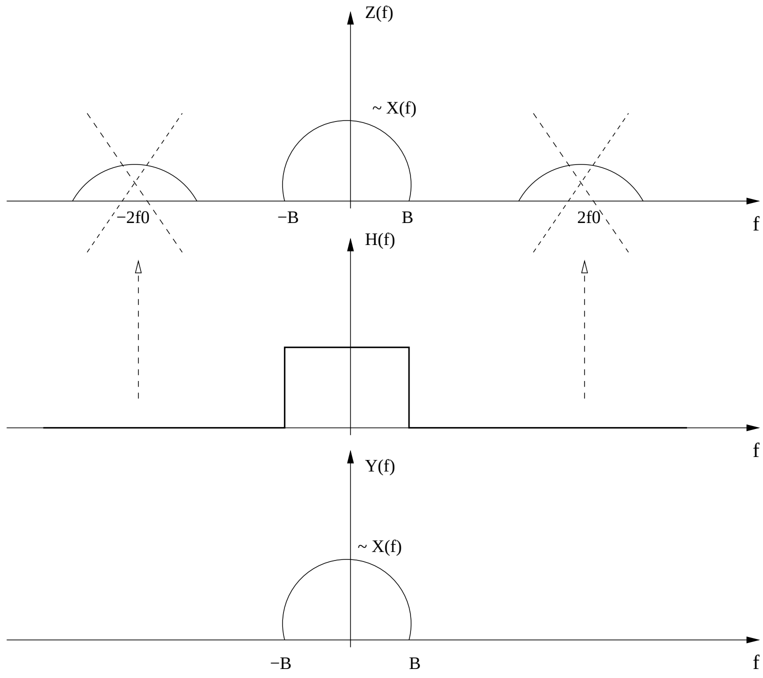

Figura 2.2

In particolare, si noti che per $f_0 = 10B$ non si ha sovrapposizione in frequenza dei tre termini; inoltre il filtro passabasso ideale cancella le due repliche intorno alle frequenze $\pm f_0$. Quindi lo spettro del segnale di uscita vale $Y(f) = Z(f)H(f) = \frac{1}{2}\cos\phi X(f)$, e il segnale nel dominio del tempo si può scrivere come

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos(\phi)x(t)$$

Cerchiamo i valori di ϕ tali per cui $y(t) = 0 \quad \forall t$. La condizione da imporre è quindi $\cos(\phi) = 0$, che a sua volta implica $\phi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

2.2 Dimostrazione di linearità e invarianza temporale

Esercizio 9

L'uscita di un sistema è legata all'ingresso $x(t)$ dalla relazione:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} x(\tau)d\tau + x(t-2)$$

- Dimostrare che il sistema è lineare e tempo-invariante.
- Calcolare la risposta all'impulso e la funzione di trasferimento.

Soluzione

Per la linearità dobbiamo verificare che l'uscita $z_1(t)$, quando l'ingresso è una combinazione lineare di segnali, è pari alla combinazione lineare delle uscite ai singoli segnali:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \int_{t-1}^{t} \left[a_1 x_1(\tau) + a_2 x_2(\tau)\right] d\tau + a_1 x_1(t-2) + a_2 x_2(t-2) = \\ &= a_1 \left[\int_{t-1}^{t} x_1(\tau)\, d\tau + x_1(t-2)\right] + a_2 \left[\int_{t-1}^{t} x_2(\tau)\, d\tau + x_2(t-2)\right] = \\ &= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \end{aligned}$$

Per la tempo-invarianza dobbiamo verificare che l'uscita $z_2(t)$ ad un ingresso ritardato sia pari all'uscita, ritardata della stessa quantità, corrispondente all'ingresso non ritardato:

$$y(t-T) = \int_{t-T-1}^{t-T} x(\tau)d\tau + x(t-T-2)$$

$$z_2(t) = \int_{t-1}^{t} x(\tau - T)d\tau + x(t-T-2)$$

Ponendo $\tau - T = \theta$

$$z_2(t) = \int_{t-T-1}^{t-T} x(\theta)d(\theta) + x(t-T-2) = y(t-T)$$

Quindi si può osservare che il sistema è lineare e tempo-invariante.

La risposta all'impulso si ottiene imponento che l'ingresso sia una delta di Dirac, $x(t) = \delta(t)$, e calcolando l'uscita. Questo calcolo è spesso abbastanza semplice, perchè si possono sfruttare le proprietà delle delta sotto l'operatore di integrale. In questo caso specifico si noti che l'integrale non è tra $-\infty$ e ∞, quindi occorre renderlo tale moltiplicando la funzione integranda per una porta.

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{t-1}^{t} \delta(\theta) d\theta + \delta(t-2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\theta) p_1 \left[\theta - \left(t - \frac{1}{2}\right)\right] d\theta + \delta(t-2) = \\ &= p_1 \left(t - \frac{1}{2}\right) + \delta(t-2) \end{aligned}$$

A questo punto è semplice ricavare la funzione di trasferimento:

$$H(f) = \mathcal{F}\left\{h(t)\right\} = \frac{\sin\left(2\pi f \frac{1}{2}\right)}{\pi f} \mathrm{e}^{-j2\pi f \frac{1}{2}} + \mathrm{e}^{-j2\pi f 2} = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \mathrm{e}^{-j\pi f} + \mathrm{e}^{-j4\pi f}$$

Unità 3

3.1 Segnali a potenza media finita

Esercizio 10

Un impulso ideale $\delta(t)$ è inviato all'ingresso del sistema rappresentato in Fig. 3.1.

- Calcolare l'energia e la potenza media di $y_1(t)$ e $y_2(t)$.
- Calcolare (se esistono) gli spettri di energia di $y_1(t)$ e $y_2(t)$.
- Dire se il sistema racchiuso nel riquadro tratteggiato è lineare e/o tempo-invariante.

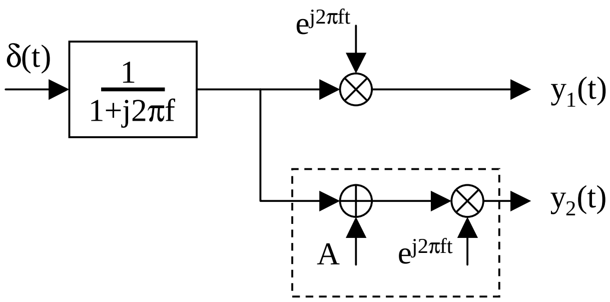

Figura 3.1

Soluzione
Dalle tavole della trasformate di Fourier si ottiene che

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} \longrightarrow h(t) = u(t)\mathrm{e}^{-t}$$

Quindi il segnale $x_1(t)$ si ottiene come

$$x_1(t) = \delta(t) * h(t) = u(t)\mathrm{e}^{-t}$$

A loro volta $y_1(t)$ e $y_2(t)$ valgono

$$\begin{aligned} y_1(t) &= u(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{j2\pi f_o t} \\ y_2(t) &= \left[A + u(t)\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{e}^{j2\pi f_o t} \end{aligned}$$

L'energia di $y_1(t)$ si calcola facilmente usando la definizione nel dominio del tempo. $y_1(t)$ è quindi un segnale ad energia finita.

$$E_{y_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |y_1(t)|^2\, dt = \int_0^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}\right|^2 dt = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2t} dt = \left|-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Il calcolo dell'energia di $y_2(t)$ mostra che l'integrale diverge, quindi il segnale è ad energia infinita. Per questo segnale non ha quindi senso calcolare uno spettro di energia.

$$Ey_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |y_2(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A + u(t)\mathrm{e}^{-t}\right]^2 dt \longrightarrow \infty$$

Il calcolo della potenza media di $y_1(t)$ dà zero. Questo era prevedibile, dal momento che un segnale a energia finita ha necessariamente potenza media nulla.

Calcoliamo quindi la potenza media di $y_2(t)$. L'integrale si può calcolare indifferentemente negli intervalli $[-T/2, T/2]$ e $[0, T]$.

$$\begin{aligned} P_{y_2} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |y_2(t)|^2\, dt \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left[A + u(t)\mathrm{e}^{-t}\right]^2 dt \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left[A^2 + 2Au(t)\mathrm{e}^{-t} + u(t)\mathrm{e}^{-2t}\right] dt \\ &= \lim_{t\to\infty} \left\{A^2 + \frac{2A}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-t}dt + \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-2t}dt\right\} \\ &= \lim_{t\to\infty} \left\{A^2 + \frac{2A}{T}\left(1 - \mathrm{e}^{-T}\right) + \frac{1}{T}\left(1 - \mathrm{e}^{-2T}\right)\right\} = A^2 \end{aligned}$$

Lo spettro di energia di $y_1(t)$ vale

$$S_{y_1}(f) = |Y_1(f)|^2 = \left|\frac{1}{1 + j2\pi\left(f - f_0\right)}\right|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2\left(f - f_0\right)^2}$$

Verifichiamo la linearità e tempo invarianza del sistema nel riquadro. Applichiamo la notazione compatta $L[x]$ per indicare l'uscita del sistema quando il segnale di ingresso è $X(t)$. Per quanto riguarda la linearità:

$$L\left\{a_1x_1 + a_2x_2\right\} = A + \left[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\right]\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}$$

$$\begin{aligned} L\left\{x_1\right\} &= \left[A + x_1(t)\right]\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t} \\ L\left\{x_2\right\} &= \left[A + x_2(t)\right]\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t} \end{aligned}$$

$$L\left\{a_1x_1 + a_2x_2\right\} \neq a_1L\left\{x_1\right\} + a_2L\left\{x_2\right\}$$

Quindi il sistema non è lineare. Per la tempo-invarianza:

$$L\left\{x(t-\theta)\right\} = \left[A + x(t-\theta)\right]\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}$$

$$y\left(t-\theta\right) = \left[A + x(t-\theta)\right]\mathrm{e}^{j2\pi f_0 (t-\theta)}$$

Pertanto il sistema non è neanche tempo-invariante.

3.2 Filtraggio di segnali periodici

Esercizio 11

Si consideri il segnale periodico $x(t)$ rappresentato in Fig. 3.2. Tale segnale viene filtrato con un filtro la cui risposta all'impulso $h(t)$ è rettangolare, causale, di ampiezza unitaria e durata T.

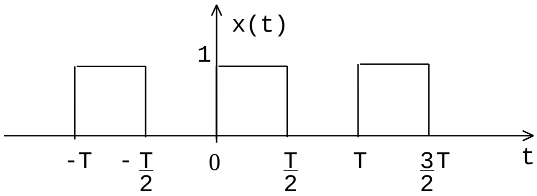

Figura 3.2

Calcolare:

- Lo spettro di potenza del segnale filtrato $y(t)$.
- La potenza media del segnale filtrato $y(t)$.
- Una espressione analitica per $y(t)$.

Soluzione

$x(t)$ è periodico, quindi il suo spettro di potenza è $G_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n^2| \delta(f - n/T)$. I coefficienti μ_n, che determinano univocamente lo spettro di potenza, si possono ottenere dalla trasformata di Fourier del segnale $X_T(t)$ considerato nel periodo fondamentale, ovvero $x_T(t) = p_{T/2}\left(t - \frac{T}{4}\right)$.

$$Q_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{T} X_T\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$\begin{aligned} X_T(f) &= \frac{\sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)}{\pi f} \mathrm{e}^{-j2\pi f \frac{T}{4}} \\ &= \frac{T}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} f T\right)}{\frac{\pi}{2} f T} \mathrm{e}^{-j\pi f \frac{T}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{1}{T} X_T\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } n = 0 \\ 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \text{vd. seguito} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{2n+1} &= \frac{1}{2}\frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\left[\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) - j\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right] = \\
&= -j\frac{1}{2}\frac{\sin^2(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\pi(2n+1)}
\end{aligned}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per}\, n = 0 \\ 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{1}{j\pi n} & \text{per}\, n\, \text{dispari} \end{cases}$$

$$\mu_n^2 = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{per}\, n = 0 \\ 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{1}{\pi^2 n^2} & \text{per}\, n\, \text{dispari} \end{cases}$$

Lo spettro di potenza del segnale all'uscita del filtro si ottiene come

$$G_y(f) = G_x(f)\,|H(f)|^2 = |\mu_0|^2 T^2 \delta(f) = \frac{T^2}{4}\delta(f)$$

Infatti tutte le altre delta di Dirac nello spettro di potenza $G_y(f)$ vengono poste a zero dagli zeri di $|H(f)|^2$ (di cui abbiamo omesso il calcolo). Il calcolo della potenza risulta quindi banale:

$$P_y = \frac{T^2}{4}$$

Il calcolo di un espressione per il segnale $y(t)$ è abbastanza semplice. Visto che il segnale di ingresso è periodico, il segnale di uscita $y(t)$ deve essere anch'esso periodico (eventualmente una costante, o pari a zero). La densità spettrale di potenza $G_y(f)$ ci dice che $y(t)$ è una costante diversa da zero, in quanto il contributo alla frequenza zero è non nullo. Ci rimane da stabilire il segno (si ricordi che i coefficienti nello spettro di potenza sono in modulo quadro, quindi $y(t)$ potrebbe anche essere una costante negativa). Guardando la Fig. 3.2 è evidente che il valore medio di $x(t)$ è positivo, e anche la $H(0)$ è positiva, da cui si deduce che $y(t) = \sqrt{T^2/4} = +T/2$

3.3 Campionamento

Esercizio 12

Il segnale

$$x(t) = 20 + 20 \sin\left(500t + \frac{\pi}{6}\right)$$

deve essere campionato e ricostruito esattamente dai suoi campioni

- quale è il massimo intervallo ammissibile tra due campioni?
- quale è il numero minimo di campioni necessari per ricostruire 1 s di segnale?

Soluzione

Come quasi sempre avviene, gli esercizi sul campionamento richiedono di lavorare nel dominio della frequenza per calcolare la banda unilatera del segnale da campionare. Lo spettro di $x(t)$ vale

$$X(f) = 20\delta(f) + \frac{10}{j}\left[e^{j\frac{\pi}{6}}\delta(f - f_0) + e^{-j\frac{\pi}{6}}\delta(f + f_0)\right]$$

con la sostituzione $f_0 = 500/(2\pi)$, e quindi $f_0 = 79.6$ Hz. Poichè f_0 è anche chiaramente la banda unilatera del segnale $x(t)$ si ha che la minima frequenza di campionamento vale

$$f_{c\,\min} = 2f_0 = 159.15Hz$$

e quindi il massimo intervallo tra due campioni risulta

$$T_{c\,\max} = \frac{1}{f_{c\,\min}} \simeq 6ms$$

La minima frequenza di campionamento corrisponde a 159.15, quindi ad almeno 160 campioni di segnale in un secondo.

Esercizio 13

Si consideri il segnale

$$y(t) = x(t) + x_1(t) + x_2(t)$$

con:

$$x_1(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) \qquad x_2(t) = x(t)\cos(N2\pi f_0 t)$$

e $x(t)$ strettamente limitato in banda a $B = 1$ KHz. $y(t)$ deve essere campionato in modo tale da poter essere ricostruito a partire dai suoi campioni. La frequenza di campionamento e $f_c = 10$ Khz. Determinare i valori di f_0 e N affinchè:

- i segnali di ingresso siano spettralmente separati
- si abbia perfetta ricostruzione di $y(t)$
- N sia massimo

Soluzione
Il segnale da campionare si può scrivere come segue:

$$y(t) = x(t)\,[1 + \cos(2\pi f_0 t) + \cos(N2\pi f_0 t)\ ]$$

Ne calcoliamo lo spettro $Y(f)$ al fine di valutare la banda unilatera, necessaria per calcolare la minima frequenza di campionamento secondo il teorema di Nyquist.

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) * \left[\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-Nf_0) + \frac{1}{2}\delta(f+Nf_0)\right] \\ &= X(f) + \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0) + \frac{1}{2}X(f-Nf_0) + \frac{1}{2}X(f+Nf_0) \end{aligned}$$

Si hanno spettri separati se $f_0 \geq 2B$, quindi $f_0 \geq 2$ KHz.
Si ha perfetta ricostruzione se $f_c \geq 2B_y = 2\,(Nf_0 + B)$.
La massimizzazione di N deve quindi rispettare le condizioni:

$$\begin{cases} f_0 \geq 2 \text{ KHz} \\ Nf_0 + B \leq \frac{f_c}{2} \end{cases}$$

La seconda condizione diventa $N \leq \frac{f_c}{2f_0} - \frac{B}{f_0} = \frac{4}{f_0}$. Quindi il massimo di N si ottiene in corrispondenza del minimo di f_0, ovvero 2 KHz. Questo dà $N_{\max} = 2$.

Unità 4

4.1 Densità di probabilità, valore atteso e funzione di autocorrelazione di processi casuali

Esercizio 14

Si consideri lo schema di Fig. 4.1, dove $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ e θ è una costante. Si consideri il parametro A come una variabile casuale uniformemente distribuita tra 0 e 2. Calcolare la media di insieme di $y(t)$ e valutare per quali istanti di tempo tale media è massima.

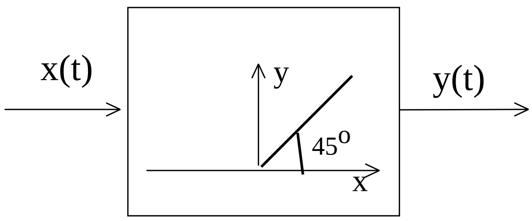

Figura 4.1

Soluzione

Il processo $y(t)$ si può scrivere come prodotto di $x(t)$ per una funzione $q(t)$ che assume valore 0 o 1 a seconda del segno di $x(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) & x(t) \geq 0 \end{cases} = x(t)q(t)$$

$$q(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ 1 & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

Si noti che, mentre il valore di $x(t)$ dipende dalla variabile casuale A, il suo segno è deterministico, dal momento che A non può diventare negativa e quindi cambiare il segno della funzione coseno. Pertanto la media di $y(t)$ si può scrivere come

$$E\{y(t)\} = \quad E\{x(t)q(t)\} \quad = q(t)E\{x(t)\} = E[A]\cos(2\pi f_0 t + \vartheta)\, q(t)$$

Poichè la media di A vale 1, si ottiene che $E\{y(t)\} = \cos(2\pi f_0 t + \vartheta)\, q(t)$. Il massimo dell'attesa si ottiene quindi per $\cos(2\pi f_0 t + \vartheta) = 1$, che implica $2\pi f_0 t + \vartheta = 2k\pi$. Quindi gli istanti di tempo in cui la media è massima sono $t_m = \frac{k}{f_0} - \frac{\vartheta}{2\pi f_0}$

Esercizio 15

Si consideri il segnale

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) - z(t)\sin(\omega_0 t)$$

dove $x(t)$ e $z(t)$ sono processi casuali a media nulla, indipendenti e con la stessa autocorrelazione $R_x(t_1, t_2) = R_z(t_1, t_2)$.

Determinare $R_y(t_1, t_2)$ e verificare che se $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2)$ allora $R_y(t_1, t_2) = R_y(t_1 - t_2)$.

Soluzione

Il calcolo della funzione di autocorrelazione di $y(t)$ segue i seguenti passi:

$$\begin{aligned}
&R_y(t_1, t_2) = E\{y(t_1)y(t_2)\} = \\
&E\{[x(t_1)\cos(\omega_0 t_1) - z(t_1)\sin(\omega_0 t_1)][x(t_2)\cos(\omega_0 t_2) - z(t_2)\sin(\omega_0 t_2)]\} = \\
&E\{x(t_1)x(t_2)\}\cos(\omega_0 t_1)\cos(\omega_0 t_2) + E\{z(t_1)z(t_2)\}\sin(\omega_0 t_1)\sin(\omega_0 t_2) + \\
&-E\{x(t_1)z(t_2)\}\cos(\omega_0 t_1)\sin(\omega_0 t_2) - E\{x(t_2)z(t_1)\}\cos(\omega_0 t_2)\sin(\omega_0 t_1)
\end{aligned}$$

A questo punto si nota che $E\{z(t_1)z(t_2)\} = R_z(t_1, t_2)$:

$$R_y(t_1, t_2) = R_z(t_1, t_2)[\cos(\omega_0 t_1)\cos(\omega_0 t_2) + \sin(\omega_0 t_1)\sin(\omega_0 t_2)] =$$

$$= R_z(t_1, t_2)\cos[\omega_0(t_1 - t_2)] = R_x(t_1, t_2)\cos[\omega_0(t_1 - t_2)]$$

Se $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2)$ allora $R_y(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2)\cos[\omega_0(t_1 - t_2)]$ e si vede chiaramente che la funzione di autocorrelazione $R_y(t_1, t_2)$ dipende solo da $t_1 - t_2$ e non separatamente da t_1 e t_2.

Esercizio 16

Si consideri un processo casuale $x(t)$ stazionario con autocorrelazione nulla per $|\tau| > T$ e positiva per $|\tau| < T$. Si costruisca un processo casuale $y(t) = x(t) + x(t - T_0)$ e da questo si estraggano due campioni nei due istanti t_1 e $t_1 + A$.

Trovare il minimo valore di A tale per cui il coefficiente di correlazione delle variabili casuali così ottenuto sia nullo.

Soluzione

Usando la notazione $y_1 = y(t_1)$ e $y_2 = y(t_1 + A)$, imporre che il coefficiente di correlazione sia nullo significa risolvere la seguente equazione:

$$\rho_{y_1,y_2} = \frac{E\{y_1 y_2\} - E\{y_1\} E\{y_2\}}{\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}} = 0$$
$$E\{y_1 y_2\} - E\{y_1\} E\{y_2\} = 0$$

Dal momento che $x(t)$ è stazionario si può scrivere

$$E\{y_1\} = E\{x(t_1) + x(t_1 - T_0)\} = E\{x(t_1)\} + E\{x(t_1 - T_0)\} = 2\mu_x$$

Dal momento che l'autocorrelazione di $x(t)$ tende a zero per $\tau \to \infty$, si può assumere che il processo $x(t)$ sia a media nulla. Questo implica ovviamente che anche $y(t)$ sia a media nulla, e quindi le variabili casuali y_1 e y_2 sono a media nulla:

$$E\{y_2\} = E\{x(t_2) + x(t_2 - T_0)\} = 2\mu_x$$
$$\mu_x^2 = \lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = 0 \Rightarrow E\{y_1\} = E\{y_2\} = 0$$

Il coefficiente di correlazione cercato vale quindi

$$\begin{aligned}
& E\{y_1 y_2\} = E\{y(t_1)y(t_1 + A)\} = \\
= \; & E\{[x(t_1) + x(t_1 - T_0)]\,[x(t_1 + A) + x(t_1 + A - T_0)]\} \\
= \; & E\{x(t_1)x(t_1 + A)\} + E\{x(t_1)x(t_1 + A - T_0)\} \\
& + E\{x(t_1 - T_0)x(t_1 + A)\} + E\{x(t_1 - T_0)x(t_1 + A - T_0)\} \\
= \; & R_x(A) + R_x(A - T_0) + R_x(A + T_0) + R_x(A) \\
= \; & 2R_x(A) + R_x(A - T_0) + R_x(A + T_0)
\end{aligned}$$

Bisogna quindi trovare il minimo valore di A tale per cui questo coefficiente di correlazione vale zero. Si noti che il coefficiente di correlazione, visto in funzione di A, contiene tre termini: uno centrato intorno all'origine

$(2R_x(A))$ e due repliche intorno a $\pm T_0$. Dal momento che $R_x(A)$ è a supporto limitato in $(-T, T)$, si danno due casi. Se $T_0 - T > T$ (quindi $T_0 > 2T$) il valore minimo è $A = T$ perchè le repliche sono separate da $2R_x(A)$; altrimenti il valore minimo è $A = T_0 + T$. I due casi sono mostrati in Fig. 4.2.

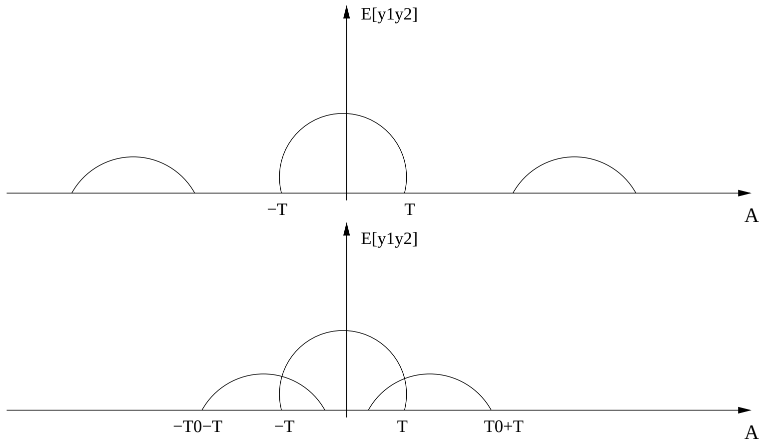

Figura 4.2

Esercizio 17

Un processo casuale $x(t)$ gaussiano stazionario a media nulla viene moltiplicato per un'onda quadra $r(t)$ che assume alternativamente i valori $+1$ e -1 ogni T secondi. Calcolare:

- La densità di probabilità del segnale $y(t)$ così ottenuto
- La probabilità $P\left\{y(t) > y(t+a)\right\}$ nei due casi $a = T$ e $a = \frac{T}{2}$
- Si definisca il processo $z(t) = y(t) - y\left(t - \frac{T}{2}\right)$ e si verifichi se $z(t)$ è stazionario del primo ordine.

Soluzione

In ogni istante di tempo la variabile casuale estratta da $x(t)$ è una variabile gaussiana moltiplicata per +1 o -1. Quindi questa variabile è ancora gaussiana. Il suo valor medio e varianza valgono

$$E\left[y(t)\right] = E\left[r(t)x(t)\right] = r(t)E\left[x(t)\right] = 0$$

$$\sigma_y^2 = E\left[y^2(t)\right] = r^2(t)E\left[x^2(t)\right] = \sigma_x^2$$

Questi parametri quindi specificano completamente la densità di probabilità del processo $y(t)$. La probabilità richiesta vale

$$P\left\{y(t) > y(t+a)\right\} = P\left\{y(t) - y(t+a) > 0\right\} = P\left\{z_a(t) > 0\right\}$$

con $z_a(t) = y(t) - y(t+a)$. Poichè $z_a(t)$ è ancora gaussiano a valor medio nullo si ha che

$$P\left\{z_a(t) > 0\right\} = \frac{1}{2} \;\; \forall a$$

Definiamo ora il processo $z(t) = y(t) - y(t - T/2)$. Per la stazionarietà del primo ordine si ha che $E\left\{z(t)\right\} = 0$. La varianza vale

$$\begin{aligned}
\sigma_z^2 &= E\left\{z^2(t)\right\} = E\left\{y^2(t)\right\} + E\left\{y^2(t - T/2)\right\} - 2E\left\{y(t)y(t - T/2)\right\} \\
&= 2\sigma_y^2 - 2E\left\{y(t)y(t - T/2)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E\left\{y(t)y(t - T/2)\right\} \\
=\; & E\left\{r(t)r(t - T/2)x(t)x(t - T/2)\right\} \\
=\; & E\left\{x(t)x(t - T/2)\right\} r(t)r(t - T/2) = r(t)r(t - T/2)R_X(T/2)
\end{aligned}$$

Chiaramente la varianza dipende dal tempo, quindi $z(t)$ non è un processo stazionario del primo ordine.

4.2 Processi casuali filtrati

Esercizio 18

Sia dato un processo casuale $x(t) = m_x + n(t)$ dove m_x è una costante e $n(t)$ è un processo gaussiano stazionario bianco a valor medio nullo e densità spettrale di potenza $\frac{N_0}{2}$. In questo contesto $x(t)$ rappresenta la tensione ai capi di un bipolo. Se ne vuole stimare il valor medio m_x usando un voltmetro la cui risposta all'impulso vale $h(t) = u(t)\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$. La lettura dello strumento vale pertanto $v(t) = x(t) * h(t)$, dove il simbolo '$*$' significa 'convoluzione'. Calcolare:

- valor medio, valor quadratico medio e varianza di $v(t)$
- la probabilità che $v(t)$ sia compresa nell'intervallo $[0.9m_x, 1.1m_x]$.

Soluzione

Il valore atteso di $v(t)$ si calcola ricordando che il valore atteso di un processo all'uscita di un sistema LTI è dato dal valore atteso dell'ingresso moltiplicato per la funzione di trasferimento valutata alla frequenza zero:

$$E\{v(t)\} = E\{x(t) * h(t)\} = E\{x(t)\}H(0) = E\{x(t)\} =$$

$$= E\{m_x + n(t)\} = E\{n(t)\} + m_x = m_x$$

in quanto

$$H(f) = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{1}{a} + j2\pi f} \to H(0) = 1$$

Per calcolare il valore quadratico medio la strada più semplice è di passare attraverso la funzione di autocorrelazione, che si può calcolare come antitrasformata di Fourier della densità spettrale di potenza $G_v(f)$ del processo di uscita $v(t)$. L'operatore di antitrasformata di FOurier sarà anche indicato con la notazione $\mathcal{F}^{-1}$. A sua volta, la $G_v(f)$ si calcola utilizzando la densità spettrale di potenza dell'ingresso e la funzione di trasferimento del filtro LTI.

$$E\left\{v^2(t)\right\} = R_v(0) = \mathcal{F}^{-1}\{G_v(f)\}$$

$$G_v(f) = G_x(f)\,|H(f)|^2$$

Per calcolare la densità spettrale di potenza di $x(t)$ si passa attraverso la sua funzione di autocorrelazione.

$$R_x(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = E\{[m_x + n(t)]\,[m_x + n(t+\tau)]\} =$$

$$= E\{n(t)n(t+\tau)\} + m_x^2 = R_n(\tau) + m_x^2$$

da cui si ottiene che

$$G_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = G_n(f) + m_x^2\delta(f) = \frac{N_0}{2} + m_x^2\delta(f)$$

Quindi la densità spettrale di potenza di $v(t)$ vale

$$G_v(f) = \left(\frac{N_0}{2} + m_x^2\delta(f)\right)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 + m_x^2\delta(f)$$

e il valore quadratico medio

$$E\left\{v^2(t)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f)df = m_x^2 + \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df$$

dove l'ultimo integrale si risolve con l'ausilio delle tavole degli integrali.

Per quanto riguarda il calcolo della probabilità $p = P(0.9m_x < v(t) < 1.1m_x)$ è necessario conoscere la densità di probabilità del processo $v(t)$. Si noti che $x(t)$ è un processo gaussiano stazionario; poichè $v(t)$ è ottenuto filtrando $x(t)$ attraverso un sistema LTI, $v(t)$ à ancora gaussiano stazionario. La sua densità di probabilità è quindi gaussiana e non dipende dal tempo; essa è completamente determinata dal valor medio $E[v(t)] = m_x$ e dalla varianza $\sigma_v^2 = E[v^2(t)] - E[v(t)]^2$. La probabilità p vale quindi

$$p = \int_{0.9m_x}^{1.1m_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m_v)^2}{2\sigma_v^2}}\, dx$$

e si può esprimere tramite le funzioni di errore *erf* e *erfc*.

Esercizio 19

Un rumore gaussiano $n(t)$ con densità spettrale di potenza $G_n(f) = \frac{N_0}{2}$ per $|f| < B$ e nulla altrove passa attraverso un sistema lineare con risposta all'impulso $h(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t-T)$. Il segnale in uscita passa attraverso un sistema non lineare che ne fa il quadrato. Calcolare il valor medio dell'uscita nel caso di $B = \frac{3}{4T}$.

Soluzione

$$x(t) = n(t) * h(t) = n(t) + \frac{1}{2}n(t-T)$$

$$z(t) = x^2(t) = n^2(t) + \frac{1}{4}n^2(t-T) + n(t)n(t-T)$$

Il valore atteso di $z(t)$ vale

$$E[z(t)] = E\left[n^2(t) + \frac{1}{4}n^2(t-T) + n(t)(t-T)\right] = \sigma_n^2 + \frac{1}{4}\sigma_n^2 + R_n(T) = \frac{5}{4}\sigma_n^2 + R_n(T)$$

La funzione di autocorrelazione di $n(t)$ è pari all'antitrasformata di Fourier di $G_n(f)$. Dai dati dell'esercizio sappiamo che $G_n(f) = \frac{N_0}{2}p_{2B}(f)$, quindi

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_n(f)\} = \frac{\sin(2\pi B\tau)}{\pi\tau}\frac{N_0}{2} = N_0 B\frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi\tau B}$$

$$\sigma_n^2 = R_n(0) = N_0 B = N_0\frac{3}{4T}$$

$$R_n(T) = N_0 B\frac{\sin(2\pi BT)}{2\pi BT} = \frac{N_0}{2\pi T}\sin\left(2\pi\frac{3}{4T}T\right) = -\frac{N_0}{2\pi T}$$

$$E[z(t)] = \frac{5}{4}\frac{3}{4}\frac{N_0}{T} - \frac{N_0}{2\pi T} = \frac{N_0}{2T}\left(\frac{15}{8} - \frac{1}{\pi}\right)$$

Esercizio 20

Un processo casuale $n(t)$ stazionario ha una densità di probabilità del primo ordine uniforme nell'intervallo $(-A, +A)$, e spettro di potenza

$$S_n = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{per } |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Questo processo passa attraverso un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$H(f) = 1 + e^{-j2\pi fT}$$

Il processo in uscita da tale sistema viene quindi elevato al quadrato. Sia $m(t)$ il risultato di tale operazione.

- Determinare il valore di A
- Calcolare la media di $m(t)$ nel caso in cui $B = \frac{1}{T}$

Soluzione

Possiamo determinare il valore di A imponendo che la varianza calcolata utilizzando la densità di probabilità del processo sia uguale a quella calcolata integrando la densità spettrale di potenza (si noti che il processo $n(t)$ è a media nulla).

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} n^2 f_n(n) dn = \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} n^2 dn = \frac{1}{6A} n^3 \Big|_{-A}^{A} = \frac{A^2}{3}$$

$$\sigma_n^2 = \int \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f) df = \frac{N_0}{2} B$$

da cui $A = \sqrt{\frac{3}{2} N_0 B}$. Per trovare un'espressione per $y(t)$ conviene lavorare nel dominio del tempo, notando che l'antitrasformata di Fourier di $H(f)$ contiene solo delle delta di Dirac.

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H(f)\} = \delta(t) + \delta(t - T)$$

$$y(t) = n(t) * h(t) = n(t) + n(t - T)$$

Da cui il valore atteso cercato è

$$
\begin{aligned}
E\{m(t)\} &= E\left\{y^2(t)\right\} = E\left\{n^2(t)\right\} + E\left\{n^2(t-T)\right\} + 2E\{n(t)n(t-T)\} \\
&= 2E\left\{n^2(t)\right\} + 2E\{n(t)n(t-T)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\{n(t)\} &= 0 \\
E\left\{n^2(t)\right\} &= \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}B \\
E\{n(t)n(t-T)\} &= R_n(T) = \mathcal{F}^{-1}\{G_n(f)\}_{\tau=T} = \frac{N_0}{2}B\frac{\sin(\pi BT)}{\pi BT}
\end{aligned}
$$

Per $B = \frac{1}{T}$ si ottiene

$$
R_n(T) = \frac{N_0}{2T}\frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0
$$

$$
E\{m(t)\} = 2\sigma_n^2 = N_0 B
$$

Esercizio 21

Un processo di rumore gaussiano bianco $n(t)$, con densità spettrale di potenza costante e pari a $\frac{N_0}{2}$, passa attraverso un sistema lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

Sia $z(t)$ il processo all'uscita di tale sistema. Determinare:

- la densità di probabilità di $z(t)$
- La probabilità $P\left[z(t) > 0.5\right]$
- la funzione di autocorrelazione di $z(t)$, $R_z(\tau)$

Soluzione

$z(t)$ è ancora gaussiano, in quanto è ottenuto tramite trasformazione lineare di un processo gaussiano. Pertanto per determinarne la densità di probabilità dobbiamo calcolarne valore medio e varianza.

$$E\left\{z(t)\right\} = E\left\{n(t)\right\} H(0) = 0$$

$$\sigma_z^2 = E\left\{z^2(t)\right\} - E\left\{z(t)\right\}^2 = E\left\{z^2(t)\right\} = R_z(0) = \mathcal{F}^{-1}\left\{G_z(f)\right\}_{\tau=0}$$

$$G_z(f) = G_n(f)\left|H(f)\right|^2 = \frac{N_0}{2}\frac{1}{1 + (2\pi f)^2}$$

$$R_z(\tau) = \frac{N_0}{4}e^{-|\tau|}$$

$$\sigma_z^2 = R_z(0) = \frac{N_0}{4}$$

$$P\left[z(t) > 0.5\right] = \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma_z}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2N_0}}\right)$$