Algoritmi Avanzati

Terzo appello

Roberto Battiti *Paolo Campigotto*

10 settembre 2012

Istruzioni e regole:
Si usino unicamente una penna ed i fogli protocollo forniti dai docenti.
Si scriva subito il proprio nome su ciascun foglio e lo si firmi.
Segnare con chiarezza a quale quesito si sta rispondendo. Si scriva con chiarezza la propria risposta e si dimostrino i propri risultati. (**I risultati senza dimostrazione o spiegazione non verranno presi in considerazione**).
Un atteggiamento disonesto (come copiare) portera' all'espulsione immediata dall'aula.
Buon lavoro!

Esercizio 1

1.1) Definire il metodo di approssimazione secondo il criterio dei minimi quadrati, spiegando con chiarezza a cosa serve, quali sono i dati del problema e quale grandezza si vuole determinare.
1.2) Data la serie di n dati sperimentali $(x_i, y_i), i = 1 \dots n$, si desidera ricavare una dipendenza funzionale della forma $y = F(x)$, dove $F(x)$ e' la combinazione lineare di m funzioni base note $f_i(x), i = 1 \dots m$. Dimostrare che determinare la dipendenza funzionale in base al criterio dei minimi quadrati consiste nel risolvere l'equazione $\mathbf{c} = A^{+}\mathbf{y}$, dove $\mathbf{c}$ e' il vettore delle incognite, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$. Motivare con chiarezza tutti i passaggi della dimostrazione fornita.
1.3) Siano A (3,3) e B (4,2) due punti di coordinate (x, y) in $\mathbb{R}^2$. Si vuole trovare un dipendenza funzionale della forma $y = F(x) = c$, dove c e' il coefficiente da determinare in base al criterio dei minimi quadrati. Rispondere alle seguenti domande:

- scrivere le funzioni base;
- trovare i valori di c che determinano l'approssimazione della forma $F(x)$ ai punti dati secondo il criterio dei minimi quadrati.

Esercizio 2

2.1) Dare la formulazione per un problema di programmazione lineare.
2.2) Considerata la formulazione di un programma lineare data al punto precedente, calcolare il numero massimo di iterazioni che puo' compiere l'algoritmo del simplesso prima di "ciclare", ossia prima di considerare all'i-*esima* iterazione una soluzione gia' esaminata nelle j iterazioni precedenti, $j = 1 \dots i-1$. Motivare il calcolo effettuato.
2.3) Risolvere il seguente programma lineare utilizzando il metodo grafico (mostrare i vincoli, il simplesso, il gradiente e la soluzione ottima, qualora esista):

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & f(x_1, x_2) = 6x_1 + 2x_2 && (1)\\
\text{subject to} \quad & && \\
& x_2 \leq 4 && (2)\\
& -2x_1 - x_2 \geq 4 && (3)\\
& 4x_1 + x_2 \leq 10 && (4)\\
& x_1 \geq 0 && (5)\\
& x_2 \geq 0 && (6)
\end{aligned}$$

Esercizio 3

3.1) Dare la definizione di matrice non-singolare.
3.2) Data una matrice quadrata non-singolare e simmetrica, dimostrare che la sua inversa e' simmetrica.

Esercizio 4

4.1) Dimostrare il seguente:

> Dato $n > 0$ pari, nel campo complesso i quadrati delle n radici n-*esime* dell'unita' sono le $n/2$ radici (n/2)-*esime* dell'unita'.

4.2) Si definisca il metodo della *trasformata veloce di Fourier* (FFT), spiegandone lo scopo e motivandone la logica.

4.3) Calcolare la trasformata discreta di Fourier del seguente polinomio utilizzando l'algoritmo per la trasformata veloce di Fourier (FFT):

$$A(x) = 6x^3 - 2x^2 - 2.$$

Mostrare con chiarezza i passi di esecuzione dell'algoritmo.

Esercizio 5

5.1) Definire il problema della Soddisfacibilita' Booleana (Satisfiability), introducendo sia la variante di decisione sia la variante di ottimizzazione.

5.2) Descrivere la tecnica “tabu search”, dando lo pseudocodice dell'algoritmo ed indicando con chiarezza la porzione di pseudocodice che implementa la fase di intensificazione e la porzione di pseudocodice che realizza la fase di diversificazione della ricerca.

5.3) Definire un algoritmo di ricerca locale stocastica basato sulla tecnica “tabu search” per risolvere il problema della Soddisfacibilita' Booleana.