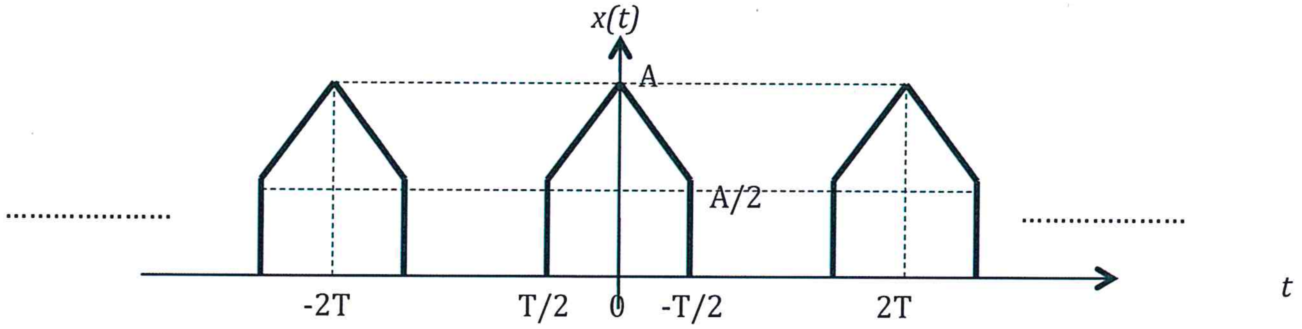
Esercizio su serie e trasformata di Fourier del 9/11/2017

Sia dato il seguente segnale periodico di periodo $2T$ secondi:



Si richiede di:

1) Verificare che le condizioni di Dirichelet siano rispettate.
2) Ricercare eventuali simmetrie ed indicare, motivando l'affermazione se la serie di Fourier sarà, o no, reale;
3) Calcolare i coefficienti della serie di Fourier del segnale $x(t)$;
4) Calcolare lo spettro in ampiezza del segnale $x(t)$, determinare (se possibile) gli indici delle armoniche per cui i coefficienti si annullano e calcolare (se possibile) lo spettro in fase.

Domanda 1

Le condizioni di Dirichlet sono sicuramente verificate. Il segnale è assolutamente integrabile nel periodo e non presenta discontinuità critiche. La serie di Fourier, pertanto, esisterà e convergerà

Domanda 2

Il segnale presenta simmetria pari. La serie di Fourier è, pertanto, a coefficienti reali e può essere espressa in serie di soli coseni.

Domanda 3

Il coefficiente k-esimo ($k \in \mathbb{N}$) si calcola così:

$$X_n = 2 \int_0^{T/2} w(t) \cos\left(\frac{\pi k t}{T}\right) dt$$

$$w(t) = \begin{cases} A\left(1 + t/T\right) & -T/2 \leq t < 0 \\ A\left(1 - t/T\right) & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$X_K = \frac{2}{2T} \int_0^{T/2} A\left(1 - t/T\right) \cos\left(\frac{\pi K t}{T}\right) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A \cos\left(\frac{\pi K t}{T}\right) dt - \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{At}{T} \cos\left(\frac{\pi k t}{T}\right) dt$$

$$= \frac{A}{T} \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{\pi k t}{T}\right) dt - \frac{A}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos\left(\frac{\pi K t}{T}\right) dt$$

$\alpha = \pi K t/T$ (cambio di variabile)

$dt = T/\pi K \, d\alpha$

Così gli integrali diventano:

$$X_K = \frac{A}{\cancel{T}} \int_0^{K\pi/2} \frac{\cancel{T}}{\pi k} \cos(\alpha) d\alpha - A/T^2 \int_0^{K\pi/2} \frac{\cancel{T}\alpha}{\pi k} \cos(\alpha) \frac{T}{\pi k} d\alpha$$

$$= \left.\frac{A \sin(\alpha)}{(\pi K)}\right|_0^{\frac{K\pi}{2}} - \frac{A}{(\pi K)^2} \left[\alpha \sin(\alpha) + \cos(\alpha)\right]\Big|_0^{K\pi/2}$$

$$= A \frac{\sin(K\pi/2)}{(K\pi)} - \frac{A}{(K\pi)^2} \left[\left(\frac{K\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{K\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{K\pi}{2}\right) - 1\right]$$

$$X_k = \frac{A \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{2\left(\frac{k\pi}{2}\right)} - \frac{A}{2k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{A\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1\right]}{(\pi k)^2}$$

Tentiamo di esprimere questa formula in maniera compatta:

$$X_K = \frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{K}{2}\right) - \frac{A}{4\left(\frac{\pi K}{2}\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{A\left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - 1\right]}{(\pi k)^2}$$

$$X_k = \frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) - \frac{A}{4} \operatorname{sinc}\left(k/2\right) - \frac{A\left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - 1\right]}{(\pi K)^2}$$

da cui:

$$X_k = \frac{A}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) - \frac{A\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1\right]}{(\pi k)^2}$$

Potrebbe anche andare bene così, ma in $K=0$ si osserva una fastidiosa forma indeterminata relativa al secondo termine del coefficiente. Si può fare qualcosa? Tentiamo di applicare la bisezione: $\cos\left(\frac{\pi K}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi K}{4}\right)$

$$X_k = \frac{A}{4}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) - A\,\frac{\left[\cancel{1}-2\sin^2\left(\frac{\pi k}{4}\right)-\cancel{1}\right]}{(\pi k)^2} =$$

$$= \frac{A}{4}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) + A\,\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi k}{4}\right)}{(\pi k)^2}$$

Siamo vicini a una formulazione decente; infatti:

$$A\,\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi k}{4}\right)}{(\pi k)^2} = \frac{\cancel{2}^{1}A\sin^2\left(\frac{\pi k}{4}\right)}{\cancel{16}_{8}\left(\frac{\pi k}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{A}{8}\,\text{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right)$$

Quindi: $$\boxed{X_k = \frac{A}{4}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{A}{8}\,\text{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right)}$$

Come si può notare: $X_k \in \mathbb{R}$ (funzione pari e quindi serie reale e di coseno)

Domanda 4

Lo spettro in ampiezza del segnale $x(t)$ si calcola come il modulo di X_k, ovvero:

$$|X_k| = \frac{A}{4} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \right|$$

Per quali armoniche, il contenuto armonico del segnale è nullo? Quando:

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) = 0 \iff$$

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = 0 \quad \& \quad \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) = 0$$

ciò avviene se $\boxed{k = 4p \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$

e se:
$$\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\left(\frac{\pi k}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \frac{\sin^2\left(\pi k/4\right)}{\left(\frac{\pi k}{4}\right)^2}$$

ovvero:
$$\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\sin^2(\alpha/2)}{\alpha^2}$$

$\alpha \triangleq k\pi/2$
$$\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{[1 - \cos(\alpha)]}{\alpha^2}$$

per $k = 0$ $(\alpha = 0)$ non è verificata e quindi:

$$\sin(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{[1 - \cos(\alpha)]}{\alpha}$$ equazione non risolubile

Forse un k che la verifica c'è ma non lo troviamo.
Bisogna verificare a mano... Non sembra vero per nessun k

Lo spettro di fase? Si può calcolare?

Essendo $X_k \in \mathbb{R}$, la fase, dovendo avere simmetria obbligatoriamente DISPARI, potrà assumere valori pari a 0, $+\pi$ e $-\pi$. Infatti:

$\cos(\pi) = -1$ (fase negativa, segno "$-$")
$\cos(-\pi) = 1$ (fase positiva, segno "$+$")

$$\angle X_k = \begin{cases} -\pi & \text{se } X_k < 0,\ k < 0 \\ \pi & \text{se } X_k < 0,\ k > 0 \\ 0 & \text{se } X_k > 0 \end{cases}$$

Il grosso problema è capire quando $X_k > 0$ e $X_k < 0$, poiché c'è da risolvere disequazioni di tipo "trascendente". L'unica cosa fattibile è usare software come MATLAB e plottare modulo e fase per avere un'idea dello andamento degli spettri.