UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Ingegneria
e Scienza dell'Informazione

Teoria dei Segnali

Parte Seconda: Fondamenti di elaborazione dei segnali

Lezione 2: Rappresentazione in frequenza di segnali deterministici non periodici: la trasformata di Fourier (definizione e generalità)

Docente: Prof. Claudio Sacchi

Contenuti

- Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier;
- Criterio di esistenza della trasformata di Fourier;
- Simmetria hermitiana della trasformata di Fourier;
- Proprietà di linearità;
- Cambiamento di scala del segnale;
- Trasformata del segnale ritardato (o anticipato);
- Trasformata di derivata ed integrale;
- Trasformata della funzione rettangolo.

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Premessa (1)**
  - Fourier stesso, nella sua opera, aveva studiato <u>l'estensione della rappresentazione "armonica" ai segnali non periodici</u>;
  - Apparentemente sembra impossibile, poiché <u>solo i segnali periodici</u> sono costituiti da una sovrapposizione discreta di armoniche;
  - Tuttavia, partiamo da un caso noto di segnale periodico: <u>quello del treno (periodico) di impulsi rettangolari</u> (conosciuto come *onda quadra con ritorno a zero*), la cui espressione analitica è la seguente:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_0}{T}\right)$$

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Premessa (2)**
  - Domanda: quando avviene la seguente cosa?

$$x(t) \approx \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

  - Apparentemente, mai, perché *x(t)* è periodico, mentre il rettangolo non lo è.
  - Tuttavia, se considerassimo un periodo T_0 infinito, allora la prima replica del rettangolo centrato in t=0 non la incontreremmo mai e l'eguaglianza sarebbe verificata.

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Premessa (3)**
  - Quindi, si può affermare che, dato un segnale periodico qualsiasi:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w(t - kT_0)$$

  - Vale la seguente uguaglianza <u>al limite</u>:

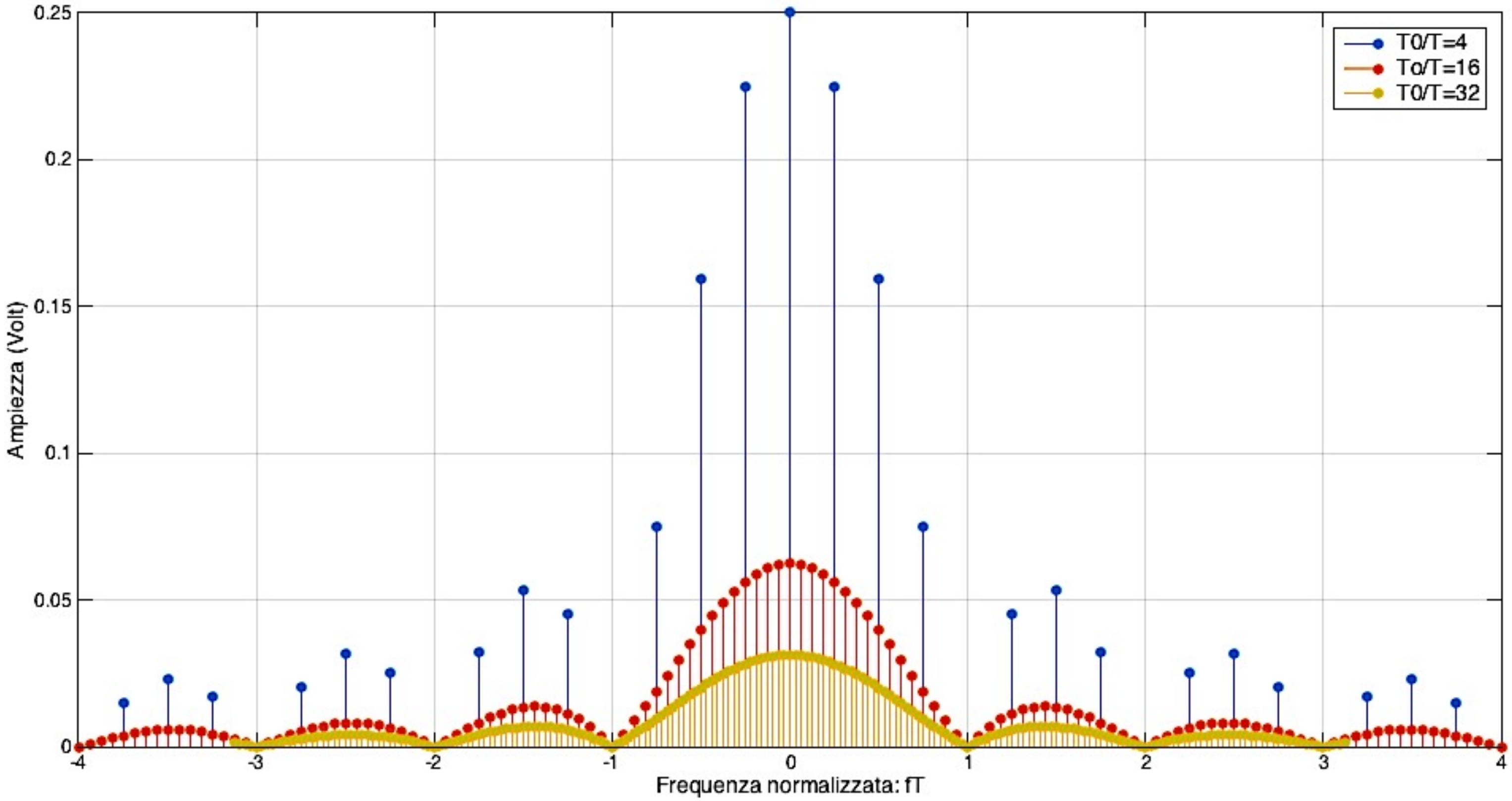
$$w(t) = \lim_{T_0 \to +\infty} \{x(t)\}$$

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Cosa avviene alla serie di Fourier se il periodo è molto grande ?**
  - Se avessimo un segnale periodico con periodo molto grande, le armoniche sarebbero separate tra loro da un intervallo molto piccolo, quindi lo spettro si infittisce;
  - Inoltre, si nota che l'ampiezza dei coefficienti tende a ridursi sempre di più, aumentando il periodo. Quindi, lo spettro tenderà ad assumere valori sempre più piccoli per tutte le frequenze armoniche;
  - Nella slide seguente, mostriamo gli spettri dell'onda quadra periodica con ritorno a zero, per diversi valori del periodo T_0 in relazione alla durata del rettangolo T.

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Visualizzazione grafica**



Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Cosa avviene alla serie di Fourier se il periodo è molto grande ? (Risposta alla luce del grafico)**
  - A quanto pare, se il periodo del segnale diviene molto più grande della durata della forma d’onda, lo spettro a righe tende a diventare una funzione continua, i cui valori si abbassano sempre di più;
  - Ci dovremmo aspettare che, per un periodo infinito (ovvero per un segnale aperiodico), lo spettro sia una funzione continua della frequenza;
  - Tuttavia, per capire, dove davvero si va a parare, occorre formalizzare il passaggio al limite sul periodo che va all’infinito, mediante una precisa formulazione matematica.

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Passaggio al limite della serie di Fourier: formulazione matematica (1)**
  - Definiamo il seguente coefficiente di Fourier modificato:

$$X\left(kf_0\right) \hat{=} T_0 X_k = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} w(t) e^{-2\pi jkf_0 t}\, dt$$

  - La relativa serie di Fourier verrà quindi espressa nella seguente maniera:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(kf_0\right) e^{j2\pi kf_0 t} f_0$$

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Passaggio al limite della serie di Fourier: formulazione matematica (2)**
  - A questo punto effettuiamo il passaggio:

$$\lim_{T_0 \to +\infty} x(t) = w(t) = \lim_{f_0 \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(kf_0\right) e^{j2\pi k f_0 t} f_0$$

  - Una somma come quella al membro destro dell'uguaglianza <u>diviene un integrale</u>, quando l'intervallo in cui sono presi i valori sommati diviene <u>infinitesimo</u>. Quindi otteniamo <u>lo sviluppo di Fourier di un segnale aperiodico</u>, che è dato da:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t}\, df$$

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Passaggio al limite della serie di Fourier: formulazione matematica (3)**
  - Ma, *X(f)* cos'è? Per capirlo, si applica lo stesso passaggio al limite visto in precedenza, ovvero:

$$X(f) = \lim_{f_0 \to 0} X\left(kf_0\right) = \lim_{\substack{T_0 \to +\infty \\ f_0 \to 0}} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} w(t) e^{-2\pi jkf_0 t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) e^{-2\pi jft}\, dt$$

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Commento al risultato ottenuto:**
  - Innanzitutto, il segnale periodico ormai non ci serve più: abbiamo, infatti, “sviluppato” il segnale aperiodico, che nell’esempio fatto in precedenza è il rettangolo;
  - Quindi cambiamo notazione ed otteniamo le due relazioni di Fourier per i segnali aperiodici:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(f) e^{j2\pi ft}\, df$$

ANTI-TRASFORMATA DI FOURIER

$$W(f) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) e^{-2\pi jft}\, dt$$

TRASFORMATA DI FOURIER

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Significato delle operazioni di trasformazione ed anti-trasformazione di Fourier:**
  - L'anti-trasformata di Fourier (o trasformata inversa di Fourier) rappresenta il segnale aperiodico come sovrapposizione di infinite componenti sinusoidali, ognuna di ampiezza infinitesima *W(f)df* e frequenza *f* che varia con continuità sull'asse reale (corrisponde alla serie di Fourier nel caso periodico)

  - Essendo il segnale aperiodico visto come un segnale periodico a frequenza fondamentale "infinitamente piccola" (*df*), la corte discreta di armoniche degenera nell'insieme continuo proprio dell'integrale dell'anti-trasformata;

  - *W(f)* rappresenta il peso delle infinite componenti frequenziali che compongono il segnale aperiodico *w(t)*. E' quindi il suo spettro (corrisponde alla successione dei coefficienti di Fourier nel caso periodico).

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Definizione di trasformata di Fourier**
  - Dato un segnale aperiodico qualsiasi *x(t)*, si definisce trasformata di Fourier di *x(t)* o spettro di *x(t)*, la seguente funzione a valori complessi:

$$x(t) \rightarrow X(f) \qquad X(f) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi jft}\, dt$$

Operazione di trasformazione (freccia)

  - L'operazione inversa è detta anti-trasformata di Fourier:

$$X(f) \rightarrow x(t) \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi jft}\, df$$

Operazione di anti-trasformazione (freccia)

Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

- **Definizione di trasformata di Fourier (2)**
  - Giusto per informazione, <u>è possibile definire trasformata ed anti-trasformata di Fourier nel dominio della frequenza angolare</u> (o pulsazione), anche se noi useremo solo la definizione nel dominio della frequenza, per comodità:

$$x(t) \to X(\omega) \quad X(\omega) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} \, dt$$

$$X(\omega) \to x(t) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

Criterio di esistenza della trasformata di Fourier

- **Criterio “energetico”**
  - Condizione sufficiente affinché un segnale *x(t)* ammetta trasformata di Fourier e l’anti-trasformata converga al segnale originario è che *x(t)* sia ad energia finita:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt < +\infty \Rightarrow X(f) \text{ esiste e } \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi jft} \, df = x(t)$$

  - Questo criterio ci dice che tutti i segnali di interesse tecnico nell’Ingegneria sono “trasformabili” (sono tutti ad energia finita);
  - La condizione, però, non è necessaria. Quindi un segnale che non la rispetta può anche ammettere trasformata di Fourier.

Simmetria hermitiana della trasformata di Fourier

- **Simmetria hermitiana**
  - Questa proprietà è ereditata dalla serie di Fourier;
  - Sia dato un segnale *x(t)* aperiodico reale, per il quale esiste la trasformata di Fourier: si possono verificare i seguenti asserti:

$$x(t) \in \Re \rightarrow X(f) \Rightarrow X(f) = X^*(-f)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left\{X(f)\right\} \hat{=} R(f) = R(-f) \quad \mathrm{Im}\left\{X(f)\right\} \hat{=} I(f) = -I(-f)$$

$$\Rightarrow \left|X(f)\right| = \left|X(-f)\right| \quad \arg\left\{X(f)\right\} \hat{=} \theta(f) = -\theta(-f)$$

Simmetria hermitiana della trasformata di Fourier

- **Segnali pari e dispari**
  - Anche queste proprietà vengono ereditate dalla serie di Fourier: se un segnale è reale e pari, la sua trasformata di Fourier (se esiste) è reale, mentre se un segnale è reale e dispari, la sua trasformata di Fourier (se esiste) è puramente immaginaria;
  - Anche nel caso "continuo", si possono usare le espressioni "semplificate":

$$x(t) \in \Re \text{ pari } \Rightarrow X(f) = 2\int_{0}^{+\infty} x(t)\cos\left(2\pi ft\right)dt$$

$$x(t) \in \Re \text{ dispari } \Rightarrow X(f) = -2j\int_{0}^{+\infty} x(t)\sin\left(2\pi ft\right)dt$$

Proprietà di linearità

- **Linearità della trasformata di Fourier**
  - La trasformazione di Fourier è un'operazione lineare, <u>perché l'integrale lo è</u>, quindi:

$$x(t) \rightarrow X(f) \quad y(t) \rightarrow Y(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\alpha x(t) + \beta y(t)\right] \rightarrow \alpha X(f) + \beta Y(f) \ \forall \alpha, \beta \in \Re$$

Cambiamento di scala del segnale

- **Cambiamento di scala (1)**
  - Supponiamo che il segnale *x(t)* subisca un <u>cambiamento di scala</u>, ovvero:

$$y(t) = x(\alpha t)$$

  - Si distinguono tre casi:

$|\alpha| > 1 \Rightarrow$ Compressione della scala dei tempi

$|\alpha| < 1 \Rightarrow$ Dilatazione della scala dei tempi

$\alpha < 0 \Rightarrow$ Inversione della scala dei tempi

Cambiamento di scala del segnale

- **Cambiamento di scala (2)**
  - Operazioni di compressione e dilatazione della scala vengono effettuate correntemente nell'elaborazione dei segnali ad esempio registrando il segnale (su nastro o su disco) ad una certa velocità e riproducendolo a velocità diversa;
  - L'inversione della scala temporale è un'operazione che non ha un senso fisico (il tempo non va all'indietro), ma solo matematico. In ogni caso, si verifica che:

$$x(t) \rightarrow X(f) \Rightarrow y(t) = x\left(\alpha t\right) \rightarrow \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Cambiamento di scala del segnale

- **Significato nel dominio della frequenza**
  - Interpretando lo spettro, si nota che una compressione di scala nel dominio del tempo, produce una dilatazione nel dominio delle frequenze, ovvero lo spettro si estende verso le frequenze più alte;
  - Invece, una dilatazione di scala nel dominio del tempo, produce una compressione nel dominio delle frequenze, ovvero lo spettro si concentra attorno alle frequenze più basse;
  - Sembra quasi che in frequenza avvenga il contrario di ciò che avviene nel tempo. Ed, infatti, è così.

Cambiamento di scala del segnale

- **Principio di indeterminazione nel dominio tempo-frequenza**
  - Dalla compressione (e dilatazione) di scala, si evince che:
    - Un segnale a durata limitata (compressione totale della scala del segnale entro un intervallo finito) ha sempre estensione spettrale (banda) infinita;
    - Un segnale a durata illimitata (dilatazione totale della scala del segnale) ha estensione spettrale (banda) limitata.
  - E’ questo il principio di indeterminazione nel dominio tempo-frequenza. Il prodotto durata-banda di un segnale non è mai un numero finito.

Trasformazione di un segnale ritardato (o anticipato)

- **Ritardo di un segnale (1)**
  - Supponiamo di avere un segnale *x(t)* che ammette trasformata di Fourier, quale è la trasformata di Fourier dello stesso segnale, ma <u>ritardato</u> (o anticipato)?

$$x(t) \rightarrow X(f) \quad x(t-T) \rightarrow Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-T) e^{-2\pi jft} \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) e^{-2\pi jf(\xi+T)} \, d\xi = e^{-2\pi jfT} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) e^{-2\pi jf\xi} \, d\xi = \underbrace{e^{-2\pi jfT}}_{} X(f)$$

Questo oggetto è detto <u>fasore</u>

Trasformazione di un segnale ritardato (o anticipato)

- **Ritardo di un segnale (2)**
  - Quindi, un ritardo (o un anticipo) del segnale non cambia lo spettro in ampiezza, ma ne cambia la spettro in fase; infatti:

$$|Y(f)| = |X(f)|$$

$$\arg\{Y(f)\} = \arg\{X(f)\} - 2\pi fT$$

  - In pratica, alla fase del segnale originario si aggiunge un contributo che varia linearmente con la frequenza.

Trasformata di derivata ed integrale

- **Trasformata della derivata (1)**
  - Sia data una funzione *x(t)* che ammette trasformata di Fourier, qual è la trasformata della sua derivata?

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

Consideriamo qui la relazione nei due sensi, perché utilizzeremo nel calcolo l'anti-trasformazione

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{2\pi jft}\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\left[X(f)e^{2\pi jft}\right]df = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(2\pi jf\right)X(f)e^{2\pi jft}\,df$$

$$Y(f) \hat{=} \left(2\pi jf\right)X(f) \Rightarrow Y\left(f\right) \rightarrow \frac{d}{dt}x(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow \left(2\pi jf\right)X(f)$$

Trasformata di derivata ed integrale

- **Trasformata della derivata (2)**
  - La relazione vista in precedenza è di grandissima importanza: infatti nel dominio della frequenza <u>un'equazione differenziale diventa un'equazione polinomiale</u> di facile risoluzione (nel dominio della frequenza):

$$a\frac{dx\left(t\right)}{dt}+bx(t)=cz(t)\rightarrow a\left(2\pi jf\right)X(f)+bX(f)=cZ(f)$$

$$\Rightarrow X(f)=\frac{cZ(f)}{\left(2\pi ajf\right)+b}\Rightarrow x(t)\leftarrow\frac{cZ(f)}{\left(2\pi ajf\right)+b}$$

Se si riesce a calcolare l'anti-trasformata il gioco è fatto! Altrimenti studiamo la soluzione nel dominio delle *f* (cosa che si fa molto spesso e bene)

Trasformata di derivata ed integrale

- **Trasformata dell'integrale**
  - Analogamente, si calcola la trasformata dell'integrale, che è (come atteso):

$$x(t) \rightarrow X(f) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\xi)\,d\xi \rightarrow Y\left(f\right) = \frac{X(f)}{\left(2\pi jf\right)} \quad \forall f \neq 0$$

  - Si può notare che la derivazione esalta le componenti ad alta frequenza del segnale, mentre l'integrazione esalta le componenti a bassa frequenza.

Trasformata della funzione rettangolo

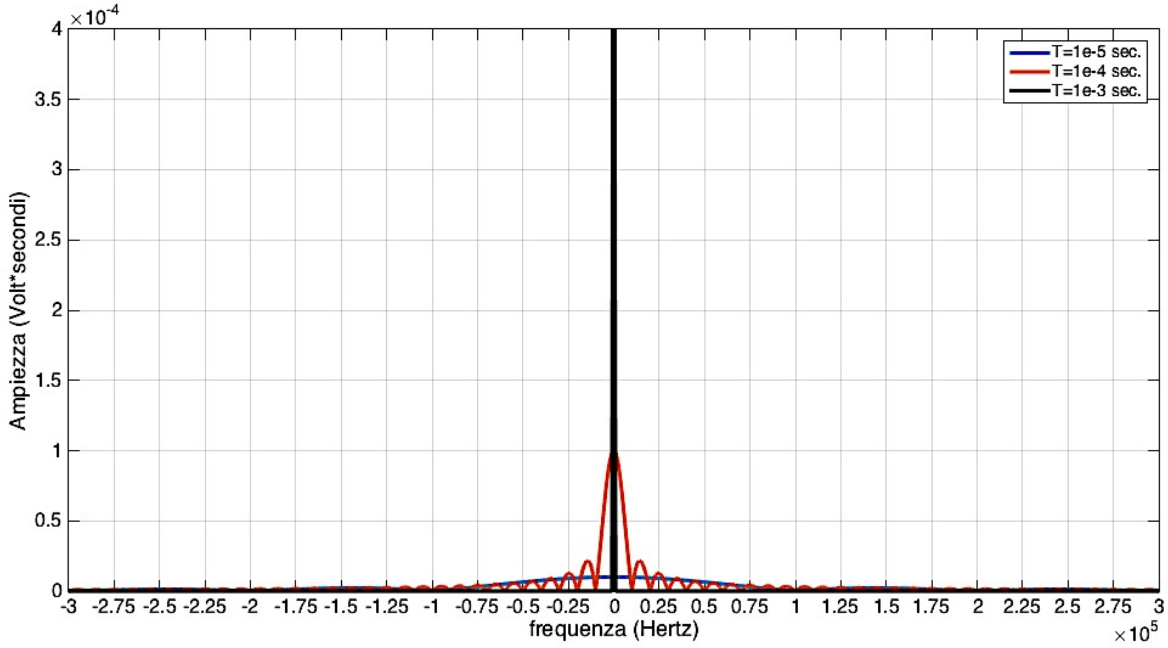
- **Un primo esempio (importante) di trasformata di Fourier (1)**
  - Consideriamo la funzione rettangolo e calcoliamone la trasformata di Fourier:

$$x(t) = V_0 \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \to X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} V_0 e^{-2\pi jft}\, dt = \frac{V_0}{2\pi jf}\left[e^{\pi jfT} - e^{-\pi jfT}\right] =$$

$$= \frac{V_0 T}{\pi fT} \frac{\left[e^{\pi jfT} - e^{-\pi jfT}\right]}{2j} = V_0 T \frac{\sin\left(\pi fT\right)}{\pi fT} = V_0 T \operatorname{sinc}\left(fT\right)$$

Trasformata della funzione rettangolo

- **Un primo esempio (importante) di trasformata di Fourier (2)**
  - Si possono fornire (e plottare) gli spettri in ampiezza e fase: ci interessa, in particolare, lo spettro in ampiezza, plottato per diversi valori della durata del rettangolo:



Aumentando la durata del rettangolo, lo spettro si restringe in banda e diviene sempre più alto.

Trasformata della funzione rettangolo

- **Passaggio al limite per durata infinita**
  - Da quanto visto nella slide precedente è evidente che:

$$x(t) = V_0 \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \to X(f) = V_0 T \operatorname{sinc}\left(fT\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{T \to +\infty} V_0 \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \equiv V_0 \to V_0 \delta\left(f\right)$$

La trasformata di una funzione costante nel dominio tempo è quindi <u>una delta di Dirac nel dominio della frequenza</u>.