

# CORSO DI TEORIA DEI SEGNALI: ANNO ACCADEMICO 2015-2016 – ESERCIZI SU CALCOLO DI STATISTICHE ED AUTOCORRELAZIONI DI PROCESSI ALEATORI

## Esercizio 1

Si calcoli l'autocorrelazione del seguente processo aleatorio:

$$x(t) = (A + 2B)\cos(300\pi t - \theta) + n(t)$$

ove:  $A, B$  e  $\theta$  sono variabili aleatorie tra loro indipendenti ed uniformemente distribuite in  $[-1,1]$ ,  $[-2,2]$  e  $[0,4\pi]$ , rispettivamente, ed  $n(t)$  è un processo aleatorio Gaussiano bianco, indipendente da tutto il resto, avente autocorrelazione  $R_n(\tau) = 10\delta(\tau)$ . Indicare per quali valori di  $\tau$  i campioni del processo aleatorio presi in  $t$  ed in  $t+\tau$  sono scorrelati.

## Esercizio 2

Si consideri il processo aleatorio:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \operatorname{rect}\left(\frac{t - 4kT - \varphi}{4T}\right)$$

costituito da una sequenza di impulsi rettangolari di durata  $4T$  e di ampiezza casuale  $A_k$ . Le ampiezze casuali (esprese in Volt) assumono solo i valori  $(-3, -1, +1, +3)$  e sono variabili aleatorie indipendenti caratterizzate dalle seguenti probabilità:  $P(-3)=0.2$ ,  $P(-1)=0.3$ ,  $P(+1)=0.2$ ,  $P(+3)=0.3$ . La sequenza di impulsi non è sincronizzata ed il ritardo  $\varphi$  rispetto all'origine dell'asse dei tempi è una variabile aleatoria, indipendente da  $A_k$ , con densità di probabilità uniforme tra 0 e  $4T$ .

Si richiede di calcolare il valor medio e l'autocorrelazione di  $x(t)$  e di indicare se il processo è, o no, stazionario in senso lato (nel qual caso, si richiede anche di calcolare la potenza media e la varianza del processo aleatorio medesimo).

## Esercizio 3

Il processo aleatorio:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + |\theta|)$$

con  $\theta$  variabile aleatoria uniformemente distribuita in  $[-\pi, \pi]$  è o no stazionario in senso lato (motivare la risposta)? Se ne calcoli, comunque, l'autocorrelazione.

## Esercizio 4

Un processo  $x(t)$  Gaussiano e stazionario in senso lato, il cui valor medio è 0 e la cui varianza è pari a 4 viene moltiplicato per un'onda quadra che assume alternativamente valori +1 e -1 ogni  $T$  secondi. Il processo risultante viene denotato da  $y(t)$ . Si richiede di:

- 1) Calcolare la funzione di densità di probabilità del primo ordine di  $y(t)$ ;
- 2) Indicare, motivando la risposta, se  $y(t)$  è un processo SSL oppure no.

Si consideri, ora, il processo aleatorio  $z(t)=y(t)-y(t-T/2)$ . Si richiede di:

- 3) Indicare, motivando la risposta, se il processo aleatorio  $z(t)$  è ancora distribuito in maniera Gaussiana;
- 4) Indicare, motivando la risposta, se  $z(t)$  è un processo SSL oppure no. Calcolarne, comunque, media e varianza.

### **Esercizio 5**

Consideriamo un processo aleatorio  $x(t)$  Gaussiano SSL a valor medio nullo ed autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = V^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T_1}\right) \cos\left(2\pi \frac{\tau}{T_2}\right)$$

Dove  $\Lambda$  è la funzione triangolo di altezza unitaria e durata  $2T_1$  mentre il periodo del coseno è  $T_2 = \frac{T_1}{100}$ .  
Sotto queste ipotesi si richiede di:

- 1) Calcolare la probabilità che  $x(t)$  sia maggiore di  $V/3$  e sia minore di  $2V$ ;
- 2) Indicare per quali valori di  $\tau$  i campioni del processo risultano scorrelati.

# Esercizio 1 - SOLUZIONE

①

$$R_x(\tau) \triangleq E(x(t)x(t+\tau))$$

Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} E\left\{x(t)x(t+\tau)\right\} &= E\left\{\left[(A+2B)\cos(300\pi(t+\tau)-\theta) + \right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ n(t+\tau)\right]\left[(A+2B)\cos(300\pi t-\theta) + n(t)\right]\right\} = \\ &= E\left\{(A+2B)^2\cos(300\pi(t+\tau)-\theta)\cos(300\pi t-\theta) + \right. \\ &\quad \left.+(A+2B)\cos(300\pi(t+\tau)-\theta)n(t) + \right. \\ &\quad \left.+ n(t+\tau)(A+2B)\cos(300\pi t-\theta) + n(t+\tau)n(t)\right\} \end{aligned}$$

Applicando la linearità del valore medio si ha che:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E\left\{(A+2B)^2\cos(300\pi(t+\tau)-\theta)\cos(300\pi t-\theta)\right\} + \\ &\quad + E\left\{(A+2B)\cos(300\pi(t+\tau)-\theta)n(t)\right\} + \\ &\quad + E\left\{n(t+\tau)(A+2B)\cos(300\pi t-\theta)\right\} + \end{aligned}$$

$$+ \overbrace{E\{n(t)n(t+\tau)\}}^{\leq Kn(\tau)} \quad (2)$$

Poiché  $n(t)$  è indipendente da tutto quanto, avremo che:

$$\begin{aligned} E\{(A+2B)\cos(300\pi(t+\tau))n(t)\} &= \\ = E\{(A+2B)\cos(300\pi(t+\tau))\} E(n(t)) &= 0 \\ \text{poiché } E(n(t)) &= 0 \quad (\text{processo bianco}) \end{aligned}$$

E la stessa cosa avviene per il termine seguente delle somma. Pertanto:

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E\left\{(A+2B)^2 \cos(300\pi(t+\tau)-\theta) \cos(300\pi t) + \right. \\ &\quad \left. + R_N(\tau)\right\} = \\ &= E\{(A+2B)^2\} E\left\{\cos(300\pi(t+\tau)-\theta) \cos(300\pi t-\theta)\right. \\ &\quad \left. + 10\delta(\tau)\right\} \quad \begin{matrix} \downarrow \text{questo perché } A, B \text{ e } \theta \\ \text{sono "independenti" fra loro.} \end{matrix} \end{aligned}$$

A questo punto si devono calcolare le due medie moltiplicate tra loro.

$$E\{(A+2B)^2\} = E\{A^2 + 4AB + 4B^2\} =$$

$$= E(A^2) + 4E(A)E(B) + 4E(B^2)$$

$$E(A) = 0, E(B) = 0 \quad (\text{per come sono distribuite})$$

$$E(A^2) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} a^2 da = \frac{1}{3}$$

✓  
E(A)E(B) = 0

$$E(B^2) = \int_{-2}^2 \frac{1}{4} s^2 ds = \frac{4}{3}$$

pertanto  $E[(A+2B)]^2 = E(A^2) + 4E(B^2) = \frac{17}{3}$

$$E\{\cos(300\pi(t+\tau)-\theta)\cos(300\pi t-\theta)\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cos(300\pi\tau) \quad (\text{processo aleatorio co-sinusoidale})$$

Infine:

$R_x(\tau) = \frac{17}{6} \cos(300\pi\tau) + 10\delta(\tau)$
--------------------------------------------------------------

NON È CHIARAMENTE UN PROCESSO BIANCO,  
MA HA POTENZA MEDIA UGUALMENTE 00

I campioni  $x(t) \in x(t+\tau)$  sono sconnessi quando

(4)

$$R_x(\tau) = 0$$

$R_x(\tau) = 0$  quando si annulla  $\cos(300\pi\tau)$

ovvero per  $300\pi\tau = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

quindi  $\tau = 300\tau = \frac{1}{2} + k \Rightarrow$

$$\tau = \frac{1}{300} \left( \frac{1}{2} + k \right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

## Esercizio 2 - Soluzione

(5)

Si tratta di un processo casuale a 4 livelli, che è un po' diverso (ma non poi tanto) dal processo aleatorio binario casuale.

CALCOLO DELLA MEDIA

$$\begin{aligned} E(x(t)) &= E\left(x(t) / A_K = -3\right) P_r\{A_K = -3\} + \\ &+ E\left(x(t) / A_K = -1\right) P_r\{A_K = -1\} + \\ &+ E\left(x(t) / A_K = 1\right) P_r\{A_K = 1\} + E\left(x(t) / A_K = 3\right) P_r\{A_K = 3\}, \end{aligned}$$

(essendo un processo aleatorio a valori discreti)

$$\begin{aligned} E(x(t)) &= -3 \cdot 0.2 - 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.3 = \\ &= -0.6 - 0.3 + 0.2 + 0.9 = -0.9 + 1.1 = 0.2 \end{aligned}$$

CALCOLO DELL'AUTOCORRRELAZIONE

ZONE

$R_x(\tau) = E(x(t)x(t+\tau))$  ci sono diversi casi da considerare:

1)  $x(t), x(t+\tau)$  sono nello stesso intervallo di commutazione. In questo caso  $x(t)$  ed  $x(t+\tau)$  sono entrambi uguali ad  $A_K$  e quindi:

(6)

$$R_x(\tau) = E(A_k^2) = \sum_{i=1}^4 a_i^2 P(a_i) = 5 \quad (\text{si verifica del calcolo})$$

2)  $x(t), x(t+\tau)$  sono in intervalli di commutazione adiacenti (quindi  $|t| \leq 4T$ ). In questo caso:

$$R_x(\tau) = E(A_k) E(A_{k+1}) = [E(A_k)]^2 =$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^4 P} (0.2)^2 = 0.04 \quad (\text{per l'indipendenza dei valori della ampresa})$$

3)  $x(t), x(t+\tau)$  sono in intervalli di commutazione diversi ed allora:  $|t| > 4T$

$$R_x(\tau) = E(A_k) E(A_j) = [E(A_k)]^2 =$$

$$= 0.04 \quad (\text{vedi sopra})$$

Pertanto:

$$\begin{cases} R_x(\tau) = 5 \Pr\left\{ t, t+\tau \text{ sono nello stesso intervallo di commutazione} \right\} + \\ + 0.04 \Pr\left\{ t, t+\tau \in \text{intervalli adiacenti} \right\} \text{ per } |t| \geq 4T \\ R_x(\tau) = 0.04 \quad \forall \tau: |\tau| > 4T \end{cases}$$

(7)

~~Risolv.~~

$$\begin{aligned}
 & P_r \left\{ t, t+\tau \in \text{intervalli adiacenti} \right\} = \\
 & = \cancel{\dots} \quad P_r \left\{ t < \varphi < t+\tau \right\} = \\
 & = \int_0^{t+\tau} \frac{1}{4\pi} dt = \frac{\tau}{4\pi} \quad (\text{reso in modulo})
 \end{aligned}$$

$$P_r \left\{ t, t+\tau \in \text{stessi intervalli} \right\} = \left( 1 - \frac{\tau}{4\pi} \right)$$

(idem, come sopra)

e quindi:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 5 \cdot \left( 1 - \frac{|\tau|}{4\pi} \right) + 0.04 \frac{|\tau|}{4\pi} & |\tau| \leq 4\pi \\ 0.04 & |\tau| > 4\pi \end{cases}$$

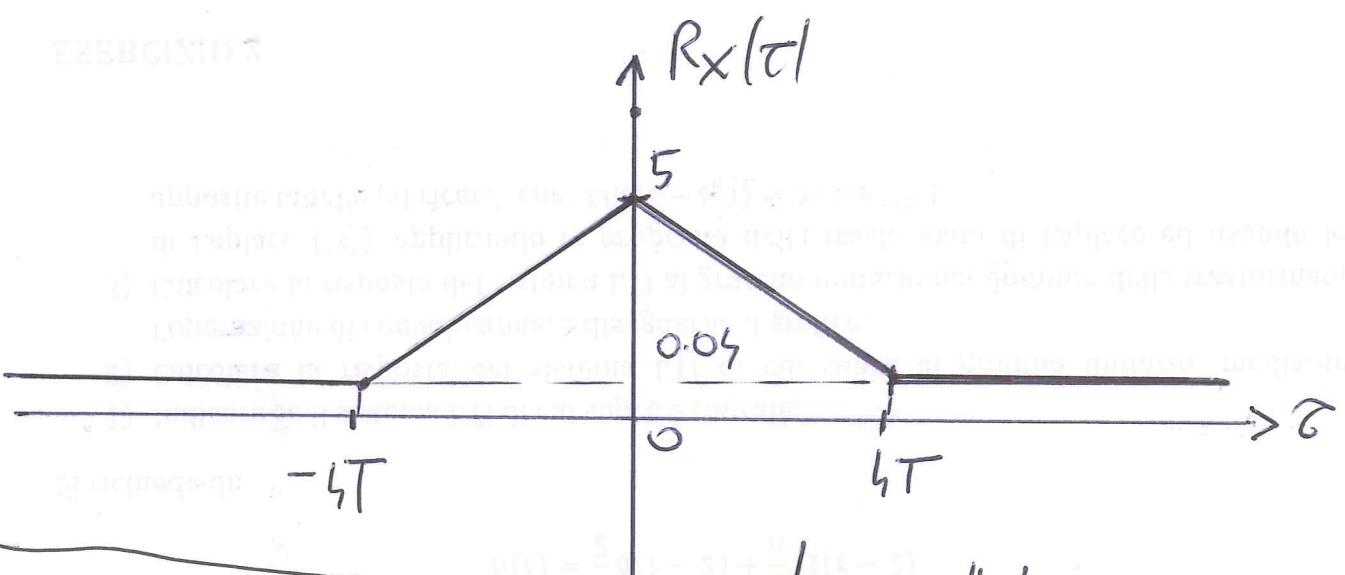
Si può sostituire un po' meglio:

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= 5 - 5 \frac{|\tau|}{4\pi} + 0.04 \frac{|\tau|}{4\pi} = (|\tau| \leq 4\pi) \\
 &= \left( 5 - 4.96 \frac{|\tau|}{4\pi} \right) \quad \forall \tau: |\tau| \leq 4\pi
 \end{aligned}$$

(8)

Concludendo:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 5 - 4.96 \frac{|\tau|}{4T} & \text{se } |\tau| \leq 4T \\ 0.04 & \text{se } |\tau| > 4T \end{cases}$$

QUESTO PROCESSO

$$\text{E' SSL: } E(x(t)) = \bar{x}$$

disegno "di massima"  
tanto per far  
capire...

$\forall t$  e  $R_x(t, t+\tau)$  dipende solo da  $\tau$

Cos'altro de notare: il processo ~~NON PERDE~~ NON PERDE MAI LA MEMORIA !  $R_x(\tau)$  non è mai uguale a 0 e quando non compiamo tra  $t$  ed in  $t+\tau$  sono SEMPRE CORRELATI.

(9)

$$\overline{P}_x = R_x(0) = 5[W]$$

$$\overline{C}_x^2 = E(x^2(t)) - \bar{x}^2 = R_x(0) - \bar{x}^2 =$$

$$= 5 - 0.04 = 4.96 [W]$$

10

### Esercizio 3 - Soluzione

$$x(t) = A \cos(2\pi f t_0 + |\theta|) \text{ non è}$$

l'usuale processo aleatorio co-simmetricale

poiché c'è  $|\theta|$  invece che  $\theta$ . Questo  
fatto può cambiare le statistiche: sia  
del primo che del secondo ordine.

Pertanto occorre fare le verifiche:

$$\text{Se } E\{x(t)\} = \bar{x} \quad \forall t$$

$$\text{e } R_x(t_1, t_2) = R_x(|t_1 - t_2|) \quad \forall t_1, t_2$$

allora il processo è SSL.

Verifichiamo il valore medio:

$$\begin{aligned} E\{x(t)\} &= \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(2\pi f t_0 + |\theta|) \frac{1}{2\pi} d\theta = \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(2\pi f t_0 - \theta) d\theta + \int_0^{\pi} \frac{A \cos(2\pi f t_0 + \theta)}{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

(11)

$$E\{x(t)\} = \frac{A}{2\pi} \left[ -\sin(2\pi f_0 t - \Theta) \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} + \\ + \frac{A}{2\pi} \left[ \sin(2\pi f_0 t + \Theta) \right] \Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \left[ -\sin(2\pi f_0 t) + \sin(2\pi f_0 t + \pi) \right] +$$

$$+ \frac{A}{2\pi} \left[ \sin(2\pi f_0 t + \pi) - \sin(2\pi f_0 t) \right] =$$

$$= \frac{A}{2\pi} \left[ -4 \sin(2\pi f_0 t) \right] = \boxed{-\frac{2A}{\pi} \sin(2\pi f_0 t)}$$



DIPENDE DAL TEMPO!

NON È UN PROCESSO  
SSL!

Proviamo a calcolarne l'autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = E \left\{ [A \cos(2\pi f_0(t+\tau) + \Theta)] [A \cos(2\pi f_0 t + \Theta)] \right\} \\ = E \left\{ \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 (2t + \tau) + 2\Theta) + \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \right\}$$

(12)

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} E \left\{ \cos(2\pi f_0(2t+\tau) + 2|\theta|) \right\} + \\ + \frac{A^2}{2} E \left\{ \cos(2\pi f_0 \tau) \right\}$$

$$E \left\{ \cos(2\pi f_0 \tau) \right\} = \cos(2\pi f_0 \tau) \\ (\text{deterministic! No aleatory})$$

$$E \left\{ \cos(2\pi f_0 (2t+\tau) + 2|\theta|) \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f_0 (2t+\tau) - 2\theta) d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f_0 (2t+\tau) + 2\theta) d\theta = \\ = \frac{1}{2\pi} \left[ -\sin(2\pi f_0 (2t+\tau) - 2\theta) \right]_{-\pi}^{\pi} + \\ + \frac{1}{2\pi} \left[ \sin(2\pi f_0 (2t+\tau) + 2\theta) \right]_{0}^{\pi} = 0 + 0 = 0$$

(13)

E quindi:

$$R_x(\tau) = A^2/2 \cos(2\pi f \tau)$$

Nonostante la funzione di autocorrelazione dipenda solo da  $\tau$ , il processo non è SSI, poiché le medie è dipendente del tempo.

### LB rappresentata in funzione del tempo

Si tratta di una curva sinusoidale con ampiezza costante e frequenza costante.

Si tratta di una curva sinusoidale con ampiezza costante e frequenza costante.

# (1)

## ESERCIZIO 4 - Dom. 1

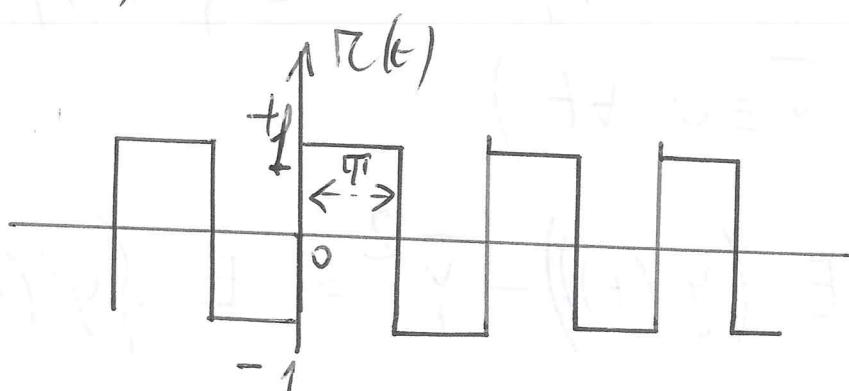
### (SOLUZIONE)

È richiesto  $f_Y(y)$ . Non è detto che non sia tempo-variente. Infatti, non sappiamo se il p.a. è stationario in senso lato o meno.

Ripondiamo sul processo aleatorio:

$$Y(t) = R(t)X(t)$$

$R(t)$  è un SEGNALE DETERMINISTICO. Infatti sappiamo che vale  $\pm 1$  ogni  $T$  secondi alternativamente, ovvero:



è detto anche  
"segale di relais"

(nessuna autocorrelazione in questo segnale!)

Se  $X(t)$  è un p.a. Gaussiano, la moltiplicazione di tale p.a. per  $R(t)$  può cambiare solo i valori di  $X(t)$  ogni  $T$  secondi, ma non ne cambia la DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ.

Dunque  $y(t)$  è ancora un p.a. Gaussiano. (2)

Averemo che:

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{(y-\bar{Y})^2}{\sigma_y^2}}$$

tuttavia, occorre calcolare  $\bar{Y}$  e  $\sigma_y^2$ , perché queste statistiche POTREBBERO CAMBIARE) risp.

a  $\sigma_x^2$  e  $\bar{X}$ . Inoltre  $\bar{Y}$  e  $\sigma_y^2$  non è detto che siano tempo-inv.!

$$\bar{Y} = E\{y(t)\} =$$

$$= E\{r(t)x(t)\} = r(t)E\{x(t)\} = 0$$

(quando  $\bar{Y} = 0 \forall t$ )

$$\sigma_y^2 = E\{y^2(t)\} - \bar{Y}^2 = E\{y^2(t)\} =$$

$$= E\{r^2(t)x^2(t)\} = r^2(t)E\{x^2(t)\}$$

Ma  $r^2(t) \equiv 1 \forall t$  E quindi:

$$\sigma_y^2 = E\{x^2(t)\} = \sigma_x^2 = 4$$

Pertanto:

(3)

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C_x^2}} e^{-y^2/2C_x^2}$$

$$(C_x^2 = h)$$

### Esercizio 4 - Dom. 2

(SOLUZIONE)

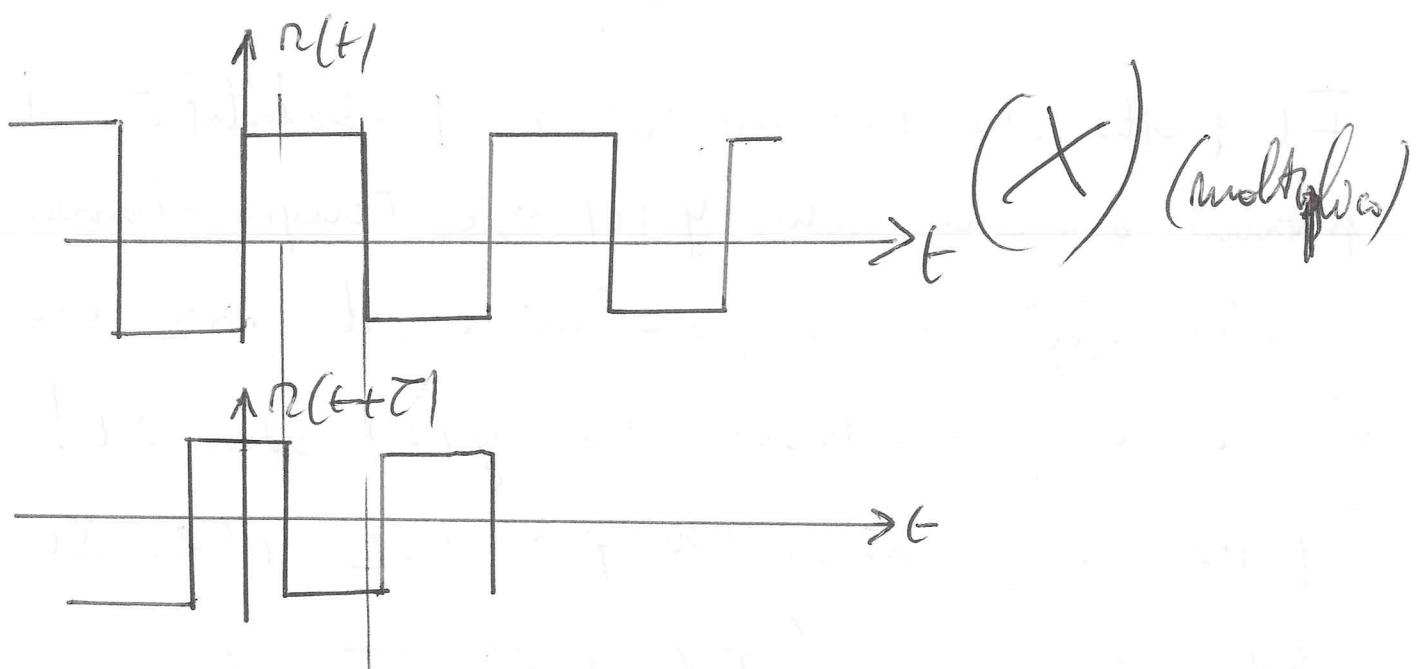
Il fatto che la densità di probabilità del  
primo studio di  $y(t)$  sia tempo-invariante  
e che  $C_y^2$  sia tempo-invariante così come  
 $\bar{Y}$  non ci garantisce che  $y(t)$  sia SSL!

Infatti lo garantisce la p.a. SSL c'è se  
e solo se

$$\left\{ \begin{array}{l} E\{y(t)\} = \bar{Y} \forall t \\ (\text{OK, verificata}) \\ R_y(t, t+\tau) = R_y(\tau) \\ (\text{questa è da verificare...}) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 R_y(t, t+\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\}_z \\
 &\geq E\{n(t)x(t)n(t+\tau)x(t+\tau)\} = \\
 &\geq n(t)n(t+\tau)E\{x(t)x(t+\tau)\} = \\
 &\geq n(t)n(t+\tau)R_x(\tau)
 \end{aligned}$$

CHIARAMENTE NON SSL, poiché  $R_y(t, t+\tau)$  dipende da  $n(t)n(t+\tau)$ , valore che dipende sia da  $t$  che da  $t+\tau$ !!



Dunque  $y(t)$  non è SSL, può comunque  $T \gg \tau$  che:

$$R_y(t) = n^2(t) R_x(0) = 1 \cdot 6^2 = 6x + b$$

Incidentalmente succede questo, ma non vuol dire che il processo sia SSL! Stiamamente

(5)

la p.d.f. del secondo ordine dipende sia da  $t$  che da  $t + \tau$ .

### Esercizio 4 - Dom. 3

(SOLUZIONE)

$$Z(t) = y(t) - y(t - \pi/2)$$

ho il processo  $y(t)$  sottratto a sé stesso, ritardato di  $\pi/2$ . Poiché  $y(t)$  è Gaussiano, sottraendolo in pratica a sé stesso, non posso che ottenere un altro p.a. Gaussiano.

### Esercizio 4 - Dom. 4

(SOLUZIONE)

Solita verifica:

$$\text{SSL} \Leftrightarrow \begin{cases} E(Z(t)) = \bar{Z} \forall t \\ R_Z(t, t+\tau) = R_Z(\tau) \forall t \end{cases}$$

~~$R_Z(t, t+\tau)$~~

$$E\{Z(t)\} = E\{y(t)\} - E\{y(t - \pi/2)\} = 0 - 0 = 0$$

(infatti, almeno il valor medio, è invariante av traslazioni temporali)

(6)

$$\begin{aligned}
 R_Y(t, t+\tau) &= E\{Y(t)Y(t+\tau)\} = \\
 &= E\{[Y(t)-Y(t-\frac{\tau}{2})][Y(t+\tau)-Y(t+\tau-\frac{\tau}{2})]\} = \\
 &= E\{Y(t)Y(t+\tau)\} - E\{Y(t-\frac{\tau}{2})Y(t+\tau)\} + \\
 &\quad - E\{Y(t)Y(t+\tau-\frac{\tau}{2})\} + E\{Y(t-\frac{\tau}{2})Y(t+\tau-\frac{\tau}{2})\} = \\
 &= \cancel{R_Y(t, t+\tau)} + \dots + \dots + 
 \end{aligned}$$

NON SERVE NEPPURE ANDARE AVANTI NEI CONTI  
 PER CAPIRE CHE NON È SSI! Infatti tutti i termini dipendono sia da  $t$  che da  $t+\tau$ !!

Sicuramente  $R(t)$  NON È SSI!

Si può calcolare media e varianza?  
 La media sicuramente sì. Essa è 0!!  
 (già fatto prima)

(7)

La varianza, vediamo:

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_Z^2 &= E\{\bar{Z}^2(t)\} - \bar{Z}^2 = E\{\bar{Z}^2(t)\} = \\
 &= E\left\{\left[Y(t) - Y(t - \frac{T}{2})\right]^2\right\} = \\
 &= E\left\{\left[Y^2(t) - 2Y(t)Y(t - \frac{T}{2}) + Y^2(t - \frac{T}{2})\right]\right\} = \\
 &= E\{Y^2(t)\} - 2E\{Y(t)Y(t - \frac{T}{2})\} + \\
 &\quad + E\{Y^2(t - \frac{T}{2})\} = 2\hat{\sigma}_Y^2 - 2E\{Y(t)Y(t - \frac{T}{2})\}
 \end{aligned}$$

→ poiché la varianza  
di  $Y(t)$  è  
costante  $\forall t$  e  
quindi invaria  
a sluff temporale.

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_Z^2 &= 2\hat{\sigma}_Y^2 - 2E\{r(t)X(t)r(t - \frac{T}{2})X(t - \frac{T}{2})\} \\
 &= 2\hat{\sigma}_Y^2 - 2r(t)r(t - \frac{T}{2})E\{X(t)X(t - \frac{T}{2})\} = \\
 &= 2\hat{\sigma}_Y^2 - 2r(t)r(t - \frac{T}{2})R_X(\frac{T}{2}) \xrightarrow{\text{DIPENDE DA } t!!}
 \end{aligned}$$



# Esercizio 5 - Domanda 1

(soluzione)

①

$X(t)$  è gaussiano ed SSI, ma chiaramente non bianco. Infatti:

$$R_X(\tau) \neq \frac{1}{2} S(\tau)$$

I campioni di  $x(t)$ , infatti, presentano una loro correlazione ed al processo ha una sua METRICA.

Onde calcolare la probabilità richiesta, occorre calcolare la densità di probabilità di  $X(t)$ . Poiché  $X(t)$  è SSI, la d.d.p. non dipende dal tempo:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-x^2/2\sigma_x^2}$$

(poiché  $E\{X(t)\} = 0$ ). Bisogna calcolare:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= E\{X^2(t)\} - \bar{x}^2 = E\{X^2(t)\} = \\ &= R_X(0) = V^2 A(0) \cos(\theta_0) = V^2\end{aligned}$$

Si va dunque a sostituire nell'espressione delle pdf: (2)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V^2}} e^{-x^2/2V^2}$$

$$\Pr\left\{X(t) > \frac{V}{3}\right\} = \int_{\frac{V}{3}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi V^2}} e^{-x^2/2V^2} dx$$

poniamo:  $\frac{x}{V} = \xi \quad d\xi = \frac{dx}{V}$

$$\begin{aligned} \Pr\left\{X(t) > \frac{V}{3}\right\} &= \int_{\frac{V}{3}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi V^2}} \times e^{-\xi^2/2} d\xi = \\ &= \int_{\frac{V}{3}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} d\xi = Q\left(\frac{1}{3}\right) = Q(0.33) = \\ &\approx \underline{0.38} \end{aligned}$$

$$\Pr\left\{X(t) < 2V\right\} = 1 - \Pr\left\{X(t) \geq 2V\right\}$$

(evento complementare)

(3)

$$\Pr \{ X(t) < 2V \} = 1 - \int_{2V}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi/2}} e^{-x^2/2V^2} dx =$$

$$= 1 - \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} d\xi \quad (\text{stesso cambio}\\ \text{di variabile}\\ \text{di prima ...})$$

$$\Pr \{ X(t) < 2V \} = 1 - Q(2) \approx 1 - 0.023 = \\ = 0.977$$

### Esercizio 5 - Domanda 2

(Soluzione)

I campioni sono sconnessi  $\not\leftrightarrow$

$$R_{X(t)} = 0$$

Ciò avviene quando:  $\overline{A}(\overline{T}_{T_2}) = 0$

$$\underline{\underline{\text{oppure}}} \cos\left(\frac{2\pi f_0}{T_2}\right) = 0$$

ovvero se  $|G| \geq T_1$

④

e per tutto  $\nu$   $|G| < T_1$  falso per caw.

~~$$2\pi/G = \pi/2 + K\pi$$
 (ma non per tutti i  $k$ )~~

$$|G|_{T_2} = \frac{1}{4} + \frac{k}{2} = \frac{1}{4}(2k+1)$$

$$\Rightarrow |G| = \frac{\pi}{4}(2k+1)$$

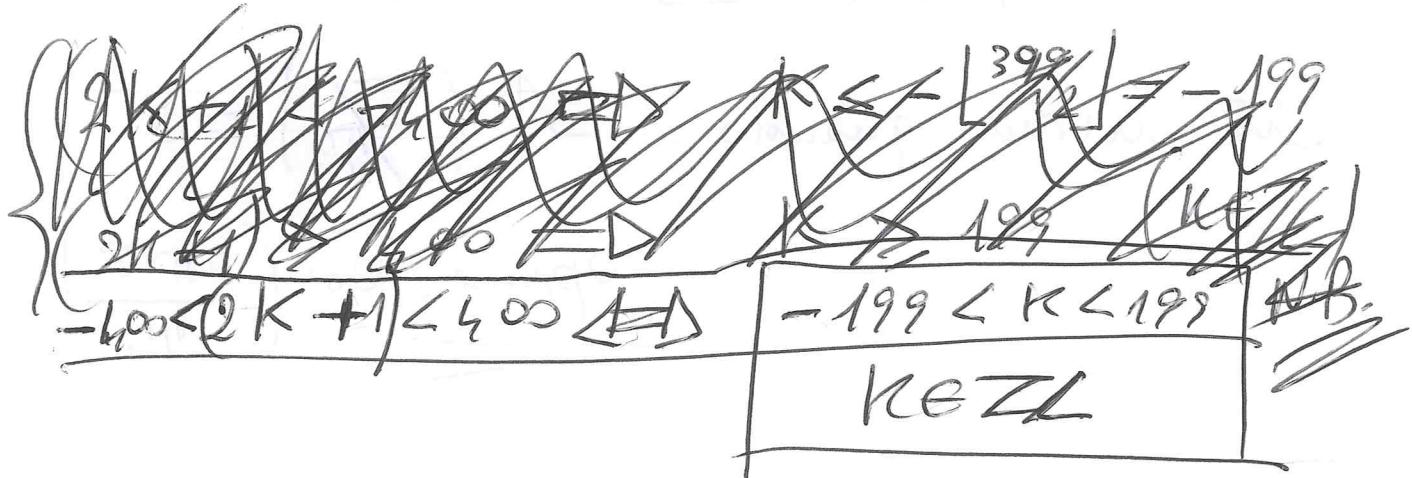
sappiamo  
che  $T_2 = \frac{\pi}{100}$

$$\text{quindi } |G| = \frac{\pi}{400}(2k+1)$$

ma solo per quei valori di  $k$  per caw.

$$\left| \frac{\pi}{400}(2k+1) \right| < T_1 \Rightarrow |(2k+1)| < 400 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

cioè avviene se e solo se:



(5)

Riassumendo:

$$R_X(\tau) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |\tau| \geq T_1 \\ |\tau| = \frac{T_1}{400} + (2K+1) \\ K \in \mathbb{Z} : -199 < K < 199 \end{cases}$$

