Algoritmi Avanzati

Provetta intercorso

Roberto Battiti *Paolo Campigotto*

14 ottobre 2010

Istruzioni e regole:
Si usino unicamente una penna ed i fogli protocollo forniti dai docenti.
Si scriva subito il proprio nome su ciascun foglio e lo si firmi.
Segnare con chiarezza a quale quesito si sta rispondendo. Si scriva con chiarezza la propria risposta e si dimostrino i propri risultati. (**I risultati senza dimostrazione o spiegazione non verranno presi in considerazione**).
Un atteggiamento disonesto (come copiare) portera' all'espulsione immediata dall'aula.
Buon lavoro!

Esercizio 1

1.1) Definire la decomposizione LUP di una generica matrice quadrata A.
1.2) Mostrare come applicare la decomposizione LUP per risolvere il sistema di equazioni lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove A e' la matrice quadrata associata alla trasformazione lineare, $\mathbf{x}$ e' il vettore delle incognite e $\mathbf{b}$ e' il vettore dei termini noti.
1.3) Assumendo che la decomposizione LUP di A sia data, definire il costo computazionale del metodo descritto al punto precedente, calcolando il numero di operazioni (somme, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni) effettuate e determinando il comportamento asintotico del metodo.
1.4) Applicare la decomposizione LUP per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b} = (4, 5, 3)^T$ e:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

2.1) Definire il metodo di approssimazione secondo il criterio dei minimi quadrati, spiegando con chiarezza a cosa serve, quali sono i dati del problema e quale grandezza si vuole determinare.
2.2) Data la serie di n dati sperimentali (x_i, y_i), $i = 1 \dots n$, si desidera ricavare una dipendenza funzionale della forma $y = F(x)$, dove $F(x)$ e' la combinazione lineare di m funzioni base note $f_i(x), i = 1 \dots m$. Dimostrare che determinare la dipendenza funzionale in base al criterio dei minimi quadrati consiste nel risolvere l'equazione $\mathbf{c} = A^+\mathbf{y}$, dove $\mathbf{c}$ e' il vettore delle incognite, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$. Motivare con chiarezza tutti i passaggi della dimostrazione fornita.
2.3) Siano A (1,1,4) e B (3,1,8) due punti di coordinate (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$. Si vuole trovare un dipendenza funzionale della forma $z = F(x, y) = a + b2^{x+y}$, dove a, b sono i coefficienti da determinare in base al criterio dei minimi quadrati. Rispondere alle seguenti domande:

- scrivere le funzioni base;
- scrivere una qualsiasi funzione $G(x, y)$ che sia una combinazione non-lineare delle funzioni di base individuate;
- trovare i valori di a, b che determinano l'approssimazione della forma $F(x, y)$ ai punti dati secondo il criterio dei minimi quadrati.

Esercizio 3

3.1) Definire il problema degli autovalori, specificando cosa si intende per autovalore dominante.
3.2) Descrivere il metodo dello potenze, specificando a cosa serve, come funziona ed indicando un criterio di arresto appropriato.
3.3) Dimostrare che tutti gli autovalori associati agli autovettori reali di una matrice definita positiva sono positivi.
3.4) Dimostrare per induzione che il prodotto di due matrici triangolari inferiori e' ancora una matrice triangolare inferiore.

$\boxed{\textbf{Esercizio 4}}$

4.1) Dare la definizione di matrice definita positiva.
4.2) Dimostrare che per ogni matrice A a rango colonna pieno, la matrice $A^T A$ e' definita positiva.
4.3) Dimostrare che ogni matrice A definita positiva e' non-singolare.