UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Ingegneria
e Scienza dell'Informazione

Teoria dei Segnali

Parte Prima: Segnali e Sistemi

Lezione 3: Segnali deterministici

Docente: Prof. Claudio Sacchi

Contenuti

- Introduzione “semantica”;
- Proprietà elementari di un segnale deterministico;
- Media temporale e potenza media di un segnale deterministico;
- Segnali causali;
- Campionamento di un segnale (definizione e concetto).

Introduzione “semantica”

- **Quando ha senso parlare di segnale deterministico?**
  - Un segnale è deterministico quando, per un certo istante temporale, il valore dell’ampiezza è noto a priori;
  - Questo avviene quando il formato di segnale è imposto dal progettista (ad esempio: voglio generare una sinusoide, che è necessaria a trasmettere un segnale via radio);
  - Oppure, come indica il testo di Vitetta, un segnale anche sconosciuto, diviene deterministico dopo essere stato osservato, acquisito e tracciato su un grafico. Non è necessario che la forma analitica sia nota, ma solo l’andamento grafico dei valori.

Proprietà elementari di un segnale deterministico

- **Potenza istantanea di un segnale deterministico (1)**
  - Se consideriamo un circuito elementare costituito da un generatore di tensione *x(t)* e da una resistenza *R* in parallelo, per la legge di Ohm, la potenza dissipata dal resistore è pari a:

$$P(t) = \frac{x^2(t)}{R}$$

Proprietà elementari di un segnale deterministico

- **Potenza istantanea di un segnale deterministico (2)**
  - Da questo esempio, si comprende il legame di proporzionalità che c’è tra la potenza istantanea del segnale *x(t)* ed il quadrato del segnale stesso;
  - Estendendo in maniera astratta questa definizione, si può definire, quale potenza normalizzata del segnale (rispetto alla resistenza), il quadrato del segnale stesso;
  - Nella Teoria dei Segnali, si assume quale potenza istantanea del segnale, la potenza normalizzata (omettendo l’aggettivo), ovvero il quadrato del segnale.

Proprietà elementari di un segnale deterministico

- **Energia di un segnale deterministico**
  - Tornando all'esempio del resistore, l'energia totale dissipata per effetto del passaggio della corrente *i(t)* è la seguente:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} R i^2(t)\, dt$$

  - Applicando la normalizzazione vista in precedenza, possiamo definire <u>l'energia del segnale deterministico</u> come:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt$$

Proprietà elementari di un segnale deterministico

- **Energia di un segnale deterministico reale**
  - La definizione di energia data nella slide precedente è valida <u>se e solo se l'integrale improprio converge ad un valore finito</u>;
  - Nel caso di un segnale reale<u>, l'energia del segnale è sempre finita</u>. Infatti, un segnale ha sempre un inizio e sempre una fine e, quindi, l'orizzonte temporale non è infinito (prima o poi il generatore "si spegne").

Media temporale e potenza media di un segnale

- **Media temporale**
  - Dato un segnale deterministico è possibile calcolarne la media temporale nella seguente maniera:

$$\overline{x} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt$$

T è detta *finestra di osservazione del segnale*. Nel caso di segnali reali, se T è abbastanza grande, la media “parziale” sulla finestra di osservazione approssima molto bene la media temporale.

Media temporale e potenza media di un segnale

- **Potenza media**
  - Dato un segnale deterministico, a durata finita (pari a *T* sec.) è possibile calcolare la potenza media nella seguente maniera:

$$\overline{P_x} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt = \frac{E_x}{T}$$

Segnali causali

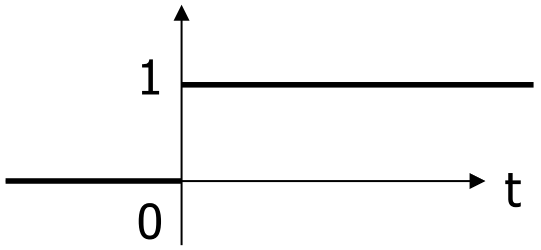
- **Definizione**
  - Un segnale è detto causale, <u>quando inizia in un istante di tempo ben preciso</u> e, prima di questo istante, è identicamente nullo:

$$x(t) = \begin{cases} x_s(t) \; \forall t \geq t_0 \; t_0 \geq 0 \\ 0 \qquad\qquad t < t_0 \end{cases}$$

Segnali causali

- **Un segnale causale notevole (1)**
  - Il più semplice (e forse più importante) tra i segnali causali è il cosiddetto gradino di Heaviside (o funzione-gradino), definito come:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



Segnali causali

- **Un segnale causale notevole (2)**
  - Può essere visto come un generatore di tensione continua (ampiezza: 1 Volt) che "si accende" nell'origine dei tempi;
  - Si può dimostrare che il gradino di Heaviside è la funzione integrale della delta di Dirach:

$$1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

Segnali causali

- **Un segnale causale notevole (3)**
  - E' evidente <u>che tutti i segnali causali</u> possono essere espressi come il prodotto tra una funzione (anche non causale) ed un gradino di Heaviside;
  - Ritornando all'esempio precedente:

$$x(t) = x_s(t)1(t - t_0)$$

Campionamento di segnali

- **Dal tempo continuo al tempo discreto**
  - Al giorno d’oggi, l’elaborazione dei segnali viene effettuata, per lo più, da algoritmi software, eseguiti nel dominio numerico;
  - E’ noto che gli elaboratori elettronici operano nel dominio tempo-discreto, scandito da un segnale di temporizzazione detto clock;
  - Per questo motivo, il segnale “fisico”, che è analogico a tempo continuo, deve essere convertito nel formato numerico, a tempo discreto, che possa essere processato;
  - Il primo step di questa conversione è il campionamento.

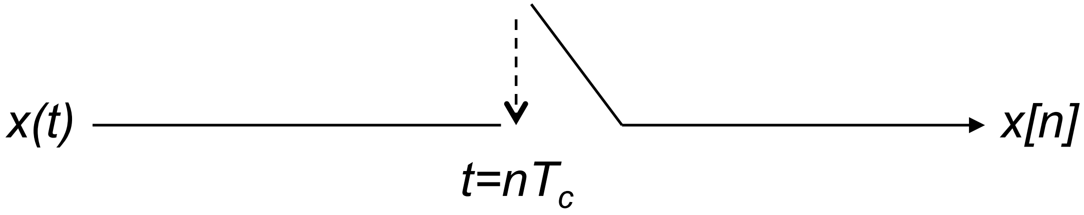
Campionamento di segnali

- **Definizione di campionamento**
  - Campionare un segnale significa estrarre dal segnale stesso i valori che esso assume ad instanti temporali equi-spaziati, multipli di un intervallo di tempo T_c fissato, chiamato periodo di campionamento;

  - Con questa operazione viene creata una sequenza *x[n]* il cui valore n-esimo (detto campione) è il valore assunto dal segnale *x(t)* a tempo continuo nell'istante nT_c

Campionamento di segnali

- **Campionamento ideale:**
  - Idealmente, il campionatore è un <u>interruttore</u> che, ogni T_c secondi, si "chiude" per un intervallo di tempo infinitesimo e poi si riapre:



  - Esiste un modello matematico che descriva in maniera efficace questa operazione?

Campionamento di segnali

- **Modello matematico di campionamento ideale (1)**
  - L'unica funzione che può esprimere in maniera compatta il campionamento ideale è <u>la delta di Dirach</u>;
  - Infatti, una delle sue proprietà (detta, non a caso, campionamento) recita che:

$$x(t)\delta\left(t-t_0\right)=x(t_0)\delta\left(t-t_0\right)$$

Campionamento di segnali

- **Modello matematico di campionamento ideale (2)**
  - Sfruttando questa proprietà, è possibile esprimere la sequenza di campioni nella seguente maniera:

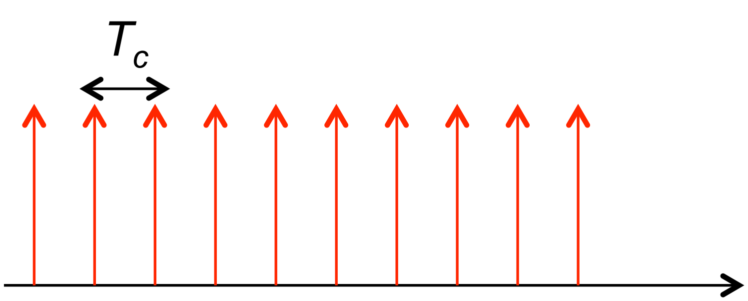
$$x_c(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nT_c\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\delta\left(t-nT_c\right) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta\left(t-nT_c\right)$$

Campionamento di segnali

- **Modello matematico di campionamento ideale (3)**
  - Idealmente, un segnale campionato si ottiene moltiplicando il segnale per <u>la funzione di campionamento ideale</u> $f_c(t)$ definita nella seguente maniera:

$$f_c(t) \hat{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - nT_c\right)$$



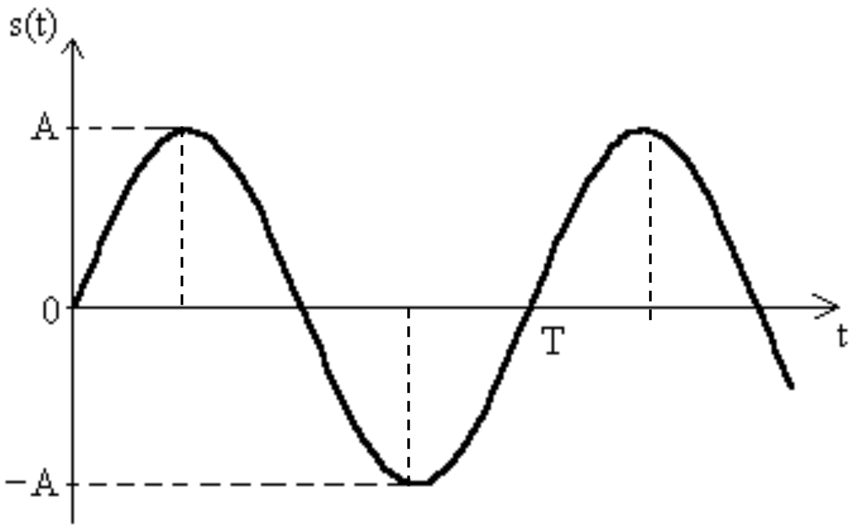
Treno di Delta di Dirach o funzione "pettine" (segnale periodico)

Campionamento di segnali

- **Quando il segnale campionato rappresenta bene il segnale fisico?**
  - Si comprende (senza dimostrarlo, per ora), che il periodo di campionamento deve essere convenientemente breve;
  - Il “pettine” visto nella slide precedente deve avere i suoi “denti” molto ravvicinati, altrimenti, prenderei campioni troppo lontani tra loro nel tempo, che non rappresenterebbero la “dinamica” del segnale (e, quindi, perderei di sicuro informazione);
  - Se T_c fosse zero (o infinitesimo), il segnale campionato coinciderebbe con il segnale fisico.

Campionamento di segnali

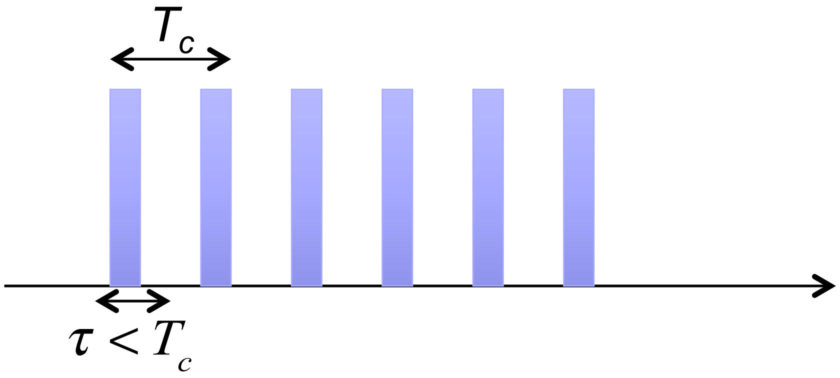
- **Esempio: sinusoide**
  - Supponiamo di considerare un segnale sinusoidale:



Se campionassi la sinusoide con periodo T_c pari a $T/2$ <u>prenderei campioni identicamente nulli</u>, che non mi consentirebbero di capire che ho a che fare con una sinusoide. Meglio è un periodo pari a $T/4$ (vedi figura) ma forse dovrebbe essere ancora più piccolo.

Campionamento di segnali

- **Campionamento reale**
  - E' chiaro che la funzione di campionamento ideale non esiste (come non esiste un pettine con denti di larghezza infinitesima);
  - Una funzione di campionamento reale potrebbe essere costituita da un treno di rettangoli di area unitaria e durata non nulla:



$$g_c(t) \hat{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_\tau\left(t - nT_c\right)$$

$$f_c\left(t\right) = \lim_{\tau \to 0} g_c(t)$$

Campionamento di segnali

- **Ritorno al segnale fisico**
  - Dato il segnale campionato (e successivamente elaborato in digitale), devo tuttavia tornare al segnale fisico analogico (audio, video) riproducibile sul necessario supporto;
  - Per ritornare al segnale fisico, occorre sottoporre i campioni ad un'operazione di interpolazione. La più semplice delle interpolazioni è quella lineare, ma che non serve al nostro scopo;
  - Dettagli sulle modalità di ritorno al segnale fisico verranno fornite in corsi successivi.
  - In un successivo capitolo di questo corso, verrà solo menzionata la condizione sul periodo di campionamento necessaria (e sufficiente) ad avere una rappresentazione credibile del segnale fisico, partendo dai suoi campioni.