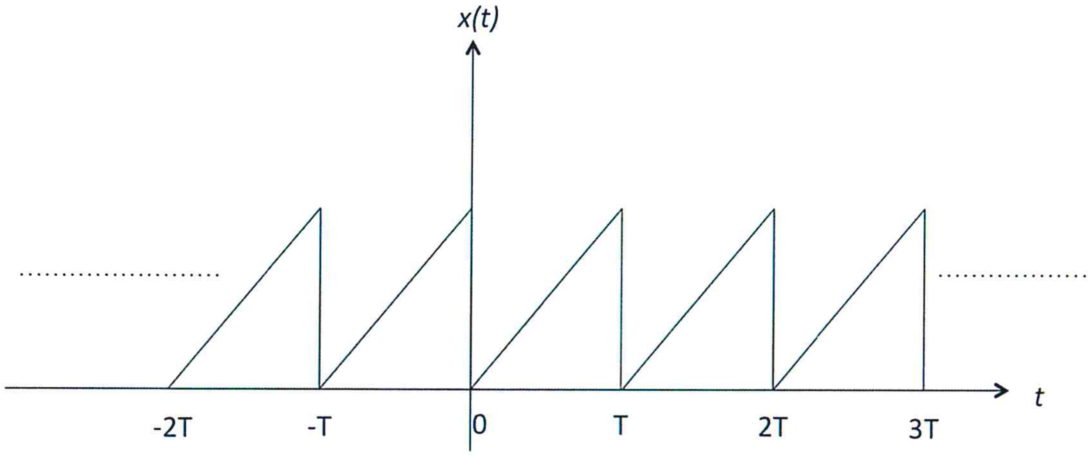
ESERCIZIO TEORIA DEI SEGNALI SU SERIE DI FOURIER DEL 14/11/2017

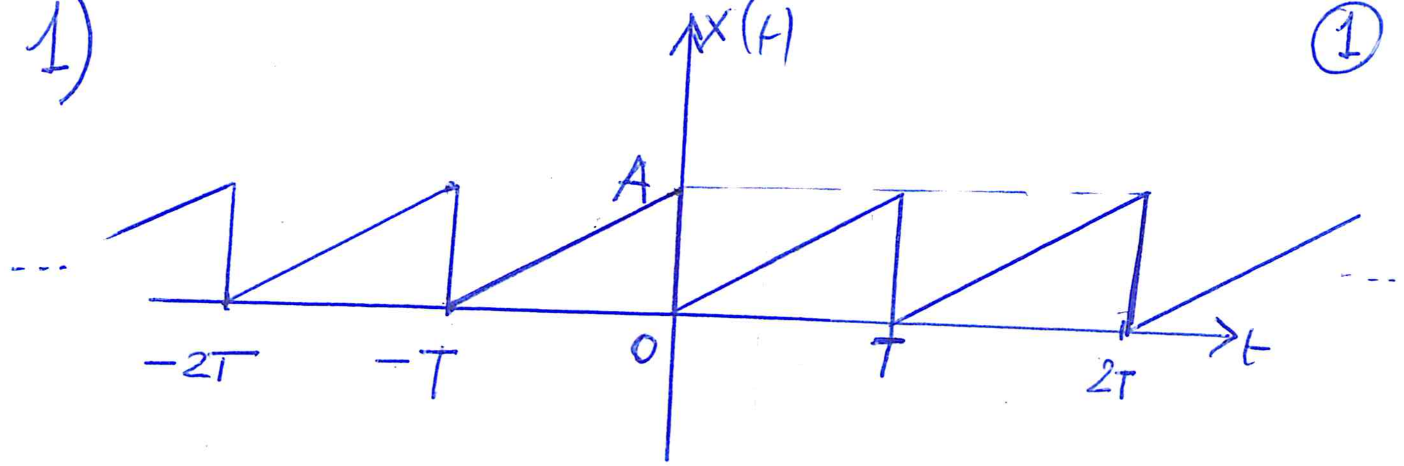
Sia dato il seguente segnale periodico di ampiezza A e periodo T:



Si richiede di:

1) Indicare, sulla base della simmetria hermitiana, se la serie di Fourier del segnale $x(t)$ è a coefficienti reali, immaginari o complessi;
2) Calcolare i coefficienti di Fourier della serie;
3) Calcolare lo spettro in ampiezza e lo spettro in fase del segnale $x(t)$.

1)



Il segnale periodico NON È SIMMETRICO. Infatti, si osserva che:

- $x(t) \neq x(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- $x(-t) \neq -x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Quindi la serie di Fourier è <u>complessa</u> ed i suoi coefficienti sono <u>complessi</u>.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{\frac{2\pi j k t}{T}}$$

2) Calcolo coefficienti di Fourier. Si applica la formula "classica":

$$X_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-j\frac{2\pi t}{T}k}\, dt$$

$$\underset{t\in[0,T)}{x(t)} = \frac{At}{T}$$

Quindi: ②

$$X_K = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{At}{T} e^{-\frac{2\pi j K t}{T}} dt =$$

$$= \frac{A}{T^2}\int_0^T t\, e^{-\frac{2\pi j K t}{T}} dt$$

poniamo: $\alpha = \frac{2\pi j K t}{T}$ $\quad dt = d\alpha \frac{T}{2\pi j K}$

$t = \frac{\alpha T}{2\pi j K}$ $\quad$ (OK, per $\underline{\underline{K \neq 0}}$)

L'integrale diventerà:

$$X_K = \frac{A}{\cancel{T^2}}\int_0^{2\pi j K} \frac{\alpha \cancel{T}}{2\pi j K}\frac{\cancel{T}}{2\pi j K} e^{-\alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{A}{(2\pi j K)^2}\int_0^{2\pi j K} \alpha e^{-\alpha} d\alpha$$

$$\int \alpha e^{-\alpha} d\alpha = -e^{-\alpha}(\alpha+1)$$ da cui:

$$X_k = \frac{A}{\cancel{f}(2\pi k)^2}\left[\cancel{f}e^{-\alpha}(\alpha+1)\right]\Bigg|_0^{2\pi jk} =$$

$$= \frac{A}{(2\pi k)^2}\left[e^{-2\pi jk}(2\pi jk+1)-1\right] \quad (k\neq 0)$$

$$e^{-2\pi jk} = \underbrace{\cos(2\pi k)}_{=1} - j\,\underbrace{\mathrm{sen}(2\pi k)}_{=0} \equiv 1$$

Quindi:

$$X_k = \frac{A}{(2\pi k)^2}\left[(2\pi jk+1)-1\right] =$$

$$= \frac{A}{(2\pi k)^2}\left[2\pi jk\right] = +j\frac{A}{(2\pi k)} \quad (k\neq 0)$$

per $\underline{\underline{k=0}}$ $X_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{At}{T}\,dt = \frac{A}{T}\int_0^T t\,dt =$

$$= \frac{At^2}{2T}\Bigg|_0^T = \frac{A}{2}$$ (che è quanto ci aspettiamo)

$$X_k = \begin{cases} j\dfrac{A}{(2\pi k)} & k \neq 0 \\ A/2 & k = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2\pi j k t/T}$$ (serie complessa)

3) Spettro in ampiezza:

$$|X_k| = \begin{cases} \dfrac{A}{|2\pi k|} & k \neq 0 \\ A/2 & k = 0 \end{cases}$$

Spettro in fase

$$\angle X_k = \begin{cases} -\pi/2 & k < 0 \\ 0 & k = 0 \\ \pi/2 & k > 0 \end{cases}$$