



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria  
e Scienza dell'Informazione

# Teoria dei Segnali

Parte Seconda: Fondamenti di elaborazione dei segnali

Lezione 3: Rappresentazione in frequenza di segnali deterministici non periodici: la trasformata di Fourier (teoremi e calcolo di spettri)

*Docente: Prof. Claudio Sacchi*

# Contenuti

- Teorema della dualità;
- Teorema della convoluzione e del prodotto;
- Teorema della modulazione;
- Esempi di trasformate di Fourier notevoli;
- Segnali periodici e segnali campionati;
- Teorema di Parseval e calcolo della larghezza di banda di un segnale.

# Teorema della dualità

## ■ Trasformazione ed anti-trasformazione sono operazioni duali

- Si può notare facilmente che trasformazione ed anti-trasformazione di Fourier sono due operazioni molto simili, l'una differisce dall'altra solo per il segno del fasore interno:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi jft} dt \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

- Questa considerazione è alla base di un importante teorema, detto della dualità, la cui enunciazione non è semplicissima, ma la cui importanza è molto grande.

# Teorema della dualità

## ■ Enunciazione

- Dato un segnale  $x(t)$  che ammette trasformata di Fourier  $X(f)$  si ha che:

$$x(t) \rightarrow X(f) \Rightarrow X(t) \rightarrow x(-f)$$

- Quindi, se consideriamo la funzione  $X$ , nel dominio temporale, la sua trasformata di Fourier è la funzione  $x$ , nel dominio della frequenza e con inversione della scala.

# Teorema della dualità

## ■ Alcuni casi interessanti dove questo teorema è utile (1)

□ Nelle precedenti slide abbiamo affermato che:

$$1 \rightarrow \delta(f)$$

□ Utilizzando il teorema della dualità, possiamo calcolare la trasformata della delta di Dirac:

$$1 \rightarrow \delta(f) \Rightarrow \delta(t) \rightarrow 1 \quad \forall f$$

Ovviamente la costante 1 è una funzione pari ed il suo valore in  $-f$  è uguale a quello in  $f$

# Teorema della dualità

## ■ Alcuni casi interessanti dove questo teorema è utile (2)

- Si può anche calcolare la trasformata del fasore. Conoscendo la trasformata della delta di Dirac e considerando il teorema del ritardo abbiamo che:

$$\delta(t - t_0) \rightarrow 1 e^{-2\pi j f t_0} = e^{-2\pi j f t_0}$$

- Applicando la dualità:

$$e^{-2\pi j f_0 t} \rightarrow \delta(-f - f_0) = \delta(f + f_0) \quad e^{2\pi j f_0 t} \rightarrow \delta(f - f_0)$$

# Teorema della dualità

## ■ Alcuni casi interessanti dove questo teorema è utile (3)

- Ritornando al rettangolo, possiamo calcolare, tramite la dualità, la trasformata della funzione sinc:

$$x(t) = V_0 \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow X(f) = V_0 T \text{sinc}(fT) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0 \text{sinc}(tW) \rightarrow x(-f) = \frac{V_0}{W} \Pi\left(\frac{-f}{W}\right) = \frac{V_0}{W} \Pi\left(\frac{f}{W}\right)$$

Infatti, il  
rettangolo è una  
funzione pari

# Teorema della convoluzione e del prodotto

## ■ Enunciato

- Il teorema della convoluzione nel dominio della frequenza si enuncia così:

$$x(t) \rightarrow X(f) \quad y(t) \rightarrow Y(f) \Rightarrow (x * y)(t) \rightarrow X(f)Y(f)$$

- Quindi, la convoluzione, nel dominio della frequenza, diventa un prodotto di trasformate. Questo è un risultato fondamentale nell'elaborazione dei segnali e nelle telecomunicazioni;
- La dimostrazione segue nella prossima slide.

# Teorema della convoluzione e del prodotto

## ■ Dimostrazione del teorema:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{-1}[X_1(f) \cdot X_2(f)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f) X_2(f) e^{j2\pi ft} df = \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) e^{-j2\pi f\xi} d\xi \right] \cdot \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\eta) e^{-j2\pi fn} d\eta \right] \cdot e^{j2\pi ft} df = \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\eta) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t-\xi-\eta)} df \right] d\eta d\xi = \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\eta) \delta(t-\xi-\eta) d\eta \right] d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_2(t-\xi) d\xi = (x_1 * x_2)(t)\end{aligned}$$

che è proprio ciò che volevamo dimostrare!

# Teorema della convoluzione e del prodotto

## ■ Utilità del teorema

- Come abbiamo detto in precedenza, la convoluzione è un'operazione fattibile solo in pochi casi particolari;
- Se nel dominio del tempo la convoluzione è proibitiva, possiamo passare nel dominio della frequenza e studiare il prodotto delle due trasformate;
- Se siamo fortunati e riusciamo a tornare indietro con l'operazione di anti-trasformazione abbiamo risolto il problema, altrimenti, almeno possiamo studiare la convoluzione nel dominio della frequenza, ricavandone comunque informazioni utili.

# Teorema della convoluzione e del prodotto

## ■ Un esempio semplice (ma illuminante) (1)

- Supponiamo di avere le due seguenti funzioni definite nel dominio del tempo:

$$x(t) = A \operatorname{sinc}(W_1 t) \quad y(t) = B \operatorname{sinc}(W_2 t) \quad W_1 > W_2 \quad A > B$$

- Proviamo ad effettuare la loro convoluzione nel dominio del tempo:

$$z(t) = AB \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(W_1 t) \operatorname{sinc}(W_2(t - \alpha)) d\alpha$$

Integrale calcolabile utilizzando la funzione del seno integrale  
(che non ha un'espressione analitica definita, ma è nota solo attraverso i suoi valori numerici)

# Teorema della convoluzione e del prodotto

## ■ Un esempio semplice (ma illuminante) (2)

□ Ragioniamo, allora, nel dominio delle frequenze:

$$x(t) \rightarrow X(f) = \frac{A}{W_1} \Pi\left(\frac{f}{W_1}\right) \quad y(t) \rightarrow Y(f) = \frac{B}{W_2} \Pi\left(\frac{f}{W_2}\right)$$

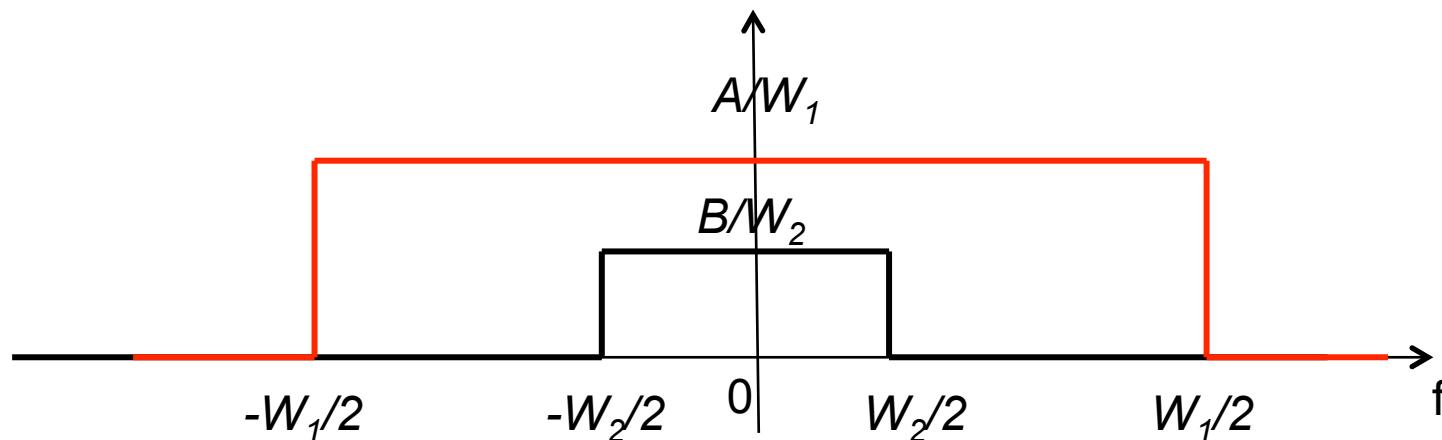
$$z(t) = (x * y)(t) \rightarrow Z(f) = X(f)Y(f) = \frac{AB}{W_1 W_2} \Pi\left(\frac{f}{W_1}\right)\Pi\left(\frac{f}{W_2}\right)$$

$z(t) \leftarrow Z(f)$  E' possibile? Esiste l'anti-trasformata di  $Z(f)$ ? La risposta è sì, ma ci vuole un po' di analisi "grafica" nel dominio delle  $f$

# Teorema della convoluzione e del prodotto

## ■ Un esempio semplice (ma illuminante) (3)

- Tracciamo gli spettri in ampiezza delle due funzioni convolute:



Il prodotto tra le due trasformate può essere effettuato in maniera grafica (come d'uso per le funzioni costanti a tratti) e si ottiene:

$$Z(f) = \frac{AB}{W_1 W_2} \Pi\left(\frac{f}{W_2}\right)$$

# Teorema della convoluzione e del prodotto

## ■ Un esempio semplice (ma illuminante) (4)

- Alla fine, si riesce a ritornare nel dominio del tempo:

$$z(t) = \frac{AB}{W_1} \text{sinc}\left(tW_2\right) \leftarrow Z(f) = \frac{AB}{WW_2} \Pi\left(\frac{f}{W_2}\right)$$

- Non tutti i casi sono, ovviamente, così favorevoli. Ma, come visto nella slide precedente, se non si può tornare indietro nel dominio del tempo, almeno si può sempre analizzare la convoluzione nel dominio della frequenza, osservando l'andamento di  $Z(f)$ .

# Teorema della convoluzione e del prodotto

## ■ Formulazione duale (teorema del prodotto)

□ La formulazione duale del teorema della convoluzione è la seguente:

$$x(t) \rightarrow X(f) \quad y(t) \rightarrow Y(f) \Rightarrow x(t)y(t) \rightarrow X(f)*Y(f)$$

□ Quindi, il prodotto di due funzioni ha come trasformata di Fourier, la convoluzione delle loro rispettive trasformate.

# Teorema della modulazione

## ■ Definizione di modulazione di una sinusoide

- Una sinusoide è detta modulata, se uno (o più) segnali alterano la sua ampiezza e/o la sua frequenza e/o la sua fase:

$$x(t) = A u(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad \text{Sinusoide modulata in ampiezza}$$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_\Delta u(t)) \quad \text{Sinusoide modulata in fase}$$

$$x(t) = A \cos(2\pi(f_0 + f_\Delta u(t))t + \varphi) \quad \text{Sinusoide modulata in frequenza}$$

# Teorema della modulazione

## ■ Teorema della modulazione (1)

- Supponiamo (per semplicità) di considerare una sinusoida modulata in ampiezza:

$$x(t) = A u(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Il segnale  $x(t)$  è dato dal prodotto di due segnali:

$$x(t) = u(t) \left[ A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \right]$$

# Teorema della modulazione

## ■ Teorema della modulazione (2)

- Per calcolare lo spettro di  $x(t)$  sfruttiamo il teorema del prodotto:

$$x(t) = u(t) \left[ A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \right] \rightarrow U(f) * \Im \left\{ A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \right\}$$

- Per calcolare la trasformata di Fourier del coseno, esprimiamolo con la formula di Eulero:

$$A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} \left[ e^{(2\pi j f_0 t + \varphi)} + e^{(-2\pi j f_0 t - \varphi)} \right] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{2\pi j f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-2\pi j f_0 t}$$

# Teorema della modulazione

## ■ Teorema della modulazione (3)

- Ricordandosi della trasformata del fasore e della linearità della trasformata di Fourier, si ottiene che:

$$\Im \left[ A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \right] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \Im \left[ e^{2\pi j f_0 t} \right] + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \Im \left[ e^{-2\pi j f_0 t} \right] = \\ = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + f_0) \quad \textit{Trasformata della sinusode generica}$$

# Teorema della modulazione

## ■ Teorema della modulazione (4)

□ A questo punto, ricordando una delle proprietà della delta di Dirac e la linearità della convoluzione, otteniamo lo spettro della sinusoide modulata in ampiezza:

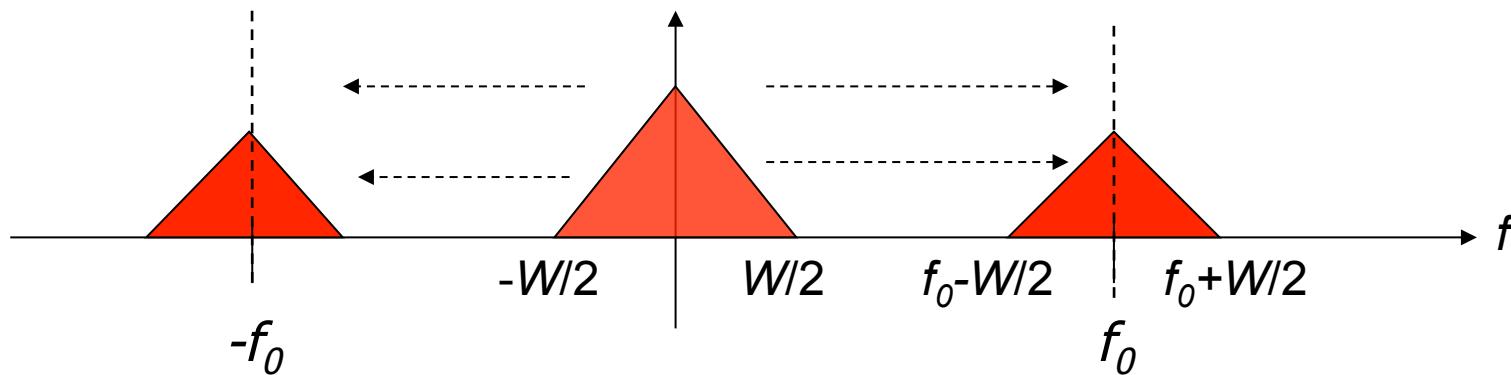
$$\begin{aligned} X(f) &= U(f)^* \Im\left\{ A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \right\} = \\ &= U(f)^* \left[ \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} e^{j\varphi} \delta(f - f_0) \right] = \\ &= \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \left[ U(f)^* \delta(f + f_0) \right] + \frac{A}{2} e^{j\varphi} \left[ U(f)^* \delta(f - f_0) \right] = \\ &= \frac{A}{2} e^{-j\varphi} U(f + f_0) + \frac{A}{2} e^{j\varphi} U(f - f_0) \end{aligned}$$

**RISULTATO FONDAMENTALE:**  
la modulazione di ampiezza trasla lo spettro del segnale modulante alla frequenza della sinusoide, che per questo è detta segnale portante.

# Teorema della modulazione

## ■ Teorema della modulazione (5)

- Supponiamo di avere un segnale  $u(t)$  il cui spettro ha banda limitata pari a  $W$ , se  $f_0 > W$ , la traslazione dello spettro è “rigida”:



**NOTARE:** le modulazioni in fase ed in frequenza effettuano una traslazione dello spettro, ma in maniera differente. La frequenza di portante  $f_0$  è anche detta radiofrequenza (RF) o banda traslata, in contrapposizione con la banda attorno alla continua, detta banda-base.

# Trasformate di Fourier notevoli

## ■ Trasformata della funzione triangolo

- La funzione triangolo è data dalla convoluzione di due rettangoli di uguale ampiezza e durata;
- La trasformata di Fourier del triangolo si calcola quindi applicando il teorema della convoluzione nel dominio della frequenza:

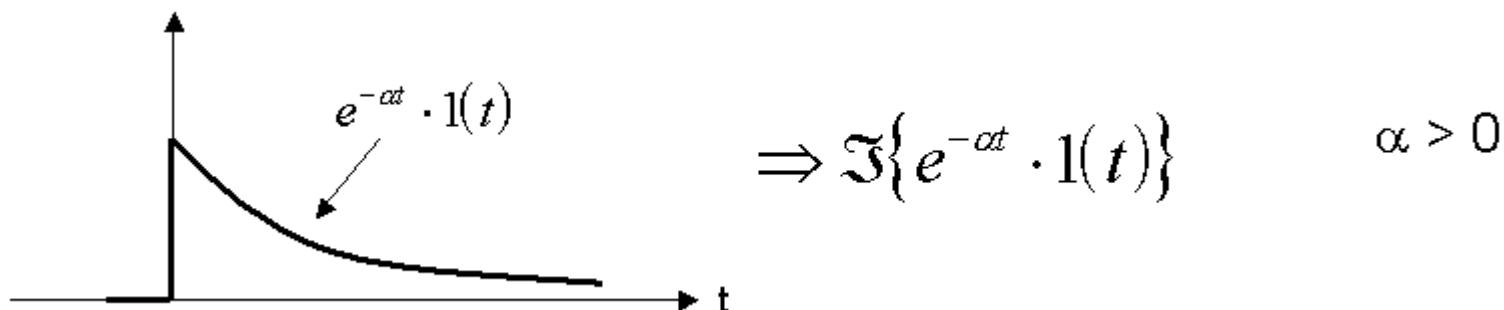
$$x_1(t) = \sqrt{\frac{A}{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad x_2(t) = \sqrt{\frac{A}{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\begin{aligned} [x_1(t) * x_2(t)] \hat{=} x(t) &= A \left( 1 - \frac{|t|}{T} \right) \Rightarrow X(f) = \sqrt{\frac{A}{T}} T \text{sinc}(fT) \sqrt{\frac{A}{T}} T \text{sinc}(fT) = \\ &= AT \text{sinc}^2(fT) \end{aligned}$$

# Trasformate di Fourier notevoli

## ■ Trasformata dell'esponenziale causale

- La funzione esponenziale causale ha la seguente espressione (ed andamento):



$$\Im\{e^{-\alpha t} \cdot 1(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+j2\pi f)t} dt =$$

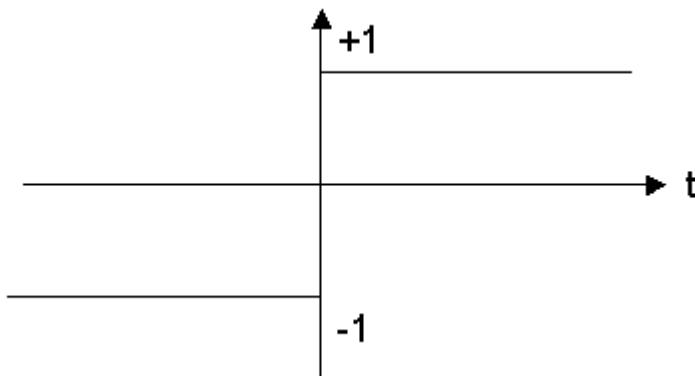
Calcolo trasformata  
di Fourier:

$$= -\frac{e^{-(\alpha+j2\pi f)t} \Big|_0^{+\infty}}{(\alpha + j2\pi f)} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

# Trasformate di Fourier notevoli

## ■ Trasformata della funzione segno

- La funzione “segno di  $t$ ” vale 1 se  $t$  ha segno positivo e -1 se  $t$  ha segno negativo



$$\text{sign}(t) \rightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

Il calcolo di questa trasformata non è banale e richiede un passaggio al limite sulla trasformata di un'altra funzione.

# Trasformate di Fourier notevoli

- **Trasformata del gradino di Heaviside**
  - Si calcola a partire dalla trasformata della funzione segno, applicando la linearità della trasformata di Fourier:

$$1(t) = \frac{1}{2} [sign(t) + 1] \rightarrow \frac{1}{2\pi j f} + \frac{1}{2} \delta(f)$$

- Da notare che questa trasformata, contrariamente a quella del segno non è puramente immaginaria, perché il gradino di Heaviside non presenta simmetrie particolari.

# Trasformate di Fourier notevoli

## ■ Trasformata della funzione pettine (1)

- Abbiamo precedentemente definito la funzione pettine o campionamento ideale la seguente funzione:

$$f_c(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c)$$

- Essendo un segnale periodico si può sviluppare in serie di Fourier:

$$f_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{2\pi j n t / T_c} \quad f_n = \frac{1}{T_c} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T_c}$$

# Trasformate di Fourier notevoli

## ■ Trasformata della funzione pettine (2)

- Operando la trasformata di Fourier sulla funzione sviluppata in serie otteniamo:

$$F_c(f) = \frac{1}{T_c} \Im \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j n t / T_c} \right] = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left( f - \frac{n}{T_c} \right)$$

- Quindi la trasformata della funzione pettine nel tempo è un pettine nel dominio della frequenza.
- Tanto più i denti del pettine sono tra loro vicini nel tempo, tanto più sono tra loro distanti nel dominio della frequenza.

# Trasformate di Fourier notevoli

## ■ Trasformata della funzione gaussiana

- Consideriamo una funzione gaussiana nel dominio del tempo:

$$g(t) = e^{-t^2/T^2}$$

- Calcoliamone la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/T^2} e^{-2\pi jft} dt = e^{-(\pi fT)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t/T - \pi jfT)^2} dt = \\ &= e^{-(\pi fT)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t/T)^2} dt = T e^{-(\pi fT)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = T\sqrt{\pi} e^{-(\pi fT)^2} \end{aligned}$$

Si tratta ancora di una Gaussiana (nel dominio della frequenza)

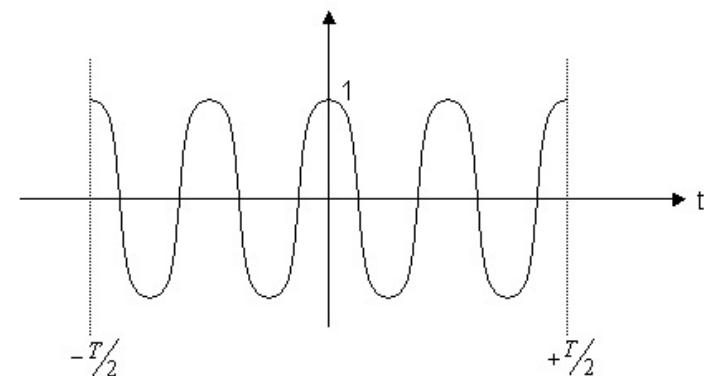
# Trasformate di Fourier notevoli

## ■ Impulso in radiofrequenza (1)

- E' un segnale molto importante, soprattutto nelle applicazioni radar:

$$x(t) = A \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t) \quad T \gg 1/f_0$$

- E' chiamato anche "coseno finestrato" perché limita il coseno (che ha durata infinita) entro una finestra temporale limitata di durata  $T$ ;



- Ci chiediamo qual è lo spettro del segnale sopra definito.

# Trasformate di Fourier notevoli

## ■ Impulso in radiofrequenza (2)

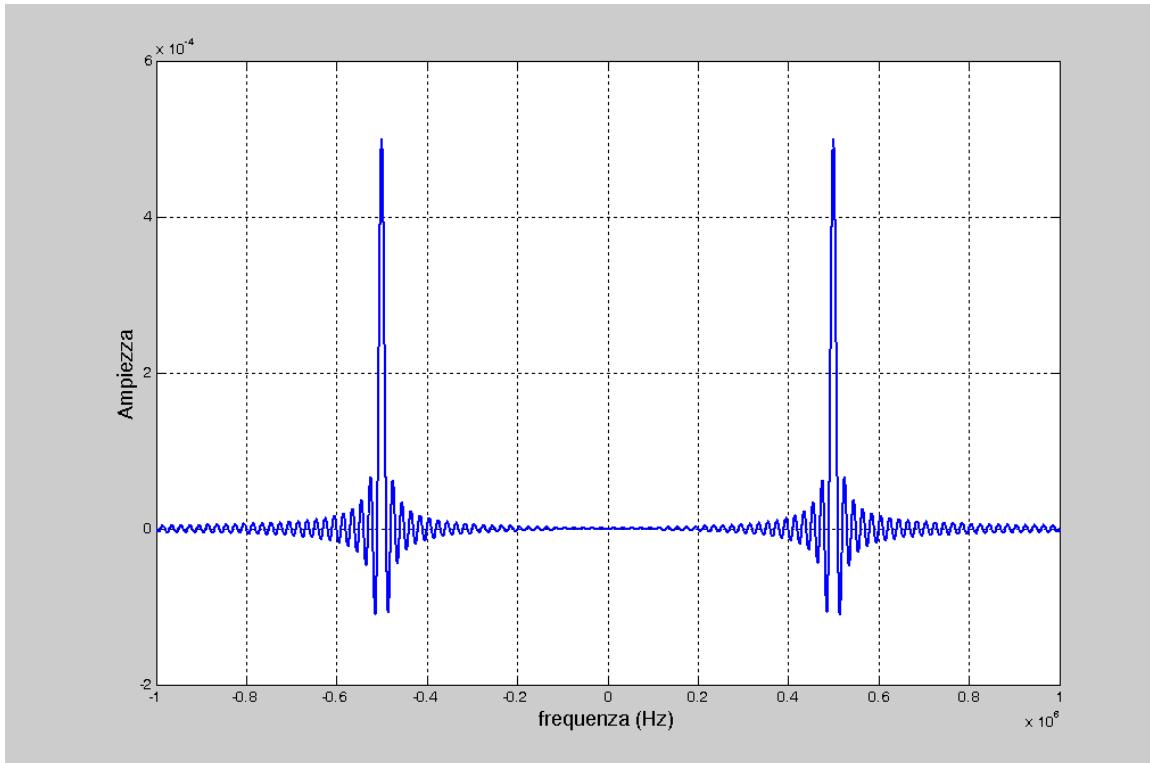
- Lo possiamo vedere come un rettangolo di altezza unitaria e durata  $T$  che modula una sinusoide di ampiezza  $A$  e fase nulla;
- Si applica, quindi, il teorema della modulazione e si ricava immediatamente lo spettro del segnale, che è reale (in quanto  $x(t)$  è reale e pari):

$$\left[ A \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right] \cos(2\pi f_0 t) \rightarrow \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}\left((f - f_0)T\right) + \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}\left((f + f_0)T\right)$$

# Trasformate di Fourier notevoli

## ■ Impulso in radiofrequenza (3)

- Analizziamo lo spettro per il caso usuale:



Esempio 1:

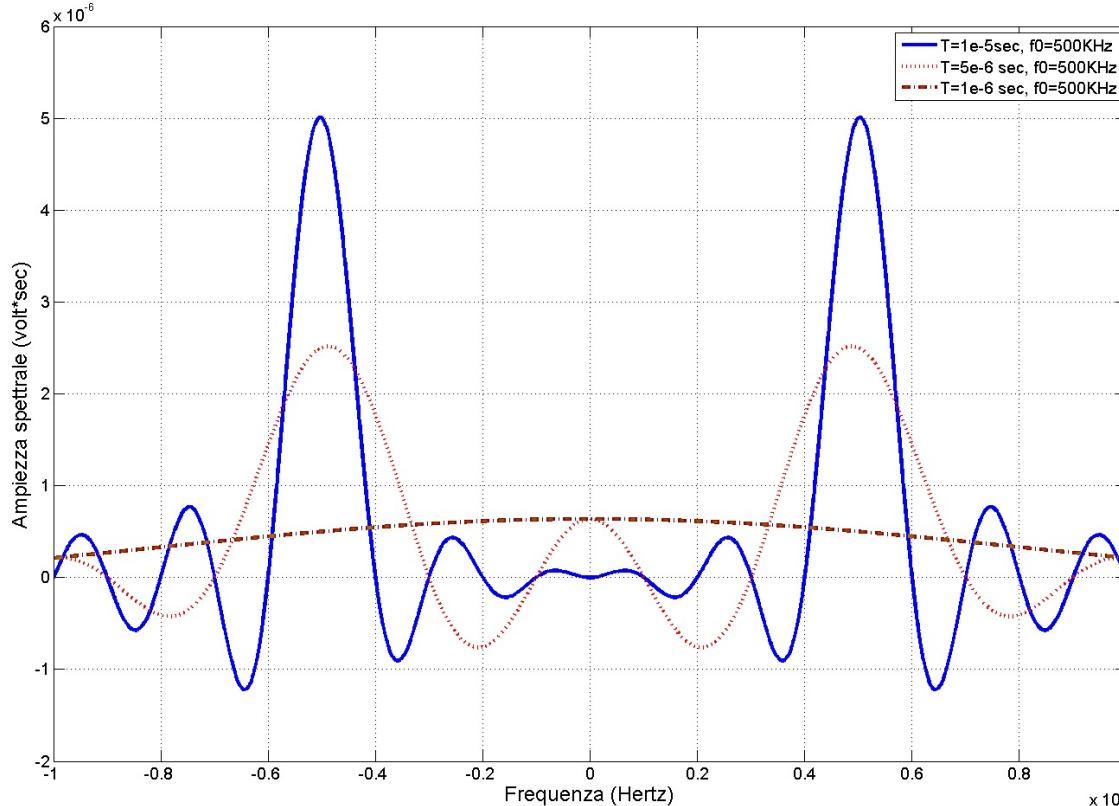
$T=0.2\text{msec}$

$f_0=500\text{KHz}$

# Trasformate di Fourier notevoli

## ■ Impulso in radiofrequenza (4)

- Analizziamo lo spettro quando  $T$  e  $1/f_0$  sono comparabili:



In questo caso le due “sinc” a frequenza  $+f_0$  e  $-f_0$  si sovrappongono in maniera notevole e lo spettro del segnale modulante (il rettangolo) non è più traslato rigidamente alla radiofrequenza (“sfondamento della continua”)

# Segnali periodici e segnali campionati

## ■ Spettro di un segnale periodico (con trasformata di Fourier)

- Noi abbiamo analizzato lo spettro del segnale periodico utilizzando la successione dei coefficienti della serie di Fourier;
- Ma, è possibile anche calcolare la trasformata di Fourier di un segnale periodico, vediamo come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(t - nT) = w(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \rightarrow$$
$$\rightarrow X(f) = W(f) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} W\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

# Segnali periodici e segnali campionati

## ■ Formula di Poisson

- Lo spettro del segnale periodico calcolato con la trasformata di Fourier origina quella che è chiamata formula di Poisson, di sotto mostrata:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(t - nT) \rightarrow X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} W\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

- Le righe spettrali (quelle della serie di Fourier) sono quindi ottenute campionando idealmente lo spettro della forma d'onda alle frequenze armoniche  $k/T$ .
- La periodizzazione della forma d'onda nel tempo, equivale quindi al campionamento della forma d'onda nel dominio della frequenza.

# Segnali periodici e segnali campionati

## ■ Spettro del segnale campionato (1)

- Supponiamo di avere, invece, il campionamento ideale di un segnale nel dominio del tempo:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c) \delta(t - kT_c)$$

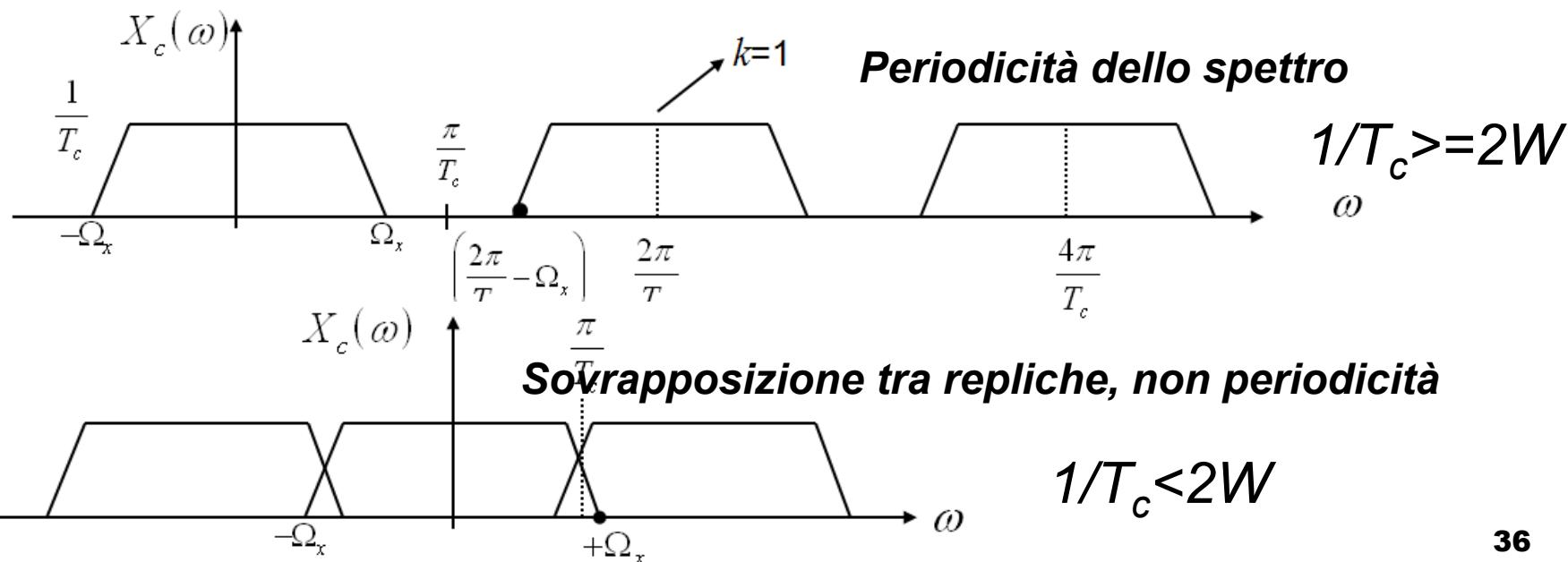
- Per il teorema della dualità, in frequenza dovremmo avere qualcosa di “periodico”. E’ vero? Verifichiamo con la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c) \delta(t - kT_c) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c) \rightarrow Y(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_c}\right) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta\left(f - \frac{n}{T_c}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_c}\right) \end{aligned}$$

# Segnali periodici e segnali campionati

## ■ Spettro del segnale campionato (2)

- Vediamo come è fatto lo spettro del segnale campionato, data  $W$  la banda del segnale  $x(t)$  sono possibili due situazioni:



# Segnali periodici e segnali campionati

## ■ Teorema di Nyquist – Shannon

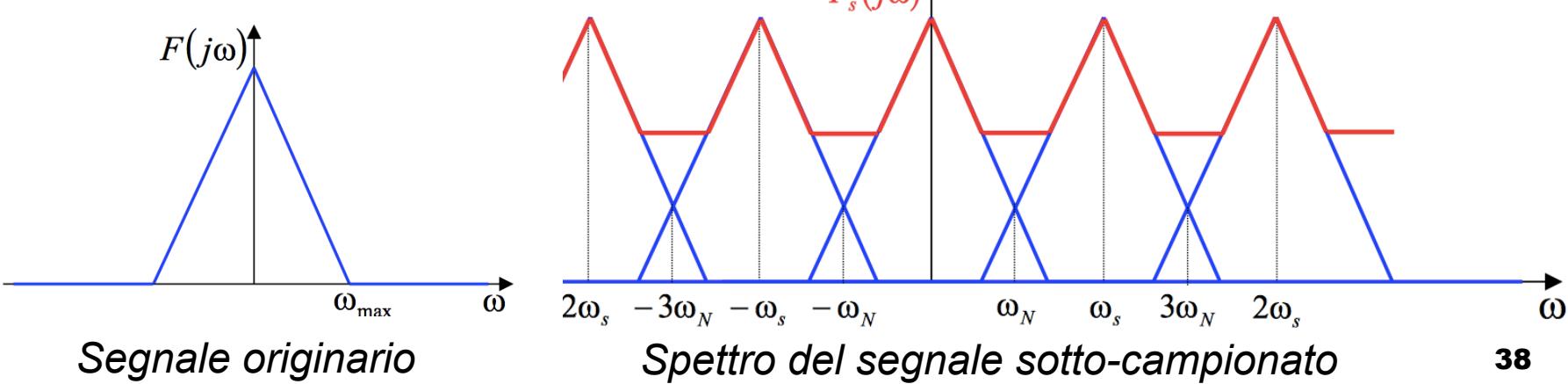
□ Lo enunciamo nel dominio del tempo e lo dimostriamo in quello delle frequenze, il teorema dice:

- Sia dato un segnale  $x(t)$  di larghezza di banda pari a  $W$ , campionato con frequenza pari a  $f_c = 1/T_c$ . È possibile ricostruire il segnale interpolando i suoi campioni se e solo se  $f_c \geq 2W$ . La funzione di interpolazione che consente la ricostruzione ideale è di seguito data:

$$f_{\text{int}}(t) = \text{sinc}(2Wt) \quad (\text{funzione di interpolazione di Whittaker-Shannon})$$

# Segnali periodici e segnali campionati

- **Teorema di Nyquist – Shannon sul campionamento (dimostrazione) (1)**
  - Se  $f_c < 2W$  non abbiamo la replicazione periodica dello spettro del segnale originario, pertanto lo spettro del segnale campionato non conterrà più lo spettro del segnale originario in banda-base (vedi disegno sottostante), il quale va, invece, ad inglobare contenuti frequenziali che non gli appartengono (*aliasing*). Pertanto, la ricostruzione diviene impossibile causa distorsione;



# Segnali periodici e segnali campionati

## ■ Teorema di Nyquist – Shannon sul campionamento (dimostrazione) (2)

- Dimostriamo quanto affermato sull'interpolazione, partendo dall'operazione di interpolazione medesima:

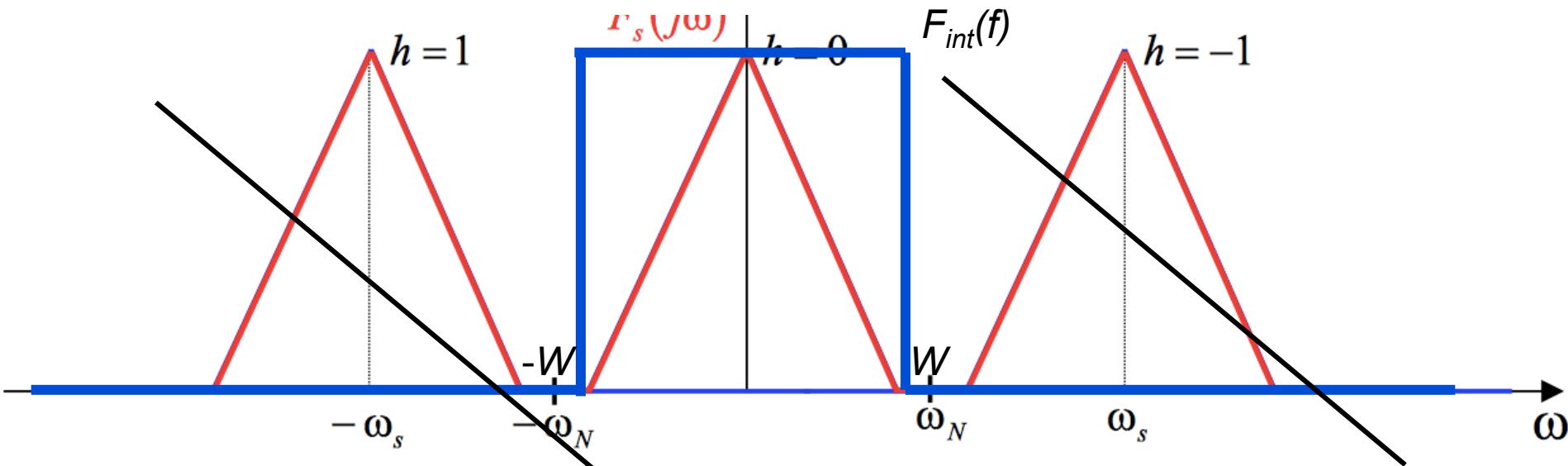
$$x_{ric}(t) = \left[ f_{\text{int}}(t)^* y(t) \right] \rightarrow X_{ric}(f) = F_{\text{int}}(f)Y(f) = \frac{1}{2WT_c} \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(t - \frac{n}{T_c}\right)$$

(interpolazione dei campioni)

- Dopodiché, risolviamo la moltiplicazione nel dominio delle frequenze per via grafica (SEGUE):

# Segnali periodici e segnali campionati

- Teorema di Nyquist – Shannon sul campionamento (dimostrazione) (3)



Tutti i contributi spettrali a destra ed a sinistra di  $+W$  e  $-W$  vengono azzerati (poiché  $F_{int}(f)$  vale identicamente zero fuori da tale intervallo)

# Segnali periodici e segnali campionati

## ■ Teorema di Nyquist – Shannon sul campionamento (dimostrazione) (4)

- Quindi, l'interpolazione con la funzione di Whittaker-Shannon lascia sopravvivere soltanto la replica dello spettro del segnale  $x(t)$  centrata in banda-base, ovvero il segnale originario che voglio ricostruire;
- La ricostruzione avviene in maniera perfetta per quel che riguarda la forma analitica del segnale, a parte la costante  $\frac{1}{2WT_c}$  che diviene pari ad 1 se  $T_c=1/2W$ .

CVD

# Teorema di Parseval – larghezza di banda

## ■ Energia nel dominio della frequenza

- Il teorema di Parseval vale anche nel caso di segnali aperiodici. La sua formulazione, in tal caso è la seguente:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$|X(f)|^2$  è detta densità spettrale di energia, poiché rappresenta la distribuzione dell'energia del segnale nel dominio della frequenza

# Teorema di Parseval – larghezza di banda

## ■ Calcolo della larghezza di banda

- La larghezza di banda di un segnale, ovvero l'intervallo di frequenze per le quali il segnale assume valori (spettrali) non nulli, non è detto che sia sempre un numero finito;
- Infatti, come abbiamo già detto, segnali a durata finita hanno banda infinita e viceversa;
- Tuttavia, è sempre indispensabile quantificare in qualche modo la larghezza di banda di un segnale con un numero, anche quando questa è teoricamente infinita;
- Ci si affida ad un criterio energetico, basato sul teorema di Parseval.

# Teorema di Parseval – larghezza di banda

## ■ Larghezza di banda

- Definiamo larghezza di banda di un segnale l'intervallo di frequenze entro le quali è contenuto almeno il 90% dell'energia del segnale medesimo;
  
- In molte applicazioni si considera il 99% dell'energia del segnale per calcolare la larghezza di banda. Anche noi considereremo questo valore più restrittivo, ma anche più attendibile.

# Teorema di Parseval – larghezza di banda

## ■ Come si calcola?

- Lo vediamo per il caso aperiodico (nel caso periodico, si applica lo stesso criterio, con l'uguaglianza di Bessel-Parseval);
- La banda del segnale  $W$  del segnale  $x(t)$  è calcolata nella seguente maniera:

$$W : \int_{-W}^{+W} |X(f)|^2 df = 0.99 E_x$$

# Teorema di Parseval – larghezza di banda

## ■ Esempio del rettangolo (1)

- Un rettangolo è il tipico segnale a larghezza di banda infinita. Tuttavia, possiamo calcolare una larghezza di banda finita del rettangolo usando il precedente criterio:

$$W_{rect} : \int_{-W_{rect}}^{+W_{rect}} (AT)^2 \operatorname{sinc}^2(fT) df = 0.99 E_{rect} = 0.99 A^2 T$$

# Teorema di Parseval – larghezza di banda

## ■ Esempio del rettangolo (2)

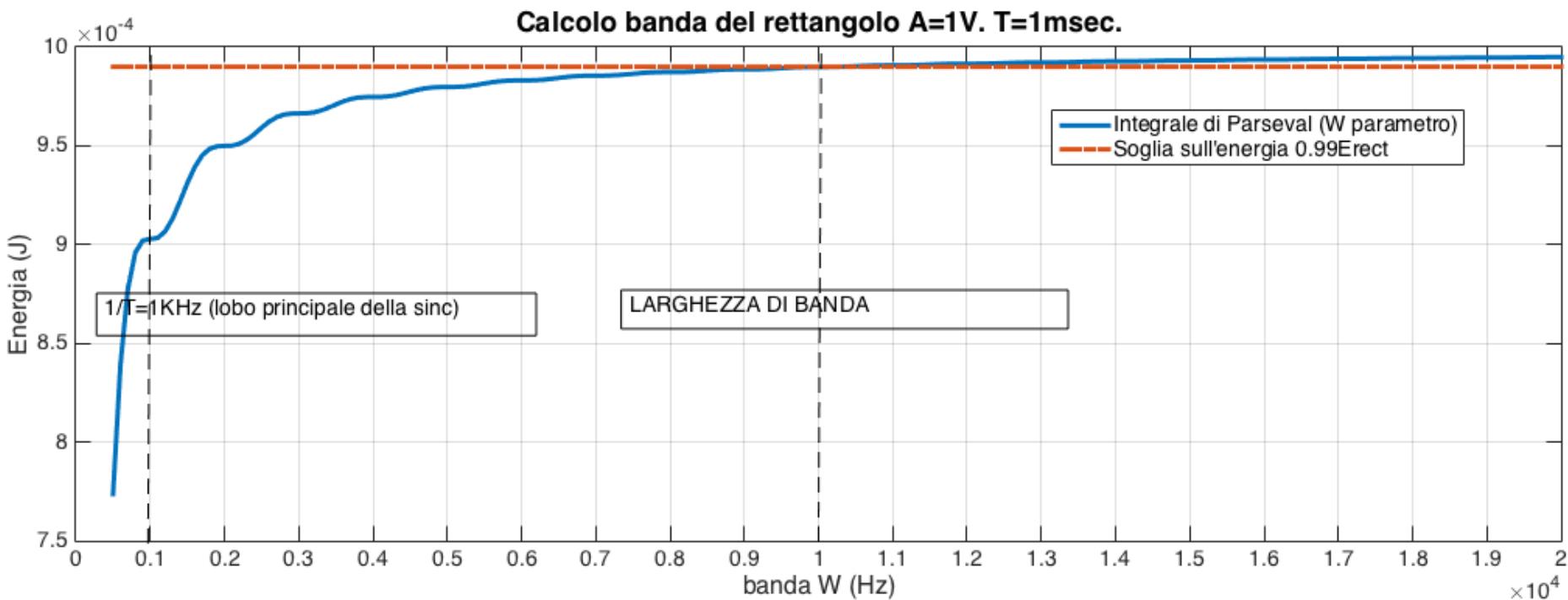
- Calcoliamo l'integrale, servendoci di qualche tabella di integrali “strani”:

$$\int_{-W_{rect}}^{+W_{rect}} (AT)^2 \operatorname{sinc}^2(fT) df = A^2 T \frac{(2\pi fT) \operatorname{Si}(2\pi fT) + \cos(2\pi fT) - 1}{(2\pi^2 fT)}$$

- E grazie a MATLAB, andiamo a plottare l'equazione della slide precedente onde effettuare una risoluzione grafica.

# Teorema di Parseval – larghezza di banda

## ■ Esempio del rettangolo (3)



# Teorema di Parseval – larghezza di banda

- **Esempio del rettangolo (4)**
  - Facciamo alcune considerazioni su quanto abbiamo plottato:
    - Nel lobo principale dello spettro del rettangolo (quello che si annulla in  $1/T$ ) sta circa il 90% dell'energia del segnale (1KHz nel grafico);
    - Il 99% dell'energia del segnale sta in una larghezza di banda pari a circa  $10/T$ , ovvero 10 volte la larghezza del lobo principale dello spettro: questa è la banda del rettangolo, secondo il nostro criterio energetico (10 KHz nel grafico).