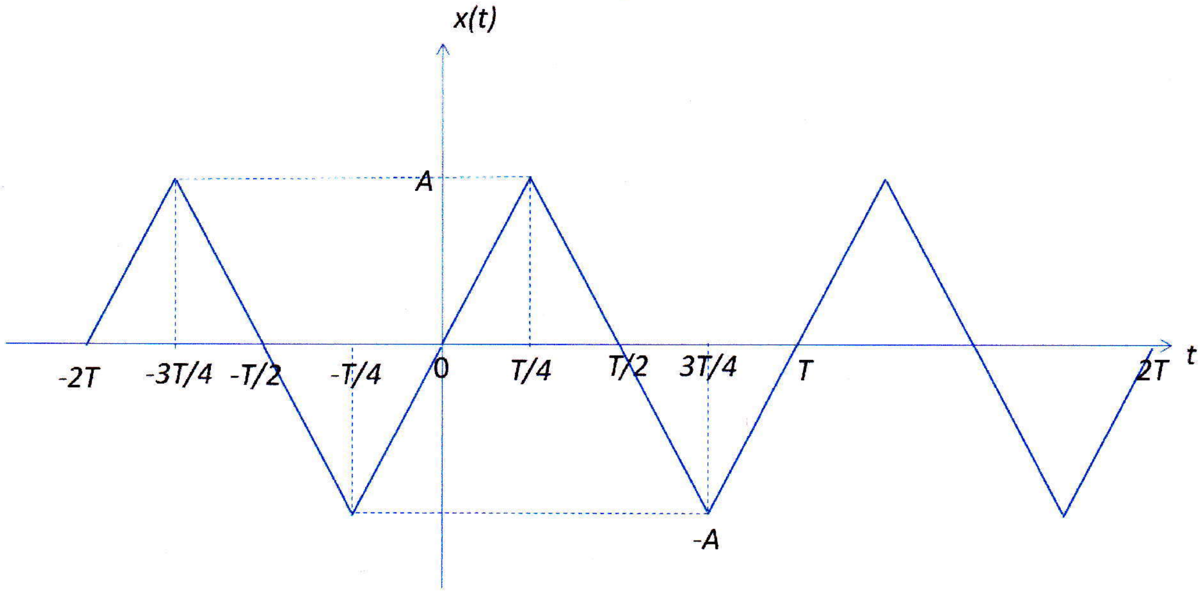
CORSO DI MODELLI STOCASTICI PER L'INGEGNERIA – ANNO ACCADEMICO 2012-2013: ESERCIZI SU RAPPRESENTAZIONE IN FREQUENZA DI SEGNALI E SISTEMI LTI

Esercizio 1

Sia dato il segnale periodico (periodo T = 1.25 μsec) mostrato in figura:



L'ampiezza A del segnale è 0.25 mV. Sotto queste ipotesi, si richiede di:

1) Calcolare l'energia del segnale all'interno del singolo periodo;
2) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale *x(t)* e disegnare un andamento di massima del suo spettro in ampiezza.

Si supponga di mandare in ingresso il segnale *x(t)* ad un sistema lineare e tempo-invariante la cui risposta all'impulso *h(t)* è la seguente:

$$h(t) = \exp\left(-\pi\left(\frac{t}{T_1}\right)^2\right)$$

T_1 è pari a 0.1 msec. Sotto queste (nuove) ipotesi è richiesto di:

3) Ricavare un andamento di massima del segnale *y(t)* uscente dal sistema di cui sopra.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema LTI (vedi Fig. 1), che genera un'uscita *y(t)* a partire dal segnale di ingresso *u(t)*. I valori delle costanti α, T_0 e T_1 verranno di seguito assegnati.

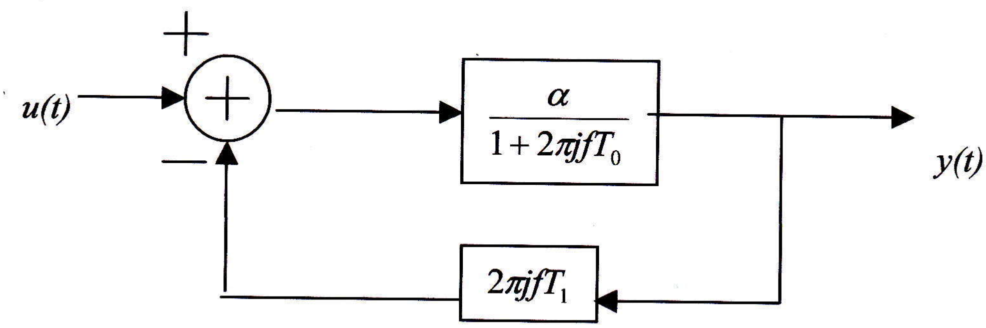
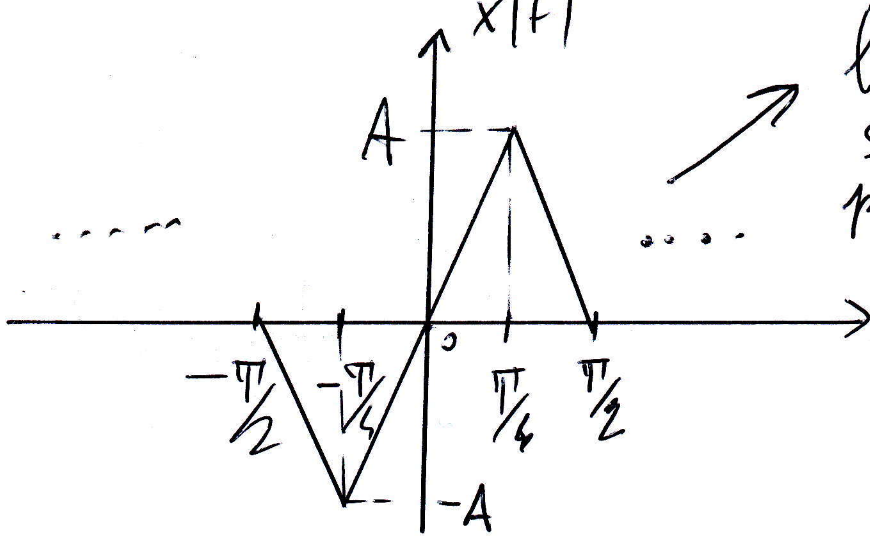


Figura 1

Sotto queste ipotesi si richiede di:

1. Calcolare la risposta in ampiezza del sistema descritto in Figura 1 e se ne disegni il grafico;
2. Calcolare la risposta in fase del sistema descritto in Figura 1 e se ne disegni il grafico;
3. Ponendo α=2, T_0=15 [μsec], T_1=125 [nsec] e supponendo che l'ingresso sia dato dal seguente segnale: $u(t) = A\mathrm{sinc}(tW)$ ove A=1[V] e W=10 [KHz], si ricavi l'espressione analitica dello spettro di densità di energia del segnale *y(t)* prodotto in uscita dal sistema di Figura 1;
4. Si calcoli, infine, il valore dell'energia del segnale *y(t)*.

DOMANDA 1



la T.D.F. sarà puramente immaginaria perché il segnale nel periodo è DISPARI!

Questo è il segnale nel periodo. Sono due triangoli di durata pari a $\pi/2$. Uno è centrato in $\pi/4$ e l'altro in $-\pi/4$.
Ma per calcolare l'energia, considerando tutte le simmetrie, è sufficiente fare:

$$E_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2(t)\,dt = 4\int_0^{\pi/4} x^2(t)\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/4}\left(\frac{4A}{\pi}t\right)^2 dt = \frac{4\cdot 16 A^2}{\pi^2}\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\cancel{64}A^2}{3\cancel{\pi^2}}\,\frac{\pi^{\cancel{3}}}{\cancel{64}} = A^2\pi/3 = \frac{(0.25\cdot 10^{-3})^2\cdot 1.25\cdot 10^{-6}}{3}\,[J]$$

$$E_x = \frac{6.25 \cdot 10^{-8} \cdot 1.25 \cdot 10^{-6}}{3} \simeq 2.6 \cdot 10^{-14} \ J$$

DOMANDA 2

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t-kT) = s(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

$$s(t) = A \, \Lambda\left(\frac{t-T/4}{T/4}\right) - A\left(\frac{t+T/4}{T/4}\right)$$

$$X(f) = S(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T)$$

$$S(f) = \frac{AT}{4} \operatorname{sinc}^2\left(f \frac{T}{4}\right) e^{-2\pi j f T/4} +$$

$$- AT/4 \operatorname{sinc}^2\left(f \frac{T}{4}\right) e^{2\pi j f T/4} =$$

$$= AT/4 \operatorname{sinc}^2\left(f T/4\right) \left[e^{-2\pi j f T/4} - e^{2\pi j f T/4} \right] =$$

$$= -\cancel{2} j \, \frac{AT}{\cancel{4} \, 2} \operatorname{sinc}^2\left(f T/4\right) \sin\left(\pi f T/2\right)$$

$$S(f) = -\frac{AT}{2} j \,\mathrm{sinc}^2\left(f\frac{T}{4}\right) \sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right) =$$

$$= -j \frac{AT}{2} \,\mathrm{sinc}^2\left(f\frac{T}{4}\right) \sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)$$

$$X(f) = \frac{1}{\cancel{T}} \left(-j \frac{A\cancel{T}}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right) \sin\left(\pi \frac{n}{2}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) =$$

$$= -j \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

puramente immaginaria! (CVD)

$$|X(f)| = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right| \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

(spettro a righe!)

$n=0$ (continua) ha ampiezza pari a 0 (come ci si poteva aspettare)
$(f=0)$

$n=1$ (fondamentale) ha ampiezza pari a $\frac{A}{2}\left|\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{A}{2}\left|\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{4}\right)\right|$
$\left(f=\frac{1}{T}\right)$

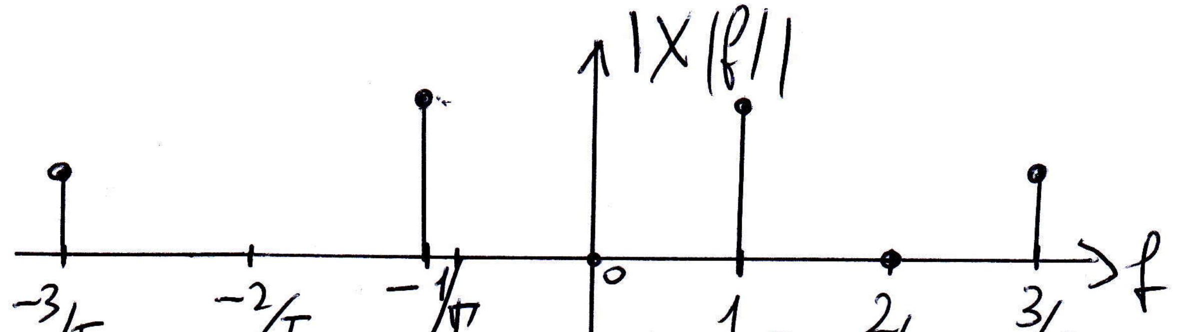
$\underline{n=2}$ armonica di ordine 2 ha ampiezza:

$\left(f=\frac{2}{T}\right)$ $$\frac{A}{2}\left|\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right)\sin(\pi)\right| = 0$$

(l'armonica di ordine 2 non c'è, come non ci sono tutte le armoniche di ordine pari poiché $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ n pari $\rightarrow \underline{\underline{=0}}$

$\underline{n=3}$ armonica di ordine 3 ha

$\left(f=3/T\right)$ ampiezza $$\frac{A}{2}\left|\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3}{4}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right| =$$
$$= \frac{A}{2}\left|\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3}{4}\right)\right|$$

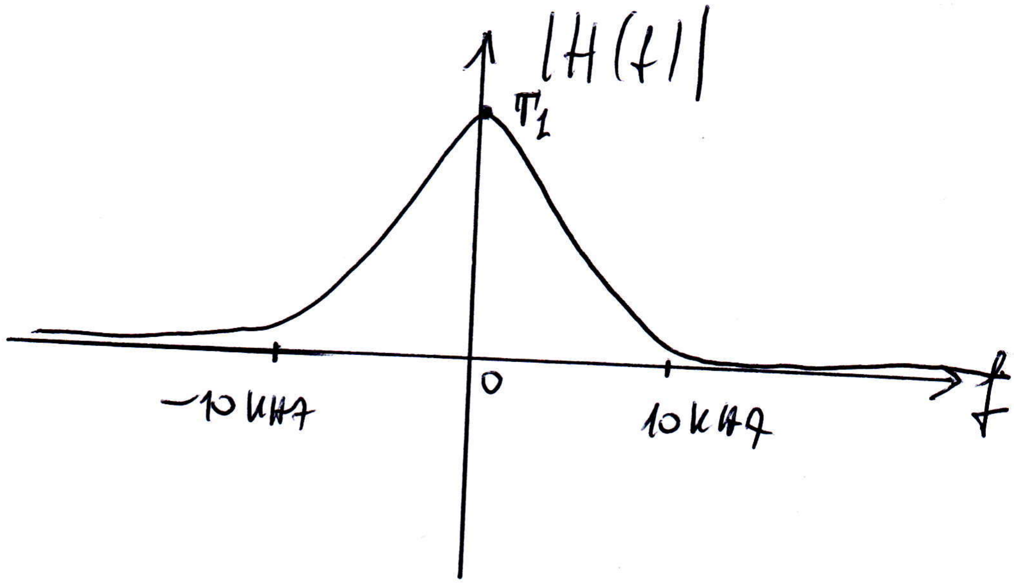


DOMANDA 3

$h(t)$ è una GAUSSIANA. La sua T.D.F. (vedi tabelle) è: $T_1 e^{-\pi(fT_1)^2}$ $T_1 = 10^{-4}$ sec.

$$H(f) = 10^{-4}\, e^{-\pi (f \cdot 10^{-4})^2}$$

È una "campana" che su $f = \pm 10$ KHz vale $T_1 e^{-\pi} = 0.0432\, T_1$



$$|Y(f)| = |H(f)|\,|X(f)|$$ → proviamo a fare "graficamente" questa moltiplicazione, tenendo conto che le armoniche di $X(f)$ sono a frequenze multiple di

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{1.25 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{1.25} = \underline{\underline{800\text{KHz}}}$$

Ci vuol poco (anche senza fare calcoli!) a pensare che TUTTO IL CONTENUTO ARMONICO DI $X(f)$ finirà nelle "code" della campana di Gauss. E quindi da quel "filtro" non passerà NIENTE! A parte, la CONTINUA, che però è NULLA. Quindi posso dire che:

$$y(f) \approx 0 \implies y(t) \cong 0$$

(sarà davvero trascurabile...)

Esercizio 2 - Domanda 1

$$H(f) = \frac{Y(f)}{V(f)} = \frac{\dfrac{\alpha}{(1+2\pi j f T_0)}}{1 + \dfrac{2\pi f j T_1 \alpha}{(1+2\pi j f T_0)}} =$$

(RISPOSTA IN FREQUENZA)

$$= \frac{\alpha}{(1+2\pi j f T_0)} \Big/ \frac{(1+2\pi j \alpha f T_1 + 2\pi j f T_0)}{(1+2\pi j f T_0)} =$$

$$= \frac{\alpha}{\cancel{(1+2\pi j f T_0)}} \cdot \frac{\cancel{(1+2\pi j f T_0)}}{1+2\pi j f(\alpha T_1 + T_0)} =$$

$$= \frac{\alpha}{(1+2\pi j f \tau)} \qquad \tau \triangleq (\alpha T_1 + T_0) =$$

$$= 2 \cdot 125 \cdot 10^{-9} + 15 \cdot 10^{-6}\ \text{sec} =$$

$$= 0.25 \cdot 10^{-6} + 15 \cdot 10^{-6} =$$

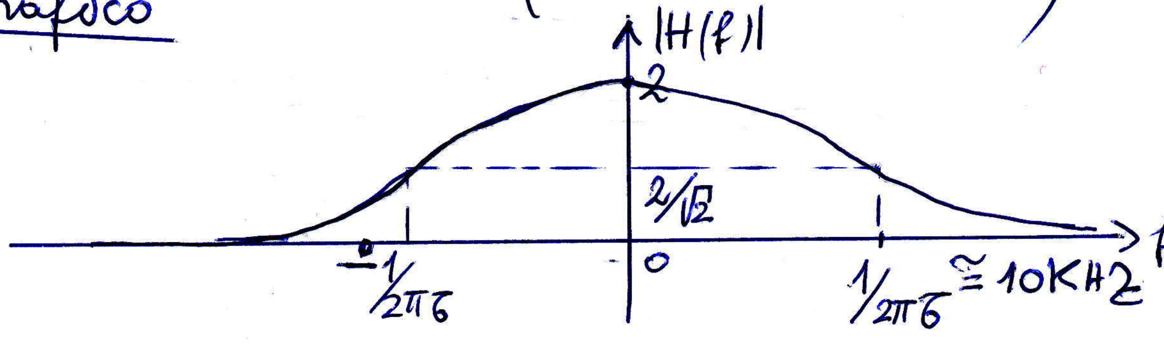
$$= 15.25\,[\mu\text{sec}]$$

È, sostanzialmente, un filtro passabasso simile ad un RC

$$|H(f)| = \left| \frac{\alpha}{1+2\pi j f \tau} \right| = \frac{\alpha}{\sqrt{1+(2\pi f \tau)^2}}$$

(RISPOSTA IN AMPIEZZA)

Grafico



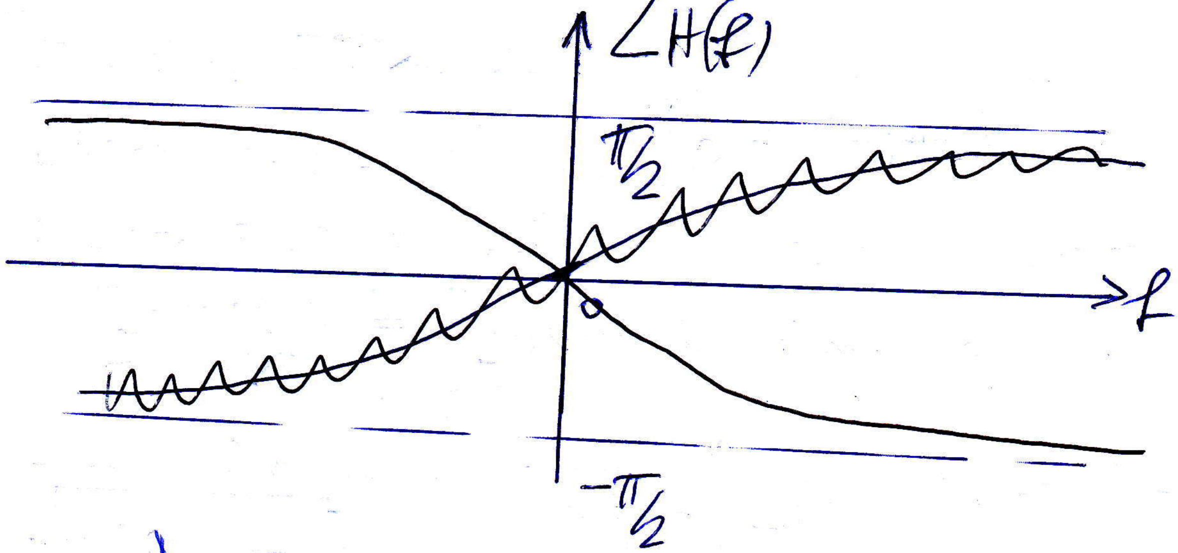
Esercizio 2 - Domanda 2

$$\angle H(f) = \arctan\left(\frac{Im(H(f))}{Re(H(f))}\right) =$$

= (per calcolarlo occorre ricavare Re e Im della risposta in frequenza)

$$H(f) = \frac{1 - 2\pi j f\tau}{1+(2\pi f\tau)^2} = \underbrace{\frac{1}{1+(2\pi f\tau)^2}}_{Re(H(f))} + j\underbrace{\frac{-2\pi f\tau}{1+(2\pi f\tau)^2}}_{Im(H(f))}$$

$$\angle H(f) = \arctan(-2\pi f\tau) = -\arctan(2\pi f\tau)$$



Esercizio 2 - Domanda 3

$$u(t) = A\,\mathrm{sinc}(tW) \Rightarrow U(f) = \frac{A}{W}\Pi\left(\frac{f}{W}\right)$$

$$Y(f) = \frac{\alpha}{(1+2\pi j f\tau)}\frac{A}{W}\Pi\left(\frac{f}{W}\right)$$

$$Y(f) = \begin{cases} \dfrac{\alpha A}{W(1+2\pi j f \tau)} & -W/2 \le f \le W/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$|Y(f)|^2 = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2 A^2}{W^2\left[1+(2\pi f \tau)^2\right]} & -\dfrac{W}{2} \le f \le \dfrac{W}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Esercizio } \cancel{2} \text{ – Domanda } 4}$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df \quad (\text{x il teorema di Rayleigh})$$

$$E_y = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{\alpha^2 A^2}{W^2} \frac{1}{1+(2\pi f \tau)^2} df =$$

$$= \frac{\alpha^2 A^2}{W^2} \int_{-W/2}^{W/2} \frac{1}{1+(2\pi f \tau)^2} df$$

$$2\pi f \tau = x \qquad df = \frac{1}{2\pi\tau} dx$$

$$E_y = \int_{-\pi w \tau}^{\pi w \tau} \left(\frac{1}{2\pi\tau}\,\frac{\alpha^2 A^2}{w^2}\right) \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{\alpha^2 A^2}{2\pi\tau w^2}\, \mathrm{atan}(x)\Big|_{-\pi w \tau}^{\pi w \tau} =$$

$$= \frac{\alpha^2 A^2}{\cancel{2}\pi\tau w^2}\, \cancel{2}\, \mathrm{atan}(\pi w \tau) = \frac{\alpha^2 A^2}{\pi \tau w^2}\, \mathrm{atan}(\pi w \tau)$$

sostituendo: $\cancel{E_y = \frac{4 \cdot 1}{3.14 \cdot 15.25 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{8}}\, \mathrm{atan}(3.14 \cdot 10^{4} \cdot 10)}$

$$E_y = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{3.14 \cdot 15.25 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{8}}\, \mathrm{atan}\left(3.14 \cdot 15.25 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{4}\right) =$$

$$= \frac{8 \cdot 10^{-4}}{95.77 \cdot 10^{2}}\, \mathrm{atan}\left(\pi \cdot 15.25 \cdot 10^{-2}\right) =$$

$$= \frac{8 \cdot 10^{-6}}{95.77}\, \mathrm{atan}\left(\frac{\pi \cdot 15.25}{100}\right)$$ si tratta di fare il calcolo esplicito

$$= 8 \cdot 10^{-6} / 95.77 \cdot 0.446 =$$

$$= \underline{\underline{3.73 \cdot 10^{-8}\ [J]}}$$