

Algoritmi Avanzati
Primo appello

Roberto Battiti

Paolo Campigotto

16 febbraio 2012

Istruzioni e regole:

Si usino unicamente una penna ed i fogli protocollo forniti dai docenti.

Si scriva subito il proprio nome su ciascun foglio e lo si firmi.

Segnare con chiarezza a quale quesito si sta rispondendo. Si scriva con chiarezza la propria risposta e si dimostrino i propri risultati. **(I risultati senza dimostrazione o spiegazione non verranno presi in considerazione).**

Un atteggiamento disonesto (come copiare) porterà all'espulsione immediata dall'aula.

Buon lavoro!

Esercizio 1

1.1) Dare la formulazione per un problema di programmazione lineare.

1.2) Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\text{minimize} \quad f(x_1, x_2) = 5x_1 + 8x_2 \quad (1)$$

subject to

$$x_1 \geq 2 \quad (2)$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 4 \quad (3)$$

$$4x_1 + x_2 \leq -1 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (5)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (6)$$

rispondere alle seguenti domande:

1. risolvere il programma lineare utilizzando il metodo grafico (mostrare i vincoli, il semplice, il gradiente e la soluzione ottima, qualora esista);
2. stabilire di quanto sia possibile aumentare il valore del termine noto del terzo vincolo senza compromettere l'ottimalità della soluzione ottima eventualmente trovata al punto precedente.

Esercizio 2

2.1) Dare la definizione di matrice definita positiva. Successivamente dimostrare che per ogni matrice A a rango colonna pieno, la matrice $A^T A$ è definita positiva.

2.2) Sia A^+ la matrice pseudoinversa di una generica matrice A a rango colonna pieno: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$. Dimostrare la seguente uguaglianza: $(AA^+)^T = AA^+$.

2.3) Dimostrare per induzione che il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della diagonale.

Esercizio 3

3.1) Dare la definizione di problema di ottimizzazione combinatoria.

3.2) Considerare il seguente problema di assegnamento.

Dati n lavori con tempi di esecuzione t_1, t_2, \dots, t_n , assegnare i lavori a m macchine in modo da minimizzare il tempo di esecuzione complessivo (ossia il tempo di esecuzione richiesto per completare *tutti* i lavori).

rispondere alle seguenti domande, **motivando** la propria risposta:

1. il problema di cui sopra e' un problema di ottimizzazione combinatoria (ossia soddisfa la definizione data al punto precedente)?
2. qual'e' la dimensione dello spazio di ricerca del problema?

3.3) Si scriva lo pseudocodice di un algoritmo di ricerca locale stocastica che risolva il problema descritto al punto precedente.

Nota bene: indicare chiaramente lo spazio di ricerca dell'algoritmo, la relazione di vicinanza, la fase di inizializzazione, la funzione obbiettivo ed il passo di ricerca locale stocastica compiuto ad ogni iterazione.

Esercizio 4

4.1) Si definisca il metodo della *trasformata veloce di Fourier* (FFT), spiegandone lo scopo e motivandone la logica.

4.2) Calcolare la trasformata discreta di Fourier del seguente polinomio utilizzando l'algoritmo per la trasformata veloce di Fourier (FFT):

$$A(x) = 5x^3 - 3x^2 + x - 4.$$

Mostrare con chiarezza i passi di esecuzione dell'algoritmo.

4.3) Siano ω_n^k , $k = 0, \dots, n-1$ le n -esime radici complesse dell'unita'. Dimostrare la seguente proprieta':

per ogni intero $n \geq 1$ ed intero k non divisibile per n ,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\omega_n^k)^i = 0$$

Esercizio 5

5.1) Definire il paradigma di ricerca locale ("local search") e ricerca sistematica ("systematic search"), spiegando i vantaggi dell'uno rispetto all'altro.

5.2) Definire i concetti di intensificazione e diversificazione di un algoritmo di ricerca locale stocastica ("stochastic local search").

5.3) Descrivere la tecnica "variable neighbourhood descent", dando lo pseudocodice dell'algoritmo ed indicando con chiarezza la porzione di pseudocodice che implementa la fase di intensificazione e la porzione di pseudocodice che realizza la fase di diversificazione della ricerca.