UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Ingegneria
e Scienza dell'Informazione

Teoria dei Segnali

Parte Seconda: Fondamenti di elaborazione dei segnali

Lezione 4: Rappresentazione in frequenza di sistemi LTI

Docente: Prof. Claudio Sacchi

Contenuti

- Motivazioni dell'analisi;
- Funzione di trasferimento di un sistema LTI;
- Composizione di funzioni di trasferimento;
- Esempio: il circuito RC;
- Banda passante di un sistema LTI;
- Introduzione al filtraggio di segnali deterministici.

Motivazioni dell'analisi

- **Introduzione**
  - Il formalismo tipico dell'elaborazione dei segnali studia un sistema LTI sulla base della sua risposta all'impulso;
  - Questo formalismo è molto elegante ed efficace: infatti considera il sistema attraverso un segnale (la risposta all'impulso, appunto) che caratterizza tutta la sua struttura interna;
  - Il problema è che il calcolo della risposta ad un segnale generico passa attraverso la convoluzione dell'ingresso con la risposta all'impulso: operazione quanto mai ostica.

Motivazioni dell’analisi

- **Perché nel dominio delle frequenze?**
  - La convoluzione, nel dominio delle frequenze, <u>diviene un prodotto </u>e quindi:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) \rightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

$$H(f) = \Im\left[h(t)\right] \quad X(f) = \Im\left[x(t)\right]$$

H(f) è detta <u>funzione di trasferimento</u> o <u>risposta in frequenza</u> del sistema LTI

Funzione di trasferimento di un sistema LTI

- **Significato fisico e signalistico (1)**
  - In pratica *H(f)* è una funzione che trasferisce all'uscita del sistema LTI l'energia del segnale di ingresso e, per questo, è detta funzione di trasferimento:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

  - E' invece detta risposta in frequenza perché effettivamente rappresenta la risposta del sistema LTI ad un fasore complesso (come viene mostrato di seguito):

$$y(t) = h(t) * e^{j2\pi ft} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{2\pi jf(t-\alpha)} d\alpha = e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{-2\pi jf\alpha} d\alpha$$

Funzione di trasferimento di un sistema LTI

- **Significato fisico e signalistico (2)**
  - Si definisce risposta in frequenza (talora indicata anche come <u>risposta armonica</u>) di un sistema LTI la seguente funzione:

$$H(f) \hat{=} \frac{y(t)}{e^{j2\pi ft}} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{-2\pi jf\alpha} d\alpha = \Im\left[h(t)\right]$$

H(f) è proprio <u>la trasformata di Fourier della risposta all'impulso del sistema</u>, come si evince dall'equazione soprastante.

Funzione di trasferimento di un sistema LTI

- **Risposta in ampiezza e risposta in fase**
  - Data la funzione di trasferimento (o risposta in frequenza a dir si voglia …) di un sistema LTI si definiscono <u>risposta in ampiezza</u>, <u>risposta in fase</u> e <u>ritardo di gruppo</u> le seguenti funzioni *reali*:

$$A(f) = \left| H(f) \right|$$ Risposta in ampiezza

$$\Phi(f) = \arg\left[H(f) \right]$$ Risposta in fase

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(f)}{df}$$ Ritardo di gruppo

Funzione di trasferimento di un sistema LTI

- **Guadagno in potenza del sistema LTI**
  - E' detto guadagno in potenza (o di energia) di un sistema LTI la seguente funzione *reale* della frequenza:

$$G(f) \triangleq |H(f)|^2$$

  - Si chiama così perché se ci ricordiamo il teorema di Parseval e calcoliamo la densità spettrale di energia dell'uscita del sistema LTI avremo che:

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2 = G(f)|X(f)|^2$$

Funzione di trasferimento di un sistema LTI

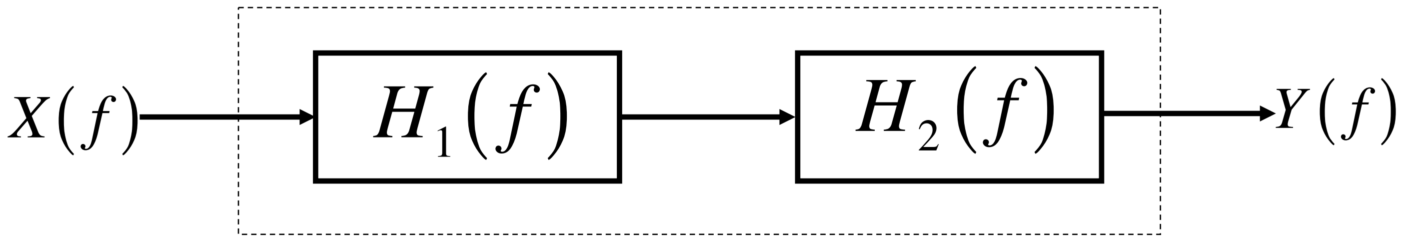
- **Guadagno in potenza in decibel**
  - Nei sistemi di uso ingegneristico, il guadagno di potenza è spesso misurato in decibel rispetto ad una frequenza di riferimento, ovvero:

$$G_{dB}(f) \triangleq 10\log_{10}\left\{\frac{|H(f)|^2}{|H(f_{rif})|^2}\right\} = 20\log_{10}\left\{\frac{|H(f)|}{|H(f_{rif})|}\right\}$$

In generale f_{rif} è scelto in corrispondenza del massimo della risposta in ampiezza.

Composizione di funzioni di trasferimento

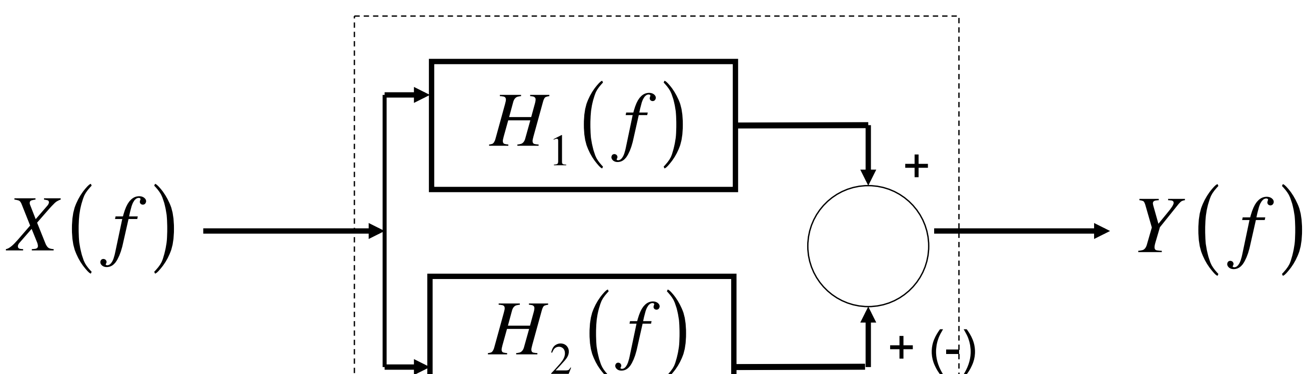
- **Sistemi LTI in cascata**
  - Se abbiamo due (o più) sistemi LTI in cascata, la funzione di trasferimento complessiva della cascata è data <u>dal prodotto delle funzioni di trasferimento</u> dei singoli sistemi LTI:



$$H_{tot}(f) = H_1(f)H_2(f)$$

Composizione di funzioni di trasferimento

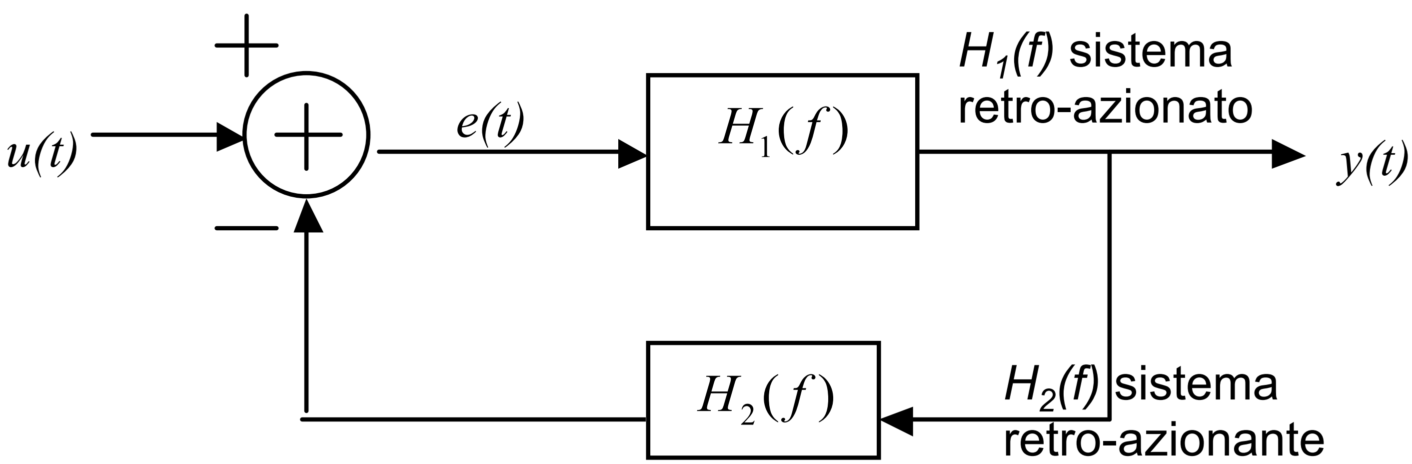
- **Sistemi LTI in parallelo**
  - Se abbiamo il parallelo di due (o più) sistemi LTI con somma (o differenza) dei contributi, la funzione di trasferimento complessiva <u>è data dalla somma (o differenza) delle funzioni di trasferimento</u>:



$$H_{tot}(f) = H_1(f) \pm H_2(f)$$

Composizione di funzioni di trasferimento

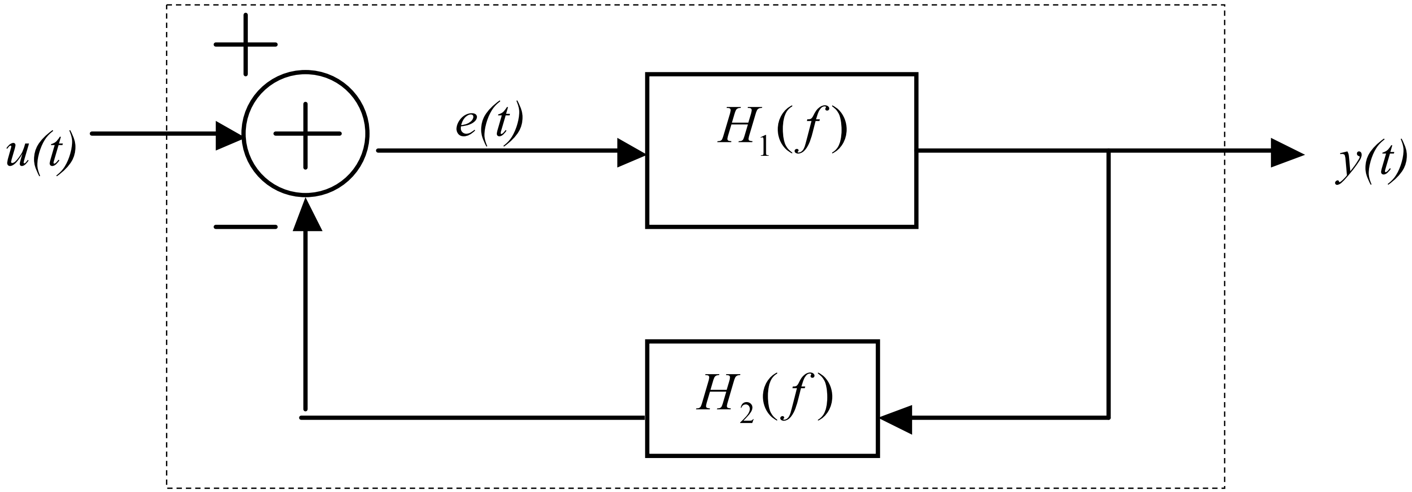
- **Sistemi LTI in retroazione (1)**
  - La retroazione di sistemi LTI ha molto interesse in discipline legate alla <u>regolazione automatica</u> ed al <u>controllo</u>:



<u>Esempio classico:</u> regolazione di una caldaia, retro-azionata dalla misura della temperatura ambiente.

Composizione di funzioni di trasferimento

- **Sistemi LTI in retroazione (2)**
  - Calcolo della funzione di trasferimento complessiva:



$$H_{tot}\left(f\right)=\frac{Y(f)}{U(f)}=\frac{H_1(f)}{1+H_1(f)H_2(f)}$$

Esempio: il circuito RC

- **Risposta all'impulso**
  - La risposta all'impulso del circuito RC è nota:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} 1(t)$$

  - Si tratta di un'esponenziale causale. Se ne può calcolare la trasformata di Fourier:

$$H(f) = \frac{1/RC}{1/RC + j2\pi f} = \frac{1}{1 + j\left(2\pi fRC\right)}$$

Esempio: il circuito RC

- **Risposta in ampiezza, risposta in fase e guadagno in potenza (1)**
  - La funzione di trasferimento (o risposta in frequenza) è quindi già calcolata:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j\left(2\pi fRC\right)}$$

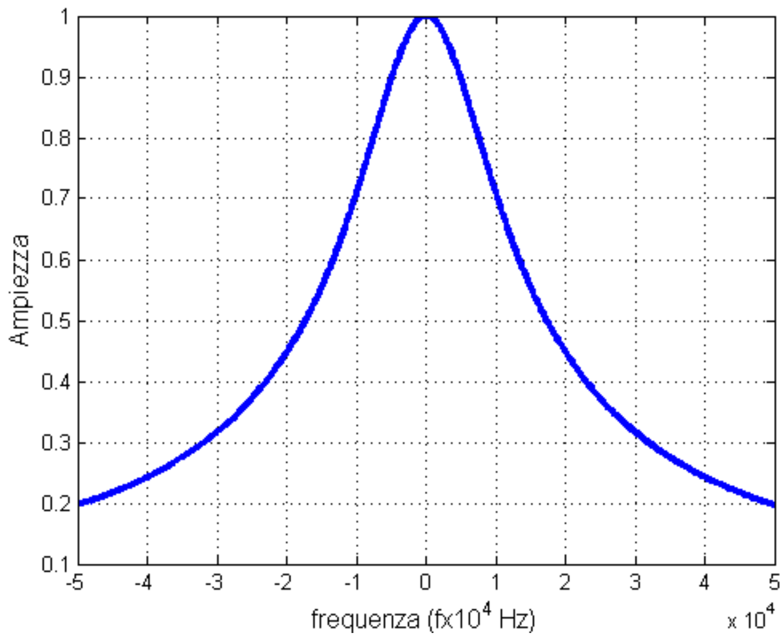
  - Se ne possono calcolare, quindi, risposta in ampiezza, risposta in fase e guadagno in potenza:

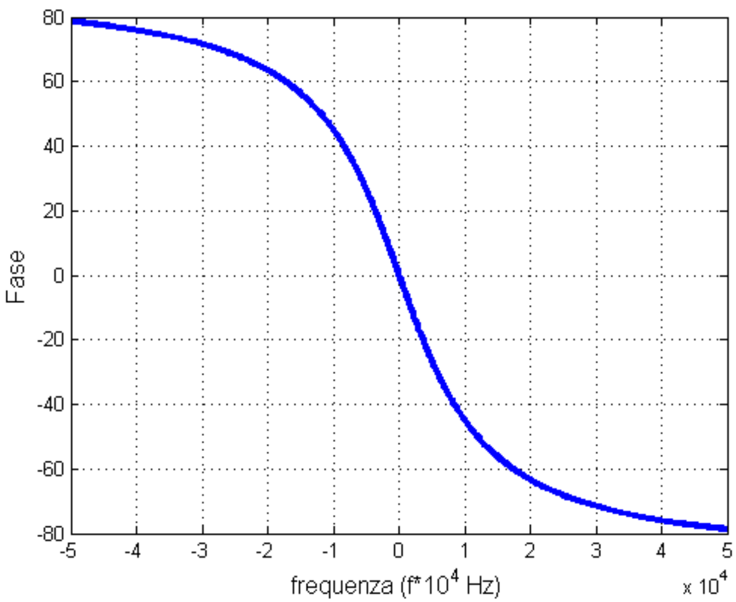
$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2\pi fRC\right)^2}} \qquad G(f) = \frac{1}{1 + \left(2\pi fRC\right)^2}$$

$$\Phi(f) = -\arctan\left(2\pi fRC\right)$$

Esempio: il circuito RC

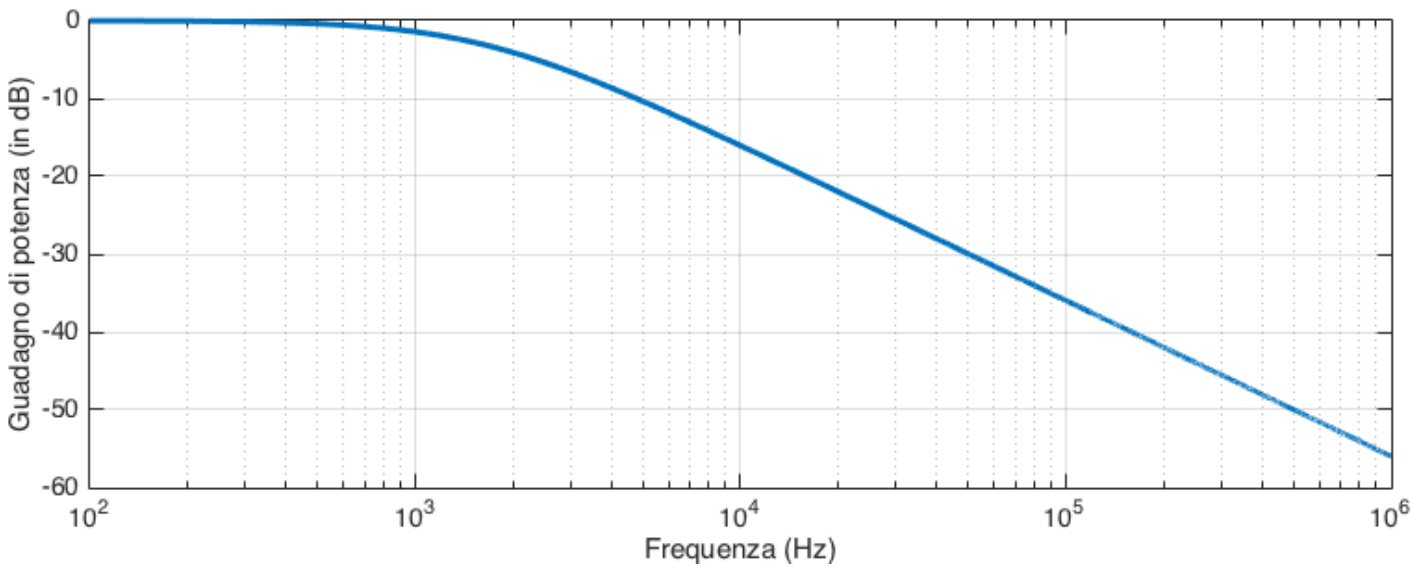
- **Risposta in ampiezza, risposta in fase e guadagno in potenza (1)**
  - Di seguito, forniamo i grafici della risposta in ampiezza e della risposta in fase (*RC*=0.1 msec):





Esempio: il circuito RC

- **Risposta in ampiezza, risposta in fase e guadagno in potenza (2)**
  - Interessante è <u>il guadagno in potenza</u> in dB rispetto al massimo, che è nella continua (f_{rif}=0):



Esempio: il circuito RC

- **Considerazioni sul sistema**
  - Il comportamento del guadagno in potenza del circuito RC è indicativo del fatto che tale sistema "mantiene" le frequenze del segnale in ingresso inferiori a circa 1 KHz;
  - Frequenze del segnale di ingresso superiori a 1KHz vengono "abbattute" e l'abbattimento diviene assai pesante per frequenze maggiori di 10KHz;
  - Quindi, questo circuito effettua un filtraggio del segnale in ingresso, salvandone le basse frequenze e tagliando le alte. E' chiamato, infatti, filtro RC.

Banda passante di un sistema LTI

- **Larghezza di banda di un sistema?**
  - Abbiamo parlato, finora, di larghezza di banda di un segnale. Ha senso parlare di “larghezza di banda di un sistema LTI?”
  - Sostanzialmente, un sistema LTI <u>è un oggetto che esegue operazioni su un segnale, alterandone lo spettro</u>;
  - La “larghezza di banda” di un sistema è comunemente definita come la porzione di spettro ove la risposta in frequenza del sistema LTI è “piatta”, <u>ovvero non altera significativamente lo spettro del segnale entrante</u>;
  - Per distinguerla dalla larghezza di banda di un segnale, tale larghezza di banda è detta <u>banda passante</u>.

Banda passante di un sistema LTI

- **Definizione formale di banda passante di un sistema LTI**
  - Si definisce formalmente banda passante di un sistema LTI la larghezza di banda che soddisfa la seguente condizione:

$$B_{pass}: \quad G_{dB}(f) \geq -3dB \quad \forall f : \left| f - f_{rif} \right| \leq B_{pass}$$

  - E' detta, per questo motivo, anche banda a 3dB, intendendo con 3dB la massima attenuazione in potenza che possiamo accettare (al di sotto, il sistema "taglia" frequenze e distorce).

Banda passante di un sistema LTI

- **Calcolo della banda passante del circuito RC (1)**
  - Può essere interessante calcolare la banda passante del circuito RC, impostando (e risolvendo) la seguente disequazione:

$$G_{dB}(f) = 10\log_{10}\left[\frac{1}{1+(2\pi fRC)^2}\right] \geq -3dB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+(2\pi fRC)^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \leq (2\pi fRC) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2\pi RC} \leq f \leq \frac{1}{2\pi RC}$$

Banda passante di un sistema LTI

- **Calcolo della banda passante del circuito RC (2)**
  - Poiché la frequenza di riferimento è f=0 (massimo valore della risposta in frequenza nella continua), la banda passante del circuito RC è calcolata come:

$$B_{pass} = \frac{1}{2\pi RC}$$

  - Sostituendo i numeri (ovvero RC = 0.1 msec) si ottiene:

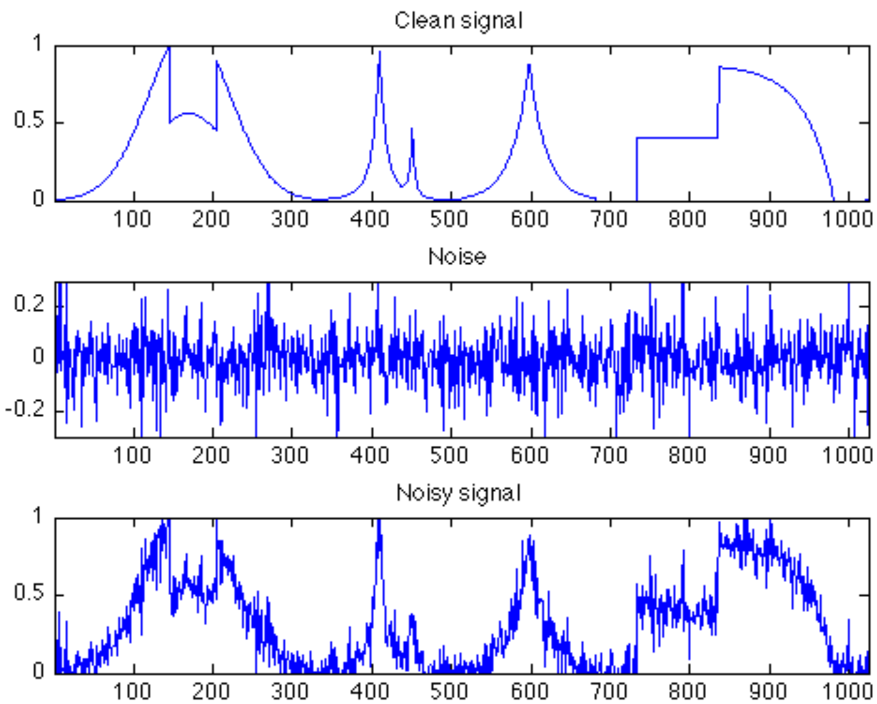
$$B_{pass} = \frac{10^4}{2\pi} = 1.59\,KHz$$

Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

- **Cosa vuol dire “filtrare” nell’elaborazione dei segnali**
  - Un filtro in idraulica è un oggetto che separa l’acqua dalle impurità allo stato solido;
  - Nell’elaborazione dei segnali, “l’acqua” è il segnale che noi desideriamo puro e pulito e le impurità sono segnali rumorosi che si sovrappongono ad esso nella sua larghezza di banda;
  - Il filtro, quindi, seleziona una parte dello spettro (dove si spera ci sia il nostro segnale) e ne rigetta un’altra, dove ci sono i disturbi.

Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

- **Esempio di segnale “sporco”:**
  - Prendiamo questo grafico:



Se il rumore fosse localizzato in un certo intervallo di frequenze, potrei pensare di “tagliarlo” con un filtro, sperando di non “uccidere” anche il segnale pulito.

Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

- **Filtro passabasso ideale**
  - Si tratta di un filtro che lascia intatte le componenti frequenziali del segnale localizzate intorno alla continua e rigetta totalmente le componenti al di fuori della sua banda passante;
  - Inoltre, ha risposta in fase lineare;
  - Un filtro di questo genere non può che avere la seguente funzione di trasferimento (LPF sta per “Low-Pass Filter”)

$$H_{LPF}\left(f\right)=\Pi\left(\frac{f}{2B_{pass}}\right)e^{-j2\pi f t_0}$$

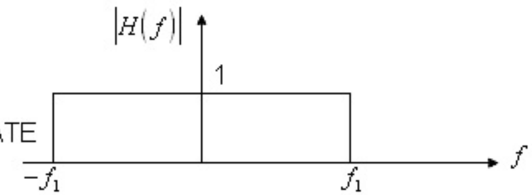
Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

- **Filtro passabasso ideale: risposta in ampiezza e risposta in fase**

$$A_{LPF}(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B_{pass}}\right)$$

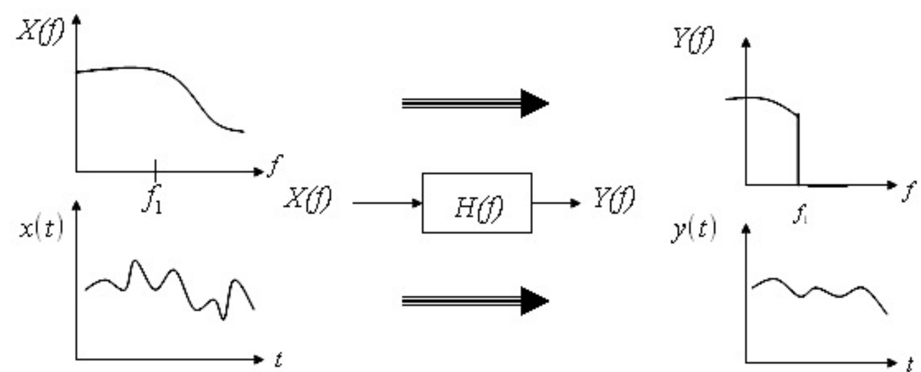
FREQUENZE $|f| < f_1$: PASSANO

FREQUENZE $|f| > f_1$: VENGONO TAGLIATE



$$\Phi_{LPF}\left(f\right) = -2\pi f t_0$$

ESEMPI :



$$h_{LPF}(t) = 2B_{pass}\,\mathrm{sinc}\left(2B_{pass}\left(t - t_0\right)\right)$$

Risposta all'impulso: <u>sistema non causale e quindi irrealizzabile</u>

Funzionamento ($B_{pass}=f_1$ nell'esempio)

Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

- **Filtro passa-alto ideale**
  - Si tratta di un filtro che lascia intatte le componenti frequenziali del segnale oltre la banda passante e rigetta totalmente le componenti attorno alla continua;
  - Inoltre, ha risposta in fase lineare;
  - E' quindi il complementare del filtro passabasso ideale. La sua risposta in frequenza sarà data da:

$$H_{HPF}(f) = \left[1 - \Pi\left(\frac{f}{2B_{pass}} \right) \right] e^{-j2\pi f t_0}$$

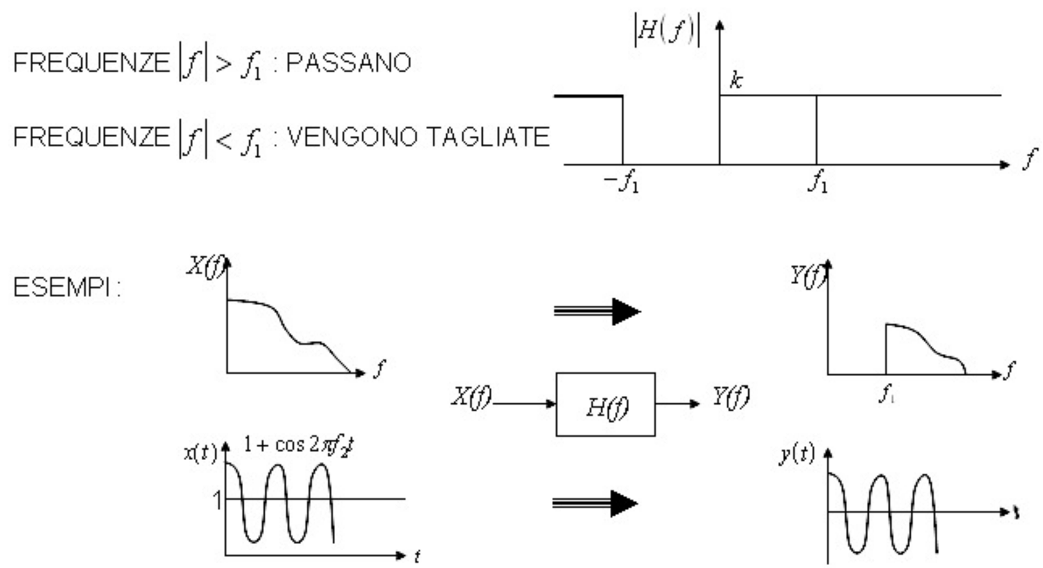
Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

- **Filtro passa-alto ideale: risposta in ampiezza e risposta in fase**

$$A_{HPF}(f) = \left| 1 - \Pi\left(\frac{f}{2B_{pass}} \right) \right|$$

$$\Phi_{HPF}\left(f\right) = -2\pi f t_0$$

$$h_{HPF}(t) = \delta\left(t - t_0\right) +$$
$$-2B_{pass}\,\mathrm{sinc}\left(2B_{pass}\left(t - t_0\right)\right)$$



Funzionamento (B_{pass}=f_1 nell'esempio)

Risposta all'impulso: <u>sistema non causale e quindi irrealizzabile</u>

Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

- **Filtro passa-banda ideale**
  - E' un filtro che lascia intatte le componenti frequenziali di un segnale che stanno nell'intorno di una frequenza diversa da zero e rigetta totalmente tutte le altre;
  - Inoltre, ha risposta in fase lineare;
  - E' quindi una sorta di passabasso, ma centrato non in banda-base, bensì in una banda traslata:

$$H_{BPF}(f) = \left[\Pi\left(\frac{(f - f_c)}{2B_{pass}} \right) + \Pi\left(\frac{(f + f_c)}{2B_{pass}} \right) \right] e^{-j2\pi f t_0}$$

Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

- **Filtro passa-banda ideale: risposta in ampiezza e risposta in fase (1)**

$$A_{BPF}(f) = \Pi\left(\frac{(f - f_c)}{2B_{pass}}\right) + \Pi\left(\frac{(f + f_c)}{2B_{pass}}\right)$$

$$\Phi_{BPF}(f) = -2\pi f t_0$$

$$h_{BPF}(t) = B_{pass}\,\mathrm{sinc}\left(2B_{pass}\left(t - t_0\right)\right)\cos\left(2\pi f_c\left(t - t_0\right)\right)$$

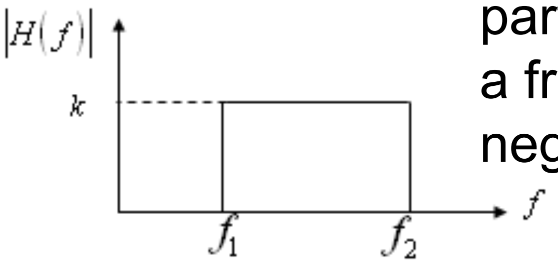
Risposta all'impulso: <u>sistema non causale e quindi irrealizzabile</u>

Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

- **Filtro passa-banda ideale: risposta in ampiezza e risposta in fase (2)**

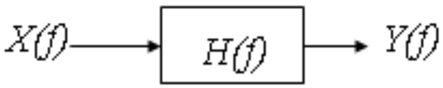
FREQUENZE $f_1 \leq |f| \leq f_2$: PASSANO

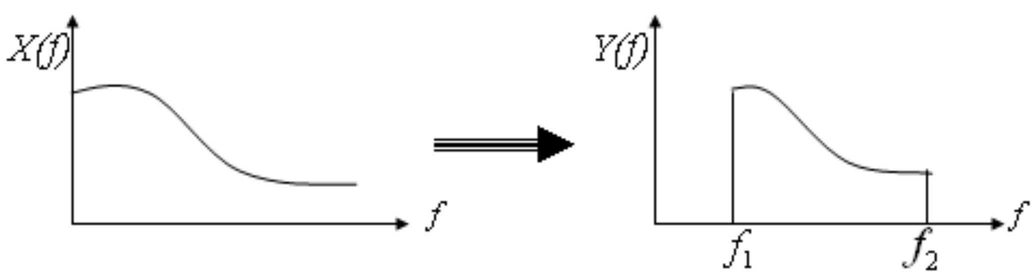
ALTRE FREQUENZE: VENGONO TAGLIATE



N.B. c'è anche la parte **simmetrica** a frequenze negative!

ESEMPI:





Funzionamento (B_{pass}=$(f_2$-$f_1)$ nell'esempio)

Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

- **Alcune considerazioni**
  - Il filtro passabasso funzione in pratica come un integratore: taglia le frequenze alte ed esalta quelle basse: il segnale filtrato avrà un andamento “smooth” con le transizioni brusche (corrispondenti alle alte frequenze) spianate ed addolcite;
  - Il filtro passa-alto funziona come un derivatore: taglia le frequenze basse ed evidenzia le transizioni (alte frequenze): l’esempio del coseno rialzato è illuminante: rimane la sinusoide (alta frequenza) e viene tagliata la costante che lo solleva (bassa frequenza);
  - Invece, il filtro passabanda non ha un funzionamento così facilmente spiegabile a parole: esso taglia frequenze lontane dalla banda traslata. Questo genere di filtri si usa nei sistemi di trasmissione radio, che usano sempre portanti modulate.