Esercizio 2

Sia dato il segnale la cui espressione analitica è di seguito assegnata:

$$x(t) = A\exp(-t/T_0)\cos(2\pi(t-T_1)/T_2)1(t)$$

I valori numerici assegnati sono: A=10mV, T_0=1msec, T_1=100nsec e T_2=1µsec. Sotto queste ipotesi si richiede di:

1. Calcolare l'espressione analitica dello spettro del segnale dato. Disegnare, inoltre, un andamento di massima dello spettro in ampiezza;

Supponiamo che il segnale entri in ingresso ad un sistema di elaborazione il cui schema a blocchi è mostrato in Figura 1:

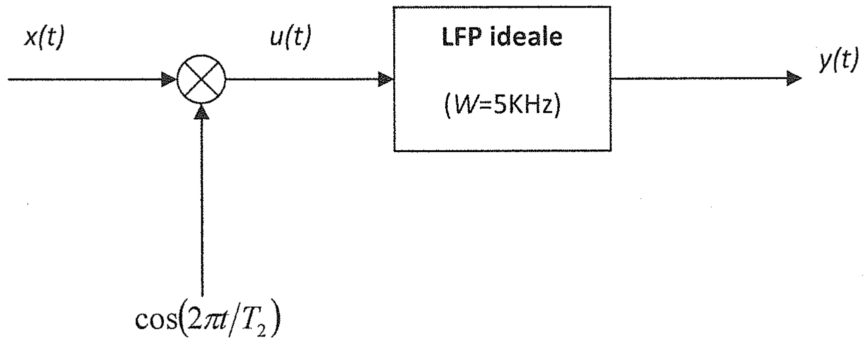


Figura 1

Sotto queste nuove ipotesi si richiede di:

2. Calcolare l'espressione analitica dello spettro in ampiezza e dello spettro in fase del segnale *y(t)* e disegnarne un andamento di massima;
3. Calcolare l'energia del segnale *y(t)*.

<u>SUGGERIMENTI PER DOMANDA 3</u>: calcolare l'energia ragionando nel dominio della frequenza. Si ricordi, inoltre, che:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$\boxed{\text{DOMANDA 1}}$

Esprimiamo:

$$x(t) = x_1(t) \cos\left(2\pi(t - T_1)/T_2\right)$$

$$x_1(t) = A \exp(-t/T_0)\, 1(t)$$ questa funzione ammette trasformata di Fourier nota

Sviluppiamo:

$$\cos\left(2\pi(t-T_1)/T_2\right) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T_2} - 2\pi T_1/T_2\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi f_2 t - \phi_2\right) \qquad \text{ove } f_2 \triangleq 1/T_2$$

$$\text{e } \phi_2 = 2\pi T_1/T_2$$

così otteniamo:

$$x(t) = x_1(t) \cos\left(2\pi f_2 t - \phi_2\right)$$

Spettro: $\longrightarrow X(f)$

$$X(f) = X_1(f) * \left\{ \frac{1}{2} e^{j\phi_2} \delta(f - f_2) + \frac{1}{2} e^{-j\phi_2} \delta(f + f_2) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} X_1(f - f_2) e^{j\phi_2} + \frac{1}{2} X_1(f + f_2) e^{-j\phi_2}$$

$$X_1(f) = \frac{A}{\frac{1}{T_0} + 2\pi j f} = \frac{A T_0}{1 + 2\pi j f T_0}$$

quindi:

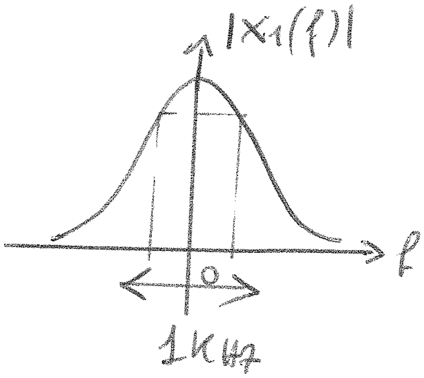
$$X(f) = \frac{A T_0 \, e^{j\phi_2}}{2\left[1+2\pi j (f-f_2) T_0\right]} + \frac{A T_0 \, e^{-j\phi_2}}{2\left[1+2\pi j (f+f_2) T_0\right]}$$

SPETTRO IN AMPIEZZA

N.B. $\boxed{\phi_2 = 2\pi \, T_1/T_2 = \frac{2\pi \cdot 10^{-7}}{10^{-6}} = \frac{2\pi}{10}}$

$$|X(f)| = \left| \frac{A T_0 \, e^{j\phi_2}}{2\left[1+2\pi j (f-f_2) T_0\right]} + \frac{A T_0 \, e^{-j\phi_2}}{2\left[1+2\pi j (f+f_2) T_0\right]} \right|$$

Potrebbe essere molto difficile da calcolare.
Ma osserviamo che:



$T_0 = 1 \text{ msec} \longrightarrow \frac{1}{T_0} = 1\text{KHz}$

$T_2 = 1 \mu\text{sec} \longrightarrow f_2 = 1/T_2 = 1\text{MHz}$

$1/T_0 \ll f_2$ per cui si verifica quello che osserviamo nel caso dell'impulso in RF, ovvero due lobi di segnale traslati ad una frequenza $f_2 \gg$ della larghezza dell'impulso.

Quindi possiamo dire (con un pizzico di approssimazione) che:

$$|X(f)| \approx \left| \frac{A T_0 \, e^{j\phi_2}}{2\left[1+2\pi j (f-f_2) T_0\right]} \right| + \left| \frac{A T_0 \, e^{-j\phi_2}}{2\left[1+2\pi j (f-f_2) T_0\right]} \right|$$

$$= \frac{A T_0}{2} \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2 (f-f_2)^2 T_0^2}} + \frac{A T_0}{2} \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2 (f+f_2)^2 T_0^2}}$$

DOMANDA 2

$u(t) = x(t)\cos(2\pi f_2 t)$

(segnale uscente dal moltiplicatore)

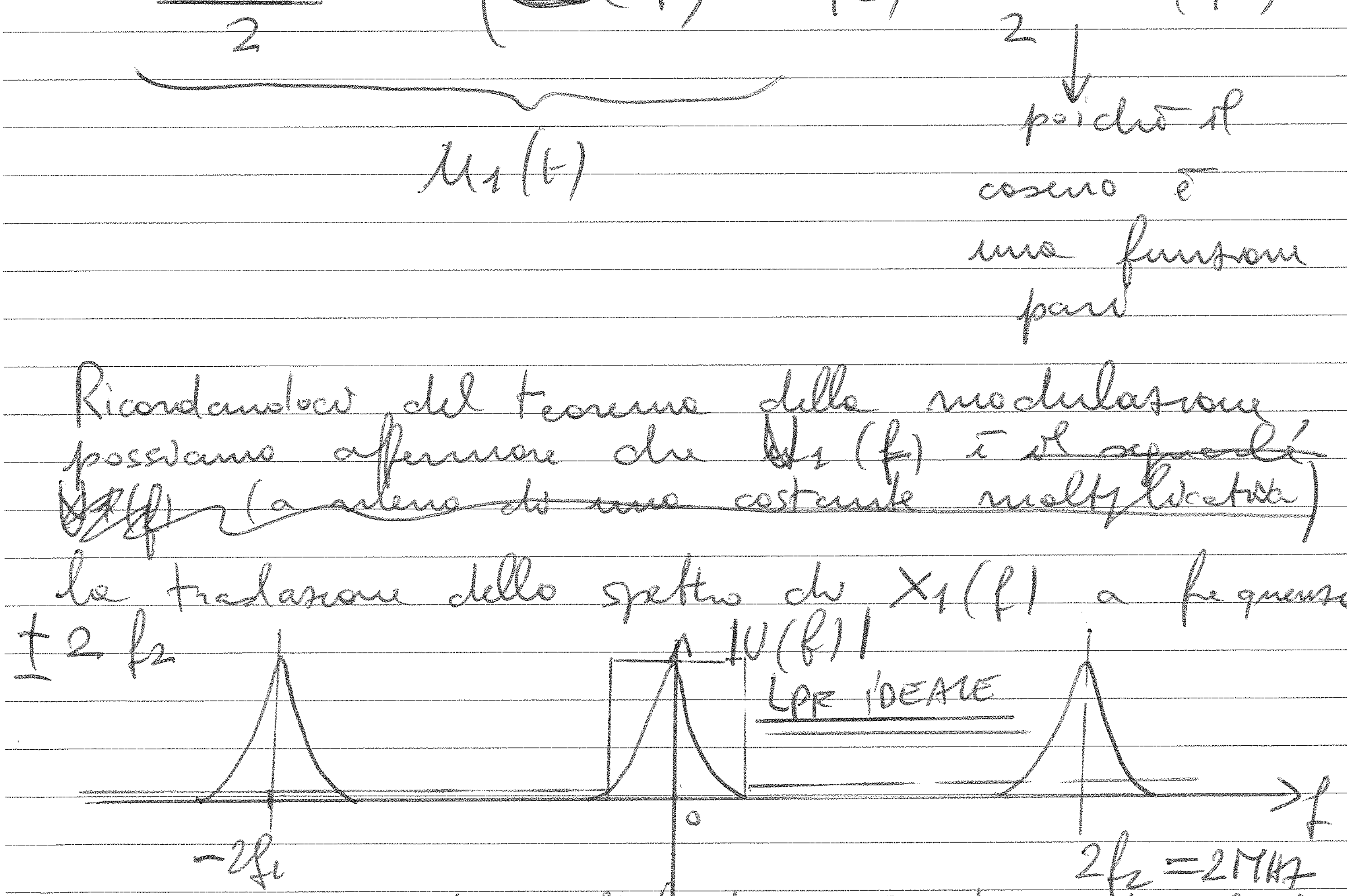
$$u(t) = x_1(t)\cos(2\pi f_2 t - \phi_2)\cos(2\pi f_2 t) =$$

$$= \frac{x_1(t)}{2}\cos\left[4\pi f_2 t - \phi_2\right] + \underbrace{\frac{x_1(t)}{2}\cos(-\phi_2)}_{u_2(t)} =$$

$$= \underbrace{\frac{x_1(t)}{2}\cos\left(2\pi(2f_2)t - \phi_2\right)}_{u_1(t)} + \frac{x_1(t)}{2}\cos(\phi_2)$$

poiché il coseno è una funzione pari

Ricordandoci del teorema della modulazione possiamo affermare che $U_1(f)$ è ~~il segnale $U_2(f)$ (a meno di una costante moltiplicativa)~~ la traslazione dello spettro di $X_1(f)$ a frequenze $\pm 2 f_2$



Invece $U_2(f)$ è $X_1(f)$ moltiplicato * $\frac{\cos\phi_2}{2} = \frac{1}{2}\cos(2\pi/10) \simeq 0.$

$$Y(f) = \begin{cases} 0.4\ X_1(f) & |f| \leq 5\,KHz \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$X_1(f)$ già calcolata

$$|Y(f)| = 0.4\ |X_1(f)| = \frac{0.4\, A\, T_0}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 T_0^2}}$$

$$\angle Y(f) = \arctan\left(\frac{Im\,(Y(f))}{Re\,(Y(f))}\right)$$

$$Im\,(Y(f)) = \left(-2\pi f T_0\right)\cdot 0.4$$

$$Re\,\{Y(f)\} = 0.4$$

segue da una razionalizzazione

$$\angle Y(f) = \arctan\,(-2\pi f T_0)$$

$\boxed{\text{DOM. 3}}$

$$E_Y = \int_{-5\cdot 10^3}^{5\cdot 10^3} \frac{0.16\, A^2 T_0^2}{1 + (2\pi f T_0)^2}\, df$$

applico Rayleigh

$$E_Y = \frac{0.16\, A^2}{(2\pi)^2} \int_{-5000}^{5000} \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi T_0}\right)^2 + f^2}\, df$$

$$E_y = \int_{-5000}^{5000} \frac{0.16 A^2 T_0^2 \;\; 1/(2\pi T_0)^2}{\left(\frac{1}{2\pi T_0}\right)^2 + f^2}\, df =$$

$$= \frac{0.16 A^2 \cancel{T_0^2}}{(2\pi)^2 \cancel{T_0^2}} \int_{-5000}^{5000} \frac{1}{f^2 + \left(\frac{1}{2\pi T_0}\right)^2}\, df =$$

$$= \frac{0.16 A^2}{(2\pi)^{\cancel{2}}} (\cancel{2}\pi T_0) \operatorname{arctang}(2\pi f T_0) \Big|_{-5000}^{5000} =$$

$$= \frac{0.16 A^2 T_0}{2\pi} \operatorname{arctang}(4\pi \cdot 5000 \cdot 10^{-3}) =$$

$$= \frac{0.16 A^2 T_0}{2\pi} \operatorname{arctang}(20\pi)$$

$\cancel{\frac{5}{16}}-\qquad \frac{3}{8}-\frac{5}{16}=\frac{1}{16}$