UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Ingegneria
e Scienza dell'Informazione

Teoria dei Segnali

Parte Prima: Segnali e Sistemi

Lezione 6: Sistemi lineari e tempo-invarianti

Docente: Prof. Claudio Sacchi

Contenuti

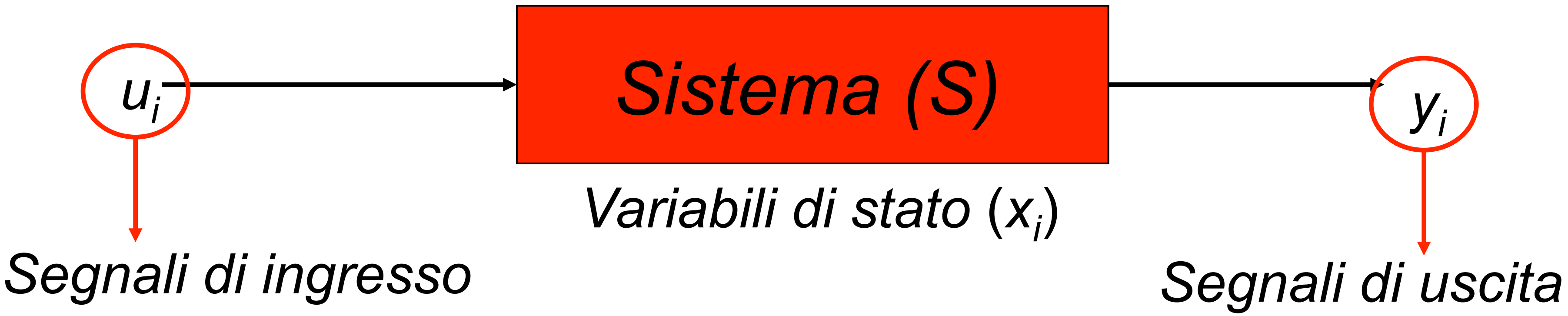
- Definizione di sistema;
- Tipologie di sistemi: sistemi regolari e lineari;
- Sistemi lineari e tempo-invarianti (LTI);
- Risposta all'impulso di un sistema LTI;
- Elaborazione LTI di segnali deterministici;
- Elaborazione LTI di segnali aleatori.

Definizione di sistema

- **Premessa**
  - Nel settore dell'ICT ognuno dei "blocchi" costituenti la tratta di trasmissione e/o un sistema di elaborazione dell'informazione multimediale effettua, in pratica, operazioni di elaborazione del segnale;
  - Tali apparati ricevono, in sostanza, un segnale di ingresso (analogico o numerico), lo elaborano ed, infine, producono un segnale di uscita;
  - L'elaborazione "interna" dei segnali da parte dei singoli blocchi deve essere modellata mediante un qualche tipo di formalismo matematico.

Definizione di sistema

- **Definizione formale**
  - I sistemi sono <u>entità formalizzate</u> che possono essere descritte tramite <u>modelli matematici</u>;
  - Le basi della teoria dei sistemi sono quelle che partono da <u>impianti tecnici e da sistemi biologici</u>:



Definizione di sistema

- **Funzioni caratterizzanti un sistema (1)**
  - Sono le seguenti:
    - La funzione di <u>transizione di stato</u>;
    - La funzione di <u>transizione di uscita</u>.
  - Si definisce funzione di transizione di stato la seguente <u>funzione analitica</u>:

$$\underline{x}(t) \triangleq \varphi\left(t, t_0, \underline{x}_0, \underline{u}(t)\right) \qquad \underline{x} \in \Re^n$$ Vettore variabili di stato

$$\underline{x}\left(t_0\right) = \underline{x}_0$$ Stato iniziale del sistema $\quad \underline{u} \in \Re^m$ Vettore di segnali di ingresso

Definizione di sistema

- **Funzioni caratterizzanti un sistema (2)**
  - Si definisce <u>funzione di transizione di uscita</u> la seguente <u>funzione analitica</u>:

$$\underline{y}(t) \triangleq \eta\left(t, \underline{x}(t)\right) \qquad \underline{y} \in \Re^{p}$$

Vettore delle uscite del sistema

  - Gli ingressi sono <u>gli input del sistema</u>. Le uscite sono <u>gli output osservabili </u>(dall'esterno) del sistema;
  - Il vettore di stato e la funzione di transizione di stato <u>rappresentano la parte "interna" del blocco</u>, legata alla struttura hardware di elaborazione del segnale (supposta nota, ma non sempre accessibile).

Tipologie di sistemi

- **Sistemi regolari (1)**
  - Un sistema è detto <u>regolare</u> se si verificano le seguenti condizioni:
    - Le variabili di stato, ingresso ed uscita del sistema sono definite <u>su spazi vettoriali con norma-2 definita nella maniera usuale</u> (condizione verificata se supponiamo ingressi ed uscite reali o complesse);
    - <u>La funzione di transizione di stato è continua rispetto a tutti i suoi argomenti</u> ed, in particolare la sua derivata prima esiste ed è continua rispetto ai suoi argomenti;
    - <u>La funzione di transizione d’uscita è continua rispetto a tutti i suoi argomenti</u>.

Tipologie di sistemi

Sistemi regolari (2)

- In un sistema regolare, la funzione di transizione di stato viene ottenuta mediante la seguente equazione differenziale vettoriale:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\underline{x}(t)}{dt} = \underline{F}\left(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t)\right) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

Tipologie di sistemi

Sistemi regolari (3)

- In un sistema regolare, è possibile definire due tipi di risposta:

$$\underline{\varphi}_{i0}(t) \hat{=} \varphi\left(t, t_0, \underline{x}_0, 0\right)$$

<u>Risposta libera</u>, detta anche <u>ad ingresso zero</u>

$$\underline{\varphi}_{s0}(t) \hat{=} \varphi\left(t, t_0, 0, \underline{u}(t)\right)$$

<u>Risposta forzata</u>, detta anche <u>nello stato zero</u>

Tipologie di sistemi

- **Sistemi lineari**
  - Se un sistema regolare verifica <u>anche</u> la seguente proprietà:

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\varphi}_{i0}(t) + \underline{\varphi}_{s0}(t)$$

  - Allora è detto: <u>sistema lineare</u>. L'equazione risolvente il sistema diviene in questo caso:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\underline{x}(t)}{dt} = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C(t)\underline{x}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

$$A(t) \in M^{nxn}$$

$$B(t) \in M^{nxm}$$

$$C(t) \in M^{pxn}$$

Sistemi lineari e tempo-invarianti (SLTI)

Definizione

- Se un sistema lineare è anche a coefficienti costanti, allora è detto tempo-invariante;
- Questa è la tipologia di sistemi che interessa l'elaborazione dei segnali, le telecomunicazioni e la regolazione automatica:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}(t)}{dt} = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A \in \Re^{nxn} \\ B \in \Re^{nxm} \\ C \in \Re^{pxn} \end{array}$$

Sistemi lineari e tempo-invarianti (SLTI)

- **Soluzioni delle equazioni di un sistema LTI**
  - Dato un sistema LTI è possibile ricavare in maniera analitica sia la risposta libera che la risposta forzata:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}(t)}{dt} = A\underline{x}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \underline{x}_{i0}(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{x}_0$$

$$\underline{x}_{s0}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau)\, d\tau \qquad \underline{x}(t) = \underline{x}_{i0}(t) + \underline{x}_{s0}(t)$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t)$$

IL SISTEMA E' RISOLTO!

Sistemi lineari e tempo-invarianti (SLTI)

- **Relazione ingresso-uscita in un sistema LTI**
  - E' quindi possibile definire quella che è chiamata la relazione ingresso-uscita del sistema LTI:

$$\underline{y}(t) = Ce^{A(t-t_0)}\underline{x}_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)\,d\tau \mathrel{\hat{=}} \ell\left(\underline{u}(t)\right)$$

  - Tutto semplice? Macché! La conoscenza delle matrici A, B e C non sempre è data per scontata (è la struttura interna del sistema) ed il calcolo dell'integrale è spesso problematico.

Sistemi lineari e tempo-invarianti (SLTI)

- **Definizione di un sistema LTI sulla base della relazione ingresso-uscita**
  - Un sistema è LTI se e solo se sono verificate le seguenti due condizioni:

<u>Linearità</u>

$$\ell\left(\alpha u_1(t)+\beta u_1(t)\right)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)\ \forall \alpha,\beta\in\Re$$ dove:

$$y_1(t)=\ell\left(u_1(t)\right)\quad y_2(t)=\ell\left(u_2(t)\right)$$

NB: consideriamo solo <u>funzioni scalari</u>

<u>Tempo-invarianza</u>

$$y(t)=\ell\left(u(t)\right)\Rightarrow \ell\left(u(t-T)\right)=y(t-T)\quad \forall T\in\Re$$

Risposta all’impulso di un sistema LTI

- **Approccio sistemistico “a scatola chiusa”**
  - Un sistema LTI può essere trattato attraverso le equazioni di stato, ma questo implica la conoscenza delle matrici *A*, *B* e *C*. In pratica, dobbiamo conoscere come è fatta la scatola al suo interno;
  - Si tratta di un problema non banale, in quanto, spesso, la scatola è chiusa ed inaccessibile dall’interno. Se ne possono osservare solo le uscite misurabili;
  - Un approccio “a scatola chiusa” considera la risposta (misurabile) della “scatola” ad un determinato tipo di segnale. Questo segnale è l’impulso di area unitaria (delta di Dirac).

Risposta all'impulso di un sistema LTI

- **Definizione di risposta all'impulso di un sistema LTI**
  - La risposta all'impulso di un sistema LTI è definita come la risposta del sistema alla delta di Dirac in ingresso, ovvero:

$$h(t) \triangleq \ell\big(\delta(t)\big)$$

Risposta all'impulso di un sistema LTI

Utilità della risposta all'impulso (1)

- Supponiamo che la risposta all'impulso del sistema LTI sia nota a priori (perché, ad esempio, l'abbiamo misurata);

- Partiamo da una delle note proprietà della delta di Dirac, quella della convoluzione (o ritardo):

$$x(t) * \delta(t-T) = x(t-T) \Rightarrow x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Risposta all'impulso di un sistema LTI

- **Utilità della risposta all'impulso (2)**
  - Supponiamo di applicare tale proprietà all'ingresso del sistema LTI *u(t)* e poi di applicare ad *u(t)* la relazione ingresso-uscita del sistema:

$$\ell\left(u(t)\right) = y(t) = \ell\left(u(t) * \delta(t)\right) = \ell\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(\alpha)\delta(t-\alpha)\,d\alpha\right)$$

  - Poiché la relazione ingresso-uscita di un sistema LTI è <u>un operatore differenziale lineare</u>, così come l'integrale, possiamo invertire l'ordine di calcolo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell\left(u(\alpha)\delta(t-\alpha)\right) d\alpha$$

Risposta all'impulso di un sistema LTI

- **Utilità della risposta all'impulso (3)**
  - E' importante, tener conto che l'operatore ingresso-uscita agisce solo su segnali funzioni del tempo, quindi il termine dentro l'integrale dipendente da alfa, per esso è solo una costante;
  - Pertanto, l'espressione vista nella slide precedente può essere così riscritta, sempre in virtù della linearità e tempo-invarianza della relazione ingresso-uscita:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\alpha)\,\ell\big(\delta(t-\alpha)\big)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\alpha)\,h(t-\alpha)\,d\alpha =$$

$$= u(t) * h(t)$$ Risultato FONDAMENTALE della Teoria dei Segnali

Risposta all’impulso di un sistema LTI

- **Risposta all’impulso identifica il sistema LTI**
  - Noi supporremo di conoscere la risposta all’impulso di un sistema LTI;
  - La conoscenza di questa funzione consente una conoscenza perfetta “a scatola chiusa” (detta anche “ai morsetti”) del sistema LTI;
  - La risposta all’impulso caratterizza, infatti, interamente il comportamento del sistema LTI stesso. Possiamo (teoricamente) calcolare l’uscita del sistema, dato l’ingresso, mediante una operazione di convoluzione.

Risposta all'impulso di un sistema LTI

- **Sistemi LTI causali e stabili**
  - Sulla base della sua risposta all'impulso, un sistema LTI è definito <u>causale</u> se:

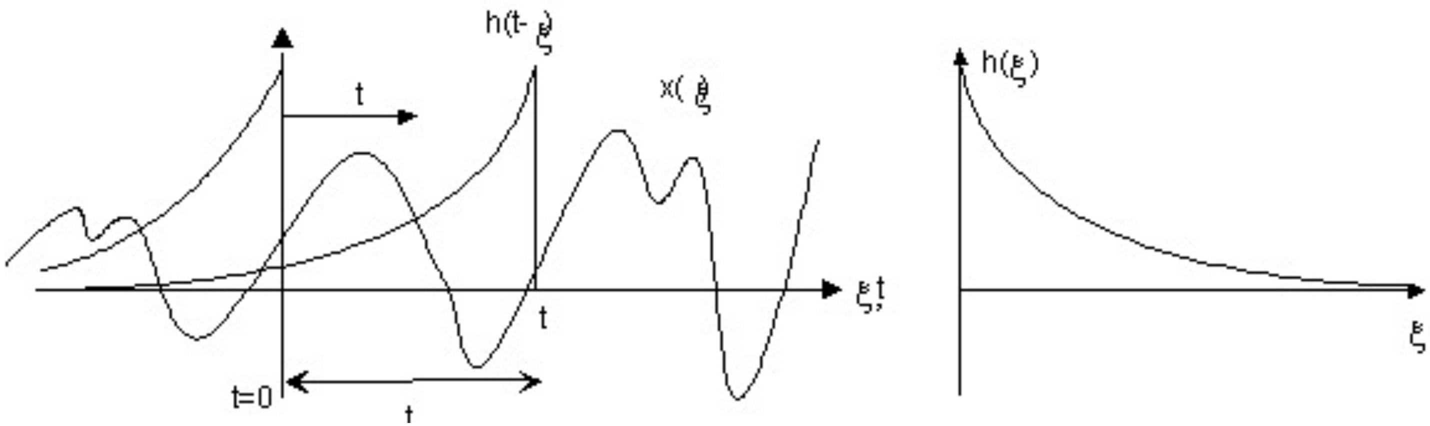
$$h(t) \equiv 0 \quad \forall t < t_0 \; t_0 \geq 0$$

  - Un sistema LTI, invece, è definito <u>stabile</u> se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| h(t) \right| dt < +\infty$$

Elaborazione LTI di segnali deterministici

- **Interpretazione grafica della convoluzione**
  - La convoluzione, nel caso di segnali deterministici, può essere interpretata graficamente come una serie di tre operazioni in successione:



Riabaltamento di *h(t)*

$$h(\alpha) \to h(-\alpha)$$

Scorrimento di *h(t)* sopra al segnale di ingresso

$$h(\alpha) \to h(t-\alpha) \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

Moltiplicazione ed integrazione

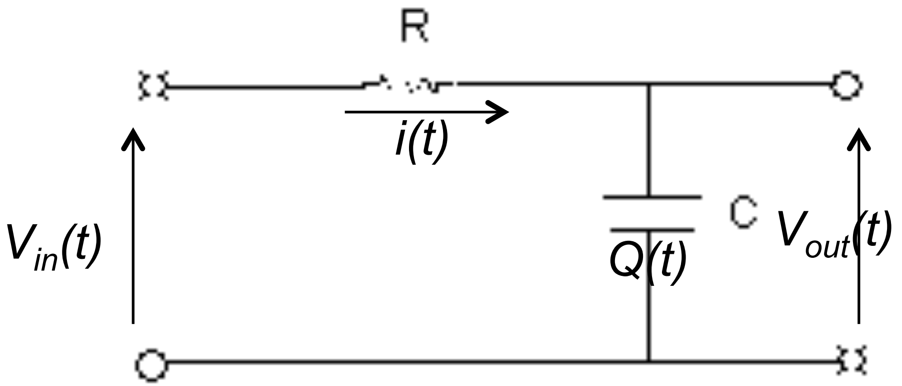
$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha$$

Elaborazione LTI di segnali deterministici

- **Sistema LTI come "maschera"**
  - Quindi, il sistema LTI (ovvero la sua risposta all'impulso) può essere visto come una specie di "maschera" che passa sopra al segnale d'ingresso, istante per istante, generando l'uscita;
  - Un sistema LTI può essere un filtro, dove la "maschera" passa sopra ad un segnale "sporco" per il rumore o altri disturbi e, tramite l'operazione di convoluzione lo "ripulisce" dalle sue impurità;
  - Oppure, il sistema LTI può essere un blocco degradante (ad esempio un canale di trasmissione), la cui maschera altera o, addirittura, distrugge il segnale di ingresso.

Elaborazione LTI di segnali deterministici

- **Esempio: circuito resistivo-capacitivo (RC) (1)**
  - E’ un circuito molto banale, che si tratta con le leggi della Fisica:



FUNZIONAMENTO: mettiamo una pila in ingresso (generatore in continua): il condensatore prende carica (*Q(t)*) fino a che non raggiunge la massima carica possibile dopodiché si “apre” e diviene un circuito aperto. Dopodiché, la tensione in uscita eguaglia quella di ingresso (ovvero la continua)

Elaborazione LTI di segnali deterministici

- **Esempio: circuito resistivo-capacitivo (RC) (2)**
  - Vediamo le equazioni (differenziali):

$$V_{in}(t) = Ri(t) + V_{out}(t)$$ x Kirchoff

$$Q(t) = CV_{out}(t)$$ Legge di carica del condensatore

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$ Corrente = carica nel tempo

Elaborazione LTI di segnali deterministici

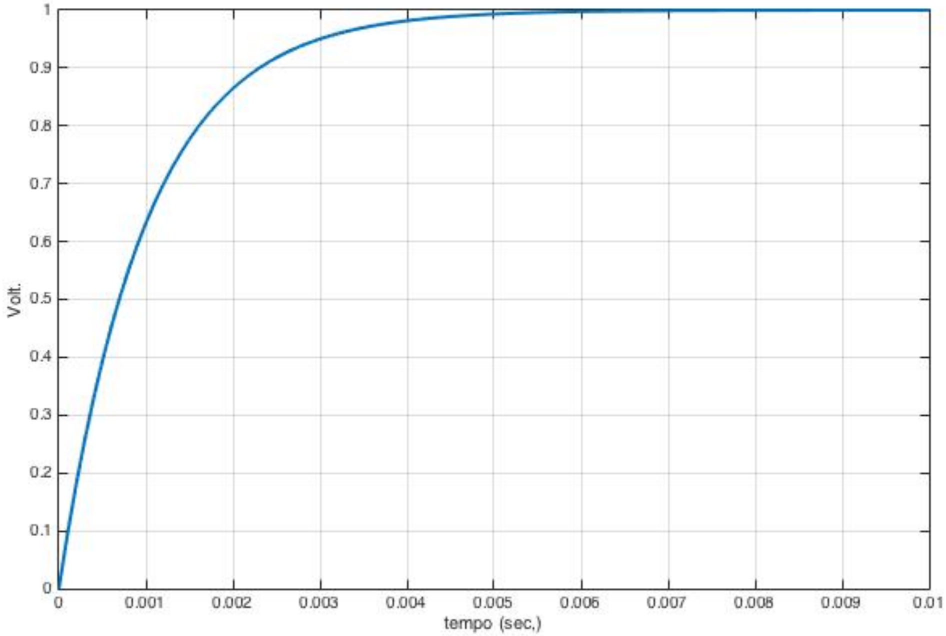
- **Esempio: circuito resistivo-capacitivo (RC) (3)**
  - Tentiamo di scrivere la relazione ingresso-uscita:

$$V_{in}(t) = RC\frac{dV_{out}(t)}{dt} + V_{out}(t)$$

  - Supponiamo che in ingresso ci sia un generatore in continua a gradino unitario: $V_{in}(t)=1(t)$

Elaborazione LTI di segnali deterministici

- **Esempio: circuito resistivo-capacitivo (RC) (3)**
  - Senza addentrarci nel dettaglio della soluzione dell'equazione differenziale, dal filtro RC otteniamo la seguente uscita, il cui andamento è mostrato a lato per RC = 1 millisecondo e *t*>0;



$$V_{out}\left(t\right)=\left[1-e^{-\frac{t}{RC}}\right]1(t)$$

Elaborazione LTI di segnali deterministici

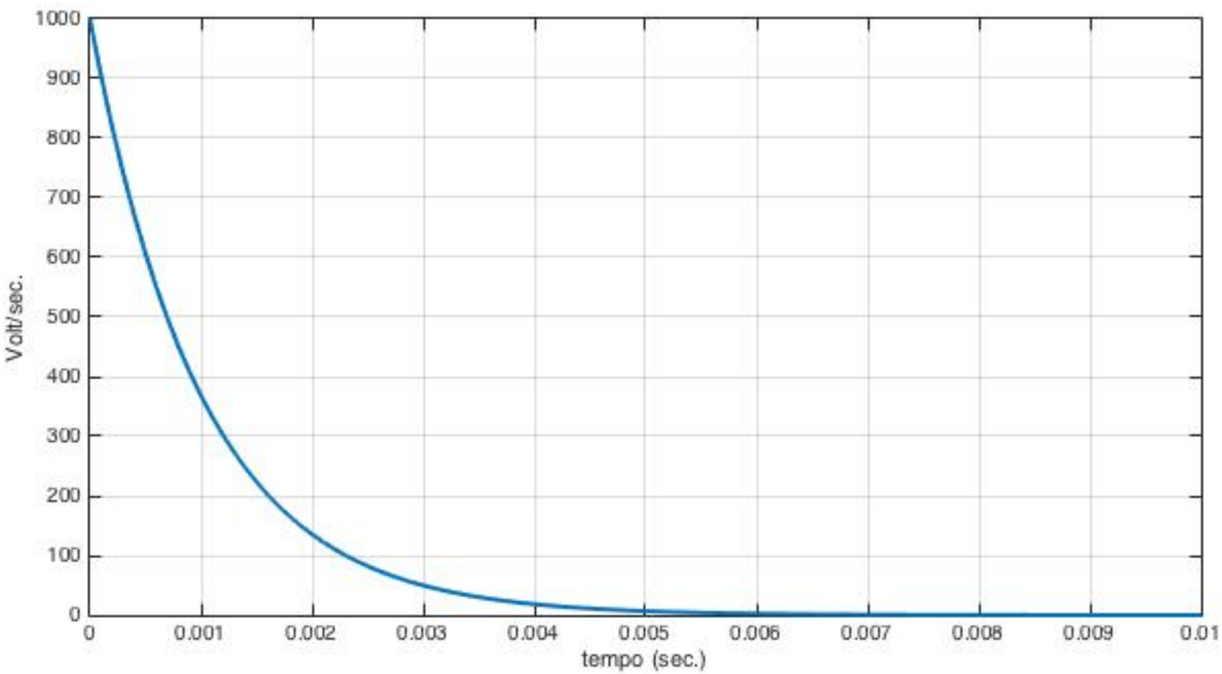
- **Esempio: circuito resistivo-capacitivo (RC) (4)**
  - Avendo la risposta al gradino, possiamo ricavare la risposta all'impulso del sistema, come:

$$h(t) = \ell\left(\delta(t)\right) = \ell\left(\frac{d1(t)}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\ell\left(1(t)\right) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}1(t)$$

Ciò consegue dalle solite proprietà di linearità e tempo-invarianza del sistema.

Elaborazione LTI di segnali deterministici

- **Andamento risposta all'impulso del circuito RC (per *t*>0)**



L'impulso di area unitaria "carica" in maniera istantanea il condensatore, il quale, istantaneamente si "apre" ed esaurisce la carica accumulata nel tempo, azzerando l'uscita.

Elaborazione LTI di segnali deterministici

- **Limiti del formalismo adottato**
  - Purtroppo, ben poche convoluzioni possono essere svolte numericamente;
  - L’integrale di convoluzione molto spesso nemmeno può essere risolto;
  - Quindi, quanto abbiamo detto, è tutto inutile? Sicuramente no, ma l’analisi non può essere limitata al dominio del tempo;
  - Infatti, i sistemi ed i segnali, in generale, si analizzano in un altro dominio – quello della frequenza – dove le operazioni sono semplificate e l’analisi appare più chiara e significativa.

Elaborazione LTI di segnali deterministici

- **Convoluzioni notevoli (1)**
  - Tuttavia, possiamo considerare qualche convoluzione notevole, che si rivelerà utile nel prosieguo;
  - Omettiamo il calcolo matematico puntuale (si può trovare dappertutto: su libri ed in rete), focalizziamoci sui risultati;
  - Partiamo, dalla convoluzione di due funzioni – rettangolo di uguale ampiezza e durata.

Elaborazione LTI di segnali deterministici

Convoluzioni notevoli (2)

- Considerando due triangoli di ugual ampiezza ed ugual durata, otteniamo dalla loro convoluzione la funzione triangolo (già vista quando abbiamo parlato dell'autocorrelazione del processo binario casuale):

$$x_1(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \qquad x_2(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$x_1(t) * x_2(t) = A^2 T\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) = A^2 T\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

NOTARE: la durata del segnale ottenuto dalla convoluzione è data dalla somma delle durate dei segnali convoluiti. Questa regola vale sempre, per qualsiasi tipologia di segnale.

Elaborazione LTI di segnali deterministici

Convoluzioni notevoli (3)

- La convoluzione tra due rettangoli di ampiezza e durata diverse, fornisce la funzione trapezio:

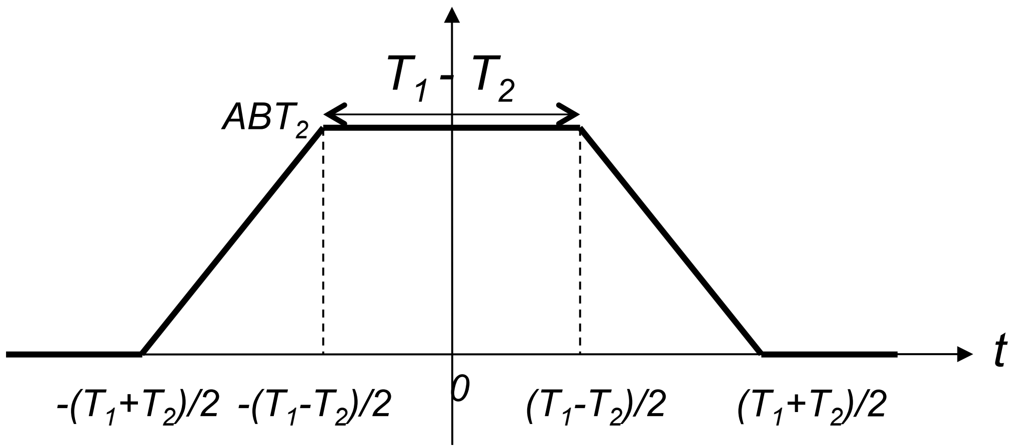
$$x_1(t) = A_1 \Pi\left(\frac{t}{T_1}\right) \quad x_2(t) = A_2 \Pi\left(\frac{t}{T_2}\right) \quad T_1 > T_2$$

$$x_1(t) * x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < -\left(T_1 + T_2\right)/2 \\ AB\left(t + \left(T_1 + T_2\right)/2\right) & -\left(T_1 + T_2\right)/2 \le t < -(T_1 - T_2)/2 \\ ABT_2 & -(T_1 - T_2)/2 \le t < (T_1 - T_2)/2 \\ AB\left(\left(T_1 + T_2\right)/2 - t\right) & (T_1 - T_2)/2 \le t \le \left(T_1 + T_2\right)/2 \\ 0 & t > \left(T_1 + T_2\right)/2 \end{cases}$$

Elaborazione LTI di segnali deterministici

Convoluzioni notevoli (4)

- Andamento (grafico) della funzione-trapezio:



Anche in questo caso, le durate si sommano (come in quello precedente). Il trapezio degenera nel triangolo se le ampiezze e le durate dei due rettangoli convoluiti sono le stesse.

Elaborazione LTI di segnali deterministici

- **Convoluzioni notevoli (5)**
  - Convoluzione tra due funzioni Gaussiane:

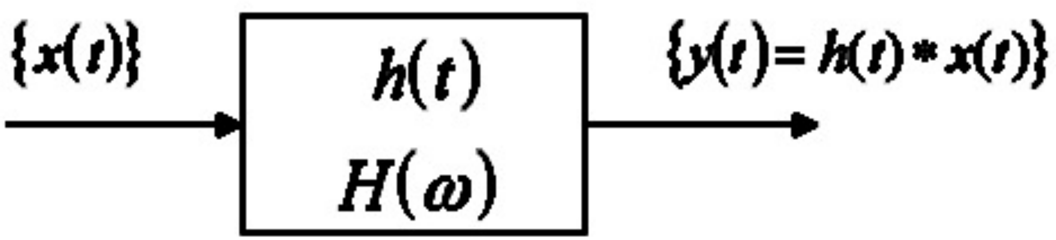
$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$x_1(t) * x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)} e^{-\frac{(t-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1+\sigma_2)^2}}$$

<u>Risultato davvero notevole:</u> due Gaussiane, convoluendosi, producono un’altra Gaussiana, la cui campana ha una varianza data dalla somma delle varianze ed un valore medio dato dalla somma dei valori medi.

Elaborazione LTI di segnali aleatori

- **Cosa succede ad un segnale aleatorio?**
  - Un processo aleatorio, quando passa dentro un sistema LTI, verrà processato realizzazione per realizzazione;
  - Non ha però senso focalizzarsi su come ogni singola realizzazione viene processata, bensì su come i parametri statistici di primo e secondo ordine del processo cambiano in funzione del processing del segnale;
  - In particolare, bisogna analizzare cosa accade al valor medio ed all'autocorrelazione di un processo SSL trasformato da un sistema LTI.



PS: nella seconda parte del corso vedremo cos'è la funzione H

Elaborazione LTI di segnali aleatori

- **Valor medio del processo aleatorio SSL trasformato**
  - Calcoliamo, ora, il valor medio del processo aleatorio SSL trasformato tramite la media di insieme delle diverse realizzazioni, tenendo conto che la risposta all'impulso *h(t)* del sistema LTI é nota (e quindi deterministica):

$$E\{y(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{x(\alpha)\}h(t-\alpha)d\alpha =$$

$$\overline{x}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\alpha)d\alpha = \overline{x}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$$

  - Il valor medio del processo entrante viene quindi moltiplicato da un guadagno che è pari all'area complessiva della risposta all'impulso del sistema LTI.

Elaborazione LTI di segnali aleatori

- **Autocorrelazione del processo SSL trasformato (1):**
  - Usiamo lo stesso procedimento visto prima:

$$E\left\{y(t)\,y(t-\tau)\right\} = E\left\{\left[x(t)*h(t)\right]\left[x(t-\tau)*h(t-\tau)\right]\right\}$$

$$= E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,x(t-\alpha)\,d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)\,x(t-\tau-\beta)\,d\beta\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left\{x(t-\alpha)\,x(t-\tau-\beta)\right\} h(\alpha)\,h(\beta)\,d\alpha\,d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau+\beta-\alpha)\,h(\alpha)\,h(\beta)\,d\alpha\,d\beta =$$

CONTD.

Elaborazione LTI di segnali aleatori

- **Autocorrelazione del processo SSL trasformato (2):**
  - Proseguendo il calcolo si nota che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau+\beta-\alpha)h(\alpha)h(\beta)\,d\alpha\,d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau+\beta-\alpha)h(\alpha)\,d\alpha\right]d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[R_x(\tau+\beta)*h(\tau)\right]h(\beta)\,d\beta$$

  - Con un cambio di variabili l'integrale viene così riscritto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R_x(\tau+\beta)*h(\tau)\right]h(\beta)\,d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[R_x(\tau-\lambda)*h(\tau)\right]h(-\lambda)\,d\lambda =$$

$$= R_x(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$$

Elaborazione LTI di segnali aleatori

- **Autocorrelazione del processo SSL trasformato (3):**
  - Se definiamo nella seguente maniera l'autocorrelazione (deterministica) della risposta impulsiva del sistema LTI:

$$r_h(\tau) \hat{=} h(\tau) * h(-\tau)$$

  - L'autocorrelazione del processo trasformato potrà, quindi, essere espressa come:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_x(\tau) * r_h(\tau)$$

Elaborazione LTI di segnali aleatori

- **Alcune considerazioni**
  - Il processo aleatorio SSL, elaborato da un sistema LTI, rimane SSL anche dopo l'elaborazione;
  - Il valor medio del processo uscente è pari a quello entrante, moltiplicato per un guadagno dipendente da $h(t)$;
  - L'autocorrelazione, invece, subisce la convoluzione con l'autocorrelazione della risposta impulsiva del sistema. Il calcolo può essere assai difficile e, non di rado, impossibile, visto che sono assai poche le convoluzioni che riusciamo a fare;
  - Anche per quel che riguarda i segnali aleatori, l'analisi dovrà essere svolta in maniera differente, come vedremo in seguito.

Elaborazione LTI di segnali aleatori

- **Funzioni di probabilità del processo aleatorio trasformato (1)**
  - Finora, noi abbiamo analizzato le statistiche di primo e second'ordine del processo SSL trasformato da un blocco LTI (valor medio, autocorrelazione);
  - Non ci siamo occupati di capire come vengono trasformate le funzioni di probabilità (densità di probabilità);
  - <u>Questo problema è, generalmente, insolubile</u>. Nel senso che ricavare le funzioni di probabilità del processo uscente di ogni ordine, partendo da quelle del processo entrante è impossibile da sostenere computazionalmente.

Elaborazione LTI di segnali aleatori

- **Funzioni di probabilità del processo aleatorio trasformato (2)**
  - C'è un'unica (importantissima) eccezione a quanto abbiamo detto prima: i processi aleatori con densità di probabilità Gaussiane;
  - Si può dimostrare in maniera euristica (vedasi paragrafo 8.6.2 libro Luise-Vitetta) che se un processo SSL è Gaussiano (ovvero le sue densità di probabilità sono Gaussiane), il processo generato da una sua elaborazione di tipo LTI è anch'esso Gaussiano;
  - La proprietà di "conservazione della Gaussianità" è sempre verificata per elaborazioni di tipo LTI e si conserva pure in elaborazioni effettuate da sistemi lineari non tempo-invarianti, anche se in questo caso il processo in uscita non sarà più SSL.