UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Ingegneria
e Scienza dell'Informazione

Teoria dei Segnali

Parte Seconda: Fondamenti di elaborazione dei segnali

Lezione 5: Rappresentazione in frequenza di processi aleatori

Docente: Prof. Claudio Sacchi

Contenuti

- Densità spettrale di potenza di un processo aleatorio;
- Larghezza di banda di un processo aleatorio;
- Filtraggio di processi aleatori;
- Rumore bianco e rumore colorato;
- Rapporto segnale/rumore;
- Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi.

Densità spettrale di potenza di un processo aleatorio

- **Introduzione**
  - Le definizioni di spettro in ampiezza e spettro in fase e di densità spettrale di energia viste per i segnali deterministici non si applicano per i processi aleatori;
  - O meglio: si potrebbero applicare solamente ad una singola realizzazione;
  - Ma, se il processo non è ergodico, tale rappresentazione sarebbe parziale;
  - Nel caso di processi stazionari in senso lato, solo una funzione rappresenta efficacemente l'intero processo aleatorio nel dominio della frequenza ed è la densità spettrale di potenza.

Densità spettrale di potenza di un processo aleatorio

- **Definizione**
  - Si definisce densità spettrale di potenza (o spettro di densità di potenza) di un processo aleatorio, la trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione, ovvero:

$$S_x(f) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

  - Poiché l'autocorrelazione di un processo SSL è una funzione pari, la densità spettrale di potenza è una funzione reale ed è sempre positiva (è una densità di potenza, che non può essere negativa, per definizione).

Densità spettrale di potenza di un processo aleatorio

- **Perché si chiama così?**
  - Noi sappiamo che l'autocorrelazione, calcolata in 0, restituisce la potenza media del processo;
  - Sapendo che l'autocorrelazione è anche l'anti-trasformata di Fourier della densità spettrale di potenza, si ottiene che:

$$\overline{P}_x = R_x(0) = \left. \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \right|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

Dal che si capisce che $S_x(f)$ rappresenta la distribuzione della potenza del processo aleatorio nel dominio delle frequenze.

Larghezza di banda di un processo aleatorio

- **Larghezza di banda di un processo aleatorio**
  - Un processo aleatorio è detto a banda limitata se esiste un valore di frequenza finito *W* tale per cui:

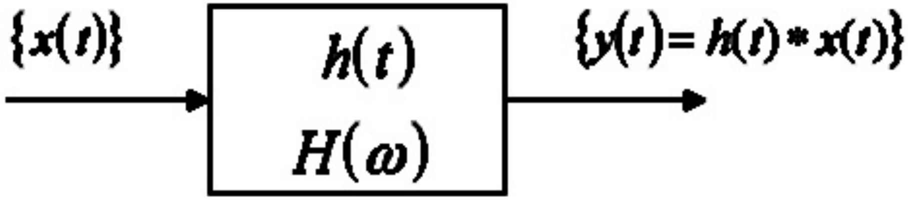
$$S_x(f) \equiv 0 \quad \forall f : |f| > W$$

  - Se un processo aleatorio non è a banda limitata, si assume, quale larghezza di banda, il valore di frequenza *W* che soddisfa la seguente condizione:

$$\int_{-W}^{W} S_x(f)df = 0.99\overline{P}_x$$

Filtraggio di processi aleatori

- **Significato dell'operazione**
  - Un processo aleatorio stazionario in senso lato può essere filtrato, considerando la sua densità spettrale di potenza, che è l'unica funzione che lo rappresenta univocamente nel dominio delle frequenze;
  - Abbiamo già visto nella prima parte del corso che un processo aleatorio SSL, posto in ingresso ad un sistema LTI genera in uscita un altro processo aleatorio SSL caratterizzato dalle seguenti statistiche di primo e second'ordine:



$$E\{y(t)\} = \bar{x}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$$

$$R_h(\tau) \triangleq h(\tau) * h(-\tau)$$

Filtraggio di processi aleatori

- **Filtraggio di processi aleatori nel dominio della frequenza (1)**
  - Le relazioni viste precedentemente nel dominio del tempo, presentano svariati problemi di calcolo e di comprensione;
  - Vediamo cosa avviene nel dominio della frequenza, partendo dal valor medio:

$$E\left\{y(t)\right\} = \bar{x}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = \bar{x}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt\Big|_{f=0} = \bar{x}H(0)$$

Risultato interessante: il valor medio del processo trasformato è uguale al valor medio del processo entrante moltiplicato per la funzione di trasferimento del blocco LTI calcolata in f=0 (componente continua).

Filtraggio di processi aleatori

- **Filtraggio di processi aleatori nel dominio della frequenza (2)**
  - Vediamo cosa avviene all'autocorrelazione, trasformata nel dominio della frequenza, ovvero <u>alla densità spettrale di potenza del processo uscente:</u>

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau) \rightarrow S_y(f) = S_x(f)\Im\left[R_h(\tau)\right]$$

$$\Im\left[R_h(\tau)\right] \hat{=} H(f)H^*(f) = \left|H(f)\right|^2 \Rightarrow S_y(f) = S_x(f)\left|H(f)\right|^2$$

<u>Altro risultato di grandissima importanza:</u> la densità spettrale di potenza del processo aleatorio SSL uscente dal blocco LTI è pari alla densità spettrale di potenza del processo entrante, <u>moltiplicata per il guadagno di potenza del blocco</u>.

Filtraggio di processi aleatori

- **Filtraggio di processi aleatori nel dominio della frequenza (3)**
  - Già che ci siamo, calcoliamo anche potenza media e varianza del processo uscente:

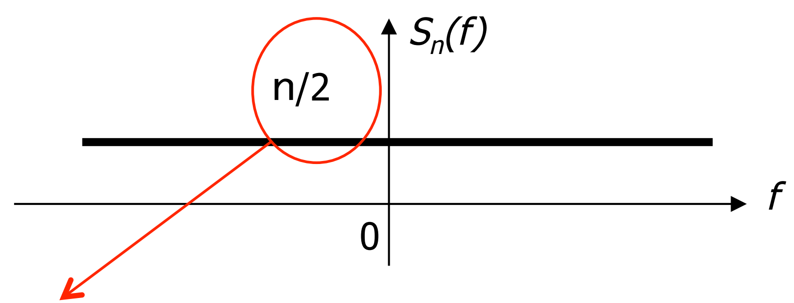
$$\overline{P}_y = R_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \left| H(f) \right|^2 df$$

$$\sigma_y^2 = \overline{P}_y - \left| \overline{y} \right|^2 = \overline{P}_y - \left(\overline{x} \right)^2 \left| H(0) \right|^2$$

Rumore bianco e rumore colorato

- **Partiamo dal rumore bianco …**
  - Abbiamo introdotto in una parte precedente del corso il rumore bianco, ovvero un processo <u>aleatorio a valor medio nullo ed autocorrelazione impulsiva nell'origine dei ritardi</u>;
  - La ragione per cui è chiamato rumore bianco si capisce andando ad analizzare la sua densità spettrale di potenza:

$$R_n(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau) \rightarrow S_n(f) = \frac{\eta}{2} \forall f$$



Densità spettrale di potenza <u>bilatera</u>

La densità spettrale di potenza del rumore bianco <u>è costante in tutte le frequenze</u>, come avviene per la luce bianca. Ecco perché si chiama così.

Rumore bianco e rumore colorato

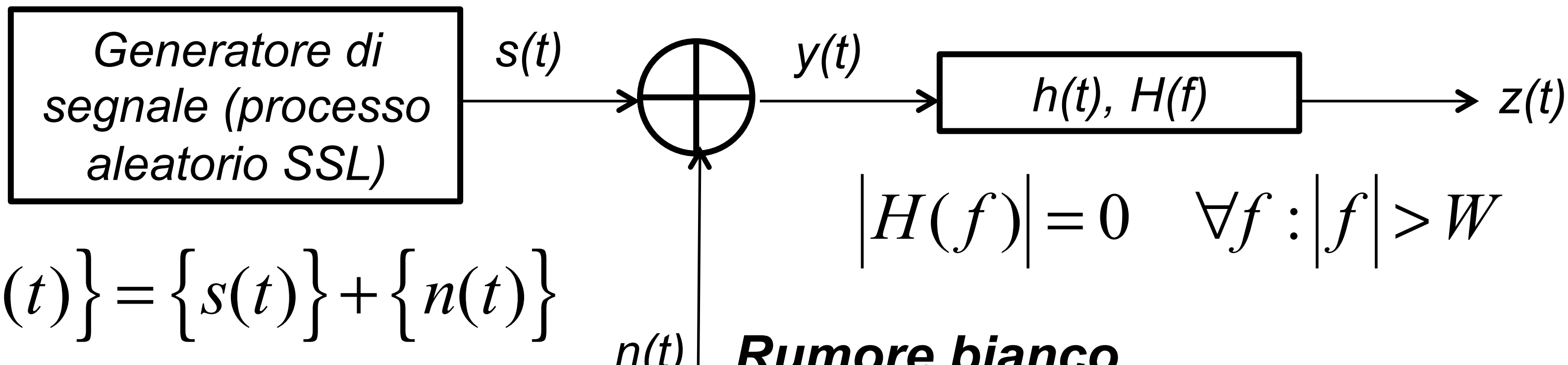
- **Densità spettrale di potenza del rumore bianco: bilatera e monolatera**
  - Il rumore bianco, per convenzione (e notazione) presenta due diverse densità spettrali di potenza:
    - La <u>densità bilatera</u> n/2, definita in tutto il campo delle frequenze (da –inf a +inf);
    - La <u>densità monolatera</u> n, definita solo per frequenze positive (da 0 a +inf).
  - Si tratta di una mera convenzione, della quale però occorre tener conto nei calcoli.

Rumore bianco e rumore colorato

- **Rumore colorato: introduzione**
  - Il rumore bianco (Gaussiano) è, come abbiamo visto, un modello matematico che descrive bene molti fenomeni rumorosi reali;
  - Quando il rumore bianco si aggiunge al segnale, esso è a banda infinita e quindi a potenza infinita. In teoria, dovrebbe "coprire" il segnale fino a renderlo inintellegibile;
  - In realtà, il rumore bianco subisce le stesse elaborazioni del segnale a cui è sommato e tutti i sistemi lineari e tempo invarianti che processano il segnale hanno una loro banda passante finita;
  - Quindi, il rumore "elaborato" non è più bianco perché viene in qualche modo filtrato. Si dice che il rumore è"colorato", perché parte del suo spettro viene selezionato e parte no.

Rumore bianco e rumore colorato

- **Rumore colorato: esempio**
  - Supponiamo di avere il seguente sistema:



$$\left|H(f)\right| = 0 \quad \forall f : \left|f\right| > W$$

$$\left\{y(t)\right\} = \left\{s(t)\right\} + \left\{n(t)\right\}$$

Rumore bianco

$$\left\{z(t)\right\} = \left\{r(t)\right\} + \left\{\xi(t)\right\}$$

$$\left\{r(t)\right\} = \left\{h(t) * s(t)\right\} \quad S_r\left(f\right) = P_s\left(f\right)\left|H\left(f\right)\right|^2$$

$$\left\{\xi(t)\right\} = \left\{h(t) * n(t)\right\} \quad S_\xi\left(f\right) = \frac{\eta}{2}\left|H\left(f\right)\right|^2$$

Rumore colorato

Rapporto segnale/rumore

- **Definizione**
  - Dato l'esempio della slide precedente si definisce <u>rapporto segnale/rumore</u> in uscita da un sistema di elaborazione LTI la seguente quantità:

$$\left(\frac{S}{N}\right) \hat{=} \frac{\overline{P_r}}{\overline{P_\xi}} = \frac{\int_{-W}^{W} P_s(f)\left|H(f)\right|^2 df}{\frac{\eta}{2}\int_{-W}^{W}\left|H(f)\right|^2 df}$$

<u>NOTA</u>: Il rapporto segnale-rumore molto spesso si misura <u>in decibel</u>, ovvero:

$$SNR = 10\log_{10}\left\{\left(\frac{S}{N}\right)\right\}(dB)$$

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Introduzione al problema**
  - Un problema di grande importanza nell'elaborazione dei segnali e nelle telecomunicazioni è la rivelazione di un segnale impulsivo di larghezza di banda finita immerso nel rumore;
  - Questo problema, per essere risolto, richiede un sistema di rilevazione, in poche parole un ricevitore;
  - L'ampiezza del segnale è sconosciuta, così come il suo ritardo temporale;
  - Il criterio di stima che vogliamo usare per costruire il ricevitore è quello che massimizza il rapporto segnale/rumore in uscita dal ricevitore medesimo.

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

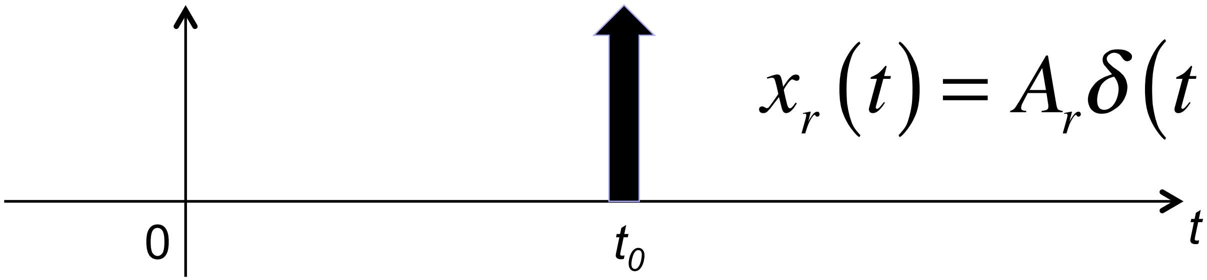
- **Ipotesi fondamentali**
  - Il segnale che si vuole rivelare ha la seguente espressione:

$$x_r(t) = A_r p(t - t_0)$$

  - L'ampiezza di picco A_r ed il ritardo t_0 non sono noti a priori (sono variabili aleatorie);
  - Il segnale $p(t)$ è un segnale deterministico a durata finita ed energia unitaria;
  - Il rumore $n(t)$ che "sommerge" il segnale è bianco e statisticamente indipendente rispetto a tutto il resto.

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

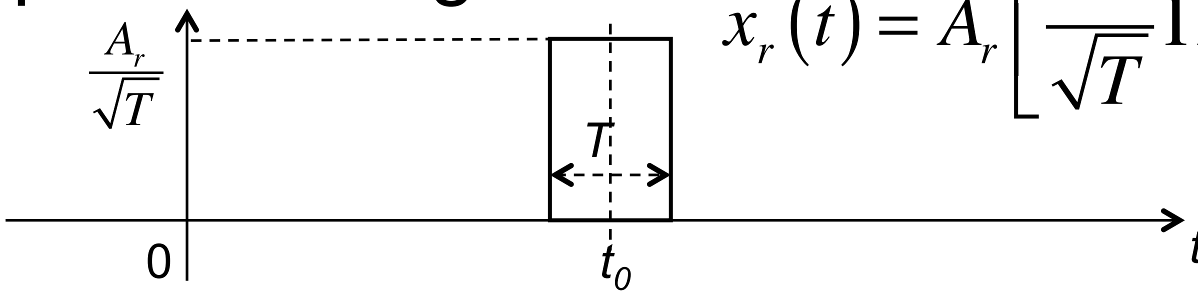
- **Esempi di segnali impulsivi**
  - Delta di Dirach (impulso ideale):



$$x_r(t) = A_r \delta(t - t_0)$$

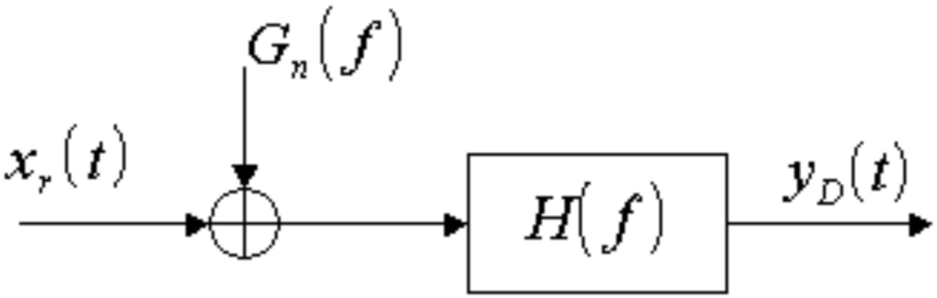
  - Impulso rettangolare:

$$x_r(t) = A_r \left[\frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - t_0}{T} \right) \right]$$



Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Cosa è richiesto**
  - Occorre trovare la <u>risposta in frequenza</u> *H(f)* del blocco ricevitore tale che:



$$\max_{H(f)}\left(\frac{S_D}{N_D}\right)=\max_{H(f)}\left(\frac{A_D^2}{\overline{\overline{P}}_{n_D}}\right)$$

A_D^2 Potenza di picco del segnale utile

$$y_D(t)=s_D(t)+n_D(t)=x_r(t)*h(t)+n(t)*h(t)$$

$$h(t)=\Im^{-1}\left(H(f)\right)$$

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Formalizzazione del problema**
  - Per rilevare l'impulso secondo un criterio "a massimo S/N", il filtro ricevitore dovrà:
    - <u>Minimizzare la potenza della componente rumorosa</u> $n_D(t)$ in corrispondenza di un istante $t_1=t_0+t_d$ (t_d è il ritardo introdotto dal ricevitore);
    - <u>Massimizzare la potenza della componente utile di segnale</u> $s_D(t)$ in corrispondenza dello stesso istante temporale.

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Calcolo delle quantità in gioco:**
  - L'ampiezza di picco del segnale utile si può esprimere nella seguente maniera in funzione di *H(f)*:

$$A_D = \Im^{-1}\left[H(f)\cdot X_r(f)\right]_{t_1=t_0+t_d} = A_r\int_{-\infty}^{+\infty} H(f)P(f)e^{j\omega t_1}df$$

  - La potenza della componente rumorosa è, invece, la seguente:

$$\overline{P}_{n_D} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f)\left|H(f)\right|^2 df$$

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Formulazione matematica**
  - Date le quantità calcolate nella slide precedente, occorre trovare la risposta in frequenza *H(f)* che massimizzi il seguente <u>funzionale di costo</u>:

$$\Phi(H(f)) = \left(\frac{A_D^2}{\overline{P}_{n_D}}\right) = \frac{A_r^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) P(f) e^{j\omega t_1} \, df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 G_n(f) \, df}$$

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Risoluzione del problema (1)**
  - Per risolvere il problema di ottimizzazione occorre applicare al funzionale di costo visto in precedenza la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, nella seguente formulazione:

$$\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} V(f)W^*(f)\,df\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)|^2\,df} \le \int_{-\infty}^{+\infty} |W(f)|^2\,df \qquad \left.\begin{array}{c} V(f) \\ W(f) \end{array}\right\} \text{funzioni arbitrarie}$$

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Risoluzione del problema (2)**
  - Definiamo le seguenti funzioni:

$$V(f) \hat{=} H(f)\sqrt{G_n(f)} \Rightarrow \sqrt{G_n(f)} = \frac{V(f)}{H(f)}$$

$$W^*(f) \hat{=} \frac{A_r P(f) e^{j\omega t_1}}{\sqrt{G_n(f)}} = \frac{A_r H(f) P(f) e^{j\omega t_1}}{V(f)}$$

Si può verificare che, date le due funzioni *V(f)* e *W(f)* sopra definite si ottiene che:

$$\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} V(f) W^*(f)\, df\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|V(f)\right|^2 df} = \Phi\left(H(f)\right)$$

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Risoluzione del problema (3)**
  - Il valore massimo del funzionale di costo si ottiene quando *V(f)* è proporzionale a *W(f)*, ovvero quando:

$$V(f) = KW(f) \quad K \text{ costante arbitraria}$$

  - Nulla quindi vieta di imporre la seguente condizione, per la quale il funzionale di costo è ancora massimizzato:

$$V(f) = \frac{K}{A_r} W(f) \quad K \text{ costante arbitraria}$$

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Risoluzione del problema (4)**
  - Calcoliamo, adesso, esplicitamente la funzione di trasferimento del filtro ricevitore che ottimizza il rapporto segnale/rumore in uscita:

$$V_{opt}(f)=\frac{K}{A_r}W(f)=\frac{K}{A_r}\cdot A_r\cdot\frac{P^*(f)e^{-j\omega t_1}}{\sqrt{G_n(f)}}=K\cdot\frac{P^*(f)e^{-j\omega t_1}}{\sqrt{G_n(f)}}$$

Ma, poiché abbiamo imposto: $V_{opt}(f)=H_{opt}(f)\sqrt{G_n(f)}$

  - Alla fine, si ottiene:

$$H_{opt}(f)=\frac{V_{opt}(f)}{\sqrt{G_n(f)}}=K\frac{P^*(f)e^{-j\omega t_1}}{G_n(f)}$$

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Risoluzione del problema (5)**
  - Il valore ottimo del funzionale, ovvero del rapporto segnale/rumore a valle del filtro ricevitore è il seguente:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{MAX} = \left(\frac{A_D^2}{\overline{P}_{n_D}}\right)_{MAX} = A_r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|P(f)\right|^2}{G_n(f)} df$$

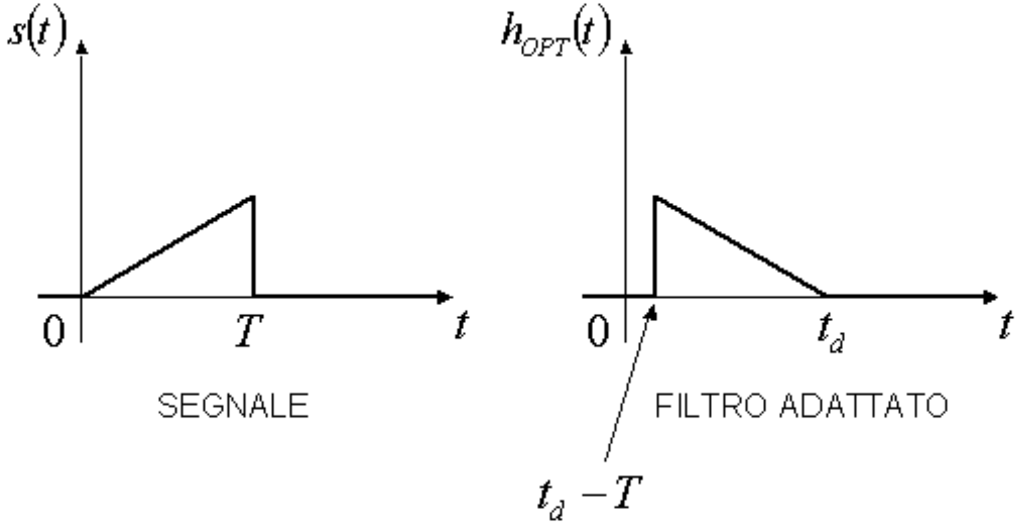
Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Ricevitore a massimo (S/N) in presenza rumore bianco (1)**
  - E’ un caso di interesse tecnico estremo, sia nell’ambito della trasmissione numerica, che nell’ambito dell’elaborazione dei segnali;
  - In questo caso, si ottiene che:

$$H_{opt}(f) = K\frac{P^*(f)e^{-j\omega t_1}}{\eta/2} \Rightarrow h_{opt}(t) = \Im^{-1}\left[H_{opt}(f)\right] = \frac{2K}{\eta}p(t_1 - t)$$

Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Ricevitore a massimo (S/N) in presenza rumore bianco (2)**
  - In questo caso, il ricevitore a massimo rapporto segnale/rumore si chiama filtro adattato, perché la sua risposta all'impulso è data dalla forma d'onda che si vuole rivelare ribaltata e ritardata nel dominio del tempo;



Filtro adattato per la rivelazione di segnali impulsivi

- **Ricevitore a massimo (S/N) in presenza rumore bianco (3)**
  - Calcoliamo il rapporto segnale/rumore in uscita dal filtro adattato:

$$G_n(f) = \frac{\eta}{2} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{MAX} = \frac{2A_r^2}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|P(f)\right|^2 df = 2\left(\frac{E_R}{\eta}\right)$$

  - Quindi, il filtro adattato raddoppia (aumenta di 3dB) il rapporto segnale/rumore rispetto a quello in ingresso al filtro.