UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO
ANNO ACCADEMICO 2012-2013

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni / Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione e dell'Organizzazione d'Impresa

CORSO DI MODELLI STOCASTICI PER L'INGEGNERIA

ESERCIZIO 2 (anche recuperi seconda parte della prova scritta)

Un processo aleatorio Gaussiano, stazionario *n(t)* a valor medio nullo e con densità spettrale di potenza pari a $N_0/2$ per $|f| \leq B$ e 0 altrove, passa attraverso un sistema lineare e tempo-invariante che ha la seguente risposta all'impulso:

$$h(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t - T)$$

Si denoti con *x(t)* il processo aleatorio così generato. Sotto queste ipotesi si richiede di:

1) Calcolare la densità spettrale di potenza e la potenza media del processo aleatorio *x(t)*.
2) Calcolare l'espressione analitica della densità di probabilità del processo aleatorio *x(t)* nonché la probabilità che *x(t)* assuma valori compresi tra 0 e metà della sua deviazione standard.
3) Si supponga di elevare al quadrato *x(t)*, ottenendo un processo aleatorio *y(t)*. Calcolare il valor medio di *y(t)*.

Es. 2

DOMANDA 1

$n(t)$ processo Gaussiano a media nulla

$(E(n(t))=0)$

e $S_n(f) = \begin{cases} N_0/2 & |f| \leq B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$\{n(t)\} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \{x(t)\}$$

$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t-T)$$

$$S_x(f) = |H(f)|^2 S_n(f)$$

$$|H(f)|^2 = \left|1 + \tfrac{1}{2} e^{-2\pi j f T}\right|^2 =$$

$$= \left|\left(1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi f T)\right) - \frac{j}{2}\,\text{sen}(2\pi f T)\right|^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \cos(2\pi f T) = 5/4 + \cos(2\pi f T)$$

$$S_x(f) = \begin{cases} N_0/2 \left[5/4 + \cos(2\pi f T)\right] & |f| \leq B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\overline{P}_X = \int_{-B}^{B} \frac{N_0}{2} \left[\frac{5}{4} + \cos(2\pi f T) \right] df =$$

(integrale banale...)

$$= \frac{5}{4} N_0 B + \frac{N_0}{2\pi T} \sin(2\pi T B)$$ (potenza media)

$\boxed{\text{Es. 2 - Dom. 2}}$

$X(t)$ è distribuito in maniera Gaussiana, poiché ottenuto dalla trasformazione LTI di un processo SSL.

Quindi:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-x^2/2\sigma_x^2}$$ poiché:

$$E\{X(t)\} = E\{n(t)\} H(0) = 0$$

e dove $\sigma_x^2 = \overline{P}_X$

$$P_r\left\{0 \le x \le \sigma_x/2\right\} = \cancel{1} - Q\left(\frac{\sigma_x/2}{\sigma_x}\right) \cancel{-1} + Q(0) =$$

$$= Q(0) - Q(0.5) \simeq 0.2$$

$\boxed{\text{Es. 2 – Dom. 3}}$ 3

$$y(t) = x^2(t) \rightarrow E\{y(t)\} = ?$$

Conviene operare sulla media di insieme di

$$y(t) = [h(t) * n(t)]^2 = \left[n(t) + \frac{1}{2} n(t-T)\right]^2:$$

$$E\{y(t)\} = E\left\{\left[n(t) + \frac{1}{2} n(t-T)\right]^2\right\} =$$

$$= E\left\{n^2(t) + \frac{1}{4} n^2(t-T) + n(t)\, n(t-T)\right\} =$$

$$= \underbrace{\sigma_n^2 + \frac{1}{4}\sigma_n^2}_{\substack{\text{poiché} \\ n(t) \text{ è} \\ \text{SSL!}}} + E\big(n(t)\, n(t-T)\big) =$$

$$= \sigma_n^2 + \frac{1}{4}\sigma_n^2 + R_n(T)$$ → autocorrelazione di $n(t)$

ove:

$$\sigma_n^2 = \overline{P_n} = \int_{-B}^{B} N_0/2 \, df = N_0 B$$

$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_n(f)\} = N_0 B \operatorname{sinc}(2B\tau)$ da cui

$R_n(T) = N_0 B \operatorname{sinc}(2BT)$ ed il calcolo è completo!