



January 12, 2018

1 Esercizi trasformata Bode

Domanda 1 Data la seguente rappresentazione ingresso uscita:

$$100y''(t) = -1.3y'(t) - 40y(t) + \sin(\omega * t) \quad (1)$$

quali delle seguenti affermazioni é vera:

- ☐ all'aumentare di ω l'ampiezza dell'oscillazione di $y(t)$ cala monotonicamente;
- ☐ é presente un picco di risonanza tra 0.5 e 0.7 rad/s;
- ☐ nessuna delle precedenti.
- ☐ per valori di ω elevati l'ampiezza assume valori negativi;
- ☐ é presente un picco di risonanza tra 0.5 e 0.7 Hz;

Domanda 2 Data la seguente rappresentazione ingresso uscita:

$$0.5y''(t) = -1y'(t) - 0.5y(t) + \sin(\omega * t) \quad (2)$$

dove $y(0) = y'(0) = 0$ quale delle seguenti affermazioni é vera:

- ☐ nessuna delle precedenti.
- ☐ $y(t) \leq 5 \quad \forall [t, \omega] \in R^2$;
- ☐ é presente un picco di risonanza tra 0.1 e 10 rad/s;
- ☐ é presente un picco di risonanza in 1 rad/s;
- ☐ per valori di ω elevati l'ampiezza assume valori negativi;

Domanda 3 Data la seguente rappresentazione ingresso uscita:

$$102y''(t) = -3y(t) + \sin(\omega * t) \quad (3)$$

dove $y(0) = y'(0) = 0$ quale delle seguenti affermazioni é vera:

- ☐ é presente un picco di risonanza in 0.1715 rad/s;
- ☐ $y(t) \leq 100 \quad \forall [t, \omega] \in R^2$;
- ☐ non é presente alcun picco di risonanza;
- ☐ nessuna delle precedenti.
- ☐ é presente un picco di risonanza tra 10 e 30 Hz;

Domanda 4 Data la seguente rappresentazione ingresso uscita:

$$44y''(t) = -2y'(t) - 6y(t) + \sin(\omega * t) \quad (4)$$

dove $y(0) = y'(0) = 0$ quale delle seguenti affermazioni é vera per $\omega = 0.1$ Hz:

- ☐ $y(t) \approx 0.874 \sin(0.626t + 3.0315)$;
- ☐ $y(t) \approx 0.0874 \sin(0.626t - 3.0315)$;
- ☐ $y(t) \approx 0.474 \sin(0.626t + 3.0315)$;
- ☐ nessuna delle precedenti.
- ☐ $y(t) \approx 4.74 \sin(0.626t + 3.0315)$;



2 Soluzioni Esercizi Bode

Domanda 1

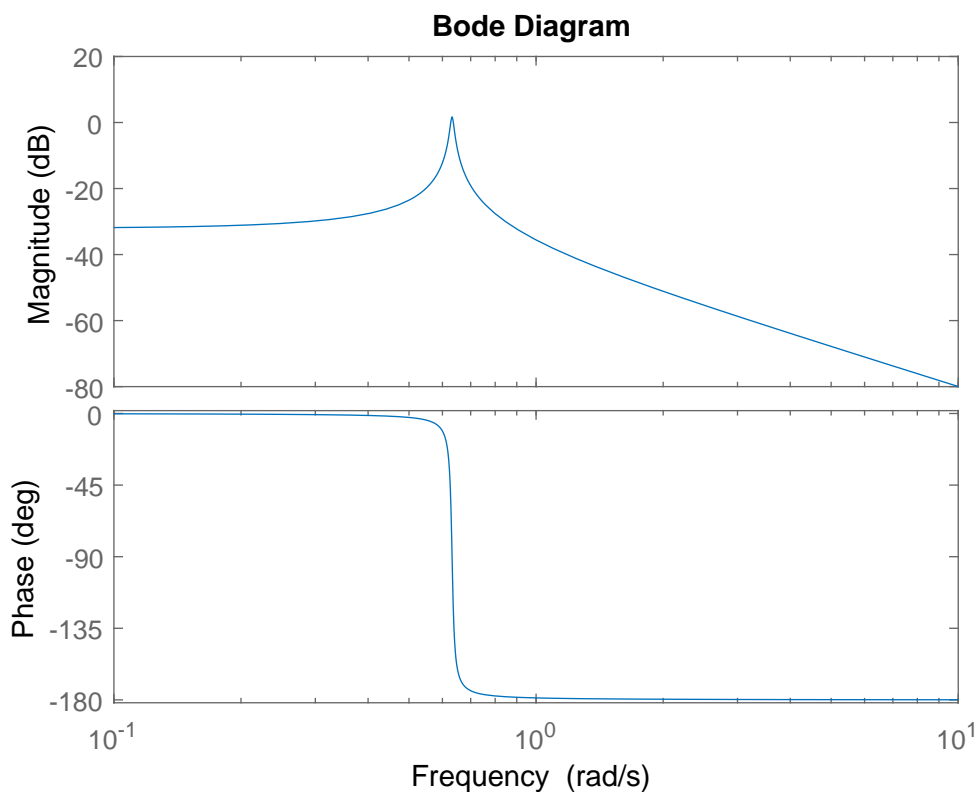
Data la seguente rappresentazione ingresso uscita:

$$100\ddot{y}(t) = -1.3\dot{y}(t) - 40y(t) + \sin(\omega * t) \quad (5)$$

quali delle seguenti affermazioni é vera:

1. all'aumentare di ω l'ampiezza dell'oscillazione di $y(t)$ cala monotonicamente;
2. per valori di ω elevati l'ampiezza assume valori negativi;
3. é presente un picco di risonanza tra 0.5 e 0.7 Hz;
4. é presente un picco di risonanza tra 0.5 e 0.7 rad/s;
5. nessuna delle precedenti.

La risposta corretta é la numero 4. Riportiamo il diagramma di bode della funzione di trasferimento.



La funzione di trasferimento del sistema in generale sarà:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (6)$$

Dove nel caso in esame $m = 100$, $c = 1.3$, $k = 40$. Sostituiamo $s = i\omega$ per trovare ampiezza e fase della risposta in frequenza:

$$H(i\omega) = \frac{1}{-m\omega + ci\omega + k} \quad (7)$$



Quindi il modulo di $H(i\omega)$ si potrà calcolare come:

$$|H(i\omega)|^2 = 1/((k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2) \quad (8)$$

Il denominatore è una parabola con concavità verso l'alto. Per massimizzare il modulo di $H(i\omega)$ dobbiamo minimizzare il denominatore. Il denominatore è minimo nel vertice della parabola $(-\frac{b}{2a})$.

$$\begin{aligned} den &= ((k - m\omega)^2 + (c\omega)^2) \\ &= k^2 - 2km\omega^2 + m^2\omega^4 + c^2\omega^2 \end{aligned}$$

Sostituendo $\omega^2 = X$ otteniamo la seguente equazione di secondo grado:

$$den = k^2 - 2kmX + m^2X^2 + c^2X$$

Il minimo sarà in:

$$\begin{aligned} \omega_{min}^2 = X_{min} &= \frac{2km - c^2}{2 * m^2} \\ \omega_{min} &= \sqrt{\frac{2km - c^2}{2 * m^2}} \end{aligned}$$

Da notare che se $2km < c^2$, la radice non può essere calcolata e quindi non esistendo ω_{min} la soluzione corretta sarebbe stata la 1. Il nostro problema però presenta $2km > c^2$ quindi abbiamo la presenza di un massimo ed in particolare:

$$\omega_{min} = 0.6324 \text{ rad/s}$$

Per conferma possiamo calcolare $H(i\omega_{min})$ e $H(0)$:

$$|H(0)| = 0.0250 / |H(0.6324i)| = |0.0104 - 1.2163i| = 1.2163$$

Possiamo affermare che la risposta corretta è la 4 in quanto abbiamo un massimo di ampiezza nel range indicato.

2.1 Domanda 2

Data la seguente rappresentazione ingresso uscita:

$$0.5\ddot{y}(t) = -1\dot{y}(t) - 0.5y(t) + \sin(\omega * t) \quad (9)$$

dove $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ quale delle seguenti affermazioni è vera:

1. $y(t) \leq 5 \forall [t, \omega] \in R^2$;
2. è presente un picco di risonanza in 1 rad/s;
3. è presente un picco di risonanza tra 0.1 e 10 rad/s;
4. nessuna delle precedenti.

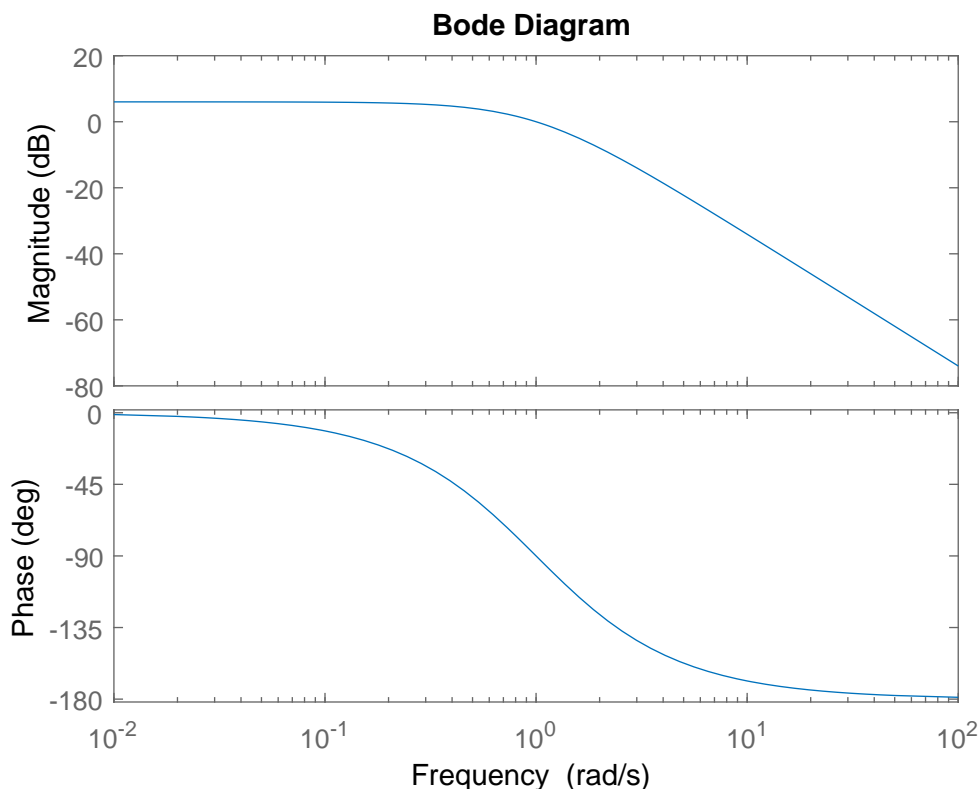
La risposta corretta è la numero 1. Infatti possiamo notare come $c > 2km$ per non possiamo identificare un $\omega_{min} \in R$. Questo significa che il sistema è sovrasmorzato e non presenta picchi di risonanza. Come conferma il grafico di bode sotto riportato.

2.2 Domanda 3

Data la seguente rappresentazione ingresso uscita:

$$102\ddot{y}(t) = -3y(t) + \sin(\omega * t) \quad (10)$$

dove $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ quale delle seguenti affermazioni è vera:



1. $y(t) \leq 100 \forall [t, \omega] \in R^2$;
2. é presente un picco di risonanza in 0.1715 rad/s;
3. é presente un picco di risonanza tra 10 e 30 Hz;
4. nessuna delle precedenti.

La risposta corretta é la numero 2. Possiamo notare come $\omega = 0.1715 \text{ rad/s}$ annulli il denominatore. Nel suo intorno avremo quindi che il modulo della funzione di trasferimento tende a infinito,.

2.3 Domanda 4

Data la seguente rappresentazione ingresso uscita:

$$44\ddot{y}(t) = -2\dot{y}(t) - 6y(t) + \sin(\omega * t) \quad (11)$$

dove $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ quale delle seguenti affermazioni é vera per $\omega = 0.1$ Hz:

1. $y(t) \approx 0.0874 \sin(0.626t - 3.0315)$;
2. $y(t) \approx 0.874 \sin(0.626t + 3.0315)$;
3. $y(t) \approx 0.474 \sin(0.626t + 3.0315)$;
4. nessuna delle precedenti.

La risposta corretta é la numero 1. La funzione di trasferimento calcolata in $\omega = 2 * \pi * 0.1$ rad/s vale:

$$H(i0.6283) = -0.0869 - 0.0096i$$

Il modulo sará quindi 0.0874 e la fase -3.0315 rad .

