UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Ingegneria
e Scienza dell'Informazione

Teoria dei Segnali

Parte Prima: Segnali e Sistemi

Lezione 2: Fondamenti matematici e statistici

Docente: Prof. Claudio Sacchi

Contenuti

- Numeri complessi;
- Funzioni ed operatori matematici particolari;
- Somma di due variabili aleatorie indipendenti;
- Funzioni generalizzate.

Numeri complessi

- **Formule di base**
  - E’ fondamentale, nel corso, saper usare le seguenti formule inerenti i numeri complessi:

$$\boxed{z = x + jy}$$

$$\boxed{x = \mathrm{Re}\{z\} \in \Re}$$

Parte reale

$$\boxed{y = \mathrm{Im}\{z\} \in \Re}$$

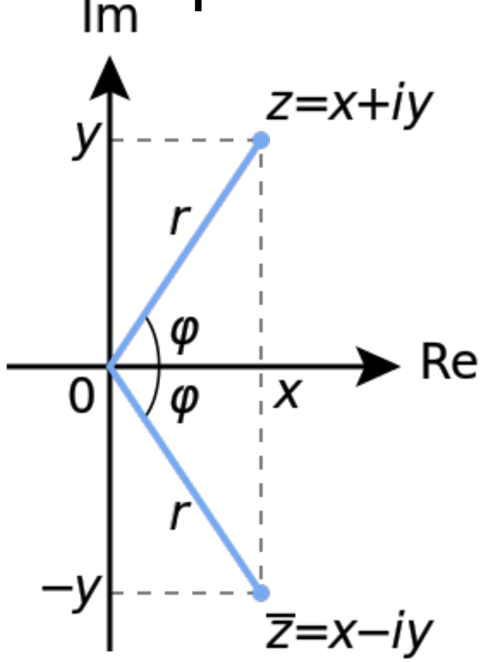
Parte immaginaria

$$\boxed{r = |z| = \left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|}$$

Modulo (intensità) di z

$$\boxed{\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Fase (argomento) di z



Numeri complessi

- **Formula di Eulero**
  - Altra formula <u>fondamentale</u> da tenere bene a mente:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

  - Da cui si ricava anche:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Numeri complessi

- **Numeri complessi in coordinate polari**
  - Questa rappresentazione deriva dalla formula di Eulero, infatti:

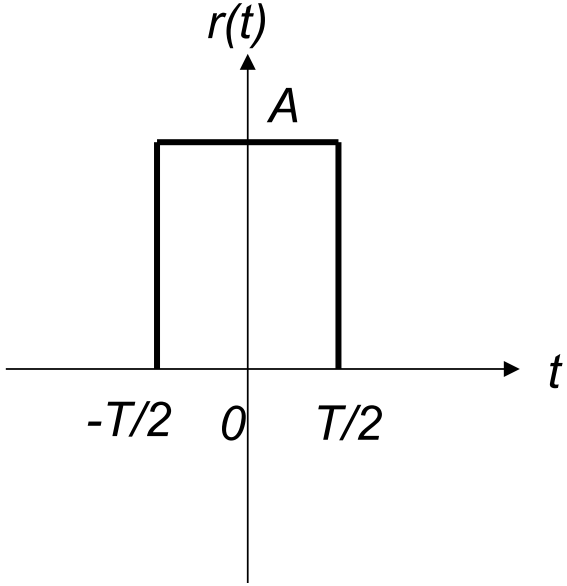
$$x + jy = r\cos\varphi + jr\sin\varphi = re^{j\varphi}$$

  - In pratica, il numero complesso viene identificato da un angolo (la fase) e dalla distanza (il modulo) da un punto fisso detto polo (è l’origine del piano complesso).

Funzioni ed operatori matematici particolari

- **Funzioni continue a tratti**
  - Nella Teoria dei Segnali si usano molto funzioni continue a tratti come la funzione rettangolo:

$$r(t) = \begin{cases} A & |t| \le T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$



Notazione:

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

Funzioni ed operatori matematici particolari

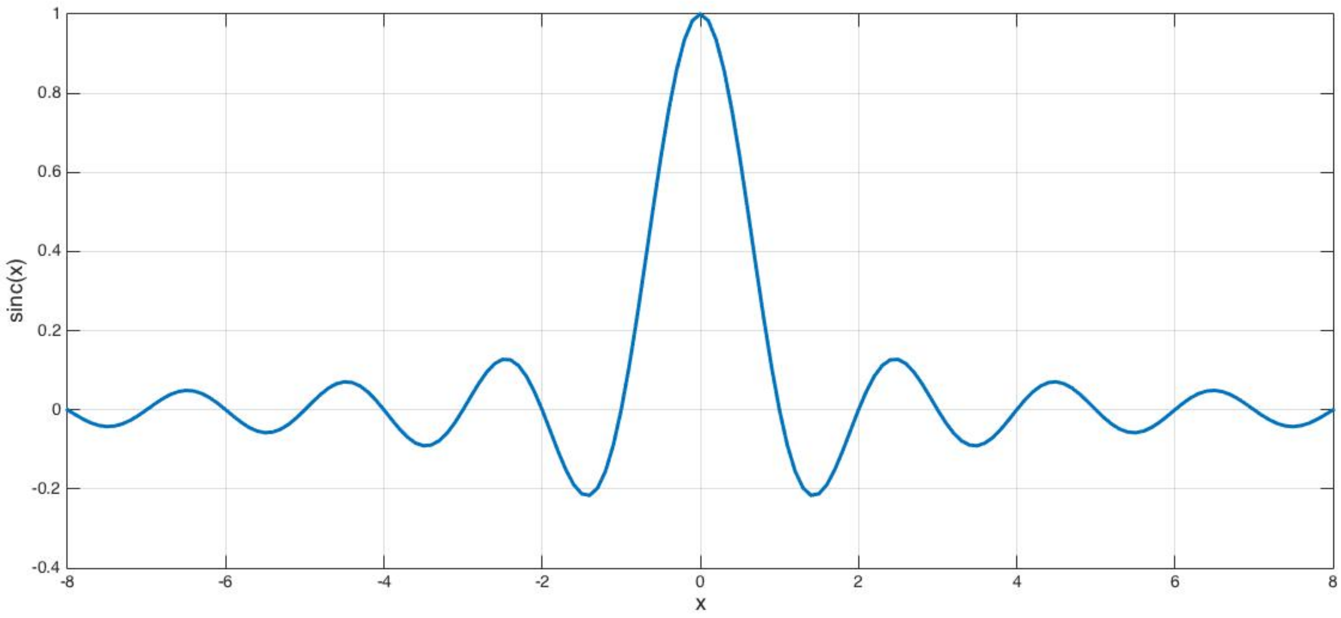
- **La funzione sinc**
  - Si tratta di una funzione analitica di grande importanza nell'elaborazione dei segnali:

$$\operatorname{sinc}(x) \hat{=} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

  - E' definita su tutto l'asse reale, eccetto in x=0, dove però esiste (reale) il suo limite. Tramite il teorema di De l'Hopital, si può verificare che tale limite vale 1.

Funzioni ed operatori matematici particolari

- **Grafico della funzione sinc**



NB: la sinc <u>si annulla per valori interi di *x*</u>

Funzioni ed operatori matematici particolari

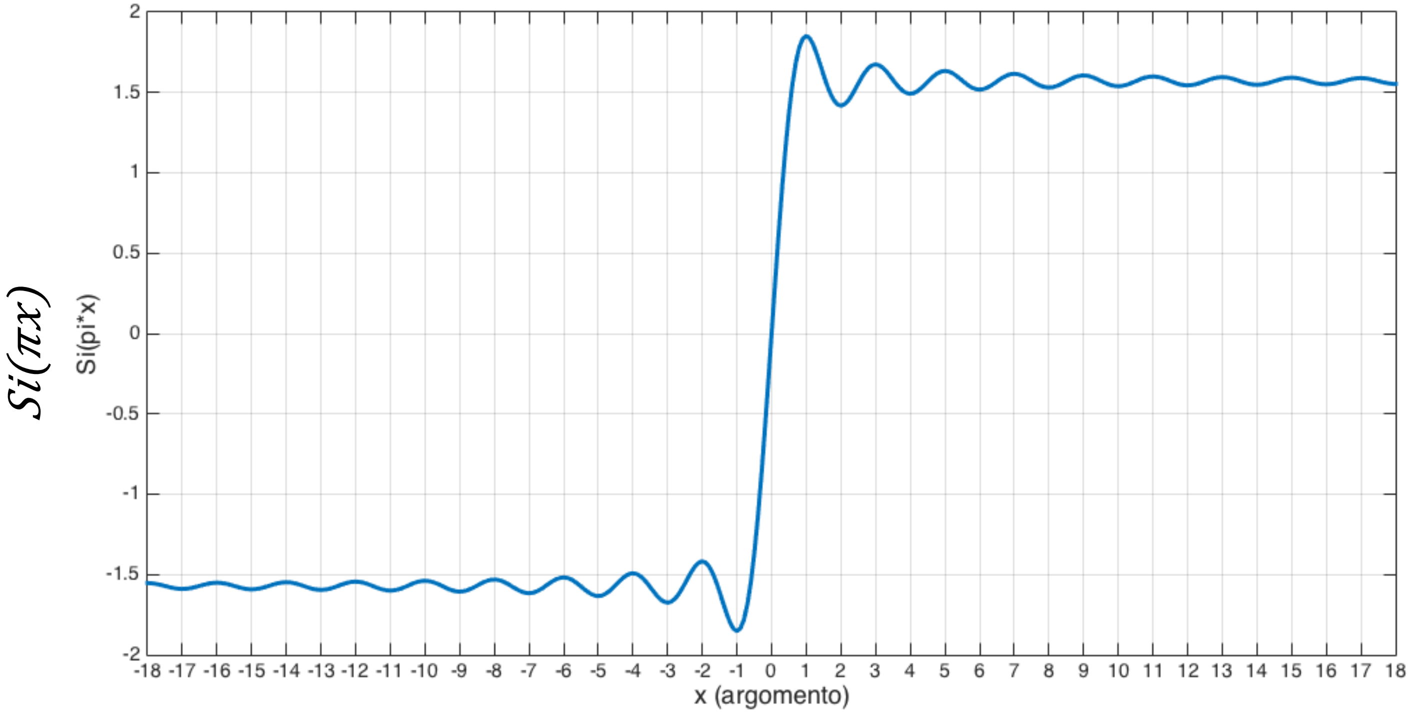
- **Integrale della funzione sinc**
  - La funzione *sinc(x)* ha un integrale espresso nei termini del <u>seno integrale</u>, una funzione definita in maniera <u>unicamente numerica </u>(come la *Q(x)* Gaussiana: ne viene fornito il grafico):

$$\int \operatorname{sinc}(x)\,dx = \frac{Si(\pi x)}{\pi} + K$$

$$Si(x) \hat{=} \int_0^x \frac{\sin(y)}{y}\,dy$$

Funzioni ed operatori matematici particolari

- **Grafico della funzione «seno integrale»**
  - Di seguito il grafico (ricavato in MATLAB)



Funzioni ed operatori matematici particolari

- **Funzione «coseno integrale»**
  - Esiste anche la funzione «coseno integrale» (primitiva di *cosx/x*), definita come:

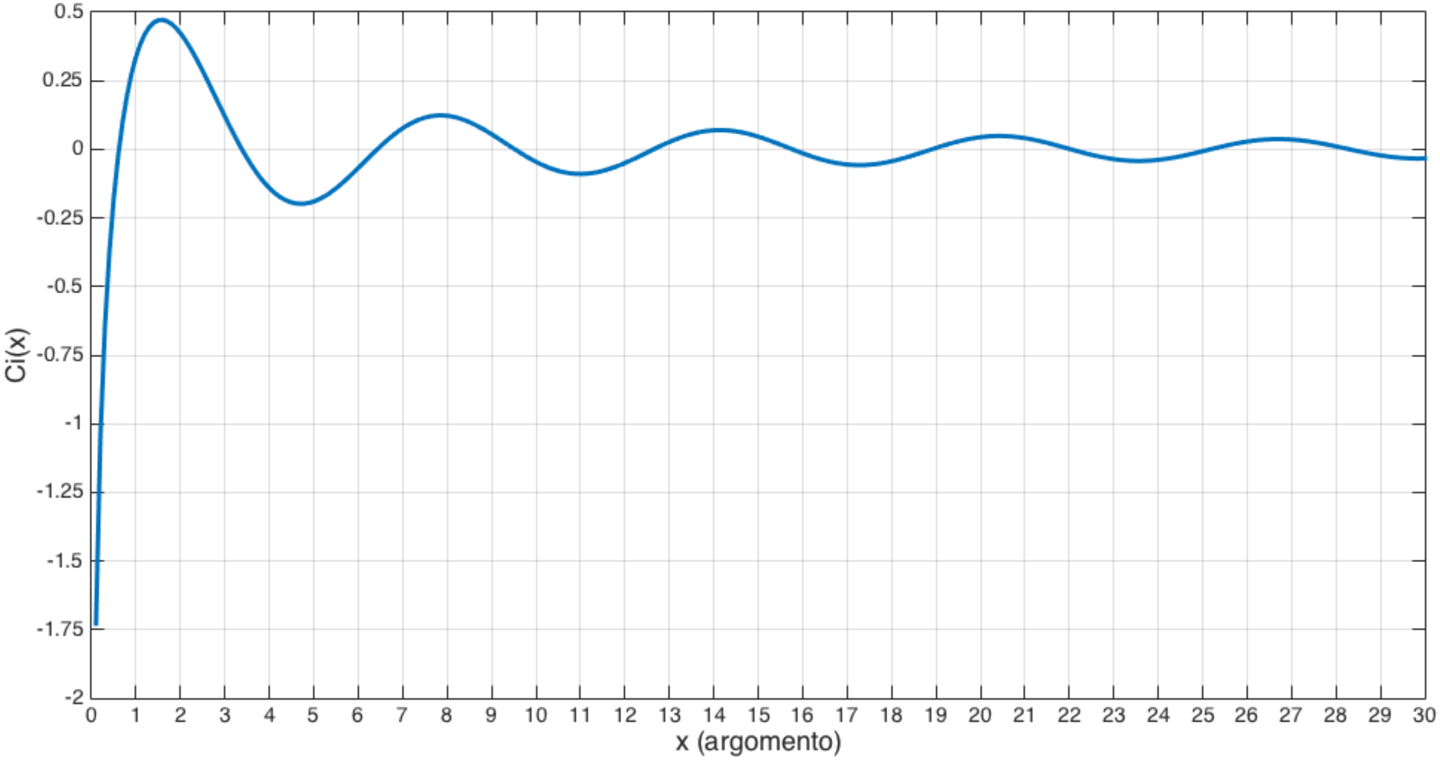
$$Ci(x) \hat{=} \gamma + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos(y)-1}{y}\,dy$$

gamma=0.5772 è la costante di Eulero-Mascheroni

  - E' definita in *x*>0 ed il suo grafico è riportato nella slide seguente.

Funzioni ed operatori matematici particolari

- **Grafico della funzione «coseno integrale»**
  - Di seguito il grafico MATLAB:



Funzioni ed operatori matematici particolari

- **Il prodotto (o integrale) di convoluzione**
  - E' un'operazione matematica di grande importanza nell'elaborazione dei segnali. Di seguito vedremo il perché;
  - Il prodotto di convoluzione[1] tra due funzioni è definito nella seguente maniera:

$$x(t) * y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) y(t-\alpha)\, d\alpha$$

[1] dal latino «convolvere» ovvero: avvolgere, avviluppare

Funzioni ed operatori matematici particolari

- **Proprietà della convoluzione**
  - Come un vero prodotto, la convoluzione è caratterizzata da proprietà quali:
    - Commutatività:

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

    - Distributività:

$$x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

Motivazione: sono proprietà dell'integrazione

Somma di variabili aleatorie indipendenti

- **Somma di due variabili aleatorie indipendenti**
  - Se abbiamo due variabili aleatorie indipendenti, arbitrariamente distribuite, la funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria ottenuta sommandole insieme è data dal prodotto di convoluzione delle due variabili aleatorie:

$$Z = X + Y \Rightarrow f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z)$$

  - Questa proprietà si dimostra, partendo dalla densità di probabilità congiunta delle due variabili aleatorie.

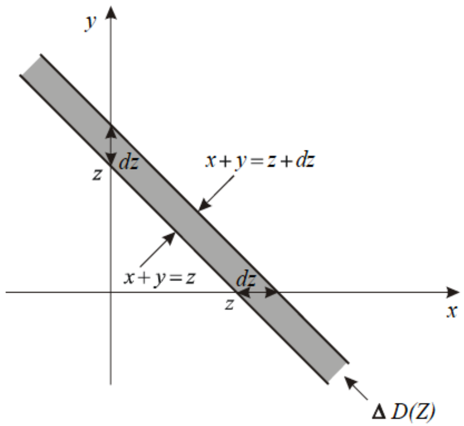
Somma di variabili aleatorie indipendenti

- **Dimostrazione della precedente proposizione (1):**

$$f_z(z)dz = \Pr\{z \le Z \le z + dz\} = \Pr\{z \le X + Y \le z + dz\}$$

$$z \le X + Y \le z + dz \Leftrightarrow (X, Y) \in \Delta D(Z)$$

$$\Rightarrow \Pr\{z \le X + Y \le z + dz\} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(y - z, y)\, dy\right] dz$$



(poiché dz è infinitesimo)

CONTINUA:

Somma di due variabili aleatorie indipendenti

- **Dimostrazione della precedente proposizione (2):**

$$f_Z(z) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}\left(y - z, y\right) dy \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(y - z\right) f_Y\left(y\right) dy =$$

$$= \left(f_X * f_Y\right)\left(z\right)$$

(poiché X e Y sono indipendenti)

  - Questo risultato <u>è di grande importanza</u> e va tenuto <u>sempre bene a mente</u>.

Funzioni generalizzate

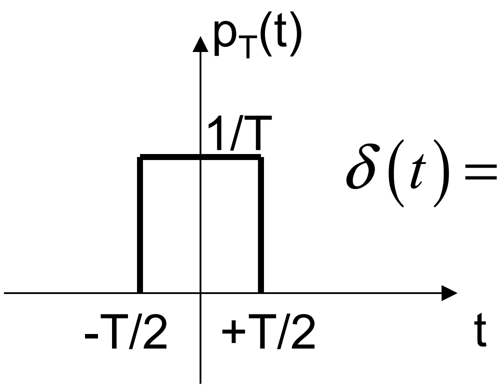
- **La funzione delta di Dirach (1)**
  - E’ una funzione matematica «generalizzata», ovvero <u>definita unicamente sulla base delle sue proprietà</u>:
  - Essa è stata formalmente definita dal fisico francese Paul Dirac nel 1935;
  - Dicesi «delta di Dirac» la funzione «delta» che, data una generica funzione *f(t)*, continua ed integrabile, soddisfa la seguente uguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$$

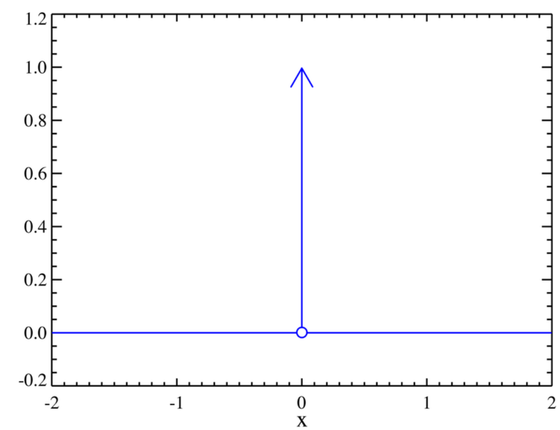
Funzioni generalizzate

■ La funzione delta di Dirach (2)

- La funzione delta è, in pratica, un passaggio al limite applicato alla funzione rettangolo di area unitaria:



$$\delta(t)=\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)=\begin{cases}+\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$



La freccia rivolta verso l’alto indica che in *t=0*, la funzione va all’infinito, mentre vale 0 per qualunque *t* non nullo.

Funzioni generalizzate

- **Proprietà che definiscono la funzione delta di Dirach**
  - Sono tre proprietà e derivano dalla sua definizione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{dt} = 1 \Rightarrow \int_{a}^{b} \delta(t)\,\mathrm{dt} = \begin{cases} 1 & a \le 0 \le b \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Prima proprietà: **area** (unitaria)

$$x(t) * \delta(t-T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\delta(t-T-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = x(t-T)$$

Seconda proprietà: **convoluzione** (o ritardo)

$$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\pm t_0)\delta(t \pm t_0)$$

Terza proprietà: **campionamento**

Funzioni generalizzate

- **Funzione di densità di probabilità di variabili aleatorie discrete (1)**
  - Una variabile aleatoria discreta, non ammette, formalmente, funzione di densità di probabilità, bensì <u>la funzione frequenza</u>, ovvero:

$$f_X\left(x_i\right) = \Pr\left\{X = x_i \quad i = 1, 2, .., N\right\}$$

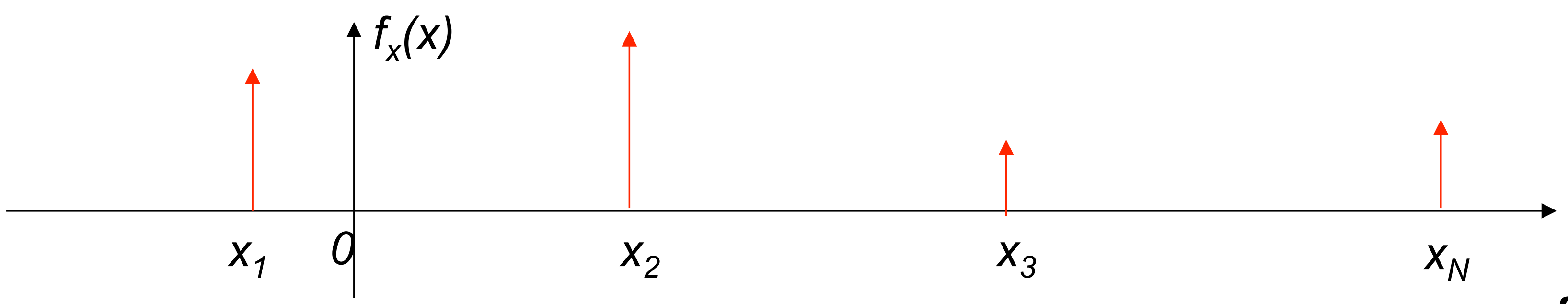
  - Tuttavia, è possibile definire <u>in maniera impropria</u>, anche per variabili aleatore discrete, una funzione di densità di probabilità, servendosi della delta di Dirac.

Funzioni generalizzate

- **Funzione di densità di probabilità di variabili aleatorie discrete (2)**
  - Data la variabile aleatoria della slide precedente:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{N} \Pr\{X = x_i\}\,\delta(x - x_i)$$

  - Graficamente, abbiamo un «pettine» di delta di Dirac, ognuna centrata in x_i ed ognuna di ampiezza pari alla probabilità di occorrenza del valore parametrico.



Funzioni generalizzate

- **Funzione di densità di probabilità di variabili aleatorie discrete (3)**
  - La forma analitica che abbiamo considerato è veramente una densità di probabilità? La risposta è si, perché soddisfa le tre proprietà che caratterizzano una pdf:

$$f_X(x) \geq 0 \quad OK$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \Pr\{X = x_i\} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_i)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \Pr\{X = x_i\} = 1 \quad OK$$

$$\Pr\{a \leq X \leq b\} = \sum_{i=1}^{N} \Pr\{X = x_i : a \leq x_i \leq b\} = \sum_{i=1}^{N} \Pr\{X = x_i\} \int_{a}^{b} \delta(x - x_i)\,dx =$$

$$= \int_{a}^{b} f_X(x)\,dx \quad OK$$