Linguaggi formali e compilazione

Corso di Laurea in Informatica

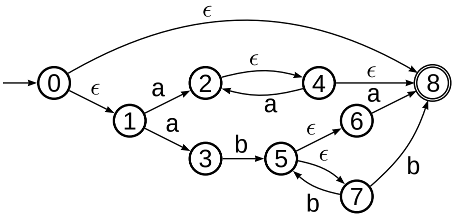
A.A. 2012/2013

Automi a stati finiti

Dalle espressioni regolari agli automi

Generalità delle ϵ-transizioni

- Gli automi non deterministici, come abbiamo visto, possono avere due sorgenti di non determinismo:



1. da uno stesso stato possono uscire più transizioni etichettate con lo stesso simbolo;
2. da uno stato possono anche uscire una o più transizioni etichettate con ϵ.

Generalità delle ϵ-transizioni

- Si può dimostrare che per ogni ASFND con ϵ-transizioni esiste un ASFND senza ϵ-transizioni equivalente (cioè che riconosce lo stesso linguaggio).
- È vero anche il contrario, e cioè che dato un automa non deterministico generale (in cui le due “forme” di non determinismo sono presenti) ne esiste uno equivalente in cui sono presenti solo ϵ-transizioni.
- La trasformazione da espressioni regolari ad automi, che vedremo subito dopo, genera precisamente automi di questo secondo tipo: cioè automi non deterministici in cui il non determinismo è dato solo dalla presenza di ϵ- transizioni.

Automi finiti ed espressioni regolari

- Vedremo dunque ora la costruzione che, a partire da una generica espressione regolare $\mathcal{E}$, produce un ASFND che riconosce lo stesso linguaggio denotato da $\mathcal{E}$.
- Più avanti (per una sorta di “completezza” del quadro generale sui linguaggi regolari) vedremo anche che è vero il viceversa, e cioè che se un linguaggio è risonoscibile da un automa a stati finiti allora esso è regolare.
- Potremo quindi concludere che *un linguaggio è regolare se e solo esiste un automa finito che lo riconosce*.

Generalità sulla costruzione

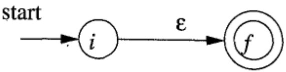
- L'idea alla base della costruzione è di *analizzare la struttura* dell'espressione regolare e di costruire (e poi assemblare) pezzi di automa corrispondenti via via più complessi.
- Naturalmente ci servono (come in tutte le opere di assemblaggio) i *componenti base*, e questi sono gli automi corrispondenti alle espressioni regolari di base.
- Dopodiché avremo bisogno di *regole per comporre gli automi* di base secondo che rifletteranno le regole di definizione delle espressioni regolari (e cioè unione, concatenazione e chiusura).

Generalità sulla costruzione (continua)

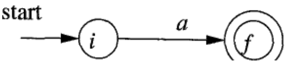
- Come già anticipato, gli ASFND che verranno generati avranno ϵ-transizioni come unica sorgente di non determinismo.
- Conviene però procedere (per ragioni che diventeranno chiare in seguito) ad una ulteriore *normalizzazione* degli automi.
- Gli automi che costruiremo avranno dunque due soli "tipi" di stato:
    1. stati *deterministici* dai quali esce una sola transizione etichettata con un simbolo dell'alfabeto Σ di input;
    2. stati *non deterministici* dai quali escono al più due transizioni etichettate ϵ.
- Inoltre, avranno un solo stato iniziale e un solo stato finale.
- Tutti gli schemi che vedremo sono tratti dal libro *Compilatori: Principi, tecniche e strumenti* (citato sul sito Web).

Costruzione dell'automa

- Poiché le espressioni regolari di base corrispondono alla stringa vuota e ai simboli dell'alfabeto, i "pezzi base" per la costruzione degli automi saranno proprio (e solo) in grado di riconoscere ϵ e i singoli elementi di Σ.
- Avremo dunque il componente base



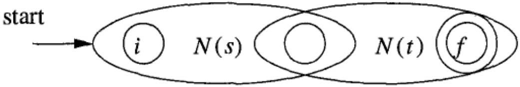
- come pure, per ogni a $\in \Sigma$, anche il componente base:



- Si noti quindi che, per ogni simbolo (lettera o ϵ) si introducono due nuovi stati.
- Nel seguito, indicheremo con $\mathcal{N}(s)$ l'automa corrispondente all'espressione regolare s.

Costruzione dell'automa (continua)

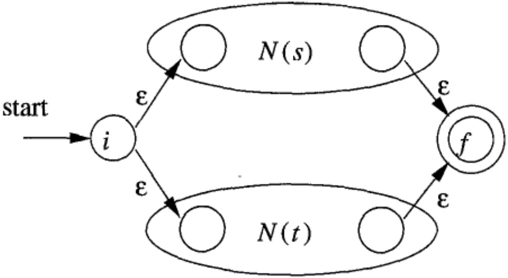
- Come sappiamo, ci sono 3 regole per la composizione delle espressioni regolari. Per ognuna di esse avremo dunque una corrispondente regola di composizione degli automi.
- La prima regola che consideriamo è quella per la concatenazione di due espressioni regolari s e t, illustrata dalla seguente schema:



- Poiché lo stato iniziale di $\mathcal{N}(t)$ coincide con lo stato finale di $\mathcal{N}(s)$, possiamo concludere che l'operazione di concatenazione addirittura riduce il numero di stati utilizzati.

Costruzione dell'automa (continua)

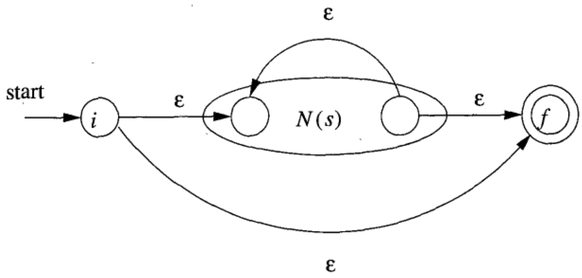
- La seconda regola è relativa all'unione di due espressioni regolari *s* e *t*:



- Un'operazione di unione introduce quindi due nuovi stati.

Costruzione dell'automa (continua)

- L'ultima regola riguarda la chiusura di un'espressione regolare *s*:



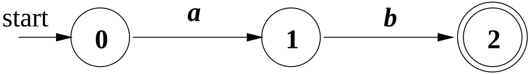
- Anche la chiusura introduce quindi due nuovi stati.

Costruzione dell'automa (continua)

- Si noti che l'assemblaggio di due componenti può rendere necessaria una ridefinizione dei nomi degli stati (nel caso in cui i componenti assemblati abbiano stati etichettati allo stesso modo).
- La costruzione è corretta (proprietà che non dimostreremo formalmente) e gli automi risultanti godono di ulteriori interessanti proprietà:
  1. detto r il numero di operatori ed operandi presenti nell'espressione regolare (cioè la lunghezza della formula, parentesi escluse), il numero di stati è al più $2r$ mentre il numero di transizioni è al più $4r$;
  2. esiste un solo stato iniziale, senza transizioni entranti, e un solo stato finale, senza transizioni uscenti;
  3. se si eccettua il caso base del riconoscimento di ϵ ogni stato non deterministico ha esattamente due transizioni uscenti.

Esempio

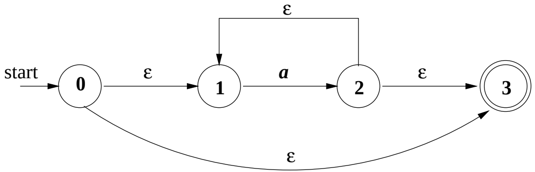
- Costruiamo l'automa corrispondente all'espressione regolare $\mathbf{b}(\mathbf{ab} + \mathbf{a}^*\mathbf{c})$.
- La costruzione deve naturalmente rispettare le regole di precedenza, e dunque riflette la seguente parentesizzazione: $\mathbf{b}((\mathbf{ab}) + ((\mathbf{a}^*)\mathbf{c}))$.
- Come primo passo costruiamo l'ASFND per il riconoscimento di **ab** a partire dagli automi che riconoscono una sola lettera:



- Si noti che è stata operata una ridefinizione degli stati.

Esempio (continua)

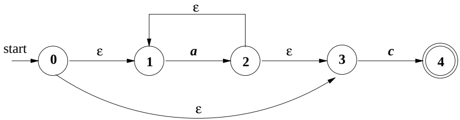
- Come secondo passo costruiamo l'automa per il riconoscimento di $\mathbf{a}^*$ a partire dall'automa che riconosce **a**.

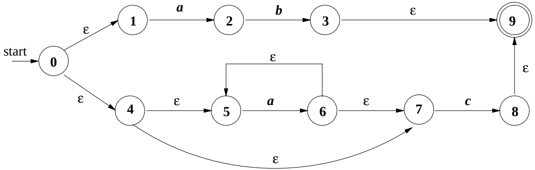


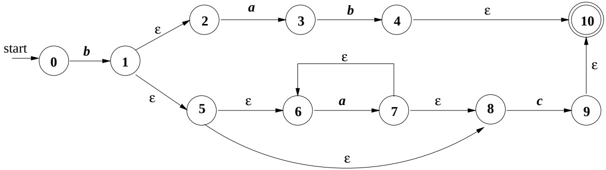
- Anche in questo caso si è operata una ridefinizione degli stati (in modo da avere sempre 0 come stato iniziale).

Esempio (continua)

- I passi successivi consistono nella creazione degli automi per il riconoscimento, rispettivamente, di $\mathbf{a}^*\mathbf{c}$, di $\mathbf{ab} + \mathbf{a}^*\mathbf{c}$ e infine di $\mathbf{b}(\mathbf{ab} + \mathbf{a}^*\mathbf{c})$.





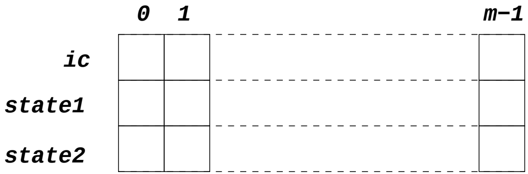


Il punto della situazione

- Data una qualunque espressione regolare $\mathcal{E}$, siamo in grado (per il momento, “a mano”) di definire un ASFND $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{E})$ che riconosce il linguaggio denotato da $\mathcal{E}$.
- Dato $\mathcal{N}$, siamo in grado, mediante l’algoritmo di *Subset construction*, di costruire un automa deterministico equivalente $\mathcal{D}$.
- Infine, siamo in grado di simulare $\mathcal{D}$.
- Complessivamente disponiamo di un processo algoritmico che consente di riconoscere stringhe descritte da (che hanno un match con) ogni data espressione regolare.
- L’automatizzazione del processo completo si potrà attuare solo dopo aver introdotto il parsing.

Rappresentazione interna

- Gli automi che derivano dalla costruzione appena descritta sono rappresentabili in modo efficiente dal punto di vista del consumo di memoria.
- La rappresentazione può essere fatta mediante tre *array paralleli*, che chiameremo `ic`, `state1` e `state2`:



- Le posizioni di indice *i* nei tre array rappresentano lo stato *i* o, meglio, le transizioni uscenti da *i*.

Rappresentazione interna (continua)

- Il generico stato i può essere di uno dei seguenti tipi:

1. *deterministico*, con un'unica transizione $i \rightarrow j$ etichettata $a \in \Sigma$. In tal caso avremo:

	i
ic	a
state1	j
state2	

2. *non deterministico*, con due transizioni $i \rightarrow j$ e $i \rightarrow k$ etichettate ϵ (possiamo trattare l'unico caso di unica transizione ponendo $k = j$). In tal caso avremo:

	i
ic	ε
state1	j
state2	k

Esercizi proposti

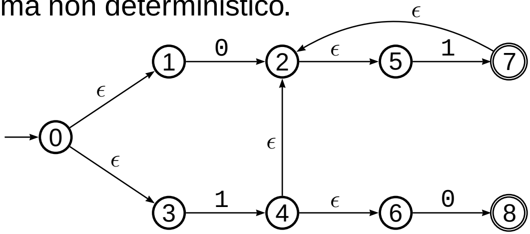
- Si fornisca un automa a stati finiti che riconosce il linguaggio denotato dalla seguente espressione regolare:

$$(\mathbf{ba} \mid \mathbf{b})^* \, \mathbf{ba}^* \, (\mathbf{ab} \mid \mathbf{b})$$

- Si costruisca l'ASFND corrispondente (secondo la costruzione vista) a ciascuna delle seguenti espressioni regolari:
  - $\mathbf{a}^*\mathbf{b}\,(\mathbf{a} \mid \mathbf{b})$;
  - $1^*\,(\mathbf{0} \mid \epsilon)\,1^*\,(\mathbf{0} \mid \epsilon)\,1^*$;
  - $(\mathbf{ba} \mid \mathbf{b})^*\,\mathbf{ba}^*\,(\mathbf{ab} \mid \mathbf{b})$.
- Si dimostri che nessuno dei seguenti linguaggi è regolare:
  - $\{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$;
  - $\{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^m \mid m > n\}$;
  - $\{\mathbf{1}^n \mid n \text{ primo}\}$.

Alcuni esercizi dati all'esame

- Utilizzando la costruzione vista a lezione, si mostri l'automa deterministico equivalente al seguente automa non deterministico.



- Sia $\Sigma = \{x, y, z\}$ e si consideri il linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ così definito:

$$L = \{xy\alpha yx | \alpha \in \Sigma^*, \nexists \beta, \gamma \in \Sigma^* \text{ t.c. } \alpha = \beta yx\gamma\}$$

  α non può cioè contenere yx come sottostringa. L modella i commenti in linguaggi come C o C++. Si costruisca un ASFD che riconosce le stringhe di L e si scriva poi un'e.r. che definisce L.