UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Ingegneria
e Scienza dell'Informazione

Teoria dei Segnali

Parte Seconda: Fondamenti di elaborazione dei segnali

Lezione 1: Rappresentazione in frequenza di segnali deterministici periodici: la serie di Fourier

Docente: Prof. Claudio Sacchi

Contenuti

- Analisi armonica di segnali periodici: la serie di Fourier;
- Il criterio di Dirichelet;
- Spettri in ampiezza e fase;
- Esempi di calcolo di spettri;
- Il fenomeno di Gibbs;
- L'identità di Bessel-Parseval.

Analisi armonica di segnali periodici: la serie di Fourier

- **Premessa**
  - Nella lezione 1 della parte prima del corso abbiamo definito un generico segnale periodico non sinusoidale;
  - Esso è, in pratica, la ripetizione con un certo periodo, di una forma d'onda nota a durata finita;
  - Come si può analizzare un segnale di questo genere? L'idea venne al matematico e fisico francese Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), che nel 1807 formalizzò la scomposizione di un segnale periodico in una serie infinita di seni e coseni.

Serie di Fourier

- **Definizione**
  - Dato un generico segnale periodico di periodo T_0, esso può essere sviluppato mediante la seguente serie (detta serie di Fourier):

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T_0} + \theta_k\right)$$

  - Si noti che le oscillazioni della serie hanno frequenza multipla intera della frequenza $1/T_0$, detta frequenza fondamentale;
  - Il termine k-esimo della serie è detto armonica di ordine k, mentre il primo termine della serie (k=1) è detto armonica fondamentale. Il termine non oscillante a_0 è detto componente continua.

Serie di Fourier

- **Sviluppo in forma complessa (1)**
  - Per effettuare i calcoli, è molto più semplice esprimere la serie di Fourier in maniera complessa, partendo dall'espressione di Eulero del coseno:

$$\cos\left(2\pi k f_0 t + \theta_k\right) = \frac{e^{j\left(2\pi k f_0 t + \theta_k\right)} + e^{-j\left(2\pi k f_0 t + \theta_k\right)}}{2} \qquad f_0 = 1/T_0$$

  - La serie di Fourier della slide precedente viene, pertanto così riscritta:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2} e^{j\theta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2} e^{-j\theta_k} e^{-j2\pi k f_0 t}$$

Serie di Fourier

- **Sviluppo in forma complessa (2)**
  - E' anche possibile esprimere questa formula in modo assai più compatto:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

  - Ove:

$$X_k \triangleq \frac{a_k}{2} e^{j\theta_k} \quad k = 1,2,.. \qquad X_k \triangleq \frac{a_{-k}}{2} e^{j\theta_{-k}} \quad k = ...,-2,.-1$$

$$X_0 \triangleq a_0$$

Serie di Fourier

- **Coefficienti della serie di Fourier**
  - Il coefficiente X_n (*n* generico) della serie di Fourier complessa si ricava nella seguente maniera (si dimostra ripetendo la stessa operazione sulla serie):

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-2\pi j n f_0 t}\, dt$$

  - Si nota facilmente che per *n*=0, il coefficiente X_0 è il valor medio della forma d'onda nel periodo.

Serie di Fourier

- **Relazioni di Fourier: analisi e sintesi**
  - La serie di Fourier, quindi, si esprime in due relazioni:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \qquad X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-2\pi jkf_0 t}\, dt$$

  - La seconda relazione (quella dei coefficienti) consente di analizzare un segnale periodico sulla base del cosiddetto "contenuto armonico": il coefficiente X_k tiene conto del peso dell'armonica di ordine k nel segnale x(t);

  - La prima relazione (quella a sinistra) permette, invece, di sintetizzare il segnale *x(t)* sulla base del suo contenuto armonico, e, noti i coefficienti X_k, consente di ricostruire *x(t)*.

Criterio di Dirichelet

- **Quandlo converge la serie di Fourier?**
  - Essendo una serie di funzioni, dobbiamo preoccuparci di quando la serie di Fourier <u>converge almeno in maniera puntuale</u> al segnale *x(t)*;
  - Solo in quel caso, essa potrà descrivere il segnale periodico nei termini delle sue componenti armoniche;
  - Un insieme di condizioni sufficienti che garantiscono la possibilità di sviluppare un segnale in serie di Fourier è il cosiddetto <u>criterio di Dirichelet</u>.

Criterio di Dirichelet

- **Enunciazione del criterio**
  - Se:
    - *x(t)* è assolutamente integrabile nel periodo;
    - *x(t)* è continua nel periodo o presenta in un periodo un numero finito di discontinuità di prima specie;
    - *x(t)* è derivabile rispetto al tempo nel periodo, al più escluso un numero finito di punti nei quali esiste derivata destra e sinistra;
  - Allora:
    - la serie di Fourier converge al valore assunto da *x(t)* nei punti in cui questa è continua, ed alla semisomma dei limiti destro e sinistro nei punti in cui presenta eventuali discontinuità di prima specie.

Spettri in ampiezza e fase

- **Come si usa la serie di Fourier?**
  - Sostanzialmente, il segnale periodico può essere rappresentato dalla successione dei coefficienti complessi di Fourier, ovvero:

$$x(t) \Leftrightarrow \{X_k \quad k = 0,1,2,....\}$$

  - Infatti, noti tali coefficienti, è possibile ricostruire *x(t)* mediante la relazione di sintesi;
  - Quale informazione contengono i coefficienti di Fourier? Sostanzialmente, l'ampiezza e la fase delle diverse armoniche in cui è scomposto il segnale.

Spettri in ampiezza e fase

- **Spettro: definizione**
  - Si può, quindi, disegnare un grafico (anzi: due grafici) che, per ogni armonica di ordine *k*, tracci i <u>valori di ampiezza e di fase di quell'armonica</u>, ovvero:

$$|X_k| = \begin{cases} \left|\dfrac{a_k}{2}\right| & k = 1,2,.. \\ \left|\dfrac{a_{-k}}{2}\right| & k = -1,-2,.. \\ |a_0| & k = 0 \end{cases}$$

$$\arg(X_k) = \begin{cases} \theta_k & k = 1,2,.. \\ \theta_{-k} & k = ..,-2,-1,... \\ \theta_0 & k = 0 \end{cases}$$

Tali grafici prendono il nome, rispettivamente, di <u>spettro in ampiezza e spettro in fase</u>.

Spettri in ampiezza e fase

- **Spettro: significato fisico**
  - La parola “spettro”, in questo senso, deve intendersi come “gamma di rappresentazione” o “gamma di visione” e nasce dalla Fisica;
  - Infatti, nel campo della spettroscopia, si analizza la composizione dei materiali attraverso le “righe” di emissione luminosa (corrispondenti a colori) caratteristiche dei diversi elementi chimici;
  - Nel caso dello spettro dei segnali periodici, noi riferiremo le righe spettrali al valore dell’ampiezza e/o della fase delle armoniche costituenti il segnale sviluppato in serie di Fourier.

Spettri in ampiezza e fase

- **Proprietà degli spettri**
  - I coefficienti (complessi) di Fourier sono caratterizzati dalla cosiddetta simmetria coniugata o hermitiana, ovvero:

$$X_k = X_{-k}^* \Leftrightarrow \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| \\ \arg(X_k) = -\arg(X_{-k}) \end{cases}$$

  - Altra proprietà è relativa alla linearità, dati due segnali periodici *x(t)* ed *y(t)* avremo che:

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \Rightarrow Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$$

z(t) è periodico con lo stesso periodo di *x* e *y*

Spettri in ampiezza e fase

- **Effetti della simmetria hermitiana (1)**
  - Se il segnale periodico *x(t)* è <u>pari</u> (*x(t)=x(-t)*) si verifica che:

$$X_k = X_{-k} \in \Re$$

  - Pertanto, la serie di Fourier potrà essere così riscritta:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} =$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \left(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t}\right) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos\left(2\pi k f_0 t\right)$$

Diventa una serie <u>di soli coseni</u> ed è <u>a valori reali</u>.

Spettri in ampiezza e fase

- **Effetti della simmetria hermitiana (2)**
  - Il coefficiente di Fourier per *x(t)* pari si ottiene in forma semplificata:

$$X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t)\cos\left(2\pi k f_0 t\right) dt \in \Re$$

  - In maniera del tutto analoga si verifica che per una segnale periodico x*(t)* dispari (*x(-t)=-x(t)*):

$$X_{-k} = -X_k \in \Im \Rightarrow X_0 = 0$$

Spettri in ampiezza e fase

- **Effetti della simmetria hermitiana (3)**
  - Quindi una funzione *x(t)* dispari, si potrà esprimere in serie di seni e sarà puramente immaginaria:

$$x(t) = 2j\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \sin(2\pi k f_0 t)$$

  - I coefficienti di Fourier, puramente immaginari, si calcolano con la seguente formula semplificata

$$X_k = -\frac{2j}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)\,dt \in \Im$$

Spettri in ampiezza e fase

- **Effetti della simmetria hermitiana (4)**
  - Se avessimo un segnale periodico *x(t)* di tipo alternativo, ovvero:

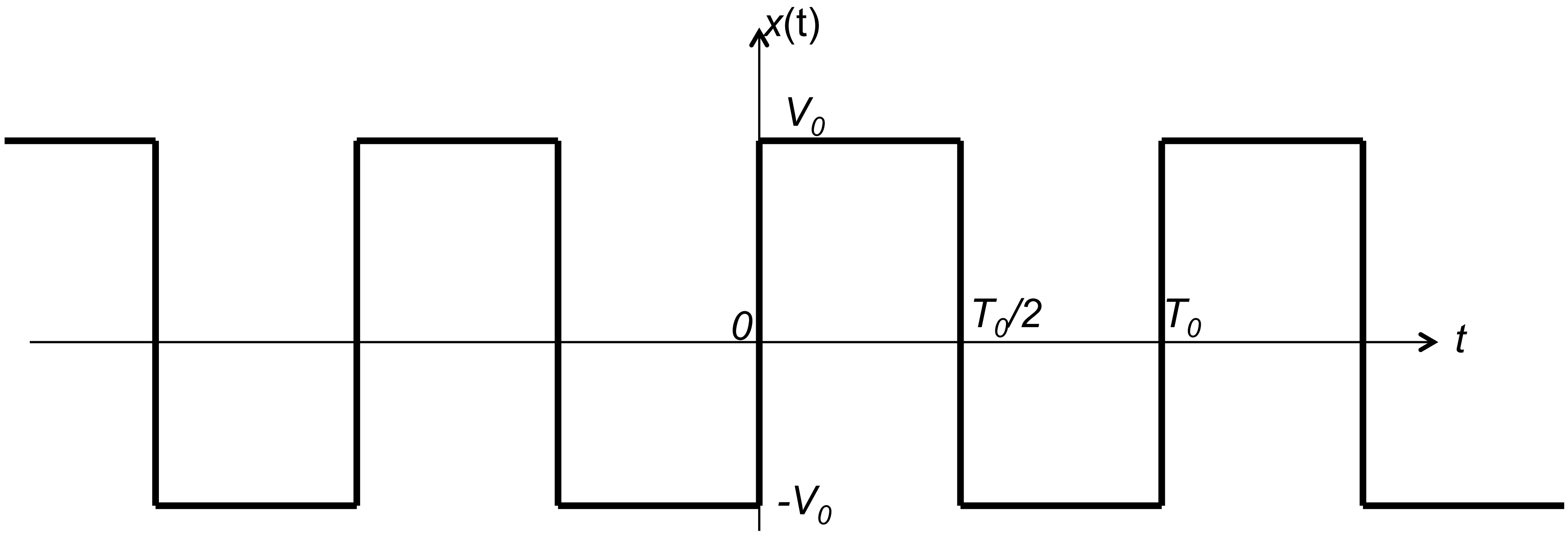
$$x\left(t+T_0/2\right)=-x(t)$$

  - Allora, il coefficiente della serie di Fourier X_k è nullo per tutti i valori pari dell'indice *k* (si dimostra facilmente calcolando l'integrale.
  - Pertanto, nel caso di segnali alternativi, la serie di Fourier può essere scritta in maniera convenientemente semplificata:

$$x\left(t\right)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}X_{2p+1}e^{j2\pi\left(2p+1\right)f_0t}$$

Esempi di calcolo di spettri

- **Onda quadra (1)**
  - E' un segnale deterministico che vale alternativamente $+V_0$ e $-V_0$, con un periodo pari a T_0;



Esempi di calcolo di spettri

- **Onda quadra (2)**
  - La condizione di Dirichelet è soddisfatta per il nostro segnale, quindi si può sviluppare in serie di Fourier;
  - Notiamo, innanzitutto, che è un segnale dispari e quindi i coefficienti di Fourier sono puramente immaginari;
  - Ma non solo: essendo anche un segnale alternativo, i coefficienti di Fourier di indice pari sono identicamente nulli;
  - Quindi si possono applicare formulazioni semplificate.

Esempi di calcolo di spettri

- **Onda quadra (3)**
  - Per valori di k dispari, si ottengono i coefficienti di Fourier non nulli e quindi la serie di Fourier:

$$X_k = -\frac{2j}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\sin\left(2\pi k f_0 t\right)dt = -\frac{2j}{T_0}\int_0^{T_0/2} V_0 \sin\left(2\pi k f_0 t\right)dt =$$

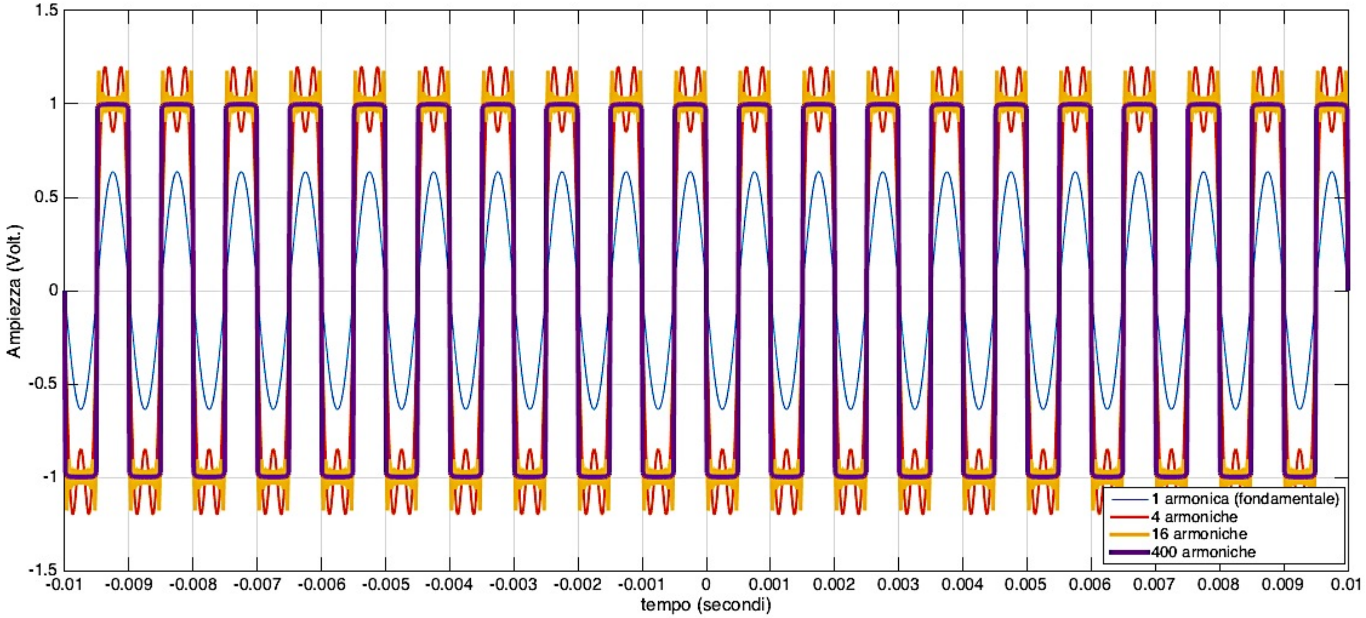
$$= j\frac{2V_0\cos\left(2\pi k f_0 t\right)}{2\pi k f_0 T_0}\Bigg|_0^{T_0/2} = j\frac{V_0}{\pi k}\left[\cos\left(\pi k\right)-1\right] = j\frac{V_0}{\pi k}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -2jV_0/\pi k & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2\pi k f_0 t} = \frac{2V_0}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(2\pi\left(2p-1\right)f_0 t\right)}{\left(2p-1\right)}$$

x(t) è espresso in serie di seni, poiché ha simmetria dispari

Esempi di calcolo di spettri

- **Onda quadra: sintesi**
  - Mostriamo che la serie vista nella slide precedente <u>in qualche modo</u> converge al segnale desiderato (implementazione MATLAB della serie):



Parametri numerici:

- T_0=1msec (f_0=1KHz)
- V_0=1Volt

Esempi di calcolo di spettri

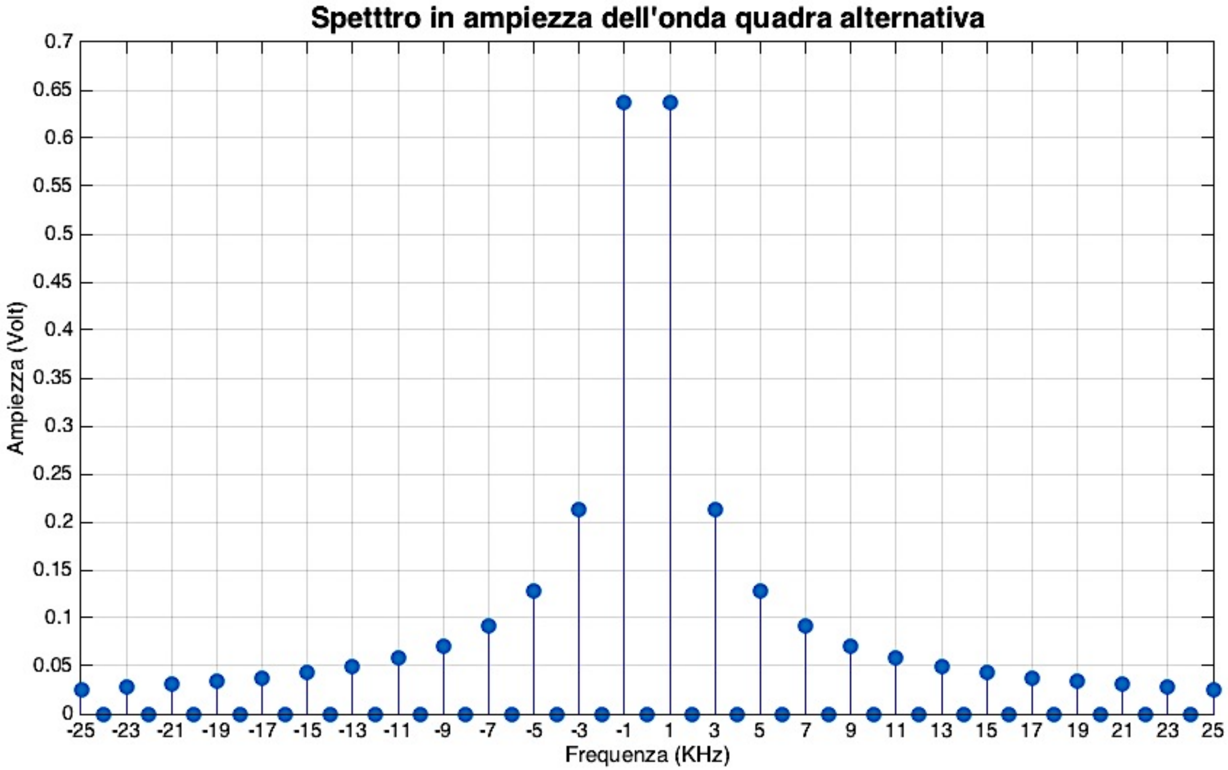
- **Onda quadra: analisi degli spettri in ampiezza e fase**
  - Innanzitutto dovremo scrivere il modulo e la fase dei coefficienti di Fourier:

$$\left|X_k\right| = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ 2V_0/\pi\left|k\right| & k \text{ dispari} \end{cases} \qquad \arg\left(X_k\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -\pi/2 & k \text{ dispari}, k \geq 0 \\ +\pi/2 & k \text{ dispari}, \ k < 0 \end{cases}$$

  - Si tratta di due successioni reali, che rispettano le proprietà di simmetria hermitiana della serie di Fourier. I relativi grafici degli spettri di ampiezza e fase sono dati nelle due slide seguenti:

Esempi di calcolo di spettri

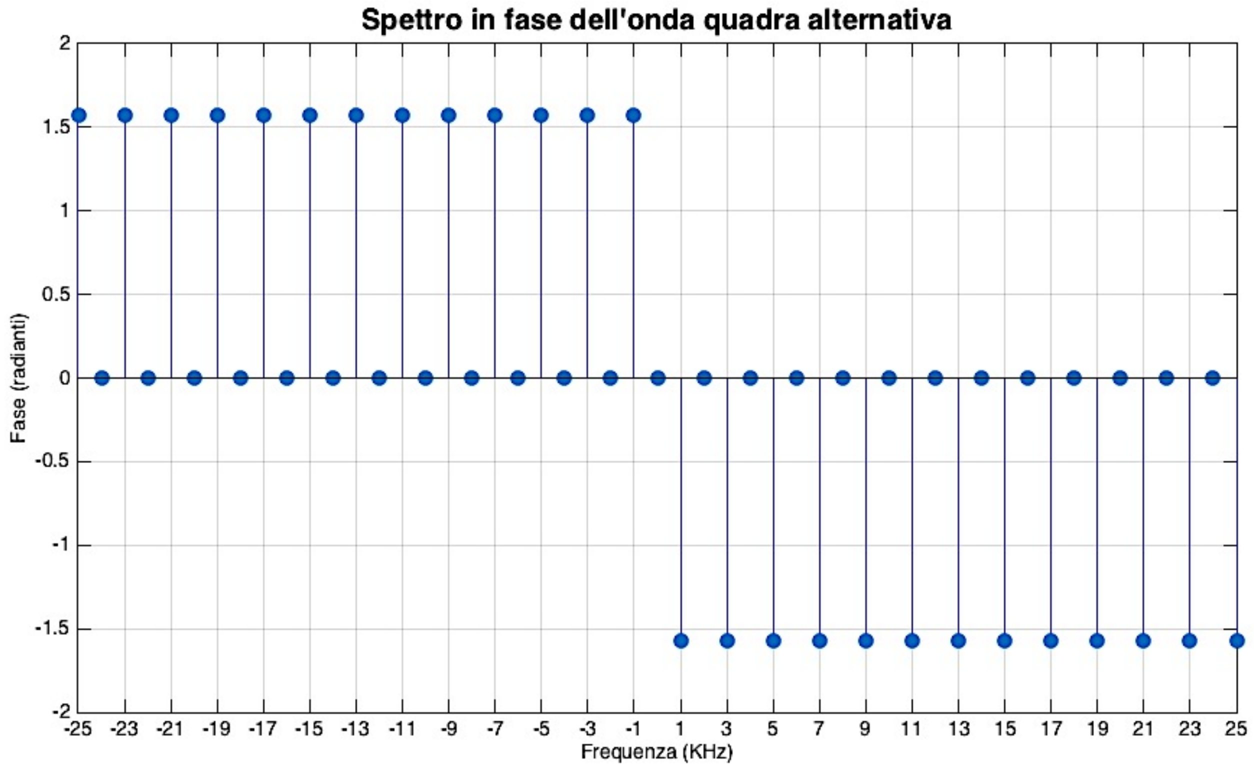
- **Onda quadra – spettro in ampiezza:**
  - Il grafico è plottato fino all'armonica di indice 25 (frequenza: 25 KHz):



Armonica fondamentale a frequenza f_0=1KHz

Esempi di calcolo di spettri

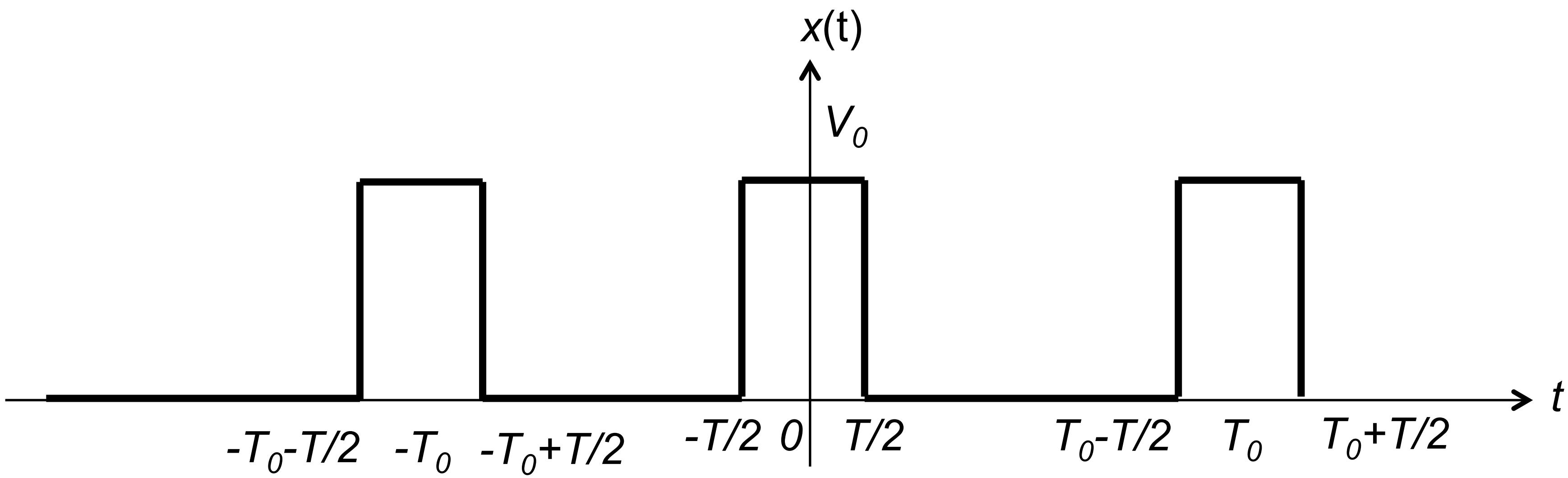
- **Onda quadra – spettro in fase:**
  - Vedi slide precedente:



La fase è sempre uguale a –pi/2 <u>per frequenze positive</u> (è, in effetti, la fase del seno)

Esempi di calcolo di spettri

- **Onda quadra con ritorno a zero (1)**
  - E' un'onda quadra che vale alternativamente V_0 e 0 e la cui durata dell'impulso "alto" è $T<T_0$;



Esempi di calcolo di spettri

- **Onda quadra con ritorno a zero (2)**
  - Si tratta di una funzione a simmetria pari, pertanto ci aspettiamo che i coefficienti siano reali e che lo sviluppo dei segnale sia in serie di coseni:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{-T_0/2} x(t)e^{-2\pi jkf_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} V_0 e^{-2\pi jkf_0 t}\,dt = \frac{V_0}{2\pi jf_0 T_0 k}\left[e^{\pi jf_0 kT} - e^{-\pi jf_0 kT}\right] =$$

$$\frac{V_0 T}{\pi f_0 T_0 kT}\frac{\left[e^{\pi jf_0 kT} - e^{-\pi jf_0 kT}\right]}{2j} = \frac{V_0 T}{T_0}\frac{\sin\left(\pi f_0 kT\right)}{\pi f_0 kT} = \frac{V_0 T}{T_0}\mathrm{sinc}\left(kf_0 T\right)$$

$$x(t) = \frac{V_0 T}{T_0} + 2\frac{V_0 T}{T_0}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(kf_0 T\right)\cos\left(2\pi kf_0 t\right)$$

Esempi di calcolo di spettri

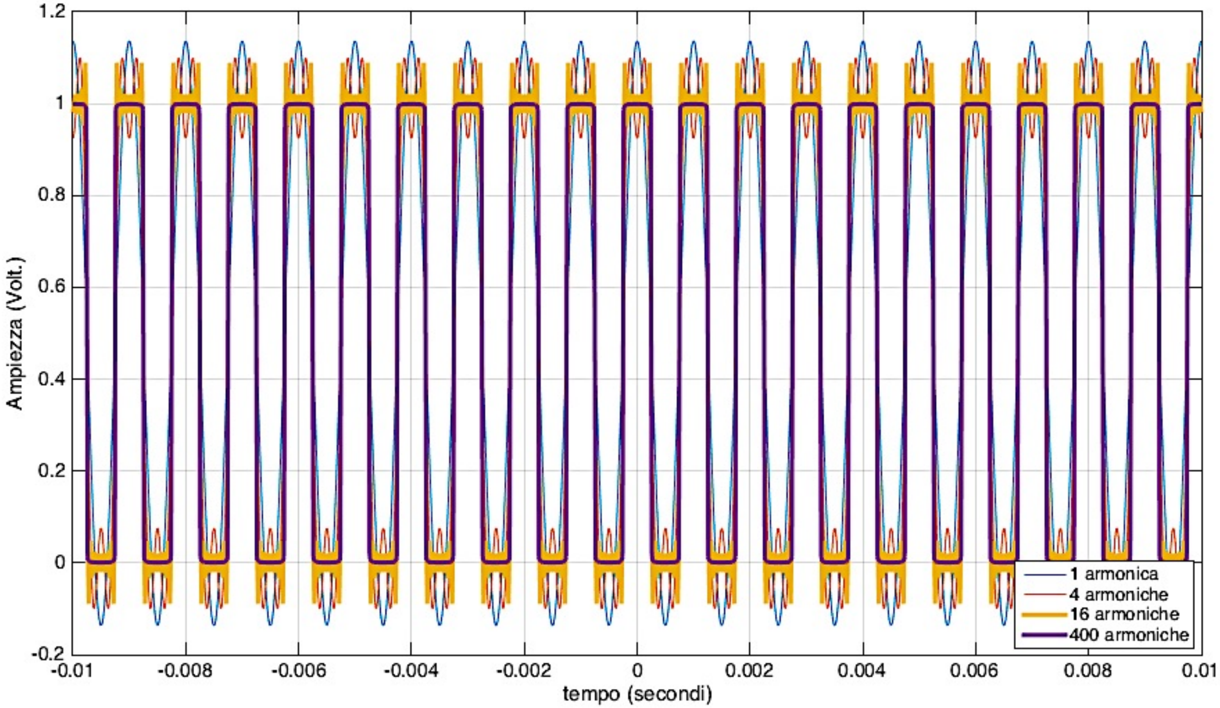
- **Onda quadra con ritorno a zero: analisi degli spettri in ampiezza e fase**
  - Scriviamo il modulo e la fase dei coefficienti di Fourier del segnale visto in precedenza:

$$\left|X_k\right| = \frac{V_0 T}{T_0}\left|\operatorname{sinc}\left(k f_0 T\right)\right| \quad \arg\left(X_k\right) = \begin{cases} -\pi \ \text{se} \ \ X_k < 0 \quad k < 0 \\ 0 \quad \text{se} \ X_k > 0 \\ \pi \quad \text{se} \ X_k < 0 \quad k \geq 0 \end{cases}$$

  - L’espressione della fase scritta sopra garantisce la simmetria hermitiana dei coefficienti di Fourier della serie.

Esempi di calcolo di spettri

- **Onda quadra RZ: sintesi**
  - Mostriamo che, anche in questo caso la serie vista nella slide precedente <u>in qualche modo</u> converge al segnale desiderato (implementazione MATLAB della serie):

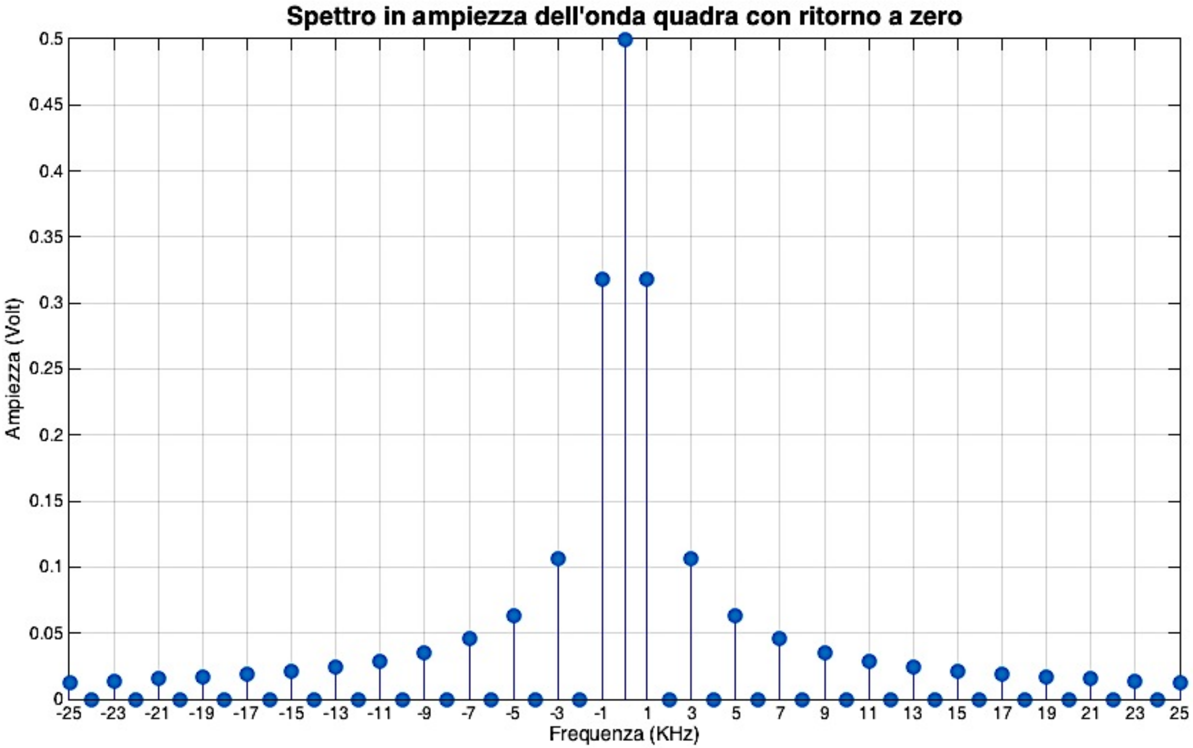


<u>Parametri numerici:</u>

- T_0=1msec (f_0=1KHz)
- T=0.5msec
- V_0=1Volt

Esempi di calcolo di spettri

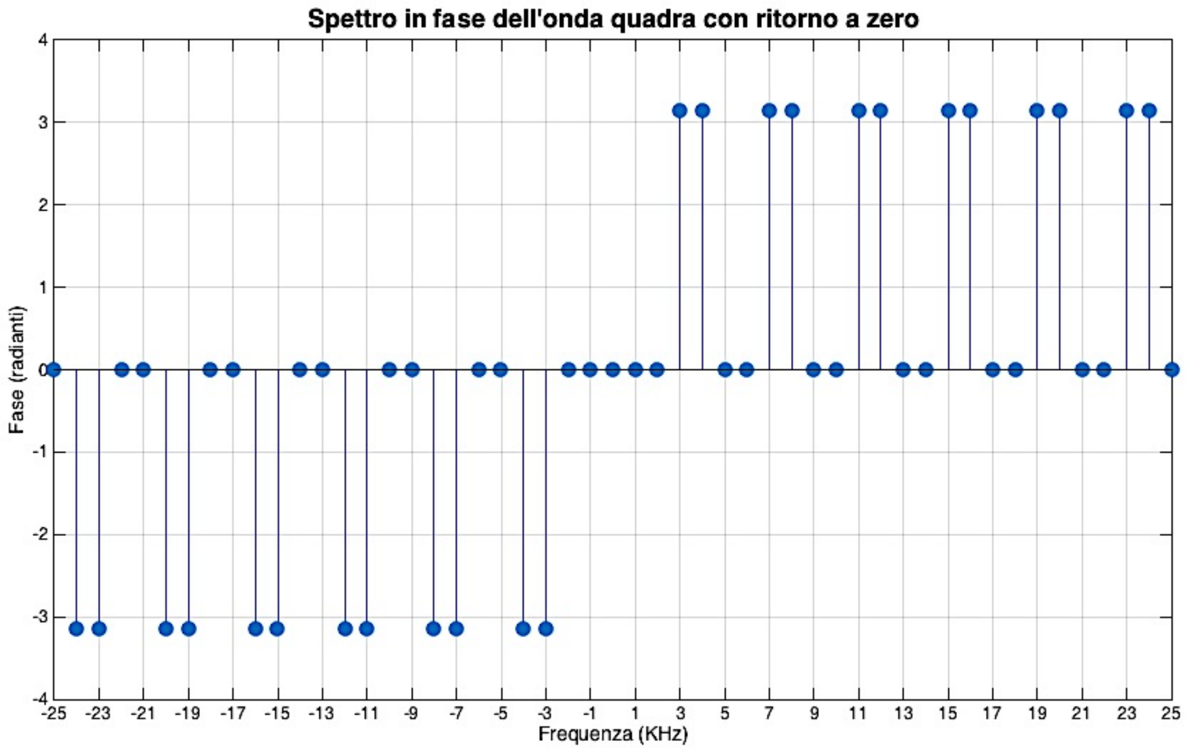
- **Onda quadra con ritorno a zero – spettro in ampiezza**
  - Valori numerici: T_0=1msec, T=0.5msec, V_0=1Volt



<u>Massimo contenuto spettrale sta nella continua</u> (ed è il valor medio del segnale nel periodo)

Esempi di calcolo di spettri

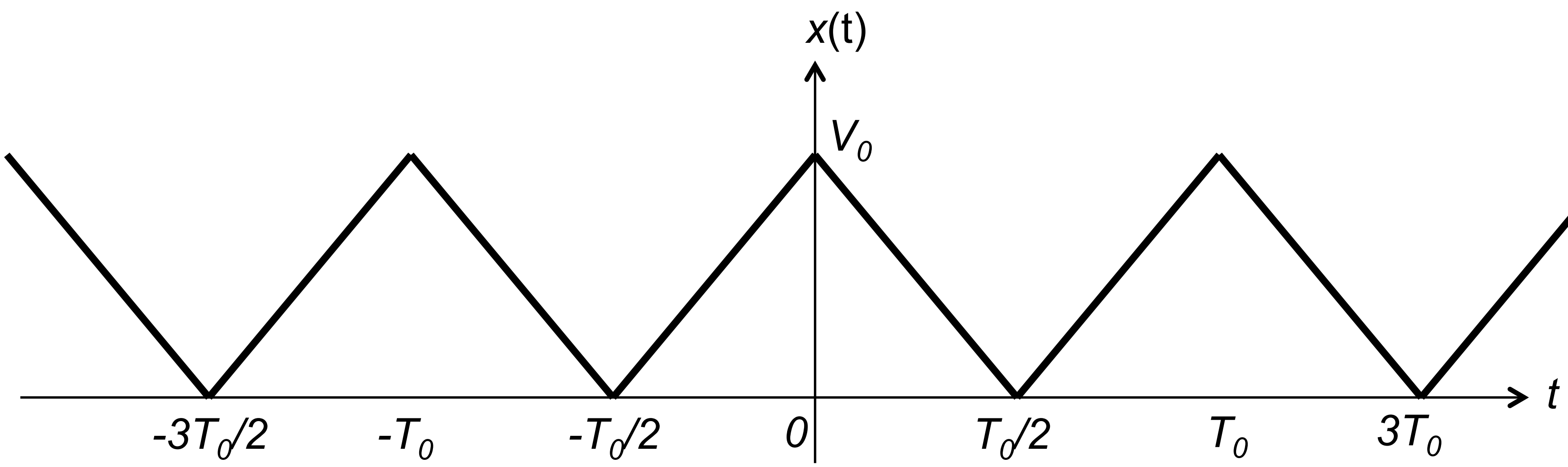
- **Onda quadra con ritorno a zero – spettro in fase**
  - Valori numerici: T_0=1msec, T=0.5msec, V_0=1Volt



Si noti <u>la simmetria dispari della fase</u> (che deve essere sempre verificata e, se non lo è, la si impone)

Esempi di calcolo di spettri

- **Onda triangolare (1)**
  - E' un segnale periodico, la cui forma d'onda è un triangolo di durata T, che si ripete con periodo T_0>=T



Esempi di calcolo di spettri

- **Onda triangolare (2)**
  - Come per l'onda quadra (anzi: a maggior ragione) è soddisfatta la condizione di Dirichelet, pertanto la serie di Fourier per tale segnale esiste;
  - Si tratta di una funzione a simmetria pari, pertanto ci aspettiamo che abbia coefficienti di Fourier reali e che sia sviluppabile in serie di coseni.
  - Di seguito. effettueremo il calcolo dei coefficienti e della serie, partendo dall'espressione della forma d'onda:

$$w(t) = V_0 \left(1 - \frac{2|t|}{T_0} \right) \quad |t| \leq T_0/2$$

Esempi di calcolo di spettri

- **Onda triangolare (3)**
  - Ecco il calcolo dei coefficienti:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} V_0\left(1-\frac{2|t|}{T_0}\right)\cos\left(2\pi k f_0 t\right)dt = \frac{2V_0}{T_0}\int_0^{T_0/2}\left(1-\frac{2t}{T_0}\right)\cos\left(2\pi k f_0 t\right) =$$

$$= \frac{2V_0}{T_0}\int_0^{T_0/2}\cos\left(2\pi k f_0 t\right)dt - \frac{4V_0}{T_0}\int_0^{T_0/2}\frac{t}{T_0}\cos\left(2\pi k f_0 t\right)dt = \frac{2V_0}{T_0}\sin\left(\pi k\right) +$$

$$-\frac{4V_0}{T_0}\int_0^{T_0/2}\frac{t}{T_0}\cos\left(2\pi k f_0 t\right)dt = 0 - \frac{4V_0}{T_0^2}\left.\frac{\cos\left(2\pi k f_0 t\right)}{\left(2\pi k f_0\right)^2}\right|_0^{T_0/2} - \frac{4V_0}{T_0^2}\left.\frac{t\sin\left(2\pi k f_0 t\right)}{\left(2\pi k f_0\right)^2}\right|_0^{T_0/2} =$$

$$= \frac{4V_0}{T_0^2}\left[\frac{1-\cos\left(\pi k\right)}{\left(2\pi k f_0\right)^2}\right] = \frac{V_0}{2T_0^2 f_0^2}\frac{\sin^2\left(\pi k/2\right)}{\left(\pi k/2\right)^2} = \frac{V_0}{2}\operatorname{sinc}^2\left(k/2\right)$$

Esempi di calcolo di spettri

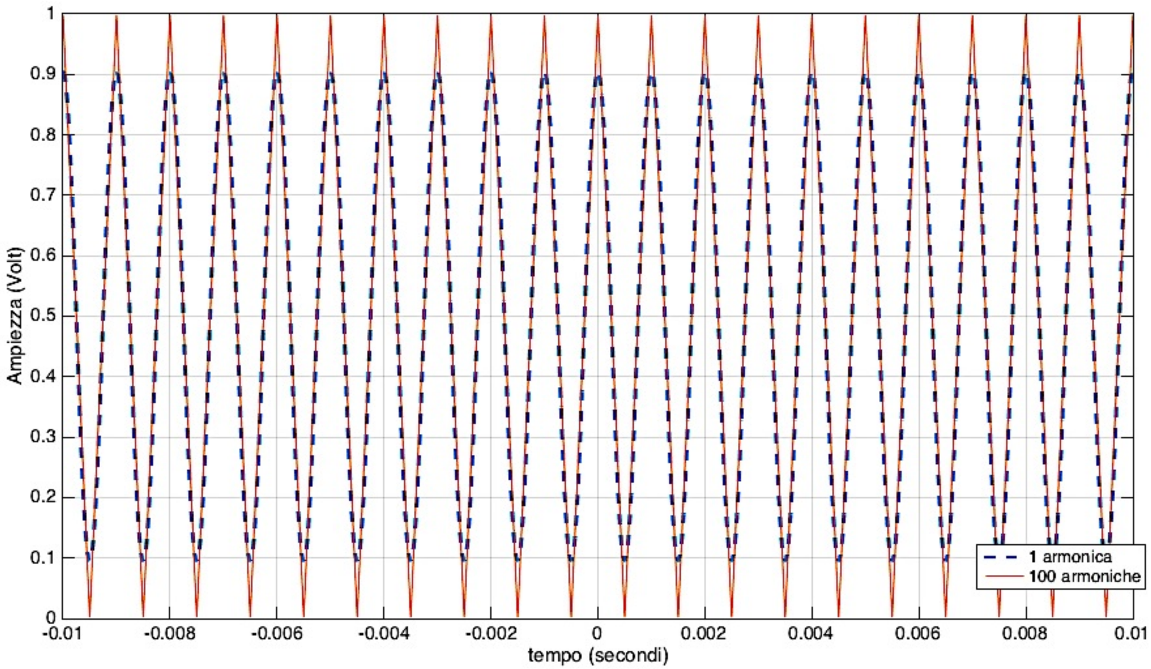
- **Onda triangolare: analisi degli spettri in ampiezza e fase**
  - Scriviamo il modulo e la fase dei coefficienti di Fourier del segnale visto in precedenza:

$$\left|X_k\right| = \frac{V_0}{2}\operatorname{sinc}^2\left(k/2\right) \qquad \arg\left(X_k\right) = 0 \quad \forall k$$

  - I coefficienti di Fourier dell’onda triangolare sono reali e sempre positivi, per cui la loro fase è identicamente zero (la simmetria hermitiana è rispettata sebbene in senso “lato”).

Esempi di calcolo di spettri

- **Onda triangolare: sintesi**
  - Mostriamo che, anche in questo caso la serie vista nella slide precedente <u>in qualche modo</u> converge al segnale desirato (implementazione MATLAB della serie):



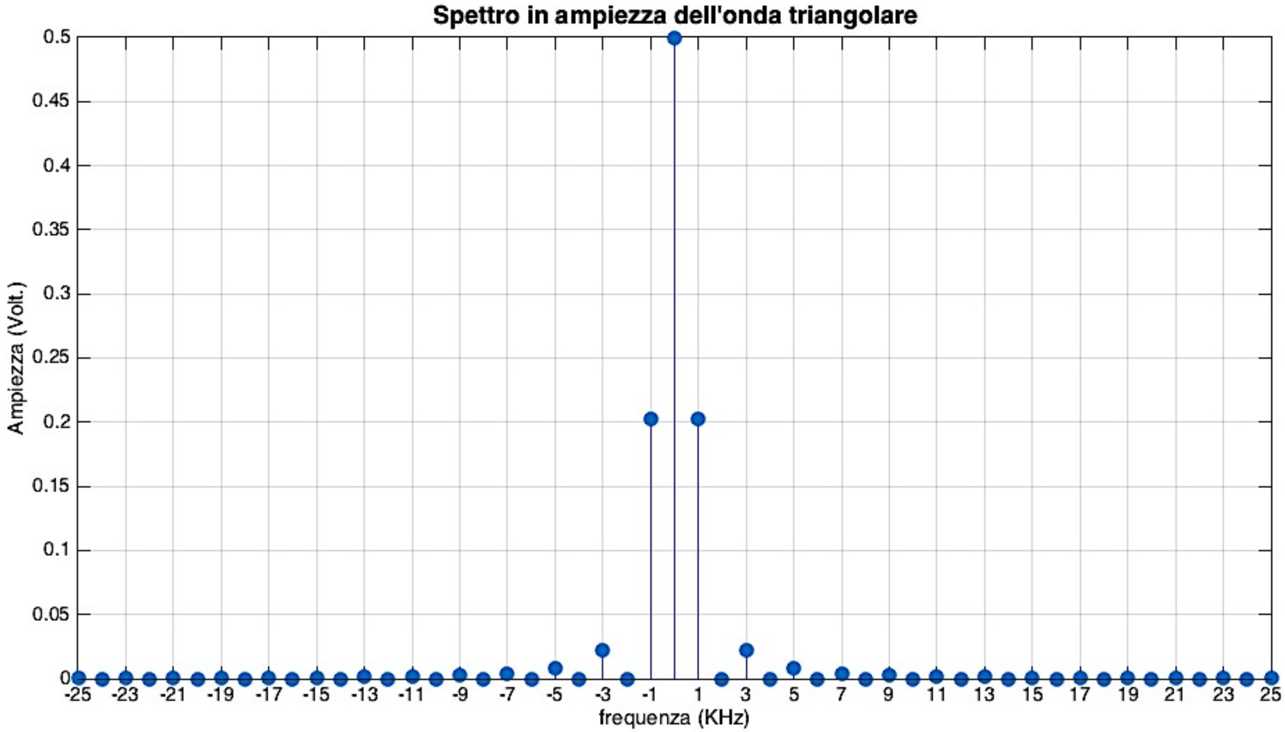
<u>Parametri numerici:</u>

- T_0=1msec (f_0=1KHz)
- V_0=1Volt

LA SERIE DI FOURIER <u>CONVERGE MOLTO PIU' VELOCEMENTE</u> RISPETTO AL CASO DELL'ONDA RETTANGOLARE

Esempi di calcolo di spettri

- **Onda triangolare– spettro in ampiezza**
  - Valori numerici: T_0=1msec, V_0=1Volt



Il contenuto spettrale del segnale è concentrato nella continua, nella fondamentale e nella terza armonica. Il resto è nullo o quasi trascurabile.

Esempi di calcolo di spettri

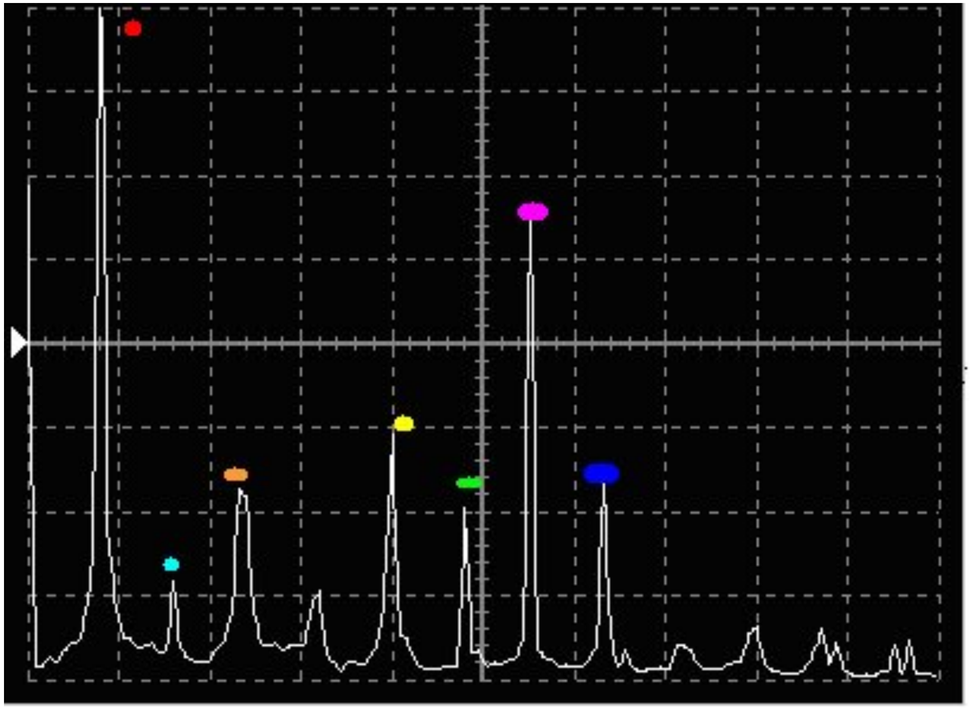
- **Considerazioni generali (1)**
  - Lo spettro (in ampiezza e fase) di un segnale periodico è <u>tracciato su un dominio frequenziale discreto</u> (ovvero l'indice di armonica);
  - Lo spettro di un segnale periodico <u>è formato da tante righe</u>, ognuna delle quali corrispondenti ad una frequenza armonica;
  - La simmetria hermitiana ci consente di analizzare gli spettri <u>considerando solamente le armoniche di indice positivo</u>; per quelle di indice negativo, il tracciato è simmetrico (pari quello dell'ampiezza, dispari quello della fase);
  - La frequenza, di per sé, è una <u>grandezza positiva</u>, quindi le frequenze negative non hanno un senso "fisico", ma dal punto di vista matematico lo hanno.

Esempi di calcolo di spettri

- **Considerazioni generali (2)**
  - Segnali che presentano discontinuità e transizioni ripide, come l'onda quadra, hanno un elevato contenuto spettrale in corrispondenza di armoniche di ordine elevato (alte frequenze);
  - Segnali dall'andamento "dolce", come l'onda triangolare, hanno il loro contenuto spettrale concentrato presso le armoniche di ordine basso (basse frequenze);
  - L'estensione spettrale di un segnale sull'asse delle frequenze è detto BANDA. Segnali con significativi contenuti spettrali alle alte frequenze sono detti segnali a banda larga, segnali con contenuti spettrali concentrati attorno alla continua sono detti segnali a banda stretta.

Esempi di calcolo di spettri

- **Esempio pratico: segnale musicale**
  - Questo è lo spettro di un segnale musicale emesso da un clarino (nota “La”), registrato da un microfono e misurato da uno strumento (analizzatore di spettro):



E’ noto che i segnali musicali sono generati <u>dalla sovrapposizione ordinata di frequenze armoniche</u>: quindi <u>hanno una loro periodicità</u>. In effetti, lo spettro evidenzia le righe corrispondenti alle frequenze armoniche proprie dello strumento;

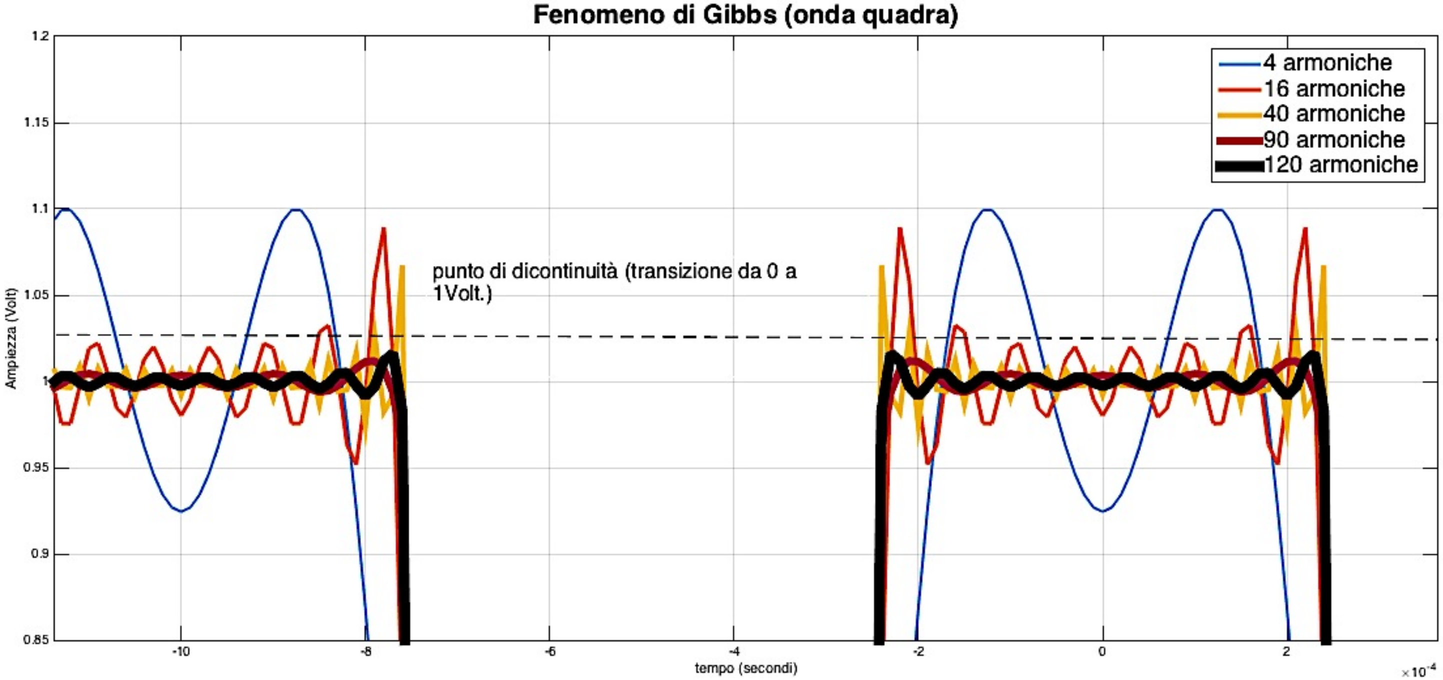
Agendo esternamente sul contenuto armonico è possibile cambiare il suono dello strumento.

Il fenomeno di Gibbs

- **Descrizione**
  - Questo fenomeno, relativo alle serie di Fourier troncate ed osservato dal fisico statunitense W. Gibbs nel 1899, lo abbiamo già intuito analizzando la sintesi dell’onda quadra partendo dalle sue armoniche;
  - Quando si ricostruisce il segnale, a partire dalla serie troncata <u>si ottengono delle sovraelongazioni del valore della funzione ricostruita nell'intorno del punto di discontinuità</u>;
  - All'aumentare del numero delle componenti della serie <u>il valore di picco di detta sovraelongazione rimane costante</u>, mentre le oscillazioni alle quali tali sovraelongazioni si riferiscono si avvicinano al punto di discontinuità.

Il fenomeno di Gibbs

- **Visualizzazione (da MATLAB)**
  - Si può notare bene dalla figura sottostante:



L’indentità di Bessel-Parseval

- **Enunciato**
  - L’identità di Bessel-Parseval (conosciuta anche come formula di Parseval) si enuncia così:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| X_k \right|^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{-T_0/2} \left| x(t) \right|^2 dt$$

  - In pratica, la sommatoria dei moduli quadrati dei coefficienti di Fourier è pari alla potenza media del segnale, calcolata nel periodo;
  - La potenza media del segnale è data quindi dalla somma delle potenze di ogni singola armonica.