UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Ingegneria
e Scienza dell'Informazione

Teoria dei Segnali

Parte Prima: Segnali e Sistemi

Lezione 4: Concetti generali sui segnali aleatori

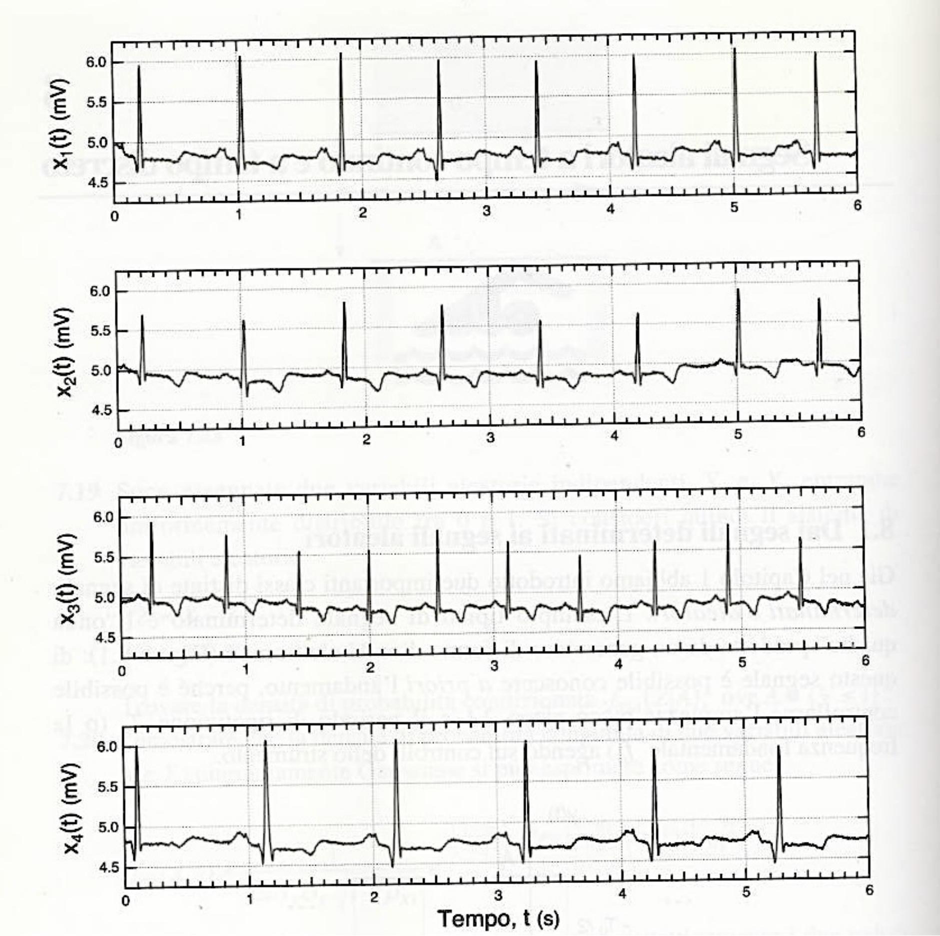
Docente: Prof. Claudio Sacchi

Contenuti

- Introduzione “semantica”;
- Definizione di processo aleatorio;
- Processi parametrici;
- Statistiche di un processo aleatorio;
- Processi aleatori stazionari;
- Processi aleatori ergodici.

Introduzione "semantica"

- **Dal segnale deterministico al processo aleatorio**
  - Consideriamo un esperimento tipicamente biomedicale: <u>ovvero la misura della tensione</u> raccolta dagli elettrodi di un elettrocardiografo;
  - A seconda delle condizioni fisiche del paziente <u>si otterranno diversi andamenti del segnale</u> cardiaco (vedi lato):

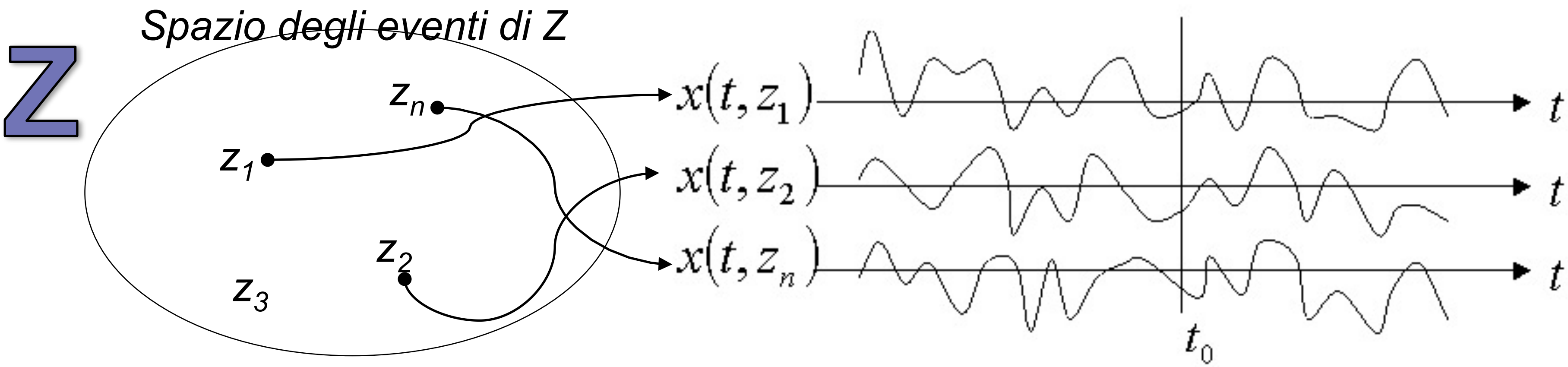


Introduzione “semantica”

- **Dal segnale deterministico al processo aleatorio (2)**
  - E’ chiaro che queste funzioni non sono predicibili a propri, né sul breve, né sul lungo termine;
  - Sull’andamento di queste funzioni, ci sono solo informazioni generiche (il segnale ha alcune escursioni attorno ad un valore fisso di 5 mV, appare periodico …);
  - Questo tipo di segnale, per essere conosciuto, deve essere registrato (su carta e/o su file) ed osservato a posteriori;
  - Come anticipato nella lezione 1, i segnali che possono essere conosciuti solo a posteriori, sono aleatori;
  - Il modellamento matematico dei segnali aleatori viene trattato dalla teoria dei processi aleatori, che è di tipo statistico.

Definizione di processo aleatorio

- **Cos'è un processo aleatorio**
  - Un processo aleatorio è una **famiglia di funzioni numeriche nella variabile tempo** (dette ***realizzazioni o funzioni-campione***), ognuna delle quali associata **all'uscita** z_i **di un esperimento statistico** Z:



Ad un istante fissato t_0, <u>il campione del processo aleatorio in quell'istante</u> è, ovviamente, **una variabile aleatoria!**

Definizione di processo aleatorio

- **Esempio dell'EGC**
  - Nell'esempio dell'elettrocardiogramma, lo spazio degli eventi è costituito da tutti gli elettrocardiogrammi effettuati da tutti i pazienti che hanno fatto questo esame in un dato ospedale;
  - Le funzioni-campione sono i tracciati degli elettrocardiogrammi, memorizzati in un archivio;
  - Ogni volta che in ospedale si presentasse un paziente, l'osservazione dell'elettrocardiogramma corrisponde al tracciato di quel paziente;
  - Non conoscendo a priori il paziente che si presenterà, non si potrà nemmeno conoscere quale tracciato (funzione campione) verrà scelto. E quindi abbiamo un segnale aleatorio.

Definizione di processo aleatorio

- **Commenti e notazioni**
  - Nella figura della slide precedente, abbiamo mostrato uno spazio degli eventi di tipo discreto, per semplicità (ma può anche non esserlo);
  - Il fatto che il campione del processo aleatorio, preso in un qualsiasi istante di tempo, sia una variabile aleatoria ben indica l'aleatorietà presente nel segnale (i suoi valori istantanei non sono conoscibili a priori);
  - A livello di notazione il processo aleatorio si indica con la generica funzione campione messa tra parentesi, giusto ad indicare la famiglia (insieme) di funzioni, oppure con la lettera usata per indicare la funzione, ma maiuscola:

$$x\left(z_i,t\right)\forall z_i \in Z \rightarrow \left\{x(t)\right\} \quad oppure \quad x\left(z_i,t\right)\forall z_i \in Z \rightarrow X(t)$$

Processi parametrici

- **Definizione**
  - Un processo aleatorio parametrico è un particolare tipo di processo aleatorio, dove l'andamento delle funzioni-campione dipende da valore di un numero finito di parametri, che sono variabili aleatorie;
  - Un esempio è stato mostrato già nella lezione 1: ovvero il clock con frequenza instabile, dove il jitter di durata dell'impulso è una variabile aleatoria (tipicamente è uniformemente distribuita tra 0 ed il semi-periodo del clock);
  - La funzione (il clock) è nota nella sua forma analitica (a differenza dell'EGC), ma contiene un parametro ignoto, che è l'offset di durata dell'impulso, rispetto a quella che ci aspettiamo. Questo è un tipico processo aleatorio parametrico;

Processi parametrici

- **Altro esempio di processo parametrico**
  - Un altro esempio tecnicamente rilevante di processo parametrico è *un segnale sinusoidale* (detta oscillazione o portante), generato da *un circuito oscillante elettro*nico. Questo genere di circuiti consente di controllare l'ampiezza e la frequenza dell'oscillazione, ma non la fase iniziale, che è del tutto ignota;

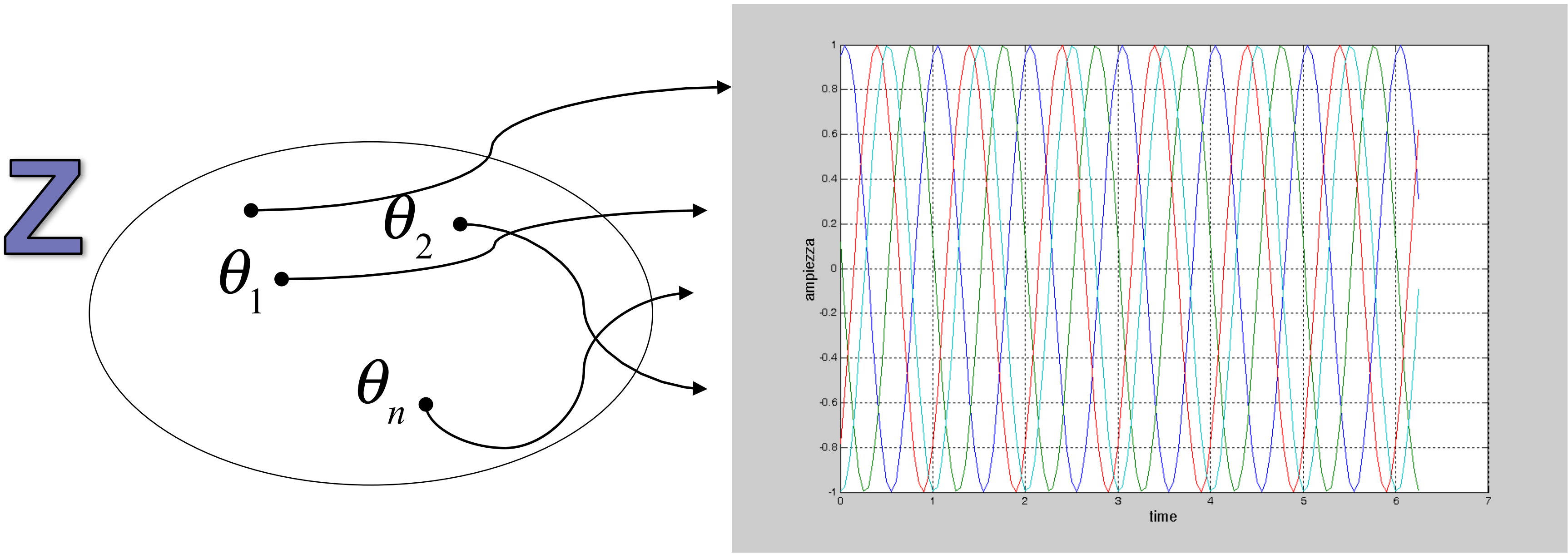
  - Il modello più appropriato per questo segnale è un processo parametrico di questo tipo (detto *processo cosinusoidale*):

$$X(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right)$$

A e T sono fissate, la fase iniziale "teta" è una variabile aleatoria, uniformemente distribuita tra 0 e 2π

Processi parametrici

- **Processo (parametrico) cosinusoidale**
  - Vediamo le funzioni campione del processo parametrico co-sinusoidale



Notare: <u>lo spazio degli eventi non è discreto</u>, perché la fase <u>è una variabile aleatoria continua</u>.

Statistiche di un processo aleatorio

- **Introduzione**
  - Sulla base di quanto detto in precedenza, non ha alcun senso parlare di andamento del processo aleatorio (nel caso di processi parametrici forse ne ha un po', ma formalmente non possiamo parlare di funzioni analitiche definite);
  - Il processo aleatorio viene caratterizzato da un punto di vista statistico;
  - La caratterizzazione statistica avviene mediante opportune funzioni di probabilità, che sono in tutta generalità tempo-varianti.

Statistiche di un processo aleatorio

- **Funzione di distribuzione di probabilità del primo ordine**
  - Se si considera un generico istante *t*, si può definire la **funzione di distribuzione cumulativa del primo ordine** per un processo aleatorio nella seguente maniera:

$$F_{X(t)}(x;t) = \Pr\{X(t) \le x\} \qquad \forall t$$

  - Notare che questa funzione di probabilità dipende, in tutta generalità, dal tempo (e non solo dal valore parametrico *x*) perché le proprietà statistiche di *X(t)* possono cambiare al variare di *t*.

Statistiche di un processo aleatorio

- **Funzione di densità di probabilità del primo ordine**
  - Similmente al caso delle variabili aleatorie, è possibile definire la funzione di densità di probabilità del primo ordine come:

$$f_{X(t)}(x;t) \triangleq \frac{\partial}{\partial x}\left[F_{X(t)}(x;t)\right]$$

  - Si ottiene, in pratica, operando la derivata parziale della funzione di distribuzione cumulativa rispetto al parametro *x*, lasciando *t* costante.

Statistiche di un processo aleatorio

- **Funzioni di probabilità del secondo ordine (1)**
  - E' sufficiente la conoscenza delle funzioni di probabilità del primo ordine per caratterizzare un processo aleatorio?
  - La risposta è no. Infatti, possiamo essere interessati a valutare il processo aleatorio in istanti diversi;
  - Per esempio, un agente di borsa è interessato a calcolare la probabilità che la quotazione aleatoria del titolo di domani sia maggiore di quella di oggi, ovvero:

$$\Pr\left\{X(t_2) \geq X(t_1)\right\}$$

Statistiche di un processo aleatorio

- **Funzioni di probabilità del secondo ordine (2)**
  - La probabilità di cui sopra non è calcolabile utilizzando funzioni di distribuzione di probabilità del primo ordine;
  - Occorre conoscere la distribuzione cumulativa e la densità di probabilità del secondo ordine, che sono definite nella seguente maniera:

$$F_{X(t_1),X(t_2)}\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)=\Pr\left\{X\left(t_1\right)\le x_1,X\left(t_2\right)\le x_2\right\}\quad\forall t_1,t_2$$

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2}$$

Statistiche di un processo aleatorio

- **Funzioni di probabilità di ordine *n***
  - Ma allora, potremmo essere interessati a valutare il processo aleatorio in 3, 4, …, *n* istanti diversi;
  - Per caratterizzare <u>interamente</u> un processo aleatorio dovremmo essere in grado di conoscere <u>funzioni di probabilità di ogni ordine</u>, ovvero:

$$F_{X(t_1),\dots,X(t_n)}\left(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots t_n\right)=\Pr\left\{X\left(t_1\right)\le x_1,\dots,X\left(t_n\right)\le x_n\right\}\quad \forall t_1,\dots,t_n \forall n$$

$$f_{X(t_1),\dots,X(t_n)}(x_1,\dots x_n;t_1,\dots t_n)=\frac{\partial^n F_{X(t_1),\dots,X(t_n)}(x_1,\dots x_n;t_1,\dots t_n)}{\partial x_1\dots\partial x_n}$$

Statistiche di un processo aleatorio

- **Definizione alternativa di processo aleatorio**
  - Sulla base della caratterizzazione statistica, si può fornire una definizione alternativa di processo aleatorio nella seguente maniera:
    - *Un processo aleatorio è una famiglia di variabili aleatorie dipendenti dalla variabile temporale t e caratterizzate dalla classe delle densità di probabilità congiunte:*

      $$f_{X(t_1),\dots,X(t_n)}(x_1,\dots x_n;t_1,\dots t_n)$$

    - La definizione fornita in precedenza (basata sulle funzioni campione) è però più inerente alle discipline dell’elaborazione del segnale.

Statistiche di un processo aleatorio

- **Indici statistici del primo ordine: media (1)**
  - E' chiaro che, nella pratica, non caratterizzeremo mai un processo aleatorio sulla base di tutte le sue statistiche (sarebbe folle, oltreché impossibile) Ci accontenteremo di qualche indice semplificato;
  - L'indice statistico fondamentale per un processo aleatorio è la **media**, che è una funzione nella variabile *t* (tempo), così definita:

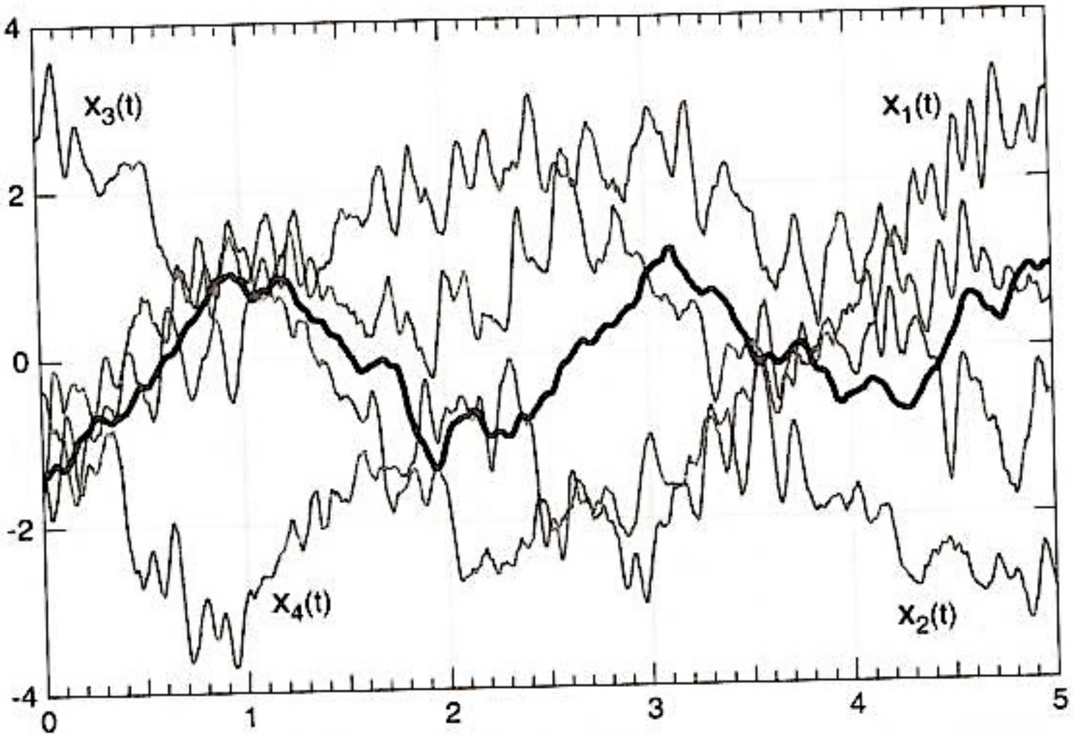
$$E\left\{X(t)\right\} = \overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x;t)\,dx$$

Statistiche di un processo aleatorio

- **Indici statistici del primo ordine: media (2)**
  - La media è un indice statistico del primo ordine, poiché il suo calcolo prevede la considerazione di una sola variabile aleatoria estratta dal processo, ovvero $X(t)$;
  - La media può essere anche una costante, ma in tutta generalità è una funzione del tempo, poiché le proprietà statistiche di $X(t)$ sono generalmente tempo-varianti;
  - Dal punto di vista statistico, la media è un "compendio" dell'andamento di tutte le funzioni campione del processo aleatorio, pesate ciascuna dalla probabilità di occorrenza e, per questo, non necessariamente è una delle funzioni campione del processo.

Statistiche di un processo aleatorio

- **Indici statistici del primo ordine: media (3)**
  - Nella figura sottostante, c'è un esempio di media di processo aleatorio (curva in "bold")



Statistiche di un processo aleatorio

- **Indici statistici del primo ordine: potenza media e varianza del processo aleatorio**
  - Altra statistica del primo ordine di grande interesse è <u>la potenza media statistica del processo aleatorio</u> o, semplicemente <u>potenza media</u>. Essa è definita come:

$$P_X(t) = E\left\{X^2(t)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X(t)}(x;t)\,dx$$

  - Analogamente alle variabili aleatorie, possiamo anche definire <u>la varianza del processo aleatorio</u>, come:

$$\sigma_X^2(t) = E\left\{\left[X(t) - \overline{X}(t)\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - \overline{X}(t)\right]^2 f_{X(t)}(x;t)\,dx$$

Statistiche di un processo aleatorio

- **Indici statistici del secondo ordine: autocorrelazione**
  - Sia dato un p.a. a valori reali: si definisce **funzione di autocorrelazione** la seguente funzione nelle variabili t_1 e t_2 (istanti di tempo):

$$R_X\left(t_1,t_2\right) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X\left(t_1\right),X\left(t_2\right)}(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_1\, dx_2 = E\left\{X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right\}$$

  - Tale funzione misura la correlazione tra le due variabili aleatorie $X(t_1)$ ed $X(t_2)$, ovvero il loro grado di similitudine (quanto il valore dell’una influenza il valore dell’altra). Poiché le due variabili aleatorie sono relative allo stesso processo, parliamo di auto-correlazione.

Statistiche di un processo aleatorio

- **Indici statistici di second'ordine: cross-correlazione**
  - Analogamente all'autocorrelazione, possiamo definire la cross-correlazione come correlazione tra due campioni di due diversi processi aleatori;

  - Come si vede dalla definizione, per il calcolo è richiesta la conoscenza della densità di probabilità congiunta dei due processi aleatori:

$$R_{XY}\left(t_1,t_2\right) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_2 f_{X\left(t_1\right),Y\left(t_2\right)}(x_1, y_2; t_1, t_2)\, dx_1\, dy_2 = E\left\{X\left(t_1\right)Y\left(t_2\right)\right\}$$

Processi aleatori stazionari

- **Definizione di processo stazionario**
  - Un processo aleatorio è detto stazionario se le proprietà statistiche sono invarianti rispetto alla traslazione temporale;

  - Un processo aleatorio è detto stazionario in senso stretto (*stazionarietà forte*) se e solo se il valore della funzione di densità di probabilità di ogni ordine rimane invariato per qualsiasi traslazione temporale, ovvero:

$$f_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1,\ldots x_n;t_1,\ldots,t_n)=f_{X(t_1+T),\ldots,X(t_n+T)}(x_1,\ldots x_n;t_1+T,\ldots,t_n+T)\,\forall n,\forall T$$

Processi aleatori stazionari

- **Stazionarietà di un processo aleatorio: implicazioni statistiche (1)**
  - Le funzioni campione del processo aleatorio *X(t)* e quelle di *X(t+T)* sono diverse, ma i due processi aleatori sono indistinguibili dal punto di vista delle statistiche;
  - Vediamo ora le conseguenze di questa definizione sulla densità di probabilità del primo ordine:

$$f_{X(t)}(x;t) = f_{X(t+T)}(x;t+T) \forall T$$

$$\Rightarrow f_{X(t)}(x;t) \equiv f_X(x)$$

Poiché *T* è arbitrario, ne consegue che la densità di probabilità del primo ordine non dipende dal tempo.

Processi aleatori stazionari

- **Stazionarietà di un processo aleatorio: implicazioni statistiche (2)**
  - La stazionarietà porta a concludere che tutte le grandezze statistiche del primo ordine non dipendono a loro volta dalla variabile tempo. Pertanto avremo che:

$$E\{X(t)\} = \overline{X}$$

$$P_X(t) = P$$

$$\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2$$

Dal punto di vista degli indici statistici del primo ordine, il processo aleatorio stazionario si comporta, sostanzialmente, come una variabile aleatoria.

Processi aleatori stazionari

- **Stazionarietà di un processo aleatorio: implicazioni statistiche (3)**
  - Vediamo ora cosa implica la stazionarietà sulla densità di probabilità del <u>secondo ordine</u>:

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_{X(t_1+T),X(t_2+T)}(x_1,x_2;t_1+T,t_2+T)\,\forall T$$

  - Poiché T è arbitrario, la densità di probabilità del secondo ordine non può dipendere dai due istanti temporali t_1 e t_2 <u>separatamente</u>, <u>ma può dipendere solo dalla loro differenza</u>, che resta effettivamente invariata rispetto ad una traslazione rigida dei tempi. Quindi:

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_X(x_1,x_2;t_1-t_2)$$

Processi aleatori stazionari

- **Stazionarietà di un processo aleatorio: implicazioni statistiche (4)**
  - Gli indici statistici del second'ordine (autocorrelazione e cross-correlazione) godranno pertanto della stessa proprietà:

$$R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1 - t_2)$$

$$R_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2)$$

Processi aleatori stazionari

- **Processo stazionario in senso lato**
  - Un processo aleatorio è detto stazionario in senso lato (o *stazionario debole*) se e solo se <u>le statistiche di primo e secondo ordine</u> sono invarianti rispetto agli istanti temporali, ovvero:

$$SSL \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x}(t) = \overline{x} & \forall t \\ R_x(t_1, t_2) \hat{=} E\{x(t_1)x(t_2)\} = R_x(t_2 - t_1) = R_x(T) & \text{con } T = t_2 - t_1 \end{cases}$$

•Nell'elaborazione dei segnali e nelle telecomunicazioni <u>si considerano solo processi SSL</u>.

Processi aleatori stazionari

- **Proprietà della funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio SSL:**
  - La funzione di autocorrelazione di un processo stazionario in senso lato <u>deve verificare le seguenti due proprietà</u>:
    - La funzione di autocorrelazione <u>è pari</u>, ovvero:

$$R_x(T) = R_x(-T)$$

    - La funzione di autocorrelazione <u>ha il suo massimo assoluto</u> in *T*=0 (statisticamente, si capisce il perché) e tale valore è <u>la potenza media del processo aleatorio</u>.

Processi aleatori stazionari

- **Significato statistico della funzione di autocorrelazione in un processo SSL**
  - L'autocorrelazione rappresenta il grado di similitudine (ovvero di dipendenza statistica) tra due v.a. ottenute "campionando in verticale" la famiglia di funzioni del p.a. in t ed in $t+T$. Se il processo è stazionario l'istante di partenza t non conta nulla e conta solo il ritardo relativo T;
  - In questo senso, l'autocorrelazione rappresenta la memoria del p.a.**:** ovvero ci dice dopo quanti secondi il p.a. produce campioni statisticamente dipendenti e quindi si "ricorda" di quanto ha prodotto in istanti precedenti;
  - Se l'autocorrelazione fosse identicamente 0, il p.a. non avrebbe memoria e tutti i suoi campioni sarebbero statisticamente indipendenti.

Processi aleatori ergodici

- **Premessa**
  - Finora abbiamo inteso gli indici statistici di un processo aleatorio come medie di insieme, calcolate su tutto l'insieme delle funzioni-campione costituenti il processo;
  - Quindi, occorre conoscere le funzioni di probabilità di primo e second'ordine (almeno), cosa che non è sempre facile;
  - Ciò che noi conosciamo direttamente di un processo aleatorio sono le sue funzioni-campione (realizzazioni) da noi osservate e memorizzate (vedi esempio EGC);
  - Domanda che sorge spontanea: quanta informazione statistica contiene una singola realizzazione del processo aleatorio? La risposta, in generale, è: non abbastanza per caratterizzare l'intero processo.

Processi aleatori ergodici

- **Definizione di ergodicità "in media"**
  - Consideriamo solo la media (primo ordine): le realizzazioni di un processo aleatorio hanno in genere media temporale (definita in Lezione 1) diversa ed anche se avessero la stessa media temporale non è detto che questa coincida con la media di insieme;
  - Alcuni processi aleatori, invece, sono caratterizzati da funzioni campione aventi tutte la stessa media temporale e quest'ultimo valore coincide proprio con la media d'insieme. Questi processi sono detti ergodici in media;
  - E' chiaro che un processo ergodico in media è anche stazionario in media (può non essere vero il contrario).

Processi aleatori ergodici

- **Condizioni di ergodicità media di un processo aleatorio stazionario (in senso lato)**
  - La media temporale di una singola realizzazione di un processo aleatorio è di per se stessa una variabile aleatoria (dipende dalla realizzazione);
  - Le due condizioni per cui il processo aleatorio sia ergodico in media sono le seguenti:
    - Il valor medio della media temporale di una singola realizzazione deve essere uguale al valor medio del processo;
    - La varianza di tale variabile aleatoria deve essere nulla.

Processi aleatori ergodici

- **Condizioni di ergodicità sull'auto-correlazione**
  - L'autocorrelazione temporale di un segnale deterministico può essere calcolata nella seguente maniera:

$$R_x(T) = \lim_{W \to +\infty} \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} x(t)x(t+T)\,dt$$

  - Applicando questa formula alla generica realizzazione di un processo stazionario in senso lato si ottiene:

$$R_X^i(T, z_i) = \lim_{W \to +\infty} \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} x(t, z_i)x(t+T, z_i)\,dt$$

Processi aleatori ergodici

- **Condizioni di ergodicità sull'auto-correlazione (2)**
  - Un processo è ergodico rispetto all'autocorrelazione <u>se e soltanto se</u> è verificata la seguente condizione:

$$R_X^i\left(T, z_i\right) \equiv R_X\left(T\right) = E\left\{x(t)x(t+T)\right\} \; \forall i$$

  - Ovvero l'autocorrelazione temporale <u>di tutte le possibili realizzazioni</u> deve coincidere con l'autocorrelazione del processo aleatorio calcolata <u>con la media d'insieme</u>.

Processi aleatori ergodici

- **Implicazioni dell'ergodicità**
  - In un processo ergodico (almeno "in media") le statistiche del primo ordine (media, potenza media, varianza) possono essere calcolate direttamente da una singola realizzazione (una qualsiasi) mediante un'integrazione a finestra mobile;
  - Nel dominio numerico, l'integrazione a finestra mobile viene approssimata assai bene da una media aritmetica dei campioni della realizzazione del processo aleatorio;
  - *W* non deve essere infinito ovviamente. Una finestra abbastanza lunga può portare ad un'ottima approssimazione;
  - Quindi, in un processo ergodico, le statistiche fondamentali sono facilmente conoscibili o, almeno, stimabili. Svariati processi aleatori di interesse tecnico sono oltreché stazionari (in senso lato) anche ergodici.