



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria  
e Scienza dell'Informazione

# Teoria dei Segnali

Parte Seconda: Fondamenti di  
elaborazione dei segnali

Lezione 4: Rappresentazione in  
frequenza di sistemi LTI

*Docente: Prof. Claudio Sacchi*

# Contenuti

- Motivazioni dell'analisi;
- Funzione di trasferimento di un sistema LTI;
- Composizione di funzioni di trasferimento;
- Esempio: il circuito RC;
- Banda passante di un sistema LTI;
- Introduzione al filtraggio di segnali deterministici.

# Motivazioni dell'analisi

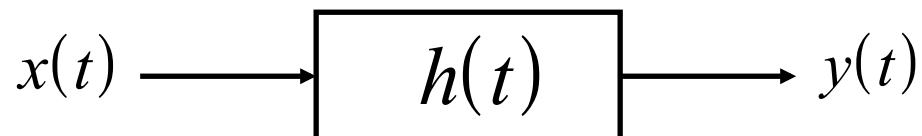
## ■ Introduzione

- Il formalismo tipico dell'elaborazione dei segnali studia un sistema LTI sulla base della sua risposta all'impulso;
- Questo formalismo è molto elegante ed efficace: infatti considera il sistema attraverso un segnale (la risposta all'impulso, appunto) che caratterizza tutta la sua struttura interna;
- Il problema è che il calcolo della risposta ad un segnale generico passa attraverso la convoluzione dell'ingresso con la risposta all'impulso: operazione quanto mai ostica.

# Motivazioni dell'analisi

## ■ Perché nel dominio delle frequenze?

- La convoluzione, nel dominio delle frequenze, diviene un prodotto e quindi:



$$y(t) = h(t) * x(t) \rightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

$$H(f) = \mathfrak{F}[h(t)] \quad X(f) = \mathfrak{F}[x(t)]$$

$H(f)$  è detta funzione di trasferimento o risposta in frequenza del sistema LTI

# Funzione di trasferimento di un sistema LTI

## ■ Significato fisico e signalistico (1)

- In pratica  $H(f)$  è una funzione che trasferisce all'uscita del sistema LTI l'energia del segnale di ingresso e, per questo, è detta funzione di trasferimento:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- E' invece detta risposta in frequenza perché effettivamente rappresenta la risposta del sistema LTI ad un fasore complesso (come viene mostrato di seguito):

$$y(t) = h(t) * e^{j2\pi ft} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{2\pi jf(t-\alpha)} d\alpha = e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{-2\pi jf\alpha} d\alpha$$

# Funzione di trasferimento di un sistema LTI

## ■ Significato fisico e signalistico (2)

- Si definisce risposta in frequenza (talora indicata anche come risposta armonica) di un sistema LTI la seguente funzione:

$$H(f) \triangleq \frac{y(t)}{e^{j2\pi ft}} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{-2\pi j f \alpha} d\alpha = \mathfrak{F}[h(t)]$$

$H(f)$  è proprio la trasformata di Fourier della risposta all'impulso del sistema, come si evince dall'equazione soprastante.

# Funzione di trasferimento di un sistema LTI

## ■ Risposta in ampiezza e risposta in fase

- Data la funzione di trasferimento (o risposta in frequenza a dir si voglia ...) di un sistema LTI si definiscono risposta in ampiezza e risposta in fase, le seguenti funzioni *reali*:

$$A(f) = |H(f)| \quad \text{Risposta in ampiezza}$$

$$\Phi(f) = \arg[H(f)] \quad \text{Risposta in fase}$$

# Funzione di trasferimento di un sistema LTI

## ■ Guadagno in potenza del sistema LTI

- E' detto guadagno in potenza (o di energia) di un sistema LTI la seguente funzione *reale* della frequenza:

$$G(f) \triangleq |H(f)|^2$$

- Si chiama così perché se ci ricordiamo il teorema di Parseval e calcoliamo la densità spettrale di energia dell'uscita del sistema LTI avremo che:

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2 = G(f) |X(f)|^2$$



# Funzione di trasferimento di un sistema LTI

## ■ Guadagno in potenza in decibel

- Nei sistemi di uso ingegneristico, il guadagno di potenza è spesso misurato in decibel rispetto ad una frequenza di riferimento, ovvero:

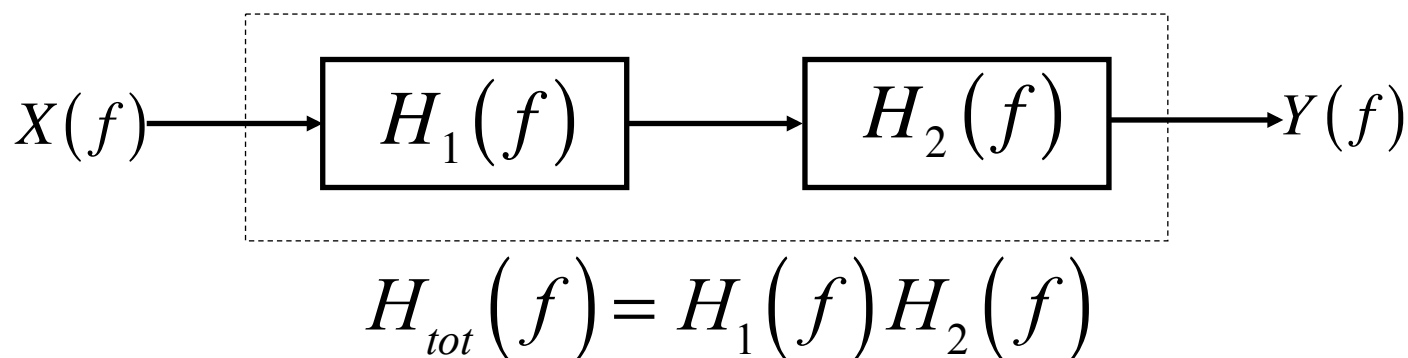
$$G_{dB}(f) \triangleq 10 \log_{10} \left\{ \frac{|H(f)|^2}{|H(f_{rif})|^2} \right\} = 20 \log_{10} \left\{ \frac{|H(f)|}{|H(f_{rif})|} \right\}$$

In generale  $f_{rif}$  è scelto in corrispondenza del massimo della risposta in ampiezza.

# Composizione di funzioni di trasferimento

## ■ Sistemi LTI in cascata

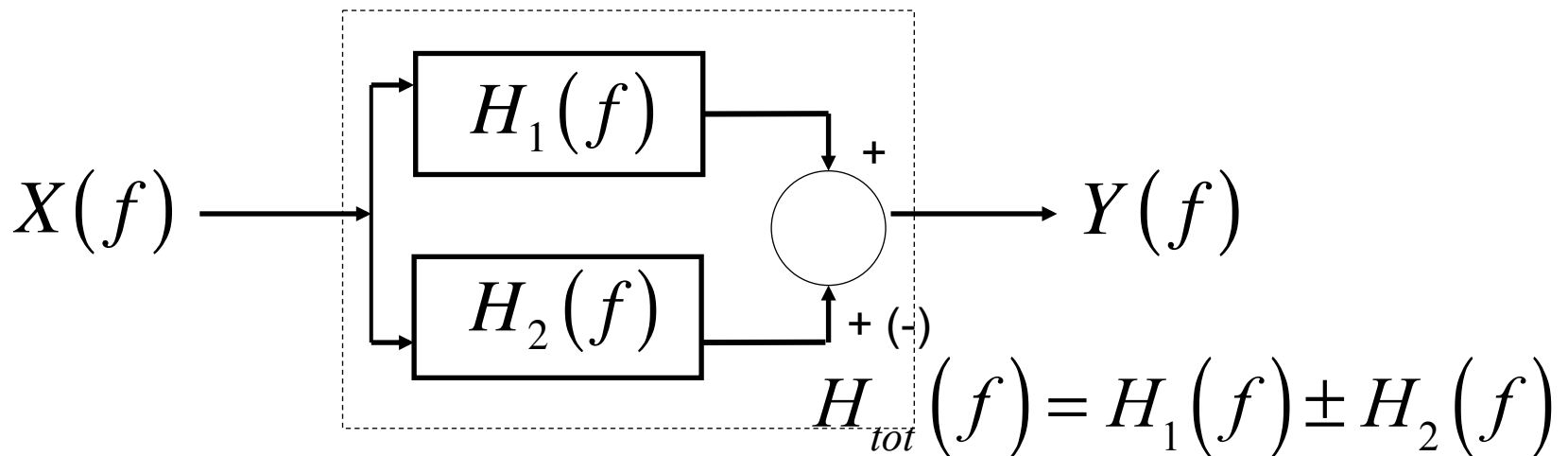
- Se abbiamo due (o più) sistemi LTI in cascata, la funzione di trasferimento complessiva della cascata è data dal prodotto delle funzioni di trasferimento dei singoli sistemi LTI:



# Composizione di funzioni di trasferimento

## ■ Sistemi LTI in parallelo

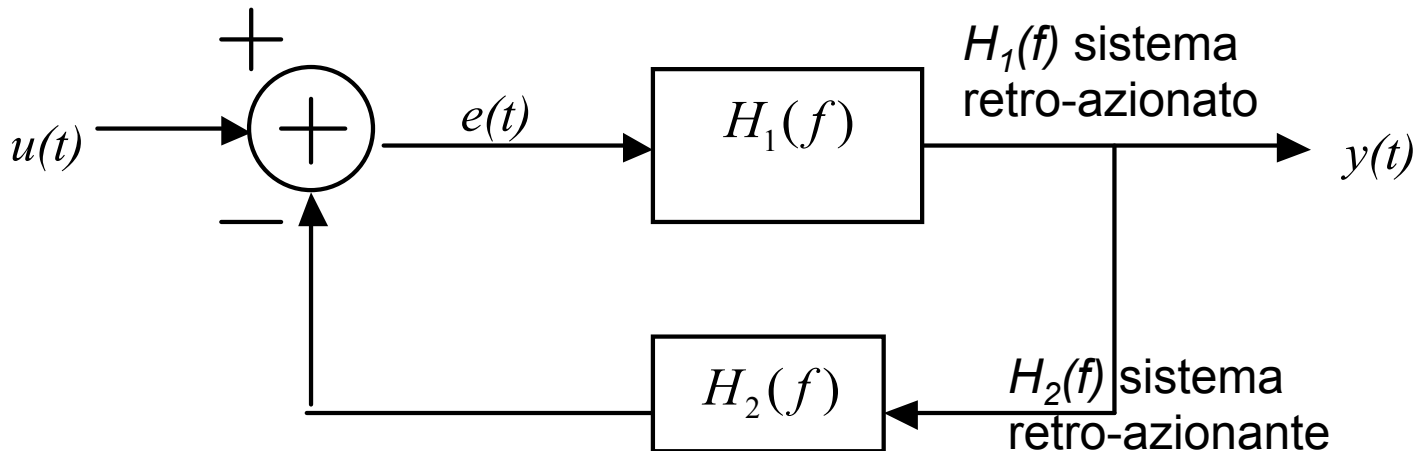
- Se abbiamo il parallelo di due (o più) sistemi LTI con somma (o differenza) dei contributi, la funzione di trasferimento complessiva è data dalla somma (o differenza) delle funzioni di trasferimento:



# Composizione di funzioni di trasferimento

## ■ Sistemi LTI in retroazione (1)

- La retroazione di sistemi LTI ha molto interesse in discipline legate alla regolazione automatica ed al controllo:

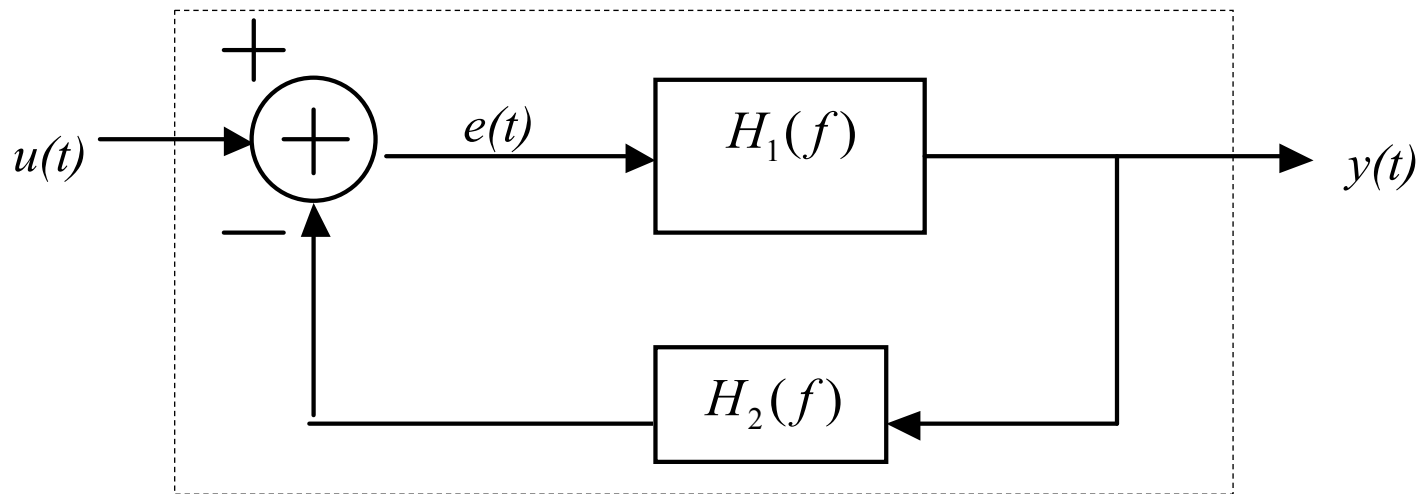


Esempio classico:  
regolazione di  
una caldaia,  
retro-azionata  
dalla misura della  
temperatura  
ambiente.

# Composizione di funzioni di trasferimento

## ■ Sistemi LTI in retroazione (2)

□ Calcolo della funzione di trasferimento complessiva:



$$H_{tot}(f) = \frac{Y(f)}{U(f)} = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$

# Esempio: il circuito RC

## ■ Risposta all'impulso

- La risposta all'impulso del circuito RC è nota:

$$h(t) = RCe^{-\frac{t}{RC}} 1(t)$$

- Si tratta di un'esponenziale causale. Se ne può calcolare la trasformata di Fourier:

$$H(f) = \frac{1/RC}{1/RC + j2\pi f} = \frac{1}{1 + j(2\pi fRC)}$$

# Esempio: il circuito RC

## ■ Risposta in ampiezza, risposta in fase e guadagno in potenza (1)

- La funzione di trasferimento (o risposta in frequenza) è quindi già calcolata:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j(2\pi fRC)}$$

- Se ne possono calcolare, quindi, risposta in ampiezza, risposta in fase e guadagno in potenza:

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}$$

$$G(f) = \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

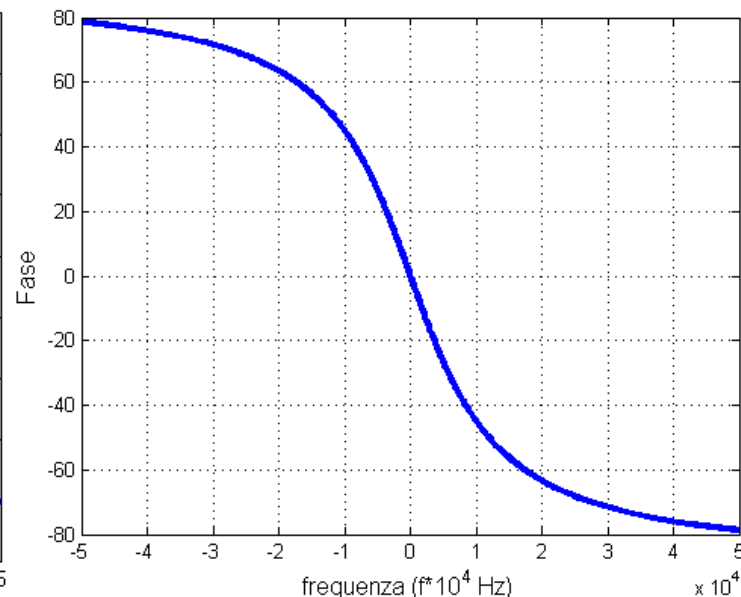
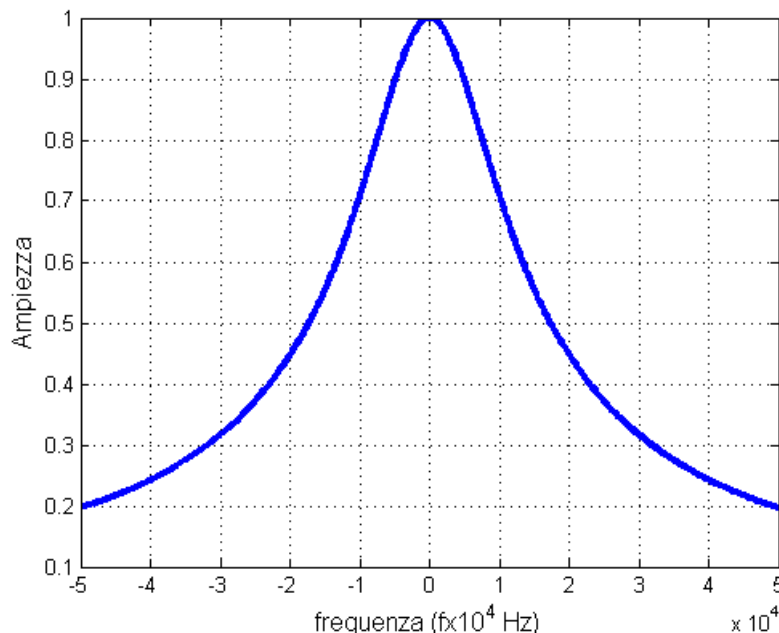
$$\Phi(f) = -\arctan(2\pi fRC)$$

# Esempio: il circuito RC



## ■ Risposta in ampiezza, risposta in fase e guadagno in potenza (1)

- Di seguito, forniamo i grafici della risposta in ampiezza e della risposta in fase ( $RC=0.1$  msec):



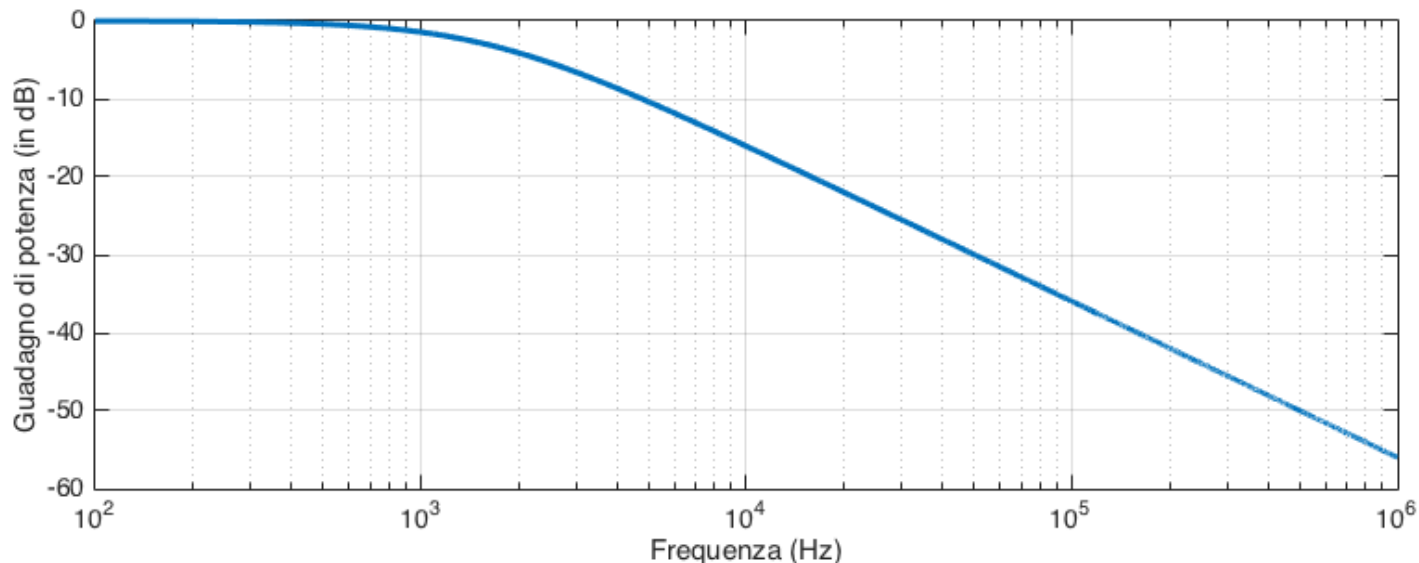


# Esempio: il circuito RC



## ■ Risposta in ampiezza, risposta in fase e guadagno in potenza (2)

- Interessante è il guadagno in potenza in dB rispetto al massimo, che è nella continua ( $f_{rif}=0$ ):



# Esempio: il circuito RC

## ■ Considerazioni sul sistema

- Il comportamento del guadagno in potenza del circuito RC è indicativo del fatto che tale sistema “mantiene” le frequenze del segnale in ingresso inferiori a circa 1 KHz;
- Frequenze del segnale di ingresso superiori a 1KHz vengono “abbattute” e l’abbattimento diviene assai pesante per frequenze maggiori di 10KHz;
- Quindi, questo circuito effettua un filtraggio del segnale in ingresso, salvandone le basse frequenze e tagliando le alte. E’ chiamato, infatti, filtro RC.

# Banda passante di un sistema LTI

## ■ Larghezza di banda di un sistema?

- Abbiamo parlato, finora, di larghezza di banda di un segnale. Ha senso parlare di “larghezza di banda di un sistema LTI?”
- Sostanzialmente, un sistema LTI è un oggetto che esegue operazioni su un segnale, alterandone lo spettro;
- La “larghezza di banda” di un sistema è comunemente definita come la porzione di spettro ove la risposta in frequenza del sistema LTI è “piatta”, ovvero non altera significativamente lo spettro del segnale entrante;
- Per distinguerla dalla larghezza di banda di un segnale, tale larghezza di banda è detta banda passante.

# Banda passante di un sistema LTI

## ■ Definizione formale di banda passante di un sistema LTI

- Si definisce formalmente banda passante di un sistema LTI la larghezza di banda che soddisfa la seguente condizione:

$$B_{pass} : G_{dB}(f) \geq -3dB \quad \forall f : |f - f_{rif}| \leq B_{pass}$$

- E' detta, per questo motivo, anche banda a 3dB, intendendo con 3dB la massima attenuazione in potenza che possiamo accettare (al di sotto, il sistema “taglia” frequenze e distorce).

# Banda passante di un sistema LTI

## ■ Calcolo della banda passante del circuito RC (1)

- Può essere interessante calcolare la banda passante del circuito RC, impostando (e risolvendo) la seguente disequazione:

$$G_{dB}(f) = 10 \log_{10} \left[ \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} \right] \geq -3dB \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \leq (2\pi fRC) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2\pi RC} \leq f \leq \frac{1}{2\pi RC}$$

# Banda passante di un sistema LTI

## ■ Calcolo della banda passante del circuito RC (2)

- Poiché la frequenza di riferimento è  $f=0$  (massimo valore della risposta in frequenza nella continua), la banda passante del circuito RC è calcolata come:

$$B_{pass} = \frac{1}{2\pi RC}$$

- Sostituendo i numeri (ovvero  $RC = 0.1$  msec) si ottiene:

$$B_{pass} = \frac{10^4}{2\pi} = 1.59 \text{ KHz}$$

# Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

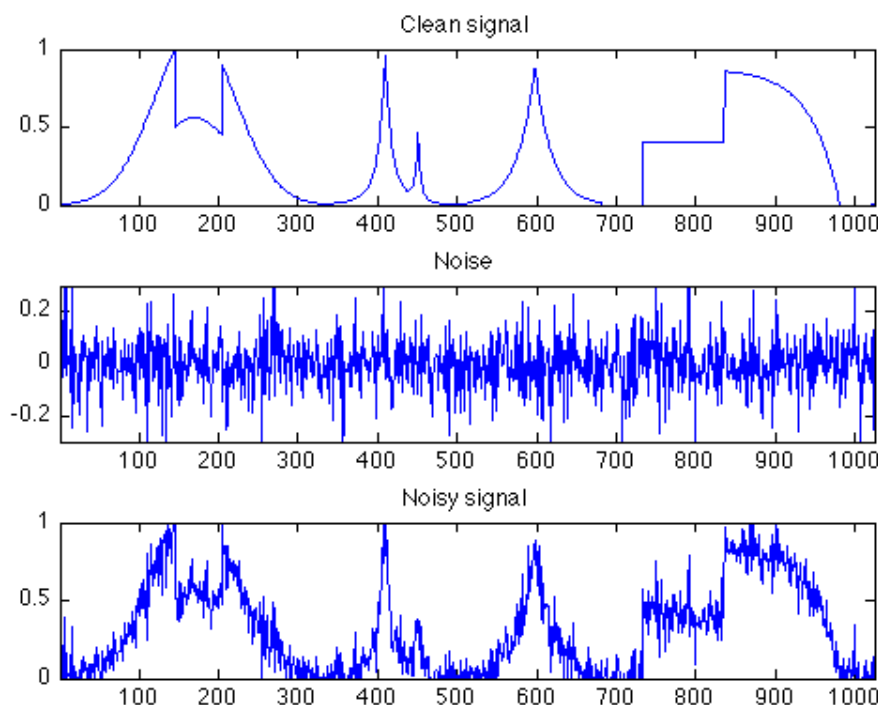
## ■ Cosa vuol dire “filtrare” nell’elaborazione dei segnali

- Un filtro in idraulica è un oggetto che separa l’acqua dalle impurità allo stato solido;
- Nell’elaborazione dei segnali, “l’acqua” è il segnale che noi desideriamo puro e pulito e le impurità sono segnali rumorosi che si sovrappongono ad esso nella sua larghezza di banda;
- Il filtro, quindi, seleziona una parte dello spettro (dove si spera ci sia il nostro segnale) e ne rigetta un’altra, dove ci sono i disturbi.

# Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

## ■ Esempio di segnale “sporco”:

□ Prendiamo questo grafico:



Se il rumore fosse localizzato in un certo intervallo di frequenze, potrei pensare di “tagliarlo” con un filtro, sperando di non “uccidere” anche il segnale pulito.



# Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

## ■ Filtro passabasso ideale

- Si tratta di un filtro che lascia intatte le componenti frequenziali del segnale localizzate intorno alla continua e rigetta totalmente le componenti al di fuori della sua banda passante;
- Inoltre, ha risposta in fase lineare;
- Un filtro di questo genere non può che avere la seguente funzione di trasferimento (LPF sta per “Low-Pass Filter”)

$$H_{LPF}(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B_{pass}}\right) e^{-j2\pi ft_0}$$

# Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

## ■ Filtro passabasso ideale: risposta in ampiezza e risposta in fase

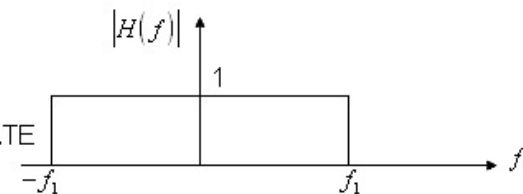
$$A_{LPF}(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B_{pass}}\right)$$

$$\Phi_{LPF}(f) = -2\pi f t_0$$

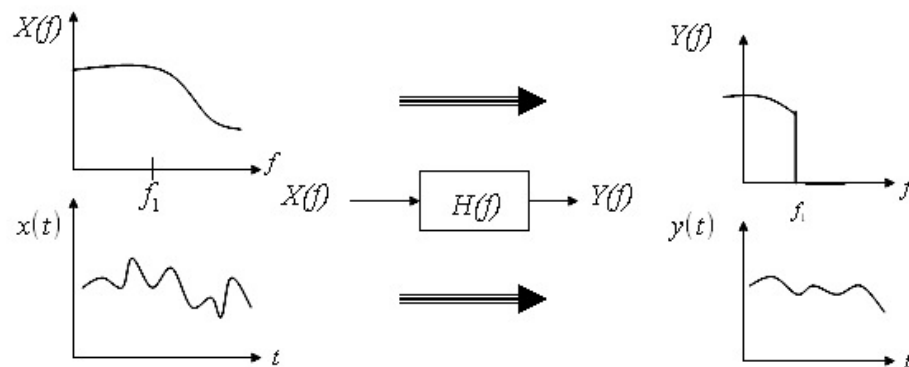
$$h_{LPF}(t) = 2B_{pass} \operatorname{sinc}(2B_{pass}(t - t_0))$$

FREQUENZE  $|f| < f_1$  : PASSANO

FREQUENZE  $|f| > f_1$  : VENGONO TAGLIATE



ESEMPI:



Risposta all'impulso: sistema non causale e quindi irrealizzabile

Funzionamento ( $B_{pass}=f_1$  nell'esempio)

# Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

## ■ Filtro passa-alto ideale

- Si tratta di un filtro che lascia intatte le componenti frequenziali del segnale oltre la banda passante e rigetta totalmente le componenti attorno alla continua;
- Inoltre, ha risposta in fase lineare;
- E' quindi il complementare del filtro passabasso ideale. La sua risposta in frequenza sarà data da:

$$H_{HPF}(f) = \left[ 1 - \Pi\left(\frac{f}{2B_{pass}}\right) \right] e^{-j2\pi ft_0}$$

# Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

## ■ Filtro passa-alto ideale: risposta in ampiezza e risposta in fase

$$A_{HPF}(f) = \left| 1 - \Pi\left(\frac{f}{2B_{pass}}\right) \right|$$

$$\Phi_{HPF}(f) = -2\pi f t_0$$

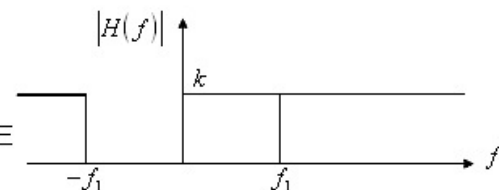
$$h_{HPF}(t) = \delta(t - t_0) +$$

$$-2B_{pass} \operatorname{sinc}\left(2B_{pass}(t - t_0)\right)$$

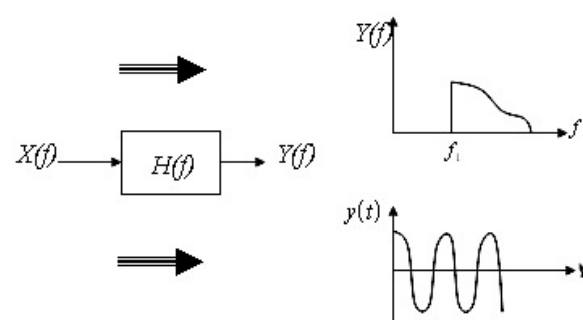
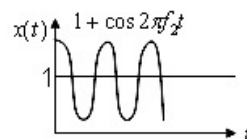
Risposta all'impulso: sistema non causale e quindi irrealizzabile

FREQUENZE  $|f| > f_1$  : PASSANO

FREQUENZE  $|f| < f_1$  : VENGONO TAGLIATE



ESEMPI:



Funzionamento ( $B_{pass} = f_1$  nell'esempio)

# Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

## ■ Filtro passa-banda ideale

- E' un filtro che lascia intatte le componenti frequenziali di un segnale che stanno nell'intorno di una frequenza diversa da zero e rigetta totalmente tutte le altre;
- Inoltre, ha risposta in fase lineare;
- E' quindi una sorta di passabasso, ma centrato non in banda-base, bensì in una banda traslata:

$$H_{BPF}(f) = \left[ \Pi\left(\frac{(f - f_c)}{2B_{pass}}\right) + \Pi\left(\frac{(f + f_c)}{2B_{pass}}\right) \right] e^{-j2\pi ft_0}$$

# Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

## ■ Filtro passa-banda ideale: risposta in ampiezza e risposta in fase (1)

$$A_{BPF}(f) = \Pi\left(\frac{(f - f_c)}{2B_{pass}}\right) + \Pi\left(\frac{(f + f_c)}{2B_{pass}}\right)$$

$$\Phi_{BPF}(f) = -2\pi f t_0$$

$$h_{BPF}(t) = B_{pass} \operatorname{sinc}\left(2B_{pass}(t - t_0)\right) \cos\left(2\pi f_c(t - t_0)\right)$$

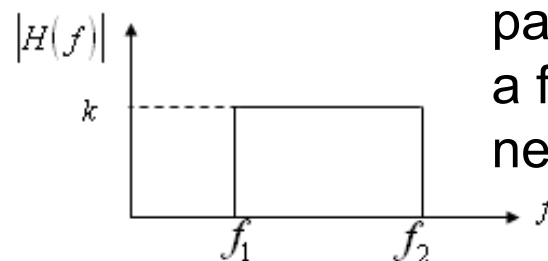
Risposta all'impulso: sistema non causale e quindi irrealizzabile

# Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

## ■ Filtro passa-banda ideale: risposta in ampiezza e risposta in fase (2)

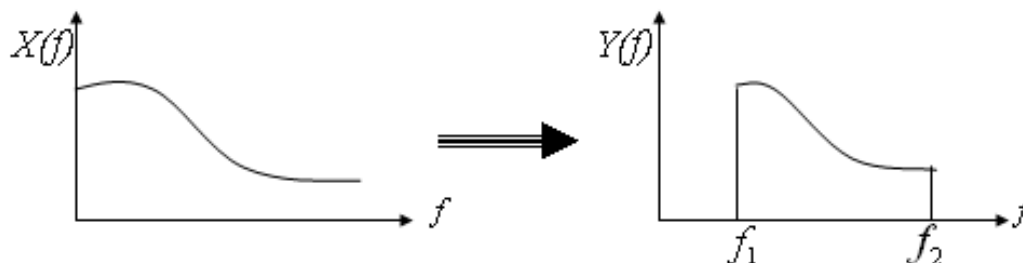
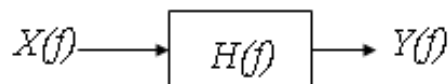
FREQUENZE  $f_1 \leq |f| \leq f_2$  : PASSANO

ALTRE FREQUENZE: VENGONO TAGLIATE



**N.B.** c'è anche la parte **simmetrica** a frequenze negative!

ESEMPI:



Funzionamento ( $B_{pass} = (f_2 - f_1)$  nell'esempio)

# Introduzione al filtraggio di segnali deterministici

## ■ Alcune considerazioni

- Il filtro passabasso funziona in pratica come un integratore: taglia le frequenze alte ed esalta quelle basse: il segnale filtrato avrà un andamento “smooth” con le transizioni brusche (corrispondenti alle alte frequenze) spianate ed addolcite;
- Il filtro passa-alto funziona come un derivatore: taglia le frequenze basse ed evidenzia le transizioni (alte frequenze): l'esempio del coseno rialzato è illuminante: rimane la sinusoide (alta frequenza) e viene tagliata la costante che lo solleva (bassa frequenza);
- Invece, il filtro passabanda non ha un funzionamento così facilmente spiegabile a parole: esso taglia frequenze lontane dalla banda traslata. Questo genere di filtri si usa nei sistemi di trasmissione radio, che usano sempre portanti modulate.