ESERCIZI TEORIA DEI SEGNALI 28/11/2017: TRASFORMATE DI FOURIER DI SEGNALI DETERMINISTICI APERIODICI

ESERCIZIO 1

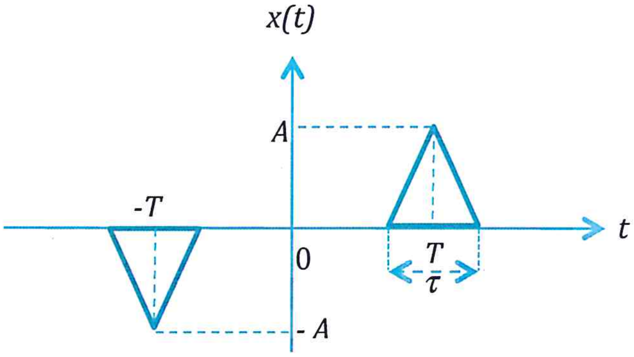
Sia dato il seguente segnale deterministico, aperiodico:

$$s(t) = \frac{V_0}{T} \cdot (t - \theta) \cdot e^{-\gamma(t-\theta)} 1(t - \theta)$$

Ove γ vale 25 KHz, T vale 10 μsec, θ vale 5 μsec e V_0 vale 1.25 Volt. Si richiede di calcolare lo spettro in ampiezza e lo spettro in fase di *s(t)*.

ESERCIZIO 2

Sia dato il seguente segnale reale e simmetrico:



Si richiede di calcolare lo spettro in ampiezza e lo spettro in fase del segnale *x(t)*.

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

$$s(t) = \frac{V_0}{T}(t-\theta)e^{-\gamma(t-\theta)}\,1(t-\theta)$$

Prima di tutto, ci occupiamo del calcolo dello spettro. Si nota subito che:

$$s(t) = x(t-\theta) \quad \text{ove} \quad x(t) = \frac{V_0}{T}t\,e^{-\gamma t}\,1(t)$$

Andando a leggere la tabella fornita, si vede che $x(t)$ è nella forma:

$$t^n v(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (-2\pi j)^{-n}\frac{d^n}{df^n}\left[V(f)\right]$$

nel nostro caso $v(t) = \frac{V_0}{T}e^{-\gamma t}\,1(t)$ che ha trasformata nota.

Pertanto, procedendo x gradi:

$$S(f) = X(f)e^{-2\pi j f\theta}$$ (trasformata del segnale ritardato)

$$X(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{V_0 t}{T}e^{-\gamma t}\,1(t)\right\} = \frac{V_0}{T}\left\{t\,e^{-\gamma t}\,1(t)\right\} =$$

$$= \frac{V_0}{T}(-2\pi j)^{-1}\frac{d}{df}\left[\mathcal{F}\left\{e^{-\gamma t}\,1(t)\right\}\right]$$

$$X(f) = -\frac{1}{(2\pi j)} \frac{V_0}{T} \frac{d}{df} \left\{ \frac{1}{\gamma + 2\pi j f} \right\} =$$

$$= + \frac{V_0}{\cancel{2\pi j} T} \left[+ \frac{\cancel{2\pi j}}{(\gamma + 2\pi j f)^2} \right] =$$

$$= \left(\frac{V_0}{T} \right) \frac{1}{(\gamma + 2\pi j f)^2}$$

Da cui deriva lo spettro:

$$S(f) = \left(\frac{V_0}{T} \right) \frac{1}{(\gamma + 2\pi j f)^2} e^{-2\pi j f \theta}$$

È, tuttavia, richiesto lo spettro in ampiezza e lo spettro in fase. Quindi:

$$|S(f)| \quad e \quad \angle S(f)$$

$$|S(f)| = \left(\frac{V_0}{T} \right) \frac{1}{|(\gamma + 2\pi j f)^2|} \cancel{|e^{-2\pi j f \theta}|} \equiv 1$$

perché è un fasore

Per calcolare ~~$\frac{1}{|(\gamma + 2\pi j f)|}$~~ $\frac{1}{|(2\pi j f + \gamma)^2|}$ occorre effettuare un'operazione di razionalizzazione complessa.

$$\frac{1}{(\gamma+2\pi j f)^2} = \frac{1}{\gamma^2+4\pi j f\gamma-(2\pi f)^2} = \frac{1}{[\gamma^2-(2\pi f)^2]+j\,4\pi f\gamma} =$$

$$= \frac{[\gamma^2-(2\pi f)^2]-j\,4\pi f\gamma}{[\gamma^2-(2\pi f)^2]^2+(4\pi f\gamma)^2} \overset{(\circ)}{=} \frac{[\gamma^2-(2\pi f)^2]}{[\gamma^2-(2\pi f)^2]^2+(4\pi f\gamma)^2} +$$

$$+j\,\frac{-(4\pi f\gamma)}{[\gamma^2-(2\pi f)^2]^2+(4\pi f\gamma)^2}$$

$(\circ)$ Ricordare operazione di razionalizzazione: $\dfrac{1}{a+jb} = \dfrac{a-jb}{a^2+b^2}$

nel nostro caso: $a = [\gamma^2-(2\pi f)^2]$ $\quad b = (4\pi f\gamma)$

e poi: $\dfrac{1}{|a+jb|} = \left|\dfrac{a-jb}{a^2+b^2}\right| = \dfrac{|a-jb|}{(a^2+b^2)} =$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Concludendo (grazie a qualche operazione di sostituzione):

$$|S(f)| = \left(\frac{V_0}{T}\right)\frac{1}{\sqrt{[\gamma^2-(2\pi f)^2]^2+(4\pi f\gamma)^2}}$$ <u>spettro in ampiezza</u>

Analizzando lo spettro in fase, si ottiene:

$$\angle S(f) = \angle X(f) - 2\pi f \theta$$

(infatti $s(t)$ è $x(t-\theta)$ e si applica quanto detto a proposito del segnale ritardato: ovvero il ritardo aggiunge un termine lineare alla fase)

$$\angle X(f) = \operatorname{atan}\left\{\frac{Im[X(f)]}{Re[X(f)]}\right\} =$$

$$= \operatorname{atan}\left\{\frac{-4\pi f \gamma}{[\gamma^2 - (2\pi f)^2]}\right\} =$$

$$= -\operatorname{atan}\left\{\frac{4\pi f \gamma}{[\gamma^2 - (2\pi f)^2]}\right\}$$

In conclusione:

$$\angle S(f) = -\operatorname{atan}\left\{\frac{4\pi f \gamma}{\gamma^2 - (2\pi f)^2}\right\} - 2\pi f \theta$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Prima di tutto, occorre esprimere $x(t)$ in funzione di segnali elementari con trasformata di Fourier nota. Nel nostro caso:

$$x(t) = A\,\Lambda\left(\frac{t-T}{\tau/2}\right) - A\,\Lambda\left(\frac{t+T}{\tau/2}\right)$$

$$\mathcal{F}\left\{\Lambda\left(t/T\right)\right\} = AT\,\mathrm{sinc}^2(fT) \quad \text{(dalle tabelle)}$$

nel nostro caso:

$$\mathcal{F}\left\{\Lambda\left(t/\tau/2\right)\right\} = \frac{A\tau}{2}\,\mathrm{sinc}^2(f\,\tau/2)$$

Pertanto:

$$X(f) = \left(\frac{A\tau}{2}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f\tau}{2}\right)e^{-2\pi j f T} + \left(\frac{A\tau}{2}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f\tau}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\, e^{2\pi j f T} = \left(\frac{A\tau}{2}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f\tau}{2}\right)\left(e^{-2\pi j f T} + e^{+2\pi j f T}\right)$$

Ricordando che: $\sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ si ha che:

$$X(f) = \left[\left(\frac{A\tau}{2}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f\tau}{2}\right)\right]\left(-2j\,\sin\left(2\pi f T\right)\right)$$

Quindi:

$$X(f) = -\cancel{2}j\left(\frac{A\tau}{\cancel{2}}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f\tau}{2}\right)\sin(2\pi f T) =$$

$$= -j(A\tau)\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f\tau}{2}\right)\sin(2\pi f T)$$

OSSERVAZIONI

- trasformata <u>PURAMENTE IMMAGINARIA</u>, così come vogliono le regole della simmetria hermitiana (infatti $x(t)$ ha simmetria DISPARI).
- È una <u>forma duale del teorema della modulazione</u>: spostando un segnale reale, di durata finita τ di $\pm T$, con $T > \tau$, nel dominio della frequenza avremo la moltiplicazione dello spettro per un termine sinusoidale.

<u>Spettro di ampiezza:</u>

$$|X(f)| = A\tau\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f\tau}{2}\right)\left|\sin(2\pi f T)\right|$$

<u>Spettro di fase:</u>

$$\angle X(f) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{se } \sin(2\pi f T) < 0 \\ 0 & \text{se } \sin(2\pi f T) = 0 \\ -\pi/2 & \text{se } \sin(2\pi f T) > 0 \end{cases}$$

Pertanto:

$$\angle X(f) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se} \quad \pi < (2\pi f T) < 2\pi \\ 0 & \text{se} \quad f = 0 \\ -\pi/2 & \text{se} \quad 0 < (2\pi f T) < \pi \end{cases}$$

Semplificando un po':

$$\angle X(f) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se} \quad \frac{1}{2T} < f < 1/T \\ 0 & \text{se} \quad f = 0 \\ -\pi/2 & \text{se} \quad 0 < f < 1/2T \end{cases}$$

Questo, a meno della PERIODICITÀ DEL SENO. Sarebbe più corretto scrivere:

$$\angle X(f) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se} \quad \left(\frac{1}{2T} + \frac{K}{T}\right) < f < \left(\frac{1}{T} + \frac{K}{T}\right) \\ 0 & \text{se} \quad f = K/T \\ -\pi/2 & \text{se} \quad \left(K/T\right) < f < \left(\frac{1}{2T} + K/T\right) \end{cases} \quad (K \in \mathbb{Z})$$