UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Ingegneria
e Scienza dell'Informazione

Teoria dei Segnali

Parte Seconda: Fondamenti di elaborazione dei segnali

Lezione 3: Rappresentazione in frequenza di segnali deterministici non periodici: la trasformata di Fourier (teoremi e calcolo di spettri)

Docente: Prof. Claudio Sacchi

Contenti

- Teorema della dualità;
- Teorema della convoluzione e del prodotto;
- Teorema della modulazione;
- Esempi di trasformate di Fourier notevoli;
- Segnali periodici e segnali campionati;
- Teorema di Parseval e calcolo della larghezza di banda di un segnale.

Teorema della dualità

- **Trasformazione ed anti-trasformazione sono operazioni duali**
  - Si può notare facilmente che trasformazione ed anti-trasformazione di Fourier sono due operazioni molto simili, l'una differisce dall'altra solo per il segno del fasore interno:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi jft}\, dt \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft}\, df$$

  - Questa considerazione è alla base di un importante teorema, detto della dualità, la cui enunciazione non è semplicissima, ma la cui importanza è molto grande.

Teorema della dualità

- **Enunciazione**
  - Dato un segnale *x(t)* che ammette trasformata di Fourier *X(f)* si ha che:

$$x(t) \rightarrow X(f) \Rightarrow X\left(t\right) \rightarrow x\left(-f\right)$$

  - Quindi, se consideriamo la funzione *X*, nel dominio temporale, la <u>sua trasformata di Fourier è la funzione *x*, nel dominio della frequenza e con inversione della scala</u>.

Teorema della dualità

- **Alcuni casi interessanti dove questo teorema è utile (1)**
  - Nelle precedenti slide abbiamo affermato che:

$$1 \rightarrow \delta(f)$$

  - Utilizzando il teorema della dualità, possiamo calcolare <u>la trasformata della delta di Dirac</u>:

$$1 \rightarrow \delta(f) \Rightarrow \delta(t) \rightarrow 1 \; \forall f$$

Ovviamente la costante 1 è una funzione pari ed il suo valore in *–f* è uguale a quello in *f*

Teorema della dualità

- **Alcuni casi interessanti dove questo teorema è utile (2)**
  - Si può anche calcolare <u>la trasformata del fasore</u>. Conoscendo la trasformata della delta di Dirac e considerando il teorema del ritardo abbiamo che:

$$\delta\left(t - t_0\right) \rightarrow 1e^{-2\pi jft_0} = e^{-2\pi jft_0}$$

  - Applicando la dualità:

$$e^{-2\pi jf_0 t} \rightarrow \delta\left(-f - f_0\right) = \delta\left(f + f_0\right) \quad e^{2\pi jf_0 t} \rightarrow \delta\left(f - f_0\right)$$

Teorema della dualità

- **Alcuni casi interessanti dove questo teorema è utile (3)**
  - Ritornando al rettangolo, possiamo calcolare, tramite la dualità, la trasformata della funzione sinc:

$$x(t) = V_0 \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow X(f) = V_0 T \operatorname{sinc}\left(fT\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0 \operatorname{sinc}\left(tW\right) \rightarrow x\left(-f\right) = \frac{V_0}{W}\Pi\left(\frac{-f}{W}\right) = \frac{V_0}{W}\Pi\left(\frac{f}{W}\right)$$

Infatti, il rettangolo è una funzione pari

Teorema della convoluzione e del prodotto

- **Enunciato**
  - Il teorema della convoluzione <u>nel dominio della frequenza</u> si enuncia così:

$$x(t) \rightarrow X(f) \quad y(t) \rightarrow Y(f) \Rightarrow \left(x * y\right)\left(t\right) \rightarrow X(f)Y(f)$$

  - Quindi, la convoluzione, nel dominio della frequenza, <u>diventa un prodotto di trasformate</u>. Questo <u>è un risultato fondamentale</u> nell’elaborazione dei segnali e nelle telecomunicazioni;
  - La dimostrazione segue nella prossima slide.

Teorema della convoluzione e del prodotto

- **Dimostrazione del teorema:**

$$\Im^{-1}\left[X_1(f)\cdot X_2(f)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f)X_2(f)e^{j2\pi ft}df=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi)e^{-j2\pi f\xi}d\xi\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\eta)e^{-j2\pi f\eta}d\eta\right]\cdot e^{j2\pi ft}df=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\eta)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t-\xi-\eta)}df\right]d\eta d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\eta)\delta(t-\xi-\eta)d\eta\right]d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi)x_2(t-\xi)d\xi=(x_1 * x_2)(t)$$

che è proprio ciò che volevamo dimostrare!

Teorema della convoluzione e del prodotto

- **Utilità del teorema**
  - Come abbiamo detto in precedenza, la convoluzione è un'operazione fattibile solo in pochi casi particolari;
  - Se nel dominio del tempo la convoluzione è proibitiva, possiamo passare nel dominio della frequenza e studiare il prodotto delle due trasformate;
  - Se siamo fortunati e riusciamo a tornare indietro con l'operazione di anti-trasformazione abbiamo risolto il problema, altrimenti, almeno possiamo studiare la convoluzione nel dominio della frequenza, ricavandone comunque informazioni utili.

Teorema della convoluzione e del prodotto

- **Un esempio semplice (ma illuminante) (1)**
  - Supponiamo di avere le due seguenti funzioni definite nel dominio del tempo:

$$x(t) = A\,\mathrm{sinc}\left(W_1 t\right) \quad y(t) = B\,\mathrm{sinc}\left(W_2 t\right) \quad W_1 > W_2 \quad A > B$$

  - Proviamo ad effettuare la loro convoluzione nel dominio del tempo:

$$z(t) = AB\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\left(W_1 t\right)\mathrm{sinc}\left(W_2\left(t-\alpha\right)\right)d\alpha$$

Integrale calcolabile utilizzando la funzione del seno integrale (che non ha un'espressione analitica definita, ma è nota solo attraverso i suoi valori numerici)

Teorema della convoluzione e del prodotto

- **Un esempio semplice (ma illuminante) (2)**
  - Ragioniamo, allora, <u>nel dominio delle frequenze</u>:

$$x(t) \to X\left(f\right) = \frac{A}{W_1}\Pi\left(\frac{f}{W_1}\right) \quad y(t) \to Y\left(f\right) = \frac{B}{W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_2}\right)$$

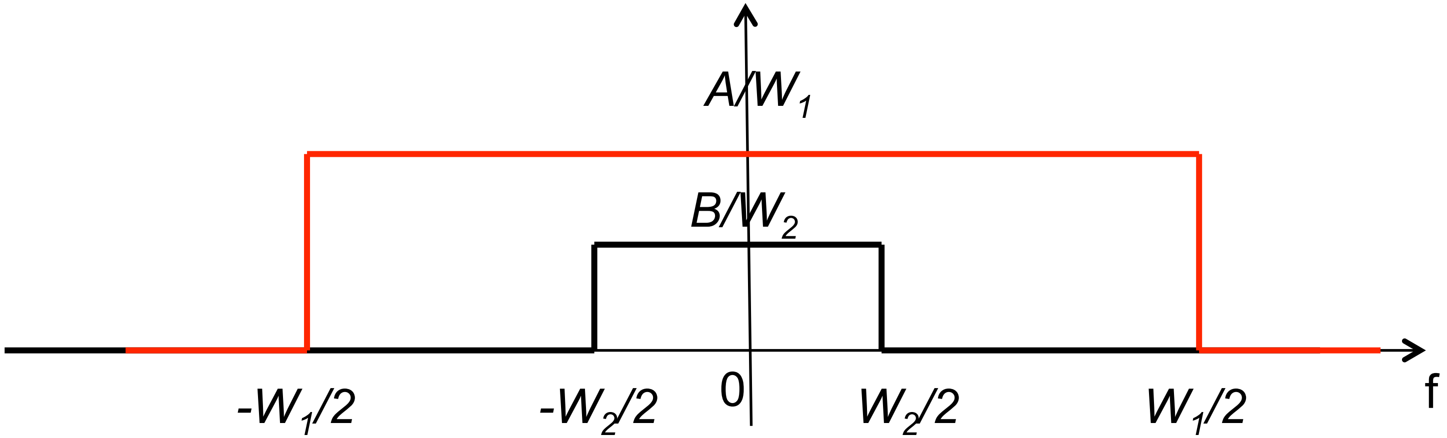
$$z(t) = \left(x * y\right)\left(t\right) \to Z\left(f\right) = X\left(f\right)Y\left(f\right) = \frac{AB}{W_1 W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_1}\right)\Pi\left(\frac{f}{W_2}\right)$$

$$z(t) \leftarrow Z(f)$$

E' possibile? Esiste l'anti-trasformata di *Z(f)*? La risposta è si, ma ci vuole un po' di analisi "grafica" nel dominio delle *f*

Teorema della convoluzione e del prodotto

- **Un esempio semplice (ma illuminante) (3)**
  - Tracciamo gli spettri in ampiezza delle due funzioni convoluite:



Il prodotto tra le due trasformate <u>può essere effettuato in maniera grafica</u> (come d'uso per le funzioni costanti a tratti) e si ottiene:

$$Z(f) = \frac{AB}{W_1 W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_2}\right)$$

Teorema della convoluzione e del prodotto

- **Un esempio semplice (ma illuminante) (4)**
  - Alla fine, si riesce a ritornare nel dominio del tempo:

$$z(t)=\frac{AB}{W_1}\mathrm{sinc}(tW_2)\leftarrow Z(f)=\frac{AB}{W_1W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_2}\right)$$

  - Non tutti i casi sono, ovviamente, così favorevoli. Ma, come visto nella slide precedente, se non si può tornare indietro nel dominio del tempo, <u>almeno si può sempre analizzare la convoluzione nel dominio della frequenza</u>, osservando l'andamento di *Z(f)*.

Teorema della convoluzione e del prodotto

- **Formulazione duale (teorema del prodotto)**
  - La formulazione duale del teorema della convoluzione è la seguente:

$$x(t) \rightarrow X(f) \quad y(t) \rightarrow Y(f) \Rightarrow x\left(t\right)y\left(t\right) \rightarrow X(f) * Y(f)$$

  - Quindi, il prodotto di due funzioni ha come trasformata di Fourier, la convoluzione delle loro rispettive trasformate.

Teorema della modulazione

- **Definizione di modulazione di una sinusoide**
  - Una sinusoide è detta modulata, se uno (o più) segnali alterano la sua ampiezza e/o la sua frequenza e/o la sua fase:

$$x(t) = Au(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$ Sinusoide modulata in ampiezza

$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi_\Delta u(t)\right)$$ Sinusoide modulata in fase

$$x(t) = A\cos\left(2\pi\left(f_0 + f_\Delta u(t)\right)t + \varphi\right)$$ Sinusoide modulata in frequenza

Teorema della modulazione

- **Teorema della modulazione (1)**
  - Supponiamo (per semplicità) di considerare una sinusoide modulata in ampiezza:

$$x(t) = Au(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$

  - Il segnale *x(t)* è dato dal prodotto di due segnali:

$$x(t) = u(t)\left[A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)\right]$$

Teorema della modulazione

- **Teorema della modulazione (2)**
  - Per calcolare lo spettro di x(t) sfruttiamo il teorema del prodotto:

$$x(t) = u(t)\left[A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)\right] \rightarrow U\left(f\right) * \Im\left\{A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)\right\}$$

  - Per calcolare la trasformata di Fourier del coseno, esprimiamolo con la formula di Eulero:

$$A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right) = \frac{A}{2}\left[e^{\left(2\pi j f_0 t + \varphi\right)} + e^{\left(-2\pi j f_0 t - \varphi\right)}\right] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{2\pi j f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-2\pi j f_0 t}$$

Teorema della modulazione

- **Teorema della modulazione (3)**
  - Ricordandosi della trasformata del fasore e della linearità della trasformata di Fourier, si ottiene che:

$$\Im\left[A\cos\left(2\pi f_0 t+\varphi\right)\right]=\frac{A}{2}e^{j\varphi}\Im\left[e^{2\pi j f_0 t}\right]+\frac{A}{2}e^{-j\varphi}\Im\left[e^{-2\pi j f_0 t}\right]=$$

$$=\frac{A}{2}e^{j\varphi}\delta\left(f-f_0\right)+\frac{A}{2}e^{-j\varphi}\delta\left(f+f_0\right)$$ *Trasformata della sinusoide generica*

Teorema della modulazione

- **Teorema della modulazione (4)**
  - A questo punto, ricordando una delle proprietà della delta di Dirac e la linearità della convoluzione, otteniamo lo spettro della sinusoide modulata in ampiezza:

$$X(f) = U(f) * \Im\left\{A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)\right\} =$$

$$= U(f) * \left[\frac{A}{2} e^{-j\varphi}\delta\left(f + f_0\right) + \frac{A}{2} e^{j\varphi}\delta\left(f - f_0\right)\right] =$$

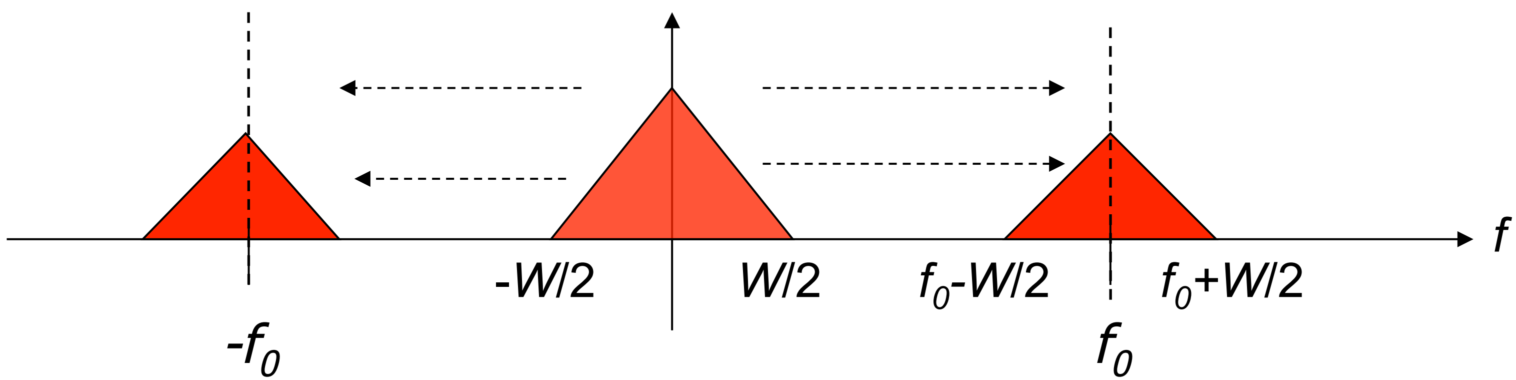
$$= \frac{A}{2} e^{-j\varphi}\left[U(f) * \delta\left(f + f_0\right)\right] + \frac{A}{2} e^{j\varphi}\left[U(f) * \delta\left(f - f_0\right)\right] =$$

$$= \frac{A}{2} e^{-j\varphi} U\left(f + f_0\right) + \frac{A}{2} e^{j\varphi} U\left(f - f_0\right)$$

RISULTATO FONDAMENTALE: la modulazione di ampiezza trasla lo spettro del segnale modulante alla frequenza della sinusoide, che per questo è detta segnale portante.

Teorema della modulazione

- **Teorema della modulazione (5)**
  - Supponiamo di avere un segnale *u(t)* il cui spettro ha banda limitata pari a *W*, se $f_0>W$, la traslazione dello spettro è “rigida”:



NOTARE: le modulazioni in fase ed in frequenza effettuano una traslazione dello spettro, ma in maniera differente. La frequenza di portante f_0 è anche detta radiofrequenza (RF) o banda traslata, in contrapposizione con la banda attorno alla continua, detta banda-base.

Trasformate di Fourier notevoli

- **Trasformata della funzione triangolo**
  - La funzione triangolo è data dalla convoluzione di due rettangoli di uguale ampiezza e durata;
  - La trasformata di Fourier del triangolo si calcola quindi applicando il teorema della convoluzione nel dominio della frequenza:

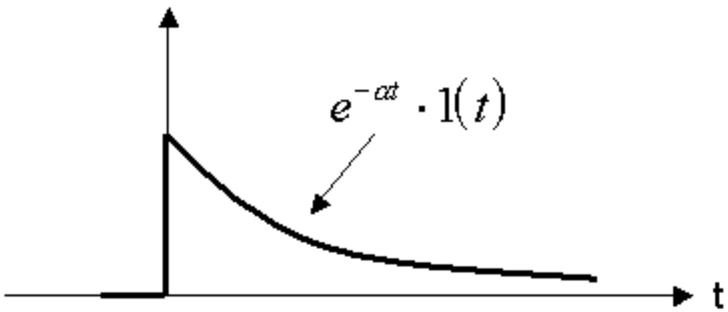
$$x_1(t) = \sqrt{\frac{A}{T}}\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad x_2(t) = \sqrt{\frac{A}{T}}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\left[x_1(t) * x_2(t)\right] \hat{=} x(t) = A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \Rightarrow X(f) = \sqrt{\frac{A}{T}} T\text{sinc}(fT)\sqrt{\frac{A}{T}} T\text{sinc}(fT) =$$

$$= AT\text{sinc}^2(fT)$$

Trasformate di Fourier notevoli

- **Trasformata dell’esponenziale causale**
  - La funzione <u>esponenziale causale</u> ha la seguente espressione (ed andamento):



$$\Rightarrow \Im\left\{e^{-\alpha t} \cdot 1(t)\right\} \qquad \alpha > 0$$

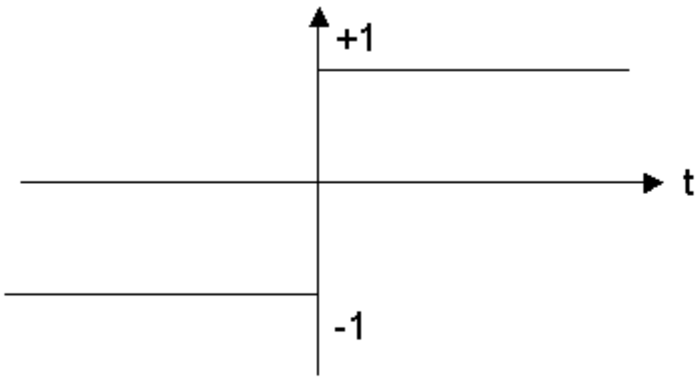
Calcolo trasformata di Fourier:

$$\Im\left\{e^{-\alpha t} \cdot 1(t)\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t}\, dt =$$

$$= -\frac{\left. e^{-(\alpha + j2\pi f)t} \right|_0^{+\infty}}{(\alpha + j2\pi f)} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

Trasformate di Fourier notevoli

- **Trasformata della funzione segno**
  - La funzione "segno di t" vale 1 se *t* ha segno positivo e -1 se *t* ha segno negativo



$$sign(t) \to \frac{1}{j\pi f}$$

Il calcolo di questa trasformata <u>non è banale</u> e richiede un passaggio al limite sulla trasformata di un'altra funzione.

Trasformate di Fourier notevoli

- **Trasformata del gradino di Heaviside**
  - Si calcola a partire dalla trasformata della funzione segno, applicando la linearità della trasformata di Fourier:

$$1(t) = \frac{1}{2}\left[sign(t) + 1\right] \rightarrow \frac{1}{2\pi jf} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

  - Da notare che questa trasformata, contrariamente a quella del segno non è puramente immaginaria, perché il gradino di Heaviside non presenta simmetrie particolari.

Trasformate di Fourier notevoli

- **Trasformata della funzione pettine (1)**
  - Abbiamo precedentemente definito la funzione pettine o campionamento ideale la seguente funzione:

$$f_c(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - nT_c\right)$$

  - Essendo un segnale periodico si può sviluppare in serie di Fourier:

$$f_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{2\pi jnt/T_c} \qquad f_n = \frac{1}{T_c}\int_{-T_c/2}^{T_c/2} \delta\left(t\right)dt = \frac{1}{T_c}$$

Trasformate di Fourier notevoli

- **Trasformata della funzione pettine (2)**
  - Operando la trasformata di Fourier sulla funzione sviluppata in serie otteniamo:

$$F_c(f) = \frac{1}{T_c}\Im\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi jnt/T_c}\right] = \frac{1}{T_c}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_c}\right)$$

  - Quindi la trasformata della funzione pettine nel tempo <u>è un pettine nel dominio della frequenza</u>.
  - Tanto più i denti del pettine sono tra loro vicini nel tempo, <u>tanto più sono tra loro distanti nel dominio della frequenza</u>.

Trasformate di Fourier notevoli

- **Trasformata della funzione gaussiana**
  - Considieriamo una funzione gaussiana nel dominio del tempo:

$$g(t) = e^{-t^2/T^2}$$

  - Calcoliamone la trasformata di Fourier:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/T^2} e^{-2\pi jft}\, dt = e^{-(\pi fT)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(t/T \;-\pi jfT\right)^2}\, dt =$$

$$= e^{-(\pi fT)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(t/T\right)^2}\, dt = Te^{-(\pi fT)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = T\sqrt{\pi}\, e^{-(\pi fT)^2}$$

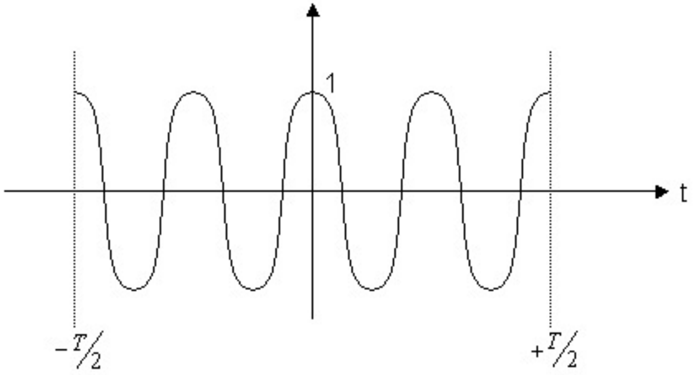
Si tratta ancora di una Gaussiana (nel dominio della frequenza)

Trasformate di Fourier notevoli

- **Impulso in radiofrequenza (1)**
  - E' un segnale molto importante, soprattutto nelle <u>applicazioni radar</u>:

$$x(t) = A\Pi\left(t/T\right)\cos\left(2\pi f_0 t\right) \quad T >> 1/f_0$$

  - E' chiamato anche "coseno finestrato" perché limita il coseno (che ha durata infinita) <u>entro una finestra temporale limitata</u> di durata *T*;



  - Ci chiediamo qual è lo spettro del segnale sopra definito.

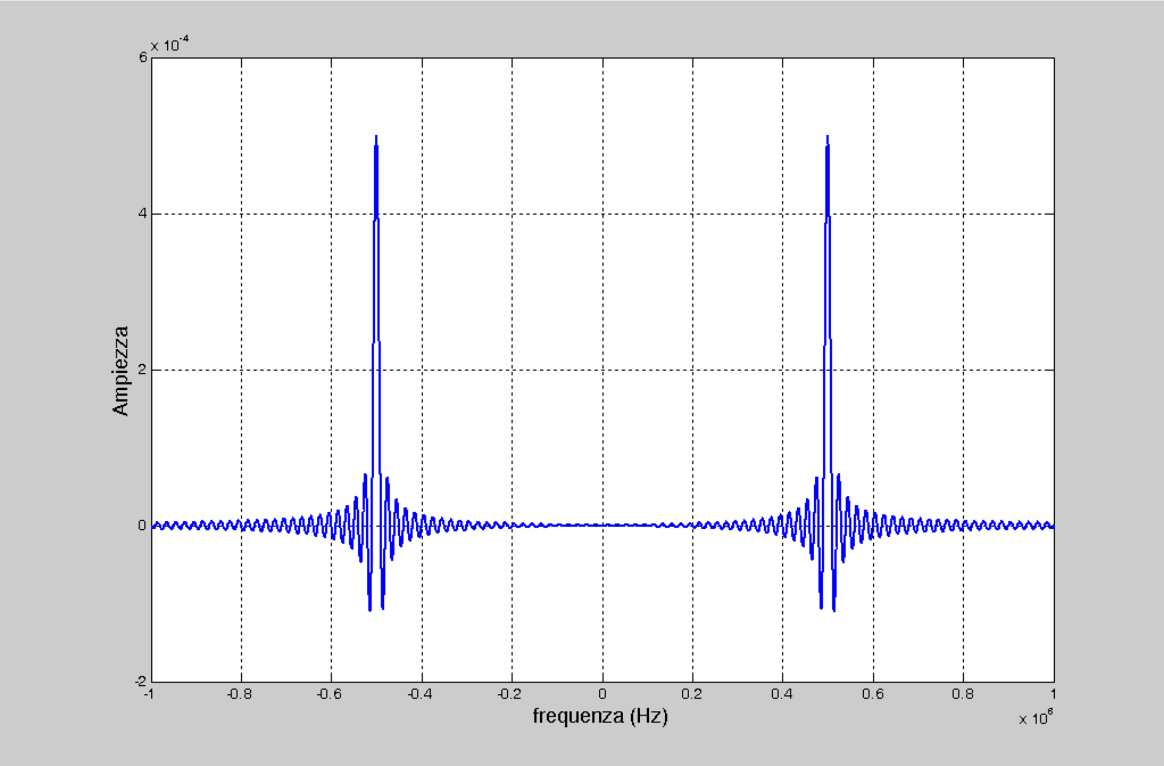
Trasformate di Fourier notevoli

- **Impulso in radiofrequenza (2)**
  - Lo possiamo vedere come un rettangolo di altezza unitaria e durata *T* che modula una sinusoide di ampiezza *A* e fase nulla;
  - Si applica, quindi, il teorema della modulazione e si ricava immediatamente lo spettro del segnale, che è reale (in quanto *x(t)* è reale e pari):

$$\left[A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right]\cos\left(2\pi f_0 t\right) \rightarrow \frac{AT}{2}\operatorname{sinc}\left(\left(f-f_0\right)T\right)+\frac{AT}{2}\operatorname{sinc}\left(\left(f+f_0\right)T\right)$$

Trasformate di Fourier notevoli

- **Impulso in radiofrequenza (3)**
  - Analizziamo lo spettro per il caso usuale:



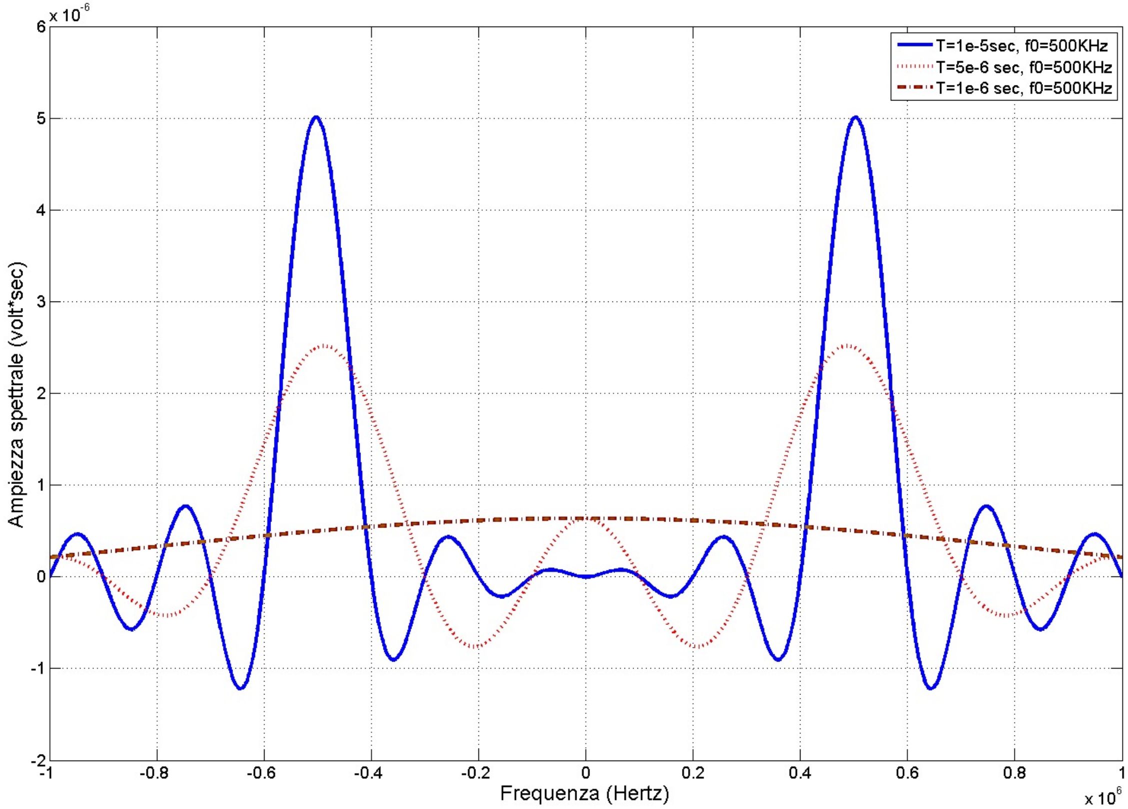
<u>Esempio 1:</u>

T=0.2msec

f_0=500KHz

Trasformate di Fourier notevoli

- **Impulso in radiofrequenza (4)**
  - Analizziamo lo spettro quando *T* e $1/f_0$ sono comparabili:



In questo caso le due "sinc" a frequenza $+f_0$ e $-f_0$ si sovrappongono in maniera notevole e lo spettro del segnale modulante (il rettangolo) non è più traslato rigidamente alla radiofrequenza (*"sfondamento della continua"*)

Segnali periodici e segnali campionati

- **Spettro di un segnale periodico (con trasformata di Fourier)**
  - Noi abbiamo analizzato lo spettro del segnale periodico utilizzando la successione dei coefficienti della serie di Fourier;
  - Ma, è possibile anche calcolare la trasformata di Fourier di un segnale periodico, vediamo come:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w\left(t-nT\right)=w(t)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nT\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow X(f)=W(f)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}W\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Segnali periodici e segnali campionati

- **Formula di Poisson**
  - Lo spettro del segnale periodico calcolato con la trasformata di Fourier origina quella che è chiamata formula di Poisson, di sotto mostrata:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w\left(t-nT\right) \rightarrow X(f)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} W\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

  - Le righe spettrali (quelle della serie di Fourier) sono quindi ottenute campionando idealmente lo spettro della forma d'onda alle frequenze armoniche *k/T*.

  - La periodizzazione della forma d'onda nel tempo, equivale quindi al campionamento della forma d'onda nel dominio della frequenza.

Segnali periodici e segnali campionati

- **Spettro del segnale campionato (1)**
  - Supponiamo di avere, invece, il campionamento ideale di un segnale nel dominio del tempo:

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(kT_c\right)\delta\left(t-kT_c\right)$$

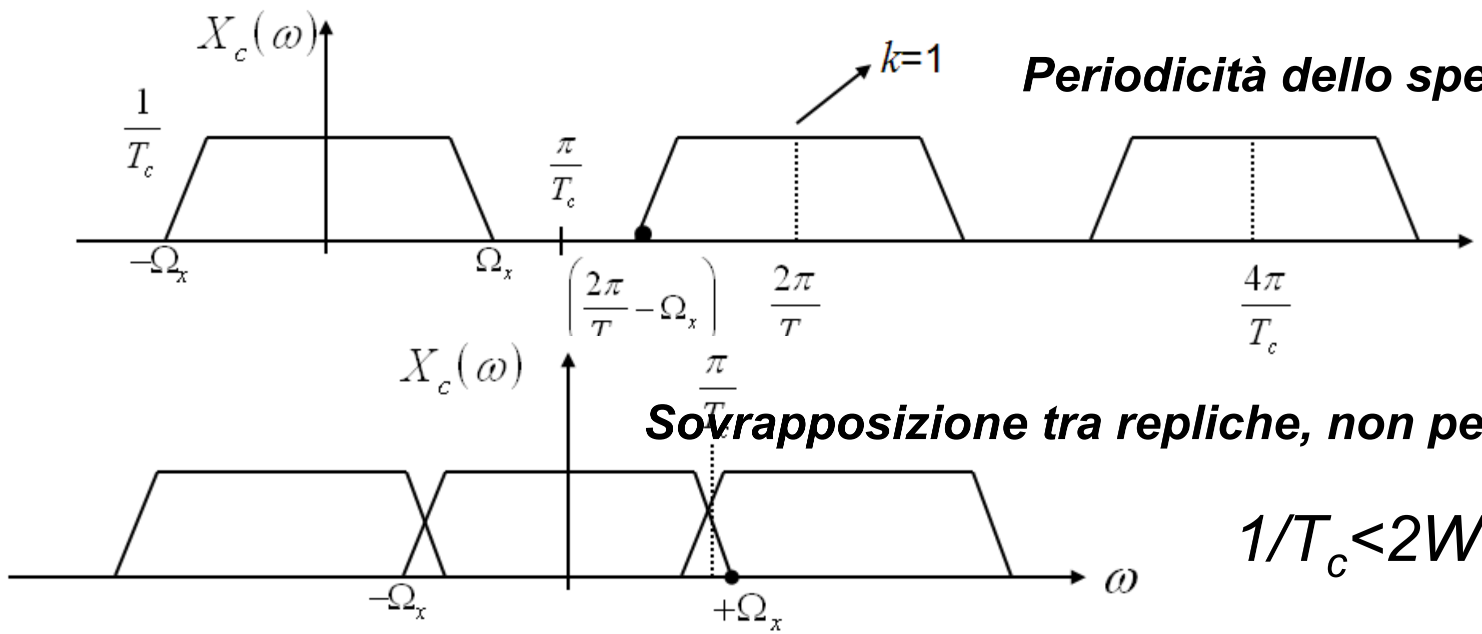
  - Per il teorema della dualità, in frequenza dovremmo avere qualcosa di "periodico". E' vero? Verifichiamo con la trasformata di Fourier:

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(kT_c\right)\delta\left(t-kT_c\right)=x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-kT_c\right)\rightarrow Y(f)=X(f)*\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_c}\right)=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f)*\delta\left(f-\frac{n}{T_c}\right)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{n}{T_c}\right)$$

Segnali periodici e segnali campionati

- **Spettro del segnale campionato (2)**
  - Vediamo come è fatto lo spettro del segnale campionato, data *W* la banda del segnale x(t) <u>sono possibili due situazioni</u>:



Periodicità dello spettro

$1/T_c >= 2W$

Sovrapposizione tra repliche, non periodicità

$1/T_c < 2W$

Segnali periodici e segnali campionati

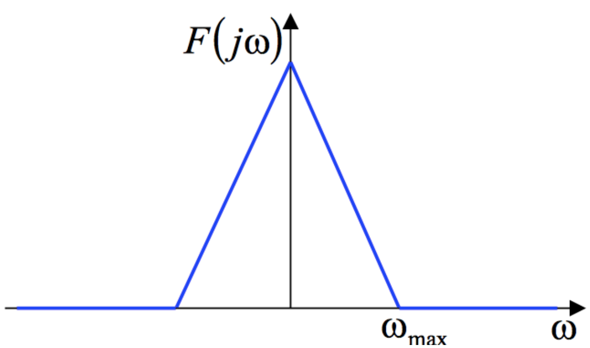
- **Teorema di Nyquist – Shannon**
  - Lo enunciamo nel dominio del tempo e lo dimostriamo in quello delle frequenze, il teorema dice:
    - Sia dato un segnale $x(t)$ di larghezza di banda pari a W, campionato con frequenza pari a $f_c = 1/T_c$. E' possibile ricostruire il segnale interpolando i suoi campioni se e solo se $f_c >= 2W$. La funzione di interpolazione che consente la ricostruzione ideale è di seguito data:

$$f_{\text{int}}(t) = \text{sinc}\left(2Wt\right)$$

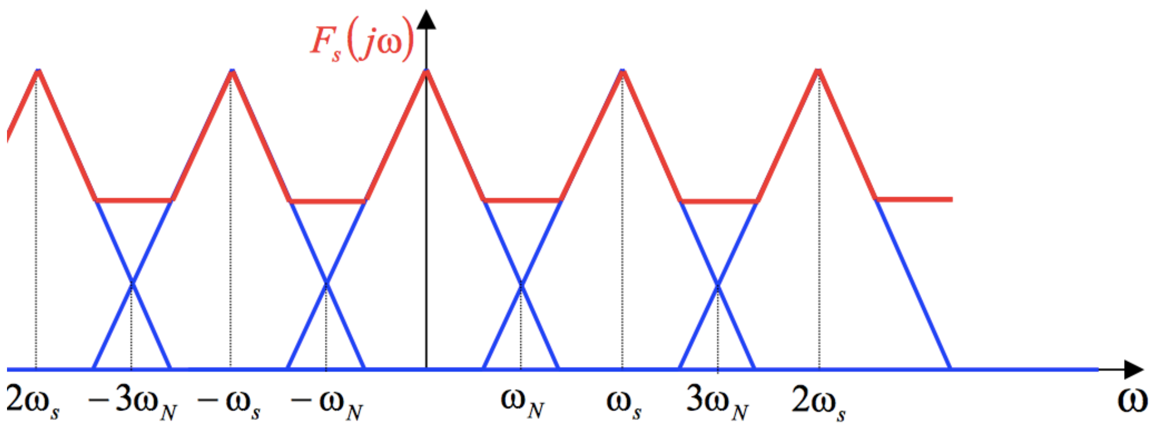
(funzione di interpolazione di Whittaker-Shannon)

Segnali periodici e segnali campionati

- **Teorema di Nyquist – Shannon sul campionamento (dimostrazione) (1)**
  - Se $f_c<2W$ <u>non abbiamo la replicazione periodica dello spettro del segnale originario</u>, pertanto lo spettro del segnale campionato non conterrà più lo spettro del segnale originario in banda-base (vedi disegno sottostante), il quale va, invece, ad <u>inglobare contenuti frequenziali che non gli appartengono</u> (*aliasing*). Pertanto, la ricostruzione diviene impossibile causa distorsione;



Segnale originario



Spettro del segnale sotto-campionato

Segnali periodici e segnali campionati

- **Teorema di Nyquist – Shannon sul campionamento (dimostrazione) (2)**
  - Dimostriamo quanto affermato sull'interpolazione, partendo dall'operazione di interpolazione medesima:

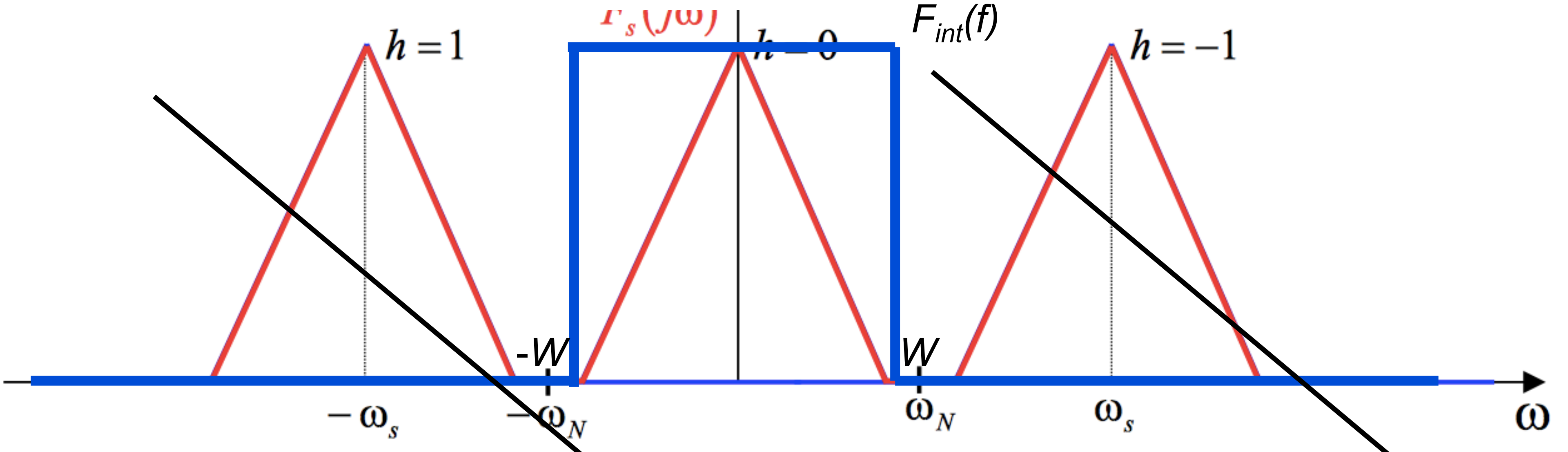
$$x_{ric}(t) = \left[f_{\text{int}}(t) * y(t) \right] \rightarrow X_{ric}(f) = F_{\text{int}}(f) Y(f) = \frac{1}{2WT_c} \Pi\left(\frac{f}{2W} \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(t - \frac{n}{T_c} \right)$$

(interpolazione dei campioni)

  - Dopodiché, risolviamo la moltiplicazione nel dominio delle frequenze per via grafica ***(SEGUE)***:

Segnali periodici e segnali campionati

- **Teorema di Nyquist – Shannon sul campionamento (dimostrazione) (3)**



Tutti i contributi spettrali a destra ed a sinistra di $+W$ e $-W$ vengono azzerati (poiché $F_{int}(f)$ vale identicamente zero fuori da tale intervallo)

Segnali periodici e segnali campionati

- **Teorema di Nyquist – Shannon sul campionamento (dimostrazione) (4)**
  - Quindi, l'interpolazione con la funzione di Whittaker-Shannon lascia sopravvivere soltanto la replica dello spettro del segnale *x(t)* centrata in banda-base, ovvero il segnale originario che voglio ricostruire;
  - La ricostruzione avviene in maniera perfetta per quel che riguarda la forma analitica del segnale, a parte la costante $\frac{1}{2WT_c}$ che diviene pari ad 1 se $T_c = 1/2W$.

CVD

Teorema di Parseval – larghezza di banda

- **Energia nel dominio della frequenza**
  - Il teorema di Parseval vale anche nel caso di segnali aperiodici. La sua formulazione, in tal caso è la seguente:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

$|X(f)|^2$ è detta densità spettrale di energia, poiché rappresenta la distribuzione dell'energia del segnale nel dominio della frequenza

Teorema di Parseval – larghezza di banda

- **Calcolo della larghezza di banda**
  - La larghezza di banda di un segnale, ovvero l'intervallo di frequenze per le quali il segnale assume valori (spettrali) non nulli, non è detto che sia sempre un numero finito;
  - Infatti, come abbiamo già detto, segnali a durata finita hanno banda infinita e viceversa;
  - Tuttavia, è sempre indispensabile quantificare in qualche modo la larghezza di banda di un segnale con un numero, anche quando questa è teoricamente infinita;
  - Ci si affida ad un criterio energetico, basato sul teorema di Parseval.

Teorema di Parseval – larghezza di banda

- **Larghezza di banda**
  - Definiamo larghezza di banda di un segnale l'intervallo di frequenze entro le quali è contenuto almeno il 90% dell'energia del segnale medesimo;
  - In molte applicazioni si considera il 99% dell'energia del segnale per calcolare la larghezza di banda. Anche noi considereremo questo valore più restrittivo, ma anche più attendibile.

Teorema di Parseval – larghezza di banda

- **Come si calcola?**
  - Lo vediamo <u>per il caso aperiodico </u>(nel caso periodico, si applica lo stesso criterio, con l'uguaglianza di Bessel-Parseval);
  - La banda del segnale *W* del segnale *x(t)* è calcolata nella seguente maniera:

$$W : \int_{-W}^{+W} \left| X(f) \right|^2 df = 0.99 E_x$$

Teorema di Parseval – larghezza di banda

- **Esempio del rettangolo (1)**
  - Un rettangolo è il tipico segnale a larghezza di banda infinita. Tuttavia, possiamo calcolare una larghezza di banda finita del rettangolo usando il precedente criterio:

$$W_{rect} : \int_{-W_{rect}}^{+W_{rect}} \left(AT\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(fT\right) df = 0.99 E_{rect} = 0.99 A^2 T$$

Teorema di Parseval – larghezza di banda

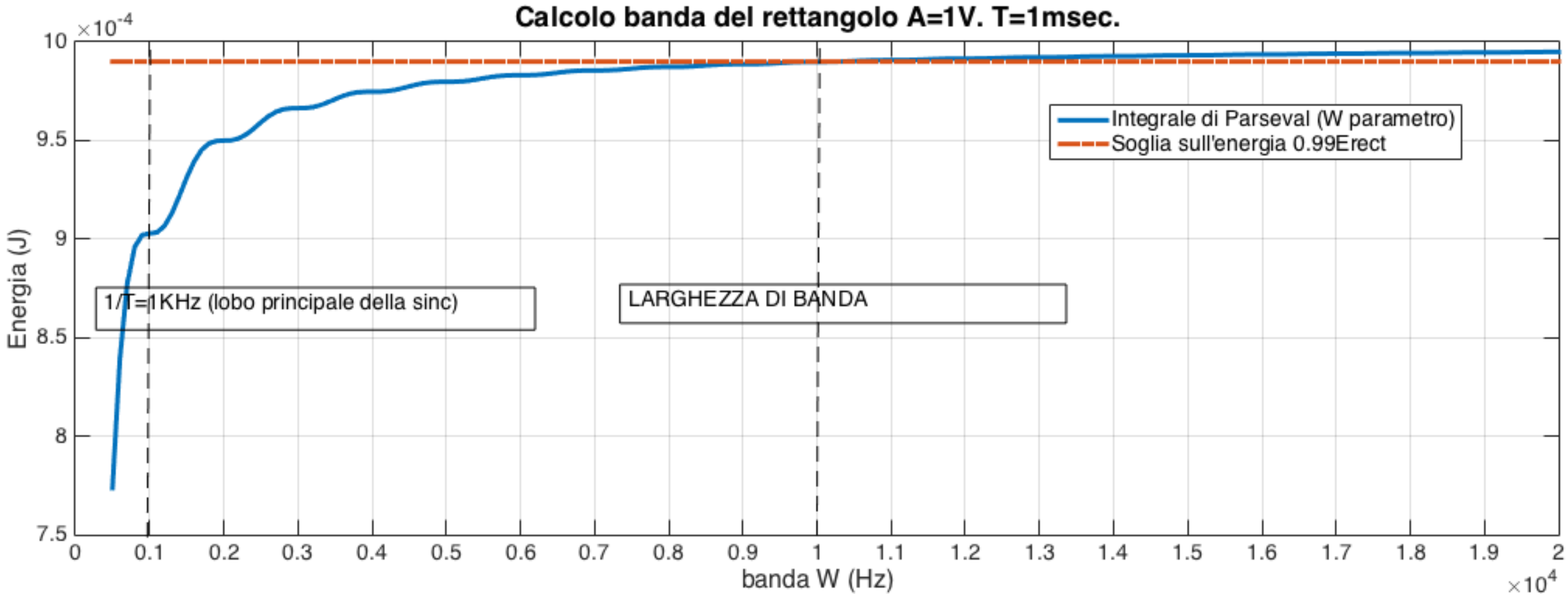
- **Esempio del rettangolo (2)**
  - Calcoliamo l'integrale, servendoci di qualche tabella di integrali "strani":

$$\int_{-W_{rect}}^{+W_{rect}} \left(AT\right)^2 \mathrm{sinc}^2\left(fT\right) df = A^2 T \frac{\left(2\pi W_{rect} T\right) Si\left(2\pi W_{rect} T\right) + \cos\left(2\pi W_{rect} T\right) - 1}{\left(2\pi^2 W_{rect} T\right)}$$

  - E grazie a MATLAB, andiamo a plottare l'equazione della slide precedente onde effettuare <u>una risoluzione grafica</u>.

Teorema di Parseval – larghezza di banda

- **Esempio del rettangolo (3)**



Teorema di Parseval – larghezza di banda

- **Esempio del rettangolo (4)**
  - Facciamo alcune considerazioni su quanto abbiamo plottato:
    - Nel lobo principale dello spettro del rettangolo (quello che si annulla in $1/T$) sta circa <u>il 90% dell'energia del segnale</u> (1KHz nel grafico);

    - Il 99% dell'energia del segnale sta in una larghezza di banda pari a circa $10/T$, ovvero <u>10 volte la larghezza del lobo principale dello spettro</u>: questa è la banda del rettangolo, secondo il nostro criterio energetico (10 KHz nel grafico).