Università degli studi di Modena e Reggio Emilia

Dipartimento di Ingegneria Enzo Ferrari

Matematica Discreta

Anno Accademico 2023/24

Indice

1 Introduzione **1**

1.1 Funzioni 1

1.2 Insiemi Discreti 2

1.2.1 Proprietà 1 4

1.2.2 Proprietà 2 4

1.2.3 Proprietà 3 4

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Funzioni

Una **funzione** o **applicazione** tra due insiemi A e B è rappresentata:

$$f : A \to B \; t.c. \; \forall a \in A \; \exists! b \in B \mid f(a) = b$$

1. la funzione si dice **iniettiva** se:

$$\forall a, a' \in A, \; f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

2. la funzione si dice **suriettiva** se:

$$\forall b \in B, \exists a \in A \mid f(a) = b$$

3. una funzione $f : A \to B$ si dice **biettiva** o **biunivoca** se è contemporaneamente *iniettiva* e *suriettiva* ovvero se:

$$\forall b \in B \; \exists! a \in A \; t.c. \; f(a) = b$$

1.2 Insiemi Discreti

Due insiemi A e B si dicono **equipotenti** (o con la stessa **cardinalità**) se:

$$f : A \to B,\ f\ biunivoca$$

E utilizzeremo come notazione: $card(A) = card(B)$, $|A| = |B|$ oppure $\#A = \#B$. Un insieme A si dice finito se:

$$\exists n \in \mathbb{N},\ f : A \to \mathbb{N}_n,\ f\ biunivoca$$

In questo caso diremo che la **cardinalità** di A è **n**: $card(A) = card(\mathbb{N}_n) = n$
Un insieme A si dice **numerabile** se:

$$\exists f : A \to \mathbb{N},\ f\ biunivoca$$

In questo caso si dice che A ha cardinalità numerabile e si può rappresentare attraverso la lettera **aleph** (è la prima lettera dell'alfabeto ebraico): $card(A) = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$.
Alcuni esempi:

1. l'insieme $\mathbb{Z}$ è **numerabile** ($\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$):

$$\begin{gathered} 0 \to 1 \\ 1 \to 2 \quad -1 \to 3 \\ 2 \to 4 \quad -2 \to 5 \end{gathered}$$

   possiamo quindi mappare i valori **positivi** dell'insieme $\mathbb{Z}$ sono mappati nei valori **pari** dell'insieme $\mathbb{N}$ e in maniera complementare i valori **negativi** dell'insieme $\mathbb{Z}$ sono mappati nei valori **dispari** dell'insieme $\mathbb{N}$. È quindi possibile verificare la biunivocità dell'applicazione che mappa i valori da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$.

2. l'insieme dei numeri **pari** $\mathbb{P}$ può definirsi numerabile, infatti: $\#\mathbb{P} = \#\mathbb{N}$, in questo caso avremo l'applicazione biunivoca del tipo:

$$f : \mathbb{P} \to \mathbb{N} \mid \forall p = 2n \in \mathbb{P},\ f(p) = \tfrac{1}{2}p = n$$

Un insieme A si dice **discreto** se è **finito** o **numerabile**.
Se A è finito di cardinalità **n**, i suoi elementi possono essere etichettati con gli elementi di $\mathbb{N}_n$:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Se A è numerabile, gli elementi possono essere "etichettati" con gli elementi di $\mathbb{N}$:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Dato un insieme discreto A ed un suo sottoinsieme $Y \subseteq A$ si dice **funzione caratteristica** di Y la funzione:

$$f_Y : A \to \{0, 1\}\ \forall a \in A \qquad\qquad f_Y(a) = \begin{cases} 1 & se\ a \in A \\ 0 & se\ a \notin A \end{cases}$$

Nel caso in cui A sia un insieme finito avremo che: $\#A = \sum_{a \in A} f_Y(a)$.
Se A è un insieme discreto, ed $f : A \to \{0, 1\}$ una applicazione a valori in $\{0, 1\}$, risulta univocamente determinato il sottoinsieme $Y \subseteq A$ tale che f sia una funzione caratteristica di Y:

$$Y = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$$

Un esempio, definiamo $A = \mathbb{N}$ e sia $f : A \to \{0, 1\}$ definita da una **funzione caratteristica** del tipo: $n \to \frac{1+(-1)^n}{2}$. In questo caso la funzione f identifica, a partire dall'insieme $\mathbb{N}$, il sottoinsieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari.
Utilizzando la **funzione caratteristica** si può ricavare la seguente proprietà degli insiemi discreti:

- se A è finito di cardinalità n, l'insieme $\mathcal{P}(a)$ delle **parti di A** è in corrispondenza biunivoca con l'**insieme delle n-ple** a valori in $\{0, 1\}$.

- se A è numerabile, l'insieme $\mathcal{P}(a)$ delle parti di A è in corrispondenza biunivoca con l'**insieme delle successioni** a valori in $\{0, 1\}$.

1.2.1 Proprietà 1

Se X e Y sono insiemi **finiti**, con $\#X = n$, $\#Y = m$ e con $X \cap Y = \emptyset$, allora $\#(X \cup Y) = n + m$.

Dimostrazione: per Hp. esistono due funzioni biettive $f : X \to \mathbb{N}_n$ e $g : Y \to \mathbb{N}_m$. Per dimostrare la proprietà occorre costruire una funzione biettiva $h : X \cup Y \to \mathbb{N}_{n+m}$. Possiamo porre $\forall c \in X \cup Y$ come:

$$h(c) = \begin{cases} f(c) & se\ c \in X \\ g(c) + n & se\ c \in Y \end{cases}$$

1.2.2 Proprietà 2

Se X è un insieme **finito** con $\#X = n$ ed Y è un insieme **numerabile**, con $X \cap Y = \emptyset$ allora $\#(X \cup Y)$ è **numerabile**.

Dimostrazione: per Hp. esistono due funzioni biettive $f : X \to \mathbb{N}_n$ e $g : Y \to \mathbb{N}$. Per dimostrare la proprietà occorre costruire una funzione biettiva $h : X \cup Y \to \mathbb{N}$. Possiamo porre $\forall c \in X \cup Y$ come:

$$h(c) = \begin{cases} f(c) & se\ c \in X \\ g(c) + n & se\ c \in Y \end{cases}$$

1.2.3 Proprietà 3

Se X e Y sono due insiemi **numerabili**, allora anche $X \cup Y$ è **numerabile**.

Off-Topic:

Paradosso del Grand Hotel di Hilbert: il paradosso del *Grand Hotel* inventato dal matematico *David Hilbert* per mostrare alcune caratteristiche del concetto di infinito e le differenze fra opzioni con insieme finiti ed infiniti. Hilbert immagina un hotel con infinite stanze, tutte occupate, e afferma che qualsiasi sia il numero di altri ospiti che sopraggiungano, sarà sempre possibile ospitarli tutti, anche se il loro numero è infinito, purché numerabile.