Università degli studi di Modena e Reggio Emilia

Dipartimento di Ingegneria Enzo Ferrari

Matematica Discreta

Anno Accademico 2023/24

Indice

Capitolo 1

Complementi su insiemi e relazioni

1.1 Funzioni

Una **funzione** o **applicazione** tra due insiemi A e B è rappresentata:

$$f : A \to B \ t.c. \ \forall a \in A \ \exists! b \in B \mid f(a) = b$$

1. la funzione si dice **iniettiva** se:

$$\forall a, a' \in A, \ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

2. la funzione si dice **suriettiva** se:

$$\forall b \in B, \exists a \in A \mid f(a) = b$$

3. una funzione $f : A \to B$ si dice **biettiva** o **biunivoca** se è contemporaneamente *iniettiva* e *suriettiva* ovvero se:

$$\forall b \in B \ \exists! a \in A \ t.c. \ f(a) = b$$

1.2 Insiemi Discreti

Due insiemi A e B si dicono **equipotenti** (o con la stessa **cardinalità**) se:

$$f : A \to B,\ f\ biunivoca$$

E utilizzeremo come notazione: $card(A) = card(B)$, $|A| = |B|$ oppure $\#A = \#B$. Un insieme A si dice finito se:

$$\exists n \in \mathbb{N},\ f : A \to \mathbb{N}_n,\ f\ biunivoca$$

In questo caso diremo che la **cardinalità** di A è **n**: $card(A) = card(\mathbb{N}_n) = n$
Un insieme A si dice **numerabile** se:

$$\exists f : A \to \mathbb{N},\ f\ biunivoca$$

In questo caso si dice che A ha cardinalità numerabile e si può rappresentare attraverso la lettera **aleph** (è la prima lettera dell'alfabeto ebraico): $card(A) = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$.
Alcuni esempi:

1. l'insieme $\mathbb{Z}$ è **numerabile** ($\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$):

$$\begin{gathered} 0 \to 1 \\ 1 \to 2 \quad -1 \to 3 \\ 2 \to 4 \quad -2 \to 5 \end{gathered}$$

   possiamo quindi mappare i valori **positivi** dell'insieme $\mathbb{Z}$ sono mappati nei valori **pari** dell'insieme $\mathbb{N}$ e in maniera complementare i valori **negativi** dell'insieme $\mathbb{Z}$ sono mappati nei valori **dispari** dell'insieme $\mathbb{N}$. È quindi possibile verificare la biunivocità dell'applicazione che mappa i valori da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$.

2. l'insieme dei numeri **pari** $\mathbb{P}$ può definirsi numerabile, infatti: $\#\mathbb{P} = \#\mathbb{N}$, in questo caso avremo l'applicazione biunivoca del tipo:

$$f : \mathbb{P} \to \mathbb{N} \mid \forall p = 2n \in \mathbb{P},\ f(p) = \tfrac{1}{2}p = n$$

Un insieme A si dice **discreto** se è **finito** o **numerabile**.
Se A è finito di cardinalità **n**, i suoi elementi possono essere etichettati con gli elementi di $\mathbb{N}_n$:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Se A è numerabile, gli elementi possono essere "etichettati" con gli elementi di $\mathbb{N}$:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Dato un insieme discreto A ed un suo sottoinsieme $Y \subseteq A$ si dice **funzione caratteristica** di Y la funzione:

$$f_Y : A \to \{0,1\} \ \forall a \in A \qquad\qquad f_Y(a) = \begin{cases} 1 & se\ a \in A \\ 0 & se\ a \notin A \end{cases}$$

Nel caso in cui A sia un insieme finito avremo che: $\#A = \sum_{a \in A} f_Y(a)$.
Se A è un insieme discreto, ed $f : A \to \{0,1\}$ una applicazione a valori in $\{0,1\}$, risulta univocamente determinato il sottoinsieme $Y \subseteq A$ tale che f sia una funzione caratteristica di Y:

$$Y = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$$

Un esempio, definiamo $A = \mathbb{N}$ e sia $f : A \to \{0,1\}$ definita da una **funzione caratteristica** del tipo: $n \to \frac{1+(-1)^n}{2}$. In questo caso la funzione f identifica, a partire dall'insieme $\mathbb{N}$, il sottoinsieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari.
Utilizzando la **funzione caratteristica** si può ricavare la seguente proprietà degli insiemi discreti:

- se A è finito di cardinalità n, l'insieme $\mathcal{P}(a)$ delle **parti di A** è in corrispondenza biunivoca con l'**insieme delle n-ple** a valori in $\{0,1\}$.
- se A è numerabile, l'insieme $\mathcal{P}(a)$ delle parti di A è in corrispondenza biunivoca con l'**insieme delle successioni** a valori in $\{0,1\}$.

1.2.1 Proprietà 1

Se X e Y sono insiemi **finiti**, con $\#X = n$, $\#Y = m$ e con $X \cap Y = \emptyset$, allora $\#(X \cup Y) = n + m$.

Dimostrazione: per Hp. esistono due funzioni biettive $f : X \to \mathbb{N}_n$ e $g : Y \to \mathbb{N}_m$.
Per dimostrare la proprietà occorre costruire una funzione biettiva $h : X \cup Y \to \mathbb{N}_{n+m}$.
Possiamo porre $\forall c \in X \cup Y$ come:

$$h(c) = \begin{cases} f(c) & se\ c \in X \\ g(c) + n & se\ c \in Y \end{cases}$$

1.2.2 Proprietà 2

Se X è un insieme **finito** con $\#X = n$ ed Y è un insieme **numerabile**, con $X \cap Y = \emptyset$ allora $\#(X \cup Y)$ è **numerabile**.

Dimostrazione: per Hp. esistono due funzioni biettive $f : X \to \mathbb{N}_n$ e $g : Y \to \mathbb{N}$.
Per dimostrare la proprietà occorre costruire una funzione biettiva $h : X \cup Y \to \mathbb{N}$.
Possiamo porre $\forall c \in X \cup Y$ come:

$$h(c) = \begin{cases} f(c) & se\ c \in X \\ g(c) + n & se\ c \in Y \end{cases}$$

Off-Topic:

Paradosso del Grand Hotel di Hilbert: il paradosso del *Grand Hotel* inventato dal matematico *David Hilbert* per mostrare alcune caratteristiche del concetto di infinito e le differenze fra opzioni con insieme finiti ed infiniti. Hilbert immagina un hotel con infinite stanze, tutte occupate, e afferma che qualsiasi sia il numero di altri ospiti che sopraggiungano, sarà sempre possibile ospitarli tutti, anche se il loro numero è infinito, purché numerabile.
Nel caso semplice, arriva un singolo nuovo ospite. Il furbo albergatore sposterà tutti i clienti nella camera successiva (l'ospite della 1 alla 2, quello della 2 alla 3, etc.); in questo modo, benché l'albergo fosse pieno è comunque, essendo infinito, possibile sistemare il nuovo ospite.

1.2.3 Proprietà 3

Se X e Y sono due insiemi **numerabili**, allora anche $X \cup Y$ è **numerabile**.

Dimostrazione: senza perdere di generalità, supponiamo che $X \cap Y = \emptyset$. Per ipotesi esistono due funzioni biettive $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{N}$. Per dimostrare la proprietà occorre costruire una funzione biettiva $h : X \cup Y \rightarrow \mathbb{N}$. Ad esempio, $\forall c \in (X \cup Y)$, si può porre:

$$h(c) = \begin{cases} 2f(c) - 1 & se\ c \in X \\ 2g(c) & se\ c \in Y \end{cases}$$

Off-Topic:

Paradosso del Grand Hotel di Hilbert: Un caso meno intuitivo si ha quando arrivano infiniti nuovi ospiti. Sarebbe possibile procedere nel modo visto in precedenza, ma solo scomodando infinite volte gli ospiti (già spazientiti dal precedente spostamento): sostiene allora Hilbert che la soluzione sta semplicemente nello spostare ogni ospite nella stanza con numero doppio rispetto a quello attuale (dalla 1 alla 2, dalla 2 alla 4,etc.), lasciando ai nuovi ospiti tutte le camere con i numeri dispari, che sono essi stessi infiniti, risolvendo dunque il problema. Gli ospiti sono tutti dunque sistemati, benché l'albergo fosse pieno.

Proposizione: se X è un insieme numerabile e $Y \subseteq X$ allora Y è un insieme **discreto**.

1.2.4 Proprietà 4

Se $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{A_1, A_2, ..., A_i, ...\}$ è un **insieme numerabile** di **insiemi numerabili**, si ha che:

$$\#(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \#\mathbb{N}$$

Dimostrazione: senza perdere di generalità, supponiamo che gli insiemi siano fra loro **disgiunto**: $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \in j$. Per dimostrare la tesi, utilizziamo il *procedimento diagonale di* ***Cantor***, enumerando per righe gli elementi di ciascun insieme, dove avremo come primo indice l'identificativo dell'insieme e come secondo indice quello della colonna:

$$\begin{array}{lllllll}
A_1: & a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1h} & ... \\
A_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2h} & ... \\
A_3: & a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3h} & ... \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
A_i: & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & ... & a_{ih} & ... \\
... & ... & .. & ... & ... & ... & ...
\end{array}$$

Consideriamo le diagonali D_1, D_2, ..., D_k, ..., dove: $D_k = \{a_{ij} \mid i + j = k + 1\}$. E notiamo che sono composte da finiti elementi. Per dimostrare che $\#(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$ è **numerabile**, occorre costruire una applicazione biunivoca, tale che:

$$h : \bigcup_{i\in\mathbb{N}_n} A_i \to \mathbb{N}$$

Idealmente, vorremmo etichettare, ogni generico elemento a_{ij} che apparterrà alla $k-$ *esima* diagonale:

$$a_{ij} \in D_k$$
$$k = i + j - 1$$
$$a_{ij} \in D_{(i+j-1)}$$

Scorrendo ogni diagonale a partire dall'elemento che sta nell'insieme con indice maggiore, incontrerò l'elemento a_{ij} come j-esimo elemento della diagonale a cui esso appartiene, ovvero come j-esimo elemento della diagonale D_{i+j-1}.

Se noi vogliamo numerare la cardinalità delle n diagonali già prese in considerazione prima del nuovo elemento a_{ij} che stiamo esaminando, consideriamo $\#D_k = k$ e avremo:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{i+j-2} \#D_k = \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}$$

Vista la costruzione delle diagonali questa somma non sarà altro che la somma dei primi $i + j - 2$ numeri naturali:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\textstyle\sum_{k=1}^{i+j-2} k = \frac{(i+j-2)(i+j-2+1)}{2}$$

In questo modo abbiamo trovato un metodo di etichettare tutte le diagonali (e quindi i loro elementi) fino alla diagonale che contiene l'lelemento a_{ij}, ma siccome sappiamo che l'elemento a_{ij} è nella $j - esima$ posizione della diagonale $i + j - 1$ allora possiamo definire una applicazione biunivoca che associa ogni elemento dell'unione degli insiemi a $\mathbb{N}$ $h : \bigcup_{i\in\mathbb{N}_n} A_i \to \mathbb{N}$ definita, $\forall a_{ij} \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}_n} A_i$, da:

$$h(a_{ij}) = j + \tfrac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}$$

In questo modo siamo riusciti a "etichettare" tutti gli elementi una e una sola volta.

Conseguenze:

- $\mathbb{Z}$ è numerabile: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(n, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$.
- $\mathbb{Q}$ è numerabile.

1.3 Confronto tra Cardinalità

Si dice che un insieme A ha **cardinalità minore o uguale** ad un insieme B (e si indica con: $\#A \leq \#B$) se: $\exists f : A \to B,\ f$ è *iniettiva*.

Proprietà:

- **riflessività**: $\forall A,\ \#A \leq \#A$.
- **transitività**: $\#A \leq \#B,\ \#B \leq \#C \Rightarrow \#A \leq \#C$.
- **antisimmetria**: $\#A \leq \#B,\ \#B \leq \#A \Rightarrow \#A = \#B$.
- **tricotomia**: $\forall A, B \Rightarrow \#A \leq \#B\ o\ \#B \leq \#A$.

La relazione "$\leq$" fra cardinalità è una relazione di ordine totale.
$A \subseteq B \subseteq C$ con $\#A = \#B \Rightarrow \#A = \#B = \#C$.

Teorema di Cantor-Bernstein-Schroeder: Se $\exists f : A \to B,\ f$ *iniettiva* ed $\exists g : B \to A,\ g$ *iniettiva* allora $\exists h : A \to B,\ h$ *biunivoca*.

Dimostrazione: poiché f e g sono iniettive se le restriangamo alla loro immagine biunivoca:

$$\#A = \#f(A)\ con\ f(A) \subseteq B$$
$$\#B = \#g(B)\ con\ g(B) \subseteq A$$

Avremo:

$$g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A \Rightarrow \#g(f(A)) = \#f(A) = \#A$$

e per il lemma possiamo dire che $\#g(B) = \#A$ e $\#g(B) = \#B$ e quindi avremo che $\#A = \#B$, questo implica che esiste una funzione $h : A \to B$ biunivoca.

Teorema di Cantor: se A è un insieme **numerabile** allora $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità **maggiore** di A:

$$\#A \leq \#\mathcal{P}(A) \text{ con } \#A \neq \#\mathcal{P}(A)$$

Dimostrazione:

- dimostriamo per prima cosa che $\#A \leq \#\mathcal{P}(A)$ basta trovare una funzione definita $f : A \to \mathcal{P}(A)$ che sia **iniettiva** e non biunivoca.

  $$f(a) = \{a\}$$

  Utilizziamo una **dimostrazione per assurdo**: sappiamo che $\mathcal{P}(A)$ è in corrispondenza biunivoca con le successioni a valori in $\{0,1\}$; allora se $\mathcal{P}(A)$ fosse numerabile sarebbe possibile elencare tutte le successioni a valori in $\{0,1\}$:

  $$\begin{array}{ccccccc} S_1: & S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1n} & \dots \\ S_2: & S_{21} & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2n} & \dots \\ S_3: & S_{31} & S_{32} & S_{33} & \dots & S_{3n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_j & S_{j1} & S_{j2} & S_{j3} & \dots & S_{jn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Consideriamo la successione a valori in $\{0,1\}$:

$$\bar{S} = \bar{S_1},\ \bar{S_2},\ \bar{S_3},\ \dots,\ \bar{S_j},\ \dots \ || \text{ dove } \bar{S_j} \neq S_{jj}$$

In questo modo la successione $\bar{S}$ non coincide con nessuna delle successioni s_j, $\forall j \in \mathbb{N}$, poiché differisce dalla j-esima successione nel j-esimo elemento e quindi arriviamo ad un **assurdo**. Quindi l'insieme delle successioni a valori in $\{0,1\}$ non può essere numerabile e, quindi, **non** è **numerabile** nemmeno $\mathcal{P}(A)$.

La Cardinalità di $\mathbb{R}$: anche $\mathbb{R}$ **non** è **numerabile**, infatti: $\#\mathbb{R} = \#]0,1[$, consideriamo un'applicazione biunivoca tale che $f : \mathbb{R} \to]0,1[$, ad esempio:

$$f(x) = \tfrac{x}{|x|+1} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

che stabilisce biunivocità tra $\mathbb{R}$ e $]-1,1[$ possiamo affermare che $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#]0,1[$, infatti considerando $\forall x \in]0,1[$ come la rappresentazione binaria (con virgola) di x; se ϵ_n è l'n-esima cifra dopo la virgola di tale sviluppo $(\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n, ...)$ è una successioni a valori in $\{0,1\}$ quindi

$$0,\bar{9} = 1 \in \mathbb{R} \; || \text{ viene a perdersi la biunivocità}$$
$$\Rightarrow \#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Questa tipologia di cardinalità viene definita **cardinalità del continuo** e si denota con **c** o con $2^{\aleph_0}$.

Congettura (ipotesi del continuo): non esistono cardinalità comprese fra $\#\mathbb{N}$ e $\#\mathbb{R}$.

Congettura (ipotesi generalizzata del continuo): non esistono cardinalità comprese tra $\#X$ e $\mathcal{P}(X) = 2^{\#X}$ $\forall X$ di cardinalità non finita.

1.4 Relazioni di Equivalenza

Una **relazione** $\mathcal{R}$ tra due insiemi A e B è un **sottoinsieme** del **prodotto cartesiano** fra A e B, ovvero $\mathcal{R} \in A \times B$.

Esempio: $\mathcal{R} =' \leq '$ è relazione tra i due insiemi $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{N}$, poiché definisce un sottoinsieme del prodotto cartesiamo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Ad esempio: $(1, 2) \in \mathcal{R}$ e $(2, 1) \notin \mathcal{R}$.

Una relazione $\mathcal{R}$ su A si dice **relazione di equivalenza** se sono vere le seguenti proprietà:

- *riflessività*: $\forall a \in A \Rightarrow a\mathcal{R}a$
- *simmetria*: $\forall a, b \in A \ : \ a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$
- *transitività*: $\forall a, b, c \in A \ : \ a\mathcal{R}b \text{ e } b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$

Definizione: sia $\mathcal{R}$ una **relazione di equivalenza** su A. Per ogni $a \in A$ si dice **classe di equivalenza** $[a] = \{xinA \mid x\mathcal{R}a\}$.