Algoritmi e Strutture Dati per la Fisica dei Dati

Quicksort

Analisi e confronto con altri algoritmi di ordinamento

Edoardo Tronconi
Matricola: 974734

19 febbraio 2021

Problema del Sorting

Problema del Sorting

Sorting

Input Una sequenza di *n* oggetti $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Output Una permutazione $\{a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}, \ldots, a_{\sigma_n}\}$ tale che $a_{\sigma_1} \leq a_{\sigma_2} \leq \ldots \leq a_{\sigma_n}$

È un problema fondamentale in quanto:

- Molti problemi necessitano intrinsecamente di qualche forma di ordinamento
- Molti algoritmi hanno l'ordinamento come subroutine fondamentale
- Può essere approcciato con numerose tecniche diverse

Proprietà degli algoritmi di sorting

Complessità temporale: Il tempo utilizzato dall'algoritmo al variare della dimensione dell'input.
Esiste un lower bound teorico di $\Omega(\log n!) = \Omega(n \log n)$ al numero di confronti necessari

Spazio utilizzato: Lo spazio in memoria utilizzato. Algoritmi che occupano spazio $O(1)$ sono detti *in place*

Stabilità: Un algoritmo di sorting è detto *stabile* se due elementi con valore (key) uguale compaiono nello stesso ordine nell'input e nell'output

Quicksort

Quicksort

Quicksort è un algoritmo sviluppato nel 1961 da Tony Hoare.

- Basato sull'approccio *Divide et Impera*
- Complessità temporale $O(n^2)$ nel caso peggiore e $O(n \log n)$ nel caso medio
- Algoritmo *in place*
- Non è stabile

Algoritmo

Divide: La procedura PARTITION suddivide *in place* l'array di input $A[p,...,r]$ in due subarray $A[p,...,q-1]$ e $A[q+1,...,r]$

- $\longrightarrow$ I subarray sono tali che $A[p,...,q-1] \leq A[q] \leq A[q+1,...,r]$
- $\longrightarrow$ L'indice q è calcolato durante la procedura

Impera: I subarray sono ordinati applicando ricorsivamente Quicksort.

Il caso "base" della ricorsione partiziona l'array di due elementi $A[p,r]$ in $\{A[p'],A[r']\}$ con $A[p'] \leq A[r']$

Combina: Poiché i subarray sono già ordinati tra di loro, non serve alcuna procedura per ricombinare i risultati parziali: l'array $A[p,...,r]$ è ordinato

Pseudocode

Partition: PARTITION(A, p, r)

```
x = A[r]
i = p
for j = p to r - 1
        if A[j] ≤ x
                exchange A[i] with A[j]
                i = i + 1
exchange A[i] with A[r]
return i
```

Quicksort: QUICKSORT(A, p, r)

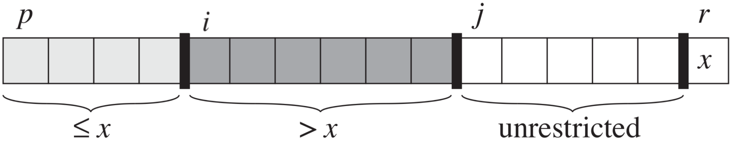
```
if p < r
        q = PARTITION(A, p, r)
        QUICKSORT(A, p, q - 1)
        QUICKSORT(A, q + 1, r)
```

Correttezza

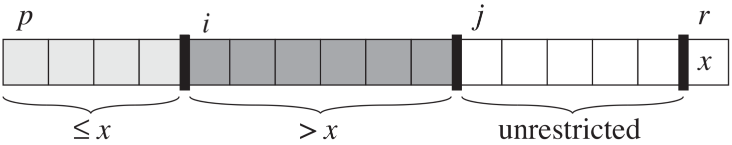
Per dimostrare la correttezza dell'algoritmo si utilizza un *Loop Invariant*:

All'inizio di ogni iterazione del ciclo for in PARTITION:

1. $p \leq k \leq i - 1 \Rightarrow A[k] \leq x$
2. $i \leq k \leq j - 1 \Rightarrow A[k] > x$
3. $k = r \Rightarrow A[k] = x$



Correttezza

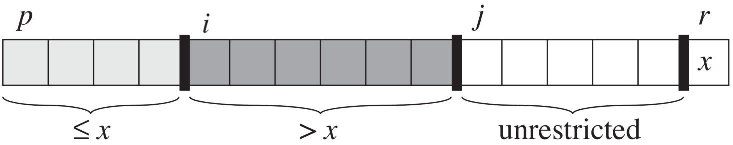


Inizializzazione: $i = j = p \Rightarrow$ 1 e 2 sono soddisfatte in modo banale.
La prima riga di PARTITION assicura che 3 sia soddisfatta

j ⇒ j + 1: A seconda del risultato del test su $A[j]$ si ottiene:

- $A[j] > x \rightarrow j = j + 1.$
  1 rimane vera
  2 è vera per $A[j-1]$ appena aggiunto (altri uguali)
- $A[j] \leq x \rightarrow$ scambiati $A[i] \leftrightarrow A[j]$; $i = i + 1$; $j = j + 1$.
  1 e 2 sono vere in quanto ho scambiato il valore $\leq x$ con uno $> x$

Correttezza



Termine: $j = r \Rightarrow$ Ho suddiviso l'intero array nelle tre regioni identificate dalle condizioni ❶, ❷ e ❸

L'ultima riga di PARTITION scambia $A[i]$ e $A[r]$

$$\Downarrow$$

L'output corrisponde a quello atteso: $A[p, \ldots, i-1] \leq A[i] \leq A[i+1, r]$

Complessità temporale PARTITION

Tempo impiegato da PARTITION

La procedura partition su un subarray $A[p, \ldots, r]$ ha complessità temporale $\Theta(n)$ (con $n = r - p$)

- Le righe di codice all'esterno del ciclo **for** sono eseguite in tempo $\Theta(1)$
- Le righe di codice all'interno del ciclo **for** sono eseguite in tempo $\Theta(1)$ e il ciclo è eseguito n volte

Pertanto:

$$\mathrm{T}_{\text{PARTITION}}(n) = \Theta(1) + n \cdot \Theta(1) = \Theta(n)$$

Complessità Temporale QUICKSORT

La complessità temporale di QUICKSORT dipende da come PARTITION divide l'array

$$\mathrm{T}_{\text{QUICKSORT}}(n) = \mathrm{T}_{\text{QUICKSORT}}(q) + \mathrm{T}_{\text{QUICKSORT}}(n - q - 1) + \Theta(n)$$

Complessità Temporale QUICKSORT
Best Case

Se PARTITION produce sottoproblemi bilanciati l'equazione di ricorrenza per QUICKSORT diventa:

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

$$\Downarrow$$

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

La complessità in tempo di QUICKSORT pertanto è asintoticamente ottimale nel caso migliore.

Complessità Temporale QUICKSORT
Worst Case

Se PARTITION produce sottoproblemi completamente sbilanciati (ovvero di dimensione $[n-1]$ e $[0]$) l'equazione di ricorrenza diventa:

$$T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

$$\Downarrow$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

Si può dimostrare che si tratta del caso peggiore considerando:

$$T(n) = \max_{0 \leq q \leq n-1} [T(q) + T(n-q-1)] + \Theta(n)$$

e provando come soluzione $T(n) \leq c \cdot n^2$, da cui si ottiene:

$$\Rightarrow T(n) \leq c \cdot \max_{0 \leq q \leq n-1} \left[q^2 + (n-q-1)^2\right] + \Theta(n) \leq c \cdot n^2 + \Theta(n) = O(n^2)$$

Complessità Temporale QUICKSORT
Worst Case

La procedura PARTITION mostrata produce sottoproblemi sbilanciati quando il pivot selezionato è il minimo o il massimo dell'array.

Il caso peggiore si ha se i sottoproblemi sono sbilanciati ad ogni iterazione ricorsiva di QUICKSORT.

Ma quindi i "casi peggiori" sono:

Array già ordinato $\Rightarrow$ Scelta migliore del pivot (RANDOMIZED-PARTITION[1], MEDIAN-OF-THREE, MEDIAN-OF-N[2])

Array con molti valori uguali $\Rightarrow$ HOARE-PARTITION o THREE-WAY-PARTITION

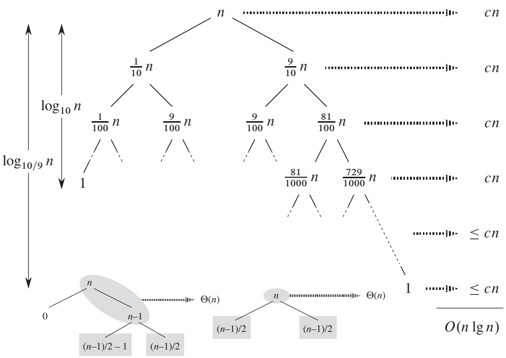
---

[1] QUICKSORT con RANDOMIZED-PARTITION impiega comunque tempo $\Theta(n^2)$ con probabilità $\frac{1}{n!}$, ma non sempre su array ordinati

[2] Garantisce $\Theta(n \log n)$ ma con costanti sufficientemente elevate da renderlo non pratico

Complessità Temporale QUICKSORT
Average Case

Il tempo medio di esecuzione di QUICKSORT è molto più vicino al caso migliore che al caso peggiore



- Se PARTITION divide in modo arbitrariamente sbilanciato, ma con proporzionalità costante $\Rightarrow O(n \log n)$
- Anche se alcuni *splits* sono completamente sbilanciati $([n-1] \longleftrightarrow [0]) \Rightarrow O(n \log n)$
- Il tempo è $O(n^2)$ solo se PARTITION divide sempre in modo “lineare” $[n-c-1] \longleftrightarrow [c]$

Complessità Temporale QUICKSORT
Average Case

Per studiare la complessità temporale del caso medio di QUICKSORT si suppone che:

1. Tutte le permutazioni possibili di ogni sequenza di input siano ugualmente probabili
   In pratica, per evitare di avere il *worst case* su un caso specifico (come array già ordinati) $\longrightarrow$ RANDOMIZED-QUICKSORT: scelgo il pivot casualmente

2. Non ci siano elementi con valore uguale[1]

[1] Per adeguate scelte di PARTITION la complessità in tempo in presenza di elementi con valore uguale è $\leq$ di quella con elementi tutti diversi

Complessità Temporale QUICKSORT
Average Case

$T_{\text{QUICKSORT}}(n)$ è dominato dal tempo speso in PARTITION

Il pivot scelto da PARTITION non è incluso nelle successive chiamate a QUICKSORT
$\Rightarrow$ PARTITION è eseguita al più n volte

Il tempo impiegato dalla i-esima chiamata a PARTITION è $O(1) + O\left(\#^{i}_{\textbf{for}}\right)$

Il tempo impiegato da tutte le n chiamate a partition è $O(n + X)$ $\left(X = \sum_{i=1}^{n} \#^{i}_{\textbf{for}} = \#^{tot}_{\text{confronti}}\right)$

$$T_{\text{QUICKSORT}}(n) = O(n + X)$$

PARTITION(A, p, r)

```
x = A[r]
i = p
for j = p to r − 1
        if A[j] ≤ x
            exchange A[i] with A[j]
                i = i + 1
exchange A[i] with A[r]
return i
```

QUICKSORT(A, p, r)

```
if p < r
        q = PARTITION(A, p, r)
        QUICKSORT(A, p, q − 1)
        QUICKSORT(A, q + 1, r)
```

Complessità Temporale QUICKSORT
Average Case

Definisco $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j\}$, dove $\{z_\ell\}_{\ell=1}^{n}$ sono gli elementi dell'array $A[1, \ldots, n]$ disposti in ordine crescente

Si ottiene il numero totale di confronti tra due elementi dell'array (X) con le considerazioni:

1. Due elementi sono confrontati al più una volta
2. Utilizzando la variabile indicatrice $X_{ij} = I\{z_i \text{ è confrontato a } z_j\}$ il numero totale di confronti è dato da:
$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}$$
3. Il valore atteso del numero di confronti è dato da:

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{E}\left[X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \Pr\{z_i \text{ è confrontato a } z_j\}$$

Complessità Temporale QUICKSORT
Average Case

La probabilità di confrontare due valori z_i e z_j è calcolata considerando che:

1. Se un pivot x è scelto con $z_i < x < z_j \Rightarrow z_i$ e z_j **non** sono confrontati
2. z_i e z_j sono confrontati se uno dei due è scelto come pivot prima di ogni altro elemento in Z_{ij}

Ma tutte le permutazioni sono ugualmente probabili, quindi:

$$\Pr\{z_\ell \text{ è il primo pivot scelto da } Z_{ij}\} = \frac{1}{|Z_{ij}|} = \frac{1}{j-i+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\Pr\{z_i \text{ è confrontato a } z_j\} = \Pr\{z_i \text{ o } z_j \text{ sono il primo pivot scelto da } Z_{ij}\} = \frac{2}{j-i+1}$$

Complessità Temporale QUICKSORT
Average Case

È possibile quindi calcolare il valore atteso del numero di confronti:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} \\
&< \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} O(\log n) \\
&= O(n \log n)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= O(n + X) = O(n + n \log n) \\
&= O(n \log n)
\end{aligned}
$$