线性规划与对偶学

标准形式 $\max z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$.

s.t. $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1, 2, \ldots m \quad b_i \geqslant 0 \\ x_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots n \end{cases}$

下例：求解 $\max z = 3x_1 + 4x_2$.

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ x_1 \ldots x_4 \geqslant 0 \end{cases}$

	c_j		3	4	0	0	
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ_i
0	x_3	40	2	1	1	0	40
0	x_4	30	1	3	0	1	10
	σ_j		3	4	0	0	

◁把 x_4 换出 x_2 换入.

最大：σ_j 值 ≤ 0

$\sigma_1 = c_1 - (c_3 a_{11} + c_4 a_{21}) = 3 - (0 \times 2 + 0 \times 1) = 3$ 　　$4 - (0 \times 1 + 0 \times 3) = 4$ 　　$0 - (0 \times 1 + 0 \times 0) = 0$

选择 σ_j 最大：$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ij}} = \frac{40}{1}, \frac{30}{3}$

互补松弛

$\min z = 2x_1 + 4x_2 - x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \text{ 无非负约束} \end{cases}$$

$\max \omega = 6y_1 + 12y_2 + 8y_3 + 15y_4$

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 \leq 2 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 \geq 4 \\ 2y_1 - 3y_2 + 2y_3 - y_4 = -1 \\ y_1 \geq 0 \quad y_2 \text{ 无非负限制} \quad y_3 \leq 0 \\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

或者 $\max z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 20 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20 \\ x_1 \cdots \geq 0 \end{cases}$$

$\min w = 20y_1 + 20y_2$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \geq 2 & ① \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 2 & ② \\ 3y_1 + 2y_2 \geq 1 & ③ \\ 4y_1 + y_2 \geq 1 & ④ \\ y_1 - \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{10} \\ y_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$w^* = 14$

②, ④ 等号成立 $\Rightarrow x_2, x_4 \neq 0$

$x_1, x_3 = 0$

$z^* = 14$