תרגול 1 – בעיית שני הגופים ומערכות צירים (חזרה)

בעיית שני הגופים – חזרה

ניסוח כללי וחוקי שימור

בעיית התנועה עבור מרכז המסה של גוף שמסתו זניחה ביחס לכוכב כדורי עם פילוג מסה אחיד, במערכת אינרציאלית שראשיתה במרכז הכוכב היא:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}, \qquad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \qquad \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0, \qquad t_0 \geq 0$$

כאשר $\vec{r}$ הוא המרחק היחסי בין שתי המסות ו–μ הוא קבוע הכבידה. לכל כוכב קיים קבוע אחר, ועבור כדור הארץ:

$$\mu_{\oplus} = 3.986 \times 10^5_{\left[\frac{km^3}{s^2}\right]}$$

בהיעדר כוחות חיצוניים (שיוספו במחצית השנייה לסמסטר) מתקיימים שני חוקי שימור:

1. שימור אנרגיה (סגולית) –

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{const}$$

2. שימור תנע זוויתי (סגולי) –

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{const}$$

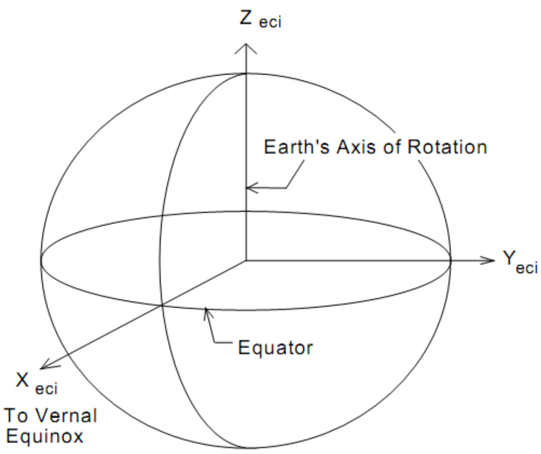
שימו לב כי משוואת שימור האנרגיה היא סקלרית וכי משוואת שימור התנע הזוויתי היא וקטורית.

סוגי מערכות צירים

מערכת ECI

מערכת אינרציאלית שראשיתה נמצאת במרכז כדור הארץ.

- ציר $\hat{\mathbf{x}}$ בכיוון Vernal Equinox (קו החיתוך בין מישור המשווה למישור האקליפטי, שהוא המישור המכיל את מסלולו של כדור הארץ סביב השמש).
- ציר $\hat{\mathbf{z}}$ ניצב למישור המשווה לכיוון צפון.
- ציר $\hat{\mathbf{y}}$ משלים לשלשה ימנית.



איור 1 – מערכת ECI [1]

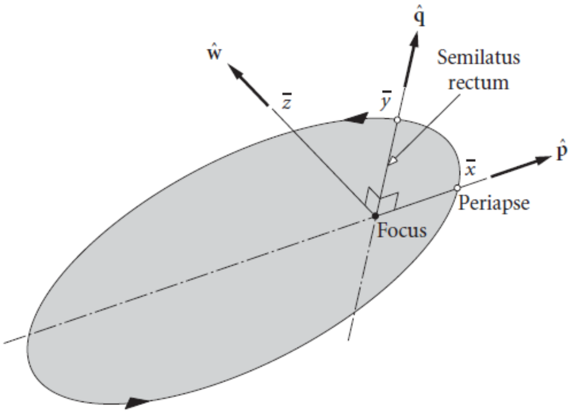
מערכת פריפוקלית

מערכת זו תלויה במסלול הלוויין, וראשייתה היא במוקד המשיכה.

- ציר $\hat{\mathbf{p}}$ לכיוון הפריגאה.
- ציר $\widehat{\mathbf{w}}$ לכיוון התנע הזוויתי.
- ציר $\hat{\mathbf{q}}$ משלים לשלשה ימנית (נמצא במישור המסלול).

שימו לב שלמעשה הווקטורים $\mathbf{e},\mathbf{p}$ (האקסצנטריות והתנע הזוויתי) מגדירים את מערכת הצירים הזו. ניתן לרשום:

$$\hat{\mathbf{p}}=\frac{\mathbf{e}}{e},\qquad \widehat{\mathbf{w}}=\frac{\mathbf{h}}{h},\qquad \hat{\mathbf{q}}=\frac{\mathbf{h}\times\mathbf{e}}{he}$$

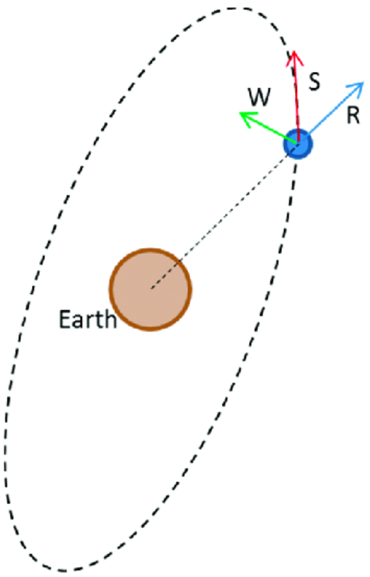


איור 2 – מערכת פריפוקלית

מערכת LVLH

מערכת זו תלויה בתנועת הלוויין, וראשייתה היא במוקד המשיכה.

- ציר $\hat{\mathbf{R}}$ לכיוון הרדיוס.
- ציר $\widehat{\mathbf{W}}$ לכיוון התנע הזוויתי.
- ציר $\hat{\mathbf{S}}$ משלים לשלשה ימנית (ניצב לרדיוס ונמצא במישור המסלול).



איור 3 – מערכת RSW

מעבר בין מערכות צירים

לעיתים יהיו לנו נוח לבטא וקטור מסוים במערכת צירים אחת, בעוד שנרצה להשתמש בו במערכת צירים אחרת. לשם כך נגדיר מטריצת מעבר:

$$\mathbf{g}_A=\mathcal{D}_A^B\mathbf{g}_B$$

כאשר $\mathbf{g}_B,\mathbf{g}_A$ הם הווקטורים $\vec{\mathbf{g}}$ במערכת צירים A ו-B בהתאמה, ו-$\mathcal{D}_A^B$ היא מטריצת המעבר ממערכת צירים B ל-A. מכיוון שמטריצת המעבר היא אורתוגונלית:

$$\mathcal{D}_B^A=[\mathcal{D}_A^B]^{-1}=[\mathcal{D}_A^B]^T$$

באיור 4 ניתן לראות את שלושת מערכות הצירים האחרונות אחד לצד השנייה. האיור נלקח מתוך Orbital Mechanics for Engineering Students, H.D. Curtis.

<u>מעבר ממערכת צירים פריפוקלית ל-ECI</u>

$$\mathcal{D}_{ECI}^{per}=\begin{bmatrix}-\sin\Omega\cos i\sin\omega+\cos\Omega\cos\omega & -\sin\Omega\cos i\cos\omega-\cos\Omega\sin\omega & \sin i\sin\Omega\\ \cos\Omega\cos i\sin\omega+\sin\Omega\cos\omega & \cos\Omega\cos i\cos\omega-\sin\Omega\sin\omega & -\sin i\cos\Omega\\ \sin\omega\sin i & \cos\omega\sin i & \cos i\end{bmatrix}$$

<u>מעבר ממערכת צירים LVLH ל-ECI</u>

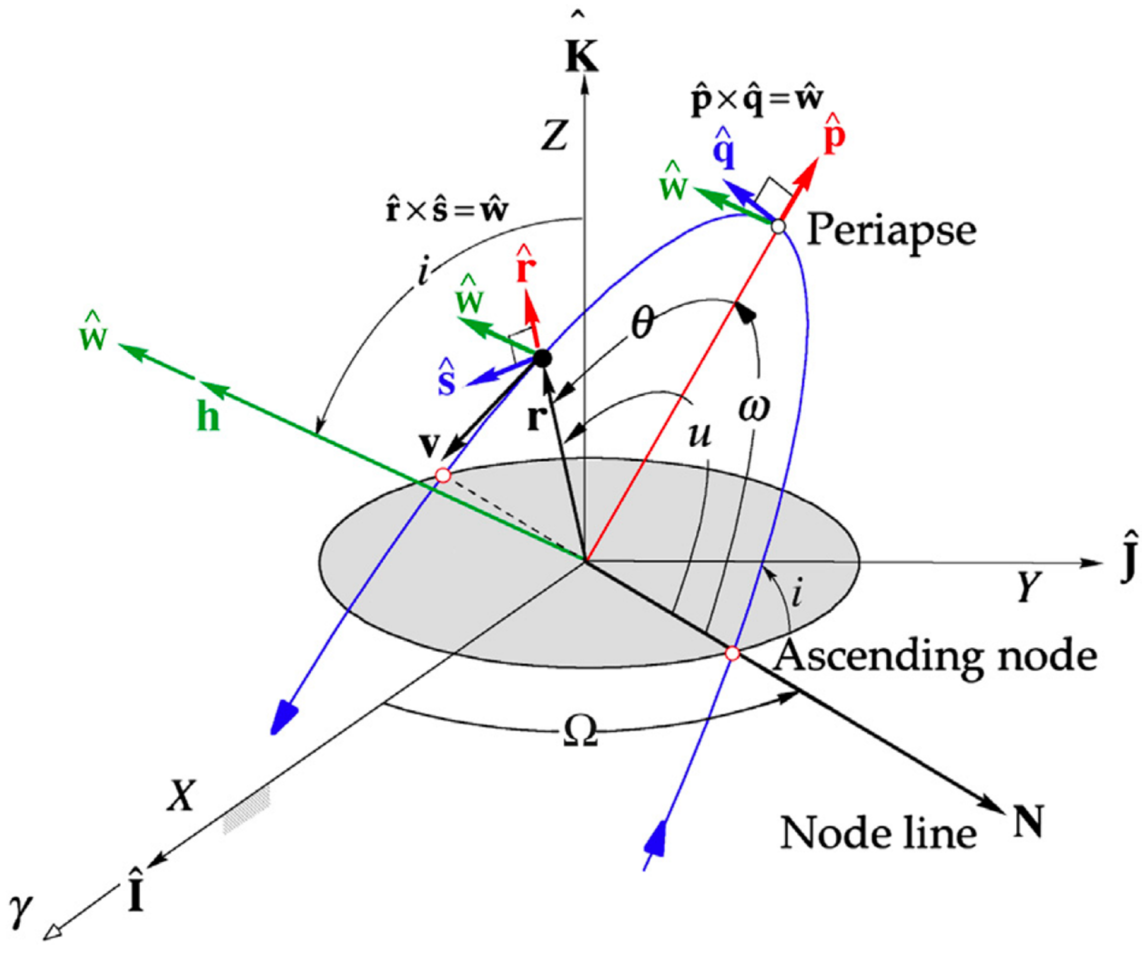
$$\mathcal{D}_{ECI}^{LVLH}=\begin{bmatrix}-\sin\Omega\cos i\,\theta+\cos\Omega\cos\theta & -\sin\Omega\cos i\cos\theta-\cos\Omega\sin\theta & \sin i\sin\Omega\\ \cos\Omega\cos i\sin\theta+\sin\Omega\cos\theta & \cos\Omega\cos i\cos\theta-\sin\Omega\sin\theta & -\sin i\cos\Omega\\ \sin\theta\sin i & \cos\theta\sin i & \cos i\end{bmatrix}$$

כאשר θ נקראת argument of latitude והיא מוגדרת כזווית הנמדדת מהצומת העולה:

$$\theta\triangleq\omega+f$$

<u>הערה:</u>

שימו לב כי המטריצות זהות עד כדי החלפה בין ω ל-θ.



איור 4 – מערכות הצירים השונות

קצת על הקשר בין מערכת צירים פריפוקלית למערכת צירים צמודת לוויין

נבטא את וקטור המיקום במערכת צירים פריפוקלית ובמערכת צירים צמודת לוויין:

$$\mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} r\cdot\cos f \\ r\cdot\sin f \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_{LVLH} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ידוע שעל מנת לעבור ממערכת צירים פריפוקלית למערכת צירים צמודת לוויין יש לסובב את מערכת הצירים ב-f סביב ציר $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{r}_{LVLH} = \mathcal{D}^p_{LVLH}\mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} \cos f & \sin f & 0 \\ -\sin f & \cos f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cdot\cos f \\ r\cdot\sin f \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

נמצא את וקטור המהירות בכל אחת ממערכות הצירים. מערכת הצירים הפריפוקלית היא מערכת צירים אינרציאלית ולכן:

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cdot\cos f) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cdot\sin f) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r}\cos f - r\dot{f}\sin f \\ \dot{r}\sin f + r\dot{f}\cos f \\ 0 \end{bmatrix}$$

מערכת הצירים צמודת הלוויין, לעומת זאת, אינה אינרציאלית ולכן יש להכניס איבר תיקון במשוואת הגזירה:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}_{LVLH} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}_{LVLH}\right]_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_{LVLH}$$

כאשר $\boldsymbol{\Omega}$ היא המהירות הזוויתית של מערכת הצירים. מערכת הצירים סובבת סביב ציר $\mathbf{e}_3$ ולכן:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{f} \end{bmatrix}$$

מכאן נקבל:

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}_{LVLH}\right]_{\mathrm{rel}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_{LVLH} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{f} & 0 \\ \dot{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\dot{f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}_{LVLH} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r\dot{f} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ r\dot{f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>הערה</u>: תוכלו לוודא בבית כי אכן מתקיים:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}_{LVLH} = \mathcal{D}^p_{LVLH}\dot{\mathbf{r}}_p$$

בהצגה במערכת צירים צמודת לווין מתקיים:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{f} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ddot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{f}^2 \\ r\ddot{f} + 2\dot{r}\dot{f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

במערכת צירים זו מתקיים:

$$h = r^2\dot{f}$$

חתכים קוניים

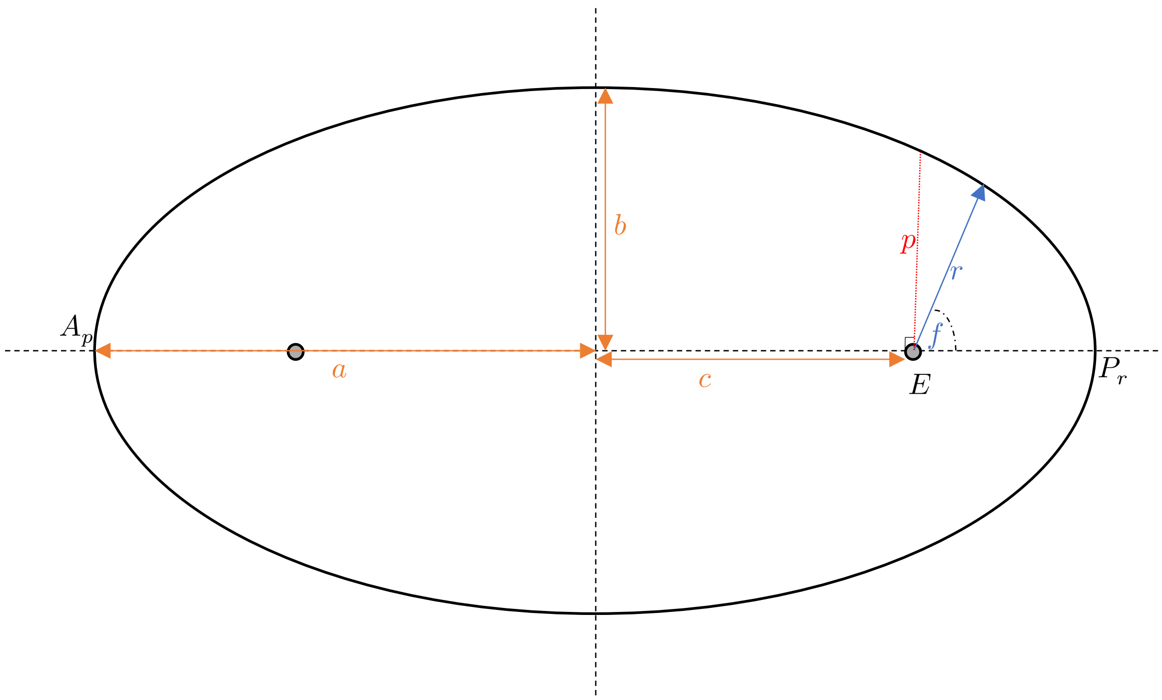
לא ניתן לפתור את בעיית שני הגופים אנליטית, אך ניתן למצוא קשר בין הרדיוס לבין זווית האנומליה האמיתית:

$$r(f) = \frac{p}{1 + e\cos f}, \qquad \text{where } p = a(1 - e^2)$$

כאשר a הוא חצי הציר הגדול ו-e היא האקסצנטריות. בטבלה הבאה ניתן לראות את הקשר בין פרמטרים אלו לבין אנרגית המסלול ולצורתו.

	a	ε	e	מסלול
מעגל	> 0	< 0	$= 0$	סגור
אליפסה	> 0	< 0	$\in (0,1)$	סגור
פרבולה	∞	$= 0$	$= 1$	פתוח
היפרבולה	< 0	> 0	> 1	פתוח

עבור מסלול סגור (אליפטי) כללי:



איור 4 - מסלול אליפטי

ומתקיים בנוסף:

$$p = \frac{h^2}{\mu}, \qquad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

וקטור האקסצנטריות נשאר קבוע וכיוונו לפריגאה:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{\mu}\left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right)\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}\right], \qquad e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{\mu^2}}$$

רדיוסי הפריגאה והאפוגאה הם:

$$r_p = a(1 - e), \qquad r_a = a(1 + e)$$

במערכת זו מתקיים:

$$\cos(i)=\frac{h_z}{h},\qquad 0\le i\le 180°$$

$$\cos(\Omega)=\frac{n_x}{n},\qquad \sin(\Omega)=\frac{n_y}{n},\qquad \Longrightarrow \Omega=\operatorname{atan2}\left(\frac{n_y}{n},\frac{n_x}{n}\right)$$

$$\cos(\omega)=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}}{n\cdot e},\quad \sin(\omega)=\sqrt{1-\cos^2(\omega)},\qquad \Longrightarrow\ \omega=\operatorname{atan2}\left[\operatorname{sign}(e_z)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}}{n\cdot e}\right)^2},\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}}{n\cdot e}\right]$$

$$\cos(f)=\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}}{r\cdot e},\quad \sin(f)=\sqrt{1-\cos^2(f)},\qquad \Longrightarrow f=\operatorname{atan2}\left[\operatorname{sign}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}}{r\cdot e}\right)^2},\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}}{r\cdot e}\right]$$

כאשר $\mathbf{n}$ הוא וקטור שכיוונו לצומת העלייה:

$$\mathbf{n}=\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{h}=-h_y\hat{\mathbf{x}}+h_x\hat{\mathbf{y}}$$

תרגילים

תרגיל 1

לוויין נמצא במסלול מעגלי סביב כדור הארץ. נתון כי זמן המחזור שלו הינו 100 דקות. בנקודה מסוימת בחצי הכדור הצפוני, כאשר הלוויין בדרכו דרומה, וקטורי המקום והמהירות במערכת ECI הם:

$$\mathbf{r}=\begin{bmatrix}2{,}500\\-6{,}600\\r_z\end{bmatrix}_{[km]},\qquad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}3.8\\v_y\\v_z\end{bmatrix}_{\left[\frac{km}{s}\right]}$$

א. מצאו את הרכיבים החסרים (r_z,v_y,v_z), את חצי הציר הגדול (a) ואת זווית הנטייה (i).

ב. ציירו באופן סכמתי את המסלול במערכת ECI. סמנו את הצמתים ואת הנקודה בה נמדדו נתוני המקום והמהירות.

פתרון תרגיל 1

סעיף א'

המסלול מעגלי ולכן:

$$e=0$$

נמצא את חצי הציר הגדול מתוך זמן המחזור:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\Longrightarrow\boxed{a=\sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4\pi^2}}=7{,}136.6_{[km]}}$$

מכן נוכל למצוא את הרדיוס:

$$r=\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}=a$$

$$\Longrightarrow r_x^2+r_y^2+r_z^2=a^2$$

$$\Longrightarrow r_z=\pm\sqrt{a^2-r_y^2-r_x^2}=\pm1{,}059_{[km]}$$

ומכיוון שנתון כי הנקודה בחצי הכדור הצפוני:

$$\boxed{r_z=1{,}059_{[km]}}$$

עבור מציאת המהירות נשתמש בשני חוקי השימור:

שימור אנרגיה

$$\varepsilon=-\frac{\mu}{2a}=\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}=\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}-\frac{\mu}{a}$$
$$\Longrightarrow v_z=\pm\sqrt{\frac{\mu}{a}-v_x^2-v_y^2}$$

ומכיוון שנתון כי כיוון תנועת הלוויין הוא דרומה:

$$v_z=-\sqrt{\frac{\mu}{a}-v_x^2-v_y^2}$$

שימור תנע

$$h=|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|=\left|\underbrace{\begin{bmatrix}0&-r_z&r_y\\r_z&0&-r_x\\-r_y&r_x&0\end{bmatrix}}_{=\tilde{\mathbf{r}}}\mathbf{v}\right|=\sqrt{(r_xv_y-r_yv_x)^2+(r_zv_y-r_yv_z)^2+(r_xv_z-r_yv_z)^2}=\sqrt{\mu a}$$

קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים וניתן לפתור. עם זאת, המשוואה של שימור התנע קצת עמוסה, ולכן ננסה ללכת בכיוון אחר. ניזכר כי עבור מסלול מעגלי:

$$\mathbf{r}\perp\mathbf{v}\Longrightarrow\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$$
$$\Longrightarrow r_xv_x+r_yv_y+r_zv_z=0$$
$$\Longrightarrow v_z=-\frac{r_xv_x+r_y\ v_y}{r_z}$$

קיבלנו שני ביטויים עבור v_z. נשווה בניהם:

$$-\frac{r_xv_x+r_y\ v_y}{r_z}=-\sqrt{\frac{\mu}{a}-v_x^2-v_y^2}$$
$$\Longrightarrow\frac{(r_xv_x+r_yv_y)^2}{r_z^2}=\frac{\mu}{a}-v_x^2-v_y^2$$
$$\Longrightarrow\left(\frac{r_y^2}{r_z^2}+1\right)v_y^2+\left(\frac{2r_xv_xr_y}{r_z^2}\right)v_y+\left(\frac{r_x^2v_x^2}{r_z^2}-\frac{\mu}{a}+v_x^2\right)=0$$

קיבלנו משוואה ריבועית עבור v_y. הפתרונות הם:

$$v_{y_1}=2.3976_{\left[\frac{km}{s}\right]},\qquad v_{y_2}=0.40885_{\left[\frac{km}{s}\right]}$$

הצבה של v_{y_2} בביטוי של v_z תניב:

$$v_z=-\frac{r_xv_x+r_y\ v_y}{r_z}=5.971_{\left[\frac{km}{s}\right]}$$

אבל ידוע כי $v_z<0$ (הלוויין מתקדם לכיוון דרום) ולכן v_{y_2} נפסל. נציב את v_{y_1}:

$$v_z=-\frac{r_xv_x+r_y\ v_y}{r_z}=-6.422_{\left[\frac{km}{s}\right]}$$

ונקבל לסיכום:

$$\boxed{\vec{r} = \begin{bmatrix} 2.500 \\ -6{,}600 \\ 1059 \end{bmatrix}_{[km]} \quad , \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3.8 \\ 0.40885 \\ -6.422 \end{bmatrix}_{\left[\frac{km}{s}\right]}}$$

את זווית הנטייה נחשב מתוך:

$$\cos i = \frac{h_z}{h}$$

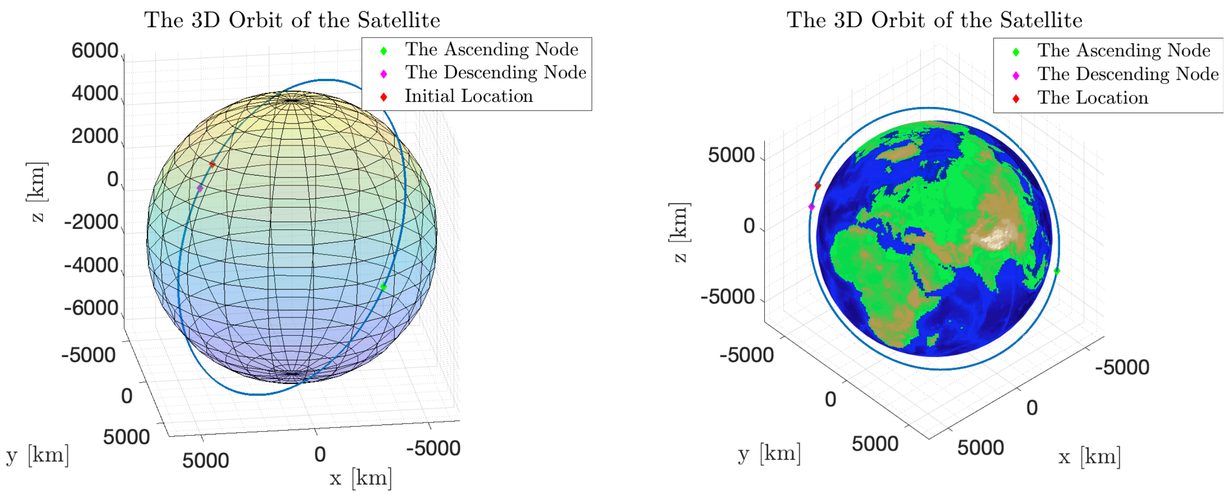
כאשר:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 41{,}952 \\ 20{,}079 \\ 26{,}102 \end{bmatrix}_{\left[\frac{km^2}{s}\right]} \quad , \qquad h = 53{,}333_{\left[\frac{km^2}{s}\right]}$$

נציב ונקבל:

$$i = \arccos\left(\frac{26{,}102}{53{,}333}\right) = 60.7°$$

<u>סעיף ב'</u>



איור 5 –מסלול הלוויין

תרגיל 2

נתון מסלול אליפטי בעל חצי ציר גדול a ואקסצנטריות e. פתחו ביטוי לרכיב המהירות הרדיאלי ולרכיב המהירות ההיקפי כתלות בזווית האנומליה האמיתית.

פתרון תרגיל 2

ראינו בתחילת התרגול כי:

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

נתחיל מהרכיב הרדיאלי:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{1+e\cos f}\right) = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{1+e\cos f}\right) = p\frac{-\cdot(-e\sin f)\dot{f}}{(1+e\cos f)^2} = p\frac{e\sin f\cdot\dot{f}}{(1+e\cos f)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{p}{1+e\cos f}}_{=r}\frac{\sin f\cdot\dot{f}e}{1+e\cos f}\cdot\frac{p}{p} = r\cdot\underbrace{\frac{p}{1+e\cos f}}_{=r}\cdot\frac{\sin f\,\dot{f}e}{p} \overset{r^2\dot{f}=h}{=} \frac{he}{p}\sin f \overset{h=\sqrt{\mu p}}{=} \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin f$$

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}e\sin f}$$

ונמשיך לרכיב ההיקפי:

$$r\dot{f} = \frac{r^2\dot{f}}{r} = \frac{h}{r} = \frac{h}{p}(1+e\cos f) \overset{\text{חלק רדיאלי}}{\Longrightarrow} \boxed{r\dot{f} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}(1+e\cos f)}$$

תרגיל 3 (מעבר אוהמן – חזרה)

הלוויין בשאלה 1 נדרש לעבור למסלול מעגלי חדש באותו מישור, כך שזמן המחזור יהיה שעתיים. המעבר יתבצע על ידי מעבר אוהמן. נקודת ההתחלה היא הנקודה הנתונה בשאלה 1.

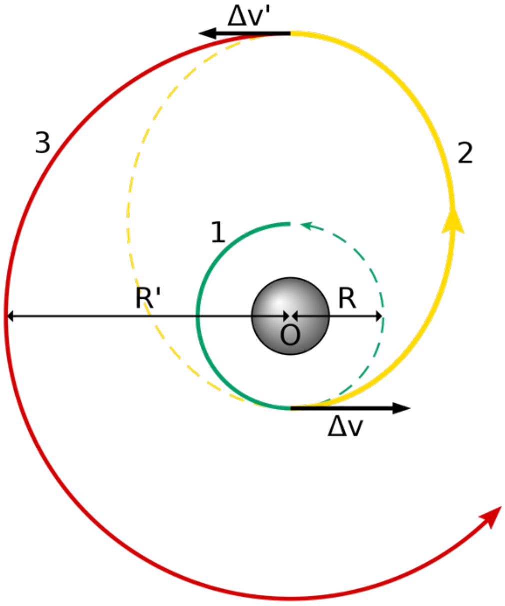
א. חשבו את שני פולסי המהירות (גודל וכיוון) ואת השינוי הכולל במהירות.

ב. כיצד תשתנה התשובה של סעיף א' אם המעבר יתחיל מנקודה אחרת?

פתרון תרגיל 3

סעיף א'

מעבר אוהמן יתבצע באופן הבא: מעבר מהמסלול המעגלי המקורי לאליפסת מעבר שהציר הגדול שלה שווה לסכום הרדיוסים של מסלול המוצא ומסלול היעד. נקודת המוצא תהייה הפריגאה של אליפסת המעבר. בהגעה לאפוגאה אליפסת המעבר (נקודת היעד) יינתן פולס נוסף.



איור 6 – סכמה של מעבר אוהמן

נסמן, בהתאם לאיור 6, באינדקס 1 את מסלול המקור, באינדקס 2 את אליפסת המעבר ובאינדקס 3 את מסלול היעד. את a_1 מצאנו בתרגיל 1. נמצא את a_3:

$$a_3 = \sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4\pi^2}} = 8{,}059_{[km]}$$

הציר הגדול של אליפסת המעבר מקיים:

$$2a_2 = a_1 + a_3 = 15{,}195.6_{[km]}$$

מהירות המוצא היא:

$$v_1^- = \sqrt{\frac{\mu}{a_1}} = 7.474_{\left[\frac{km}{s}\right]}$$

בעוד שהמהירות בפריגאת האליפסה צריכה להיות:

$$v_1^+ = v_2^p = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + a_3}} = 7.697_{\left[\frac{km}{s}\right]}$$

מכאן ניתן למצוא את גודל הפולס הראשון:

$$\Delta v_1 = |v_1^- - v_1^+| = 0.223_{\left[\frac{km}{s}\right]}$$

וכיוונו הוא כמובן כיוון המהירות (יש להגדיל אותה):

$$\Delta \vec{v}_1 = \hat{v}_1 \cdot 0.223 = \begin{bmatrix} 3.8 \\ 0.40885 \\ -6.422 \end{bmatrix} \frac{0.223}{7.474} \Longrightarrow \boxed{\Delta \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.113 \\ 0.012 \\ -0.192 \end{bmatrix}_{\left[\frac{km}{s}\right]}}$$

על מנת לחשב את הפולס השני נמצא את מהירות היעד:

$$v_3^+ = \sqrt{\frac{\mu}{a_3}} = 7.032_{\left[\frac{km}{s}\right]}$$

בעוד שהמהירות באפוגיאת האליפסה:

$$v_3^- = v_2^a = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{2a_2}} \overset{\text{apogee}}{=} \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_1 + a_3}} = 6.816_{\left[\frac{km}{s}\right]}$$

ומכאן ניתן למצוא את הפולס השני:

$$\Delta v_3 = |v_3^- - v_3^+| = 0.216_{\left[\frac{km}{s}\right]}$$

כיוונו יהיה נגד כיוון המהירות ההתחלתית ולכן:

$$\Delta \vec{v}_3 = -\hat{v}_1 0.216 = -\begin{bmatrix} 3.8 \\ 0.40885 \\ -6.422 \end{bmatrix} \frac{0.216}{7.474} \Longrightarrow \boxed{\Delta \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -0.11 \\ -0.012 \\ 0.185 \end{bmatrix}_{\left[\frac{km}{s}\right]}}$$

שינוי המהירות הכולל יהיה סכום שני הפולסים:

$$\Delta v_{tot} = |\ \Delta \vec{v}_3| + |\Delta \vec{v}_1| = 0.439_{\left[\frac{km}{s}\right]}$$

<u>סעיף ב'</u>

המעבר הוא בין שני מסלולים מעגליים, ולכן אין חשיבות להתחלת התרחיש מנקודת אחרת.

<u>הערה:</u> שימו לב, ניתן היה להשתמש בשאלה זו גם בביטוי הסגור לשינוי המהירות הכולל במעבר אוהמן:

$$\Delta v_{tot} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \sqrt{\frac{2}{\xi+1}} - 1 + \sqrt{\xi} - \sqrt{\frac{2\xi^2}{\xi+1}}, \qquad \text{where } \xi = \frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_3}$$