Formule di quadratura composte

Per costruire una **formula di quadratura composta** per il calcolo numerico dell'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

occorre eseguire i seguenti passi:

1) scegliere una formula di quadratura, detta formula base, di cui si vuole costruire la versione composta (per esempio, la formula del trapezio, la formula di Gauss-Legendre ad n nodi,...);

2) suddividere l'intervallo di integrazione in m sottointervalli mediante i punti x_i, $i = 1, \ldots, m+1$, con $a \equiv x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1} \equiv b$ (se i sottointervalli hanno ampiezza costante h allora $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 1, \ldots, m$ e $h = (b-a)/m$, altrimenti $x_{i+1} - x_i = h_i$, $i = 1, \ldots, m$);
3) utilizzare la proprietà additiva degli integrali:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx;$$

4) approssimare l'integrale su ciascun sottointervallo mediante la formula base, scelta al passo 1).

Osserviamo che l'utilizzo di una formula composta non comporta il calcolo dei nodi e dei pesi al variare di m. Inoltre, se la formula base ha grado di precisione d, anche la formula composta ha grado di precisione d.

ESEMPIO

Scriviamo la versione composta della formula del trapezio utilizzando una partizione uniforme (ovvero con passo costante) dell'intervallo di integrazione. Tale formula è detta **formula dei trapezi**. Consideriamo a tal scopo i punti equispaziati

$$a \equiv x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} \equiv b$$

$$x_i = a + (i-1)h,\ \ i = 1, \ldots, m+1, \quad h = (b-a)/m$$

e approssimiamo, mediante la formula del trapezio, l'integrale esteso all'intervallo di integrazione $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{i+1} - x_i}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{2}\,[f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_m) + f(x_{m+1})]$$

$$= \frac{h}{2}\,\left[f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{m} f(x_i) + f(x_{m+1})\right]$$

Comandi MATLAB

```
function t = trapezi(f,a,b,m)
%
x = linspace(a,b,m+1);
y = f(x);
t = (b-a)/(2*m)*(y(1)+2*sum(y(2:m))+y(m+1));
```

ESEMPIO

Calcoliamo l'integrale

$$I = \int_0^1 x^3 \exp(x)\, dx = -2\exp(1) + 6 \approx 0.5634363430819089$$

mediante la formula dei trapezi I_m^T con $m = 2^n$ e $n = 2, \ldots, 15$. Nella prima colonna riportiamo il numero di valutazioni di funzione $M = m + 1$ richieste dalla formula dei trapezi.

$M = m + 1$	I_m^T	$\lvert I - I_m^T \rvert$
5	0.6196008380528142	$5.62e-02$
9	0.5775647957738439	$1.41e-02$
17	0.5669739416442370	$3.54e-03$
33	0.5643210859879768	$8.85e-04$
65	0.5636575502692232	$2.21e-04$
129	0.5634916462201426	$5.53e-05$
257	0.5634501689503072	$1.38e-05$
513	0.5634397995542489	$3.46e-06$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
32769	0.5634363439257720	$8.44e-10$

ESEMPIO

Scriviamo la versione composta della formula di Simpson utilizzando una partizione uniforme dell'intervallo di integrazione. A tal scopo consideriamo i punti equispaziati

$$a \equiv x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{2m-1} < x_{2m} < x_{2m+1} \equiv b$$

$$x_i = a + (i-1)h, \; i = 1, \ldots, 2m+1, \quad h = (b-a)/(2m),$$

e approssimiamo, mediante la formula di Simpson, l'integrale esteso all'intervallo di integrazione $[x_{2i-1}, x_{2i+1}]$, $i = 1, \ldots, m$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)\,dx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{2i+1} - x_{2i-1}}{6} \left[f(x_{2i-1}) + 4f(x_{2i}) + f(x_{2i+1})\right]$$

$$= \frac{h}{3}\ \left[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2m-1}) + 4f(x_{2m}) + f(x_{2m+1})\right]$$

$$= \frac{h}{3}\ \left[f(x_1) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i+1}) + f(x_{2m+1})\right]$$

Comandi MATLAB

```
function t = simpson(f,a,b,m)
%
x = linspace(a,b,2*m+1);
y = f(x);
t = (b-a)/(6*m)*(y(1)+4*sum(y(2:2:2*m))+...
     2*sum(y(3:2:2*m-1))+y(2*m+1));
```

ESEMPIO

Calcoliamo l'integrale

$$I = \int_0^1 x^3 \exp(x)\, dx = -2\exp(1) + 6 \approx 0.5634363430819089$$

mediante la formula di Simpson composta I_m^S con $m = 2^n$ e $n = 2, \dots, 10$. Nella prima colonna riportiamo il numero di valutazioni di funzione $M = 2m + 1$ richieste dalla formula di Simpson composta.

$M = 2m+1$	I_m^S	$\lvert I - I_m^S \rvert$
9	0.5635527816808537	$1.16e-04$
17	0.5634436569343680	$7.31e-06$
33	0.5634368007692234	$4.58e-07$
65	0.5634363716963053	$2.86e-08$
129	0.5634363448704489	$1.79e-09$
257	0.5634363431936954	$1.12e-10$
513	0.5634363430888960	$6.99e-12$
1025	0.5634363430823461	$4.37e-13$
2049	0.5634363430819371	$2.82e-14$

ESEMPIO

Scriviamo la versione composta della seguente formula di Gauss-Legendre a $n = 2$ nodi:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

utilizzando una partizione uniforme dell'intervallo di integrazione. A tal scopo consideriamo i punti

$$a \equiv x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} \equiv b$$

$$x_i = a + (i-1)h,\ \ i = 1, \ldots, m+1, \quad h = (b-a)/m,$$

e approssimiamo, mediante la suddetta formula di Gauss-Legendre, l'integrale esteso all'intervallo di integrazione $[x_i, x_{i+1}]$,
$i = 1, \ldots, m$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{m} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{h}{2}(1+t) + x_i\right)\,dt$$

$$\approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{m} \left[f\left(\frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + x_i\right) + f\left(\frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + x_i\right) \right]$$

Comandi MATLAB

```
function t = GL2comp(f,a,b,m)
%
x = linspace(a,b,m+1);
h = (b-a)/m;
y1 = f(h/2*(1-1/sqrt(3))+x(1:m));
y2 = f(h/2*(1+1/sqrt(3))+x(1:m));
t = h/2*sum(y1+y2);
```

ESEMPIO

Calcoliamo l'integrale

$$I = \int_0^1 x^3 \exp(x)\, dx = -2\exp(1) + 6 \approx 0.5634363430819089$$

mediante la formula di Gauss-Legendre a 2 nodi composta I_m^G con $m = 2^n$ e $n = 2, \ldots, 10$. Nella prima colonna riportiamo il numero di valutazioni di funzione $M = m + 1$ richieste dalla formula I_m^G.

$M = m + 1$	I_m^G	$\lvert I - I_m^G \rvert$
5	0.5633587519081417	$7.76e-05$
9	0.5634314677222032	$4.88e-06$
17	0.5634360379655089	$3.05e-07$
33	0.5634363240057780	$1.91e-08$
65	0.5634363418895518	$1.19e-09$
129	0.5634363430073857	$7.45e-11$
257	0.5634363430772519	$4.66e-12$
513	0.5634363430816185	$2.90e-13$
1025	0.5634363430818908	$1.81e-14$

Per funzioni poco regolari conviene considerare, in luogo delle partizioni uniformi, partizioni di tipo “adattativo”, per le quali si ha un maggiore addensamento di nodi in prossimità delle singolarità.

Comandi MATLAB

- `[q,N] = quad(f,a,b,toll)` calcola, mediante la formula composta di Simpson e una partizione di tipo adattativo, il valore approssimato q dell' integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ con una tolleranza assoluta *toll* e utilizzando N valutazioni di funzione (`toll`$=10^{-6}$ di default);
- `[q,N] = quadl(f,a,b,toll)` calcola il valore approssimato q, mediante una formula gaussiana e una partizione di tipo adattativo.

ESEMPIO

Calcoliamo l'integrale

$$\int_0^1 x^3 e^x \, dx = -2exp(1) + 6 \approx 0.5634363430819089$$

mediante la function `quad`.

```
>>f = @(x) x.^3.*exp(x);
>>format long e
>>[q,N] = quad(f,0,1)
q =
 5.634363476367892e-001
N =
 29
>>errore = abs(-2*exp(1)+6-q)
errore =
 4.554880250751126e-009
```

```
>>[q,N] = quad(f,0,1,1.0e-14)
q =
 5.634363430819095e-001
N =
 1025
>>errore = abs(-2*exp(1)+6-q)
errore =
 5.551115123125783e-016
```

Usiamo ora la function `quadl`.

```
>>[q,N] = quadl(f,0,1)
q =
 5.634363432013904e-001
N =
 18
>>errore = abs(-2*exp(1)+6-q)
errore =
 1.194814247540421e-010
>>[q,N] = quadl(f,0,1,1.0e-14)
q =
 5.634363430819096e-001
N =
 48
>>errore = abs(-2*exp(1)+6-q)
errore =
 6.661338147750939e-016
```