LABORATORIO 5

Argomenti: Approssimazione, interpolazione con funzioni polinomiali a tratti

1. Siano dati n punti $\{(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n\}$ del piano con le ascisse ordinate come segue $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Costruire un algoritmo, che lette le coordinate dei predetti punti, e letta un'ascissa t, verifichi se tale ascissa risulti $\geq x_1$ e $\leq x_n$ e, in caso affermativo, determini il valore che la poligonale passante per i punti assegnati assume in t.

   Successivamente applicare il suddetto algoritmo scegliendo $f(x) = \sin(x)$ e i dati $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, 20$ con i punti x_i equispaziati nell'intervallo $[0, 1]$. Confrontare il risultato ottenuto con quello fornito dalla *function* `interp1` di MATLAB.

2. Generalizzare l'esercizio precedente come segue. Data una partizione $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ di $[a, b]$ e, in ciascuno intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, assegnate $d + 1$ ascisse

$$x_i = x_{i,1} < x_{i,2} < \ldots < x_{i,d+1} = x_{i+1}$$

   supponiamo di conoscere le corrispondenti ordinate $y_{i,j},\ j = 1, \ldots, d + 1$. Utilizzando le *function* `difdiv` e `interp`, costruire un algoritmo che, letta un'ascissa $a \leq t \leq b$, determini l'ordinata corrispondente che la funzione polinomiale a tratti, di grado locale d, associata alla partizione $\{x_i\}$ assume.

   Successivamente applicare il suddetto algoritmo scegliendo $f(x) = \sin(x)$ e i dati $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, 21$ con i punti x_i equispaziati nell'intervallo $[0, 1]$. Rappresentare graficamente la funzione polinomiale a tratti di grado locale $d = 1, 2, 4$.

   Calcolare infine, per ciascuno valore di d il massimo errore di interpolazione in 100 punti equispaziati nell'intervallo $[a, b]$, inclusi gli estremi.

3. Costruire un algoritmo che calcoli e valuti la spline cubica $S_3(x)$ (vincolata) interpolante i dati $\{(x_i, f(x_i)),\ i = 1, \ldots, n + 1\}$ e soddisfacente le condizioni aggiuntive $S_3(x_1) = f'(x_1)$ e $S_3(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})$.

   Successivamente applicare il suddetto algoritmo scegliendo $f(x) = \sin(x)$ e i dati $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, 20$ con i punti x_i equispaziati nell'intervallo $[0, 1]$. Confrontare i risultati ottenuti con quelli forniti dalla *function* `spline` di MATLAB.

4. Utilizzare la *function* `spline` di MATLAB per determinare e rappresentare graficamente le spline cubiche, soddisfacenti le condizioni "not-a-knot" e interpolanti la funzione di Runge $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in $n = 5, 10, 15$ nodi equispaziati nell'intervallo $[-5, 5]$. Commentare i risultati.

5. Utilizzare la *function* `spline` di MATLAB per costruire le spline cubiche, $S_3(x)$ soddisfacente la condizione "not a knot" e $\bar{S}_3(x)$ soddisfacente le condizioni $\bar{S}_3'(x_0) = f'(x_0)$ e $\bar{S}_3'(x_n) = f'(x_n)$, interpolanti la funzione $f(x) = (1 - x^2)^{5/2}$ nei nodi $x_i = -1 + 2i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $n = 2^k$, $k = 2, 3, 4, 5$.

   Rappresentare graficamente gli errori commessi nelle due approssimazioni in 100 punti equidistanti dell'intervallo di interpolazione $[-1, 1]$ e individuare quale delle due approssimazioni è più accurata.

   Stampare, per ogni valore di k, il massimo errore assoluto commesso e dedurre, dandone una giustificazione, quale delle due spline, not-a-knot e vincolata, rappresenti un'approssimazione più accurata.