LABORATORIO 6

Argomento: equazioni non lineari

1. Sia dato il polinomio

$$p_{20}(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-20)$$

Determinare con comandi `Matlab` i coefficienti c_i del polinomio nella forma

$$p_{20}(x) = \sum_{i=0}^{20} c_i x^i = x^{20} - 210x^{19} + \ldots + 20!$$

utilizzando il formato simbolico. Calcolare le radici del polinomio con il comando `roots` di `Matlab`, confrontare i risultati ottenuti con quelli attesi e commentarne la precisione.

2. Si implementi il metodo di Newton per il calcolo delle radici reali di un'equazione non lineare $f(x) = 0$. Si fissino un numero massimo di iterazioni *nmax* e una tolleranza relativa *tol* per definire i seguenti criteri d'arresto: $n < nmax$ e $|x_{n+1} - x_n| < tol\,|x_{n+1}|$, ove x_{n+1} e x_n denotano due iterate successive.

   Si applichi il metodo di Newton (scegliendo $nmax = 100$ e $tol = 1.0e-10$) all'equazione $f(x) = 0$ con:

   1. $f(x) = x^2 - a$ con $a > 0$, per il calcolo della radice positiva di f;
   2. $f(x) = x^3 - x - 1$, per il calcolo dell'unica radice reale di f;
   3. $f(x) = (x - 2^{-x})^3$, per il calcolo delle radici di f;
   4. $f(x) = \exp(x) - 2x^2$, per il calcolo della radice negativa di f.

   Si osservi l'andamento dell'ordine sperimentale di convergenza e se ne dia una giustificazione per ciascuna funzione assegnata.

3. Si implementi il metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ per la ricerca di un punto fisso della funzione $g(x)$. Si fissino un numero massimo di iterazioni *nmax* e una tolleranza relativa *tol* per definire i seguenti criteri d'arresto: $n < nmax$ e $|x_{n+1} - x_n| < tol\,|x_{n+1}|$, ove x_{n+1} e x_n denotano due iterate successive.

   Si applichi il metodo di punto fisso scegliendo $nmax = 100$, $tol = 1.0e-10$ e

   1. $g(x) = -\sqrt{\dfrac{\exp(x)}{2}}$ per il calcolo della radice negativa di $f(x) = \exp(x) - 2x^2$;
   2. $g(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x}$ per il calcolo dell'unica radice reale di $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ appartenente all'intervallo $[1, 2]$.

   Si osservi l'andamento dell'ordine sperimentale di convergenza e se ne dia una giustificazione per ciascuna funzione assegnata.

4. Determinare la radice $\xi \approx 0.5$ dell'equazione $x + \log(x) = 0$, utilizzando le seguenti formule iterative:

i) $x_{n+1} = -\log(x_n)$;

ii) $x_{n+1} = \exp(-x_n)$;

iii) $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \exp(-x_n)}{2}$

Quale di queste tre formule produce una successione convergente? Quale delle tre è da preferirsi? Costruirne una quarta migliore di quelle date. Verificare numericamente le risposte fornite.

5. Determinare x tale che
$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}$$
Utilizzare, a tal scopo, la definizione della funzione degli errori di Gauss
$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$
e il comando `erf` di `Matlab`.