LABORATORIO 8

Argomenti: integrali

1. Utilizzare le formule di Gauss-Legendre con $n = 2, 4, 6, \ldots, kmax$, crescente (finché la precisione desiderata $tol = 1.0e - 10$ non sia stata raggiunta, oppure il massimo numero dei nodi consentito $kmax = 128$ non sia stato superato) per approssimare gli integrali seguenti:

    1) $\int_0^1 e^x \, dx = e - 1$;
    2) $\int_0^1 \cos x \, dx = \sin(1)$;
    3) $\int_{0.01}^{1.1} \frac{1}{x^4} \, dx = \frac{1}{3}(10^6 - (1.1)^{-3})$;
    4) $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx = 2/3$;
    5) $\int_0^1 \sin(99\pi x) \, dx = 2/(99\pi)$;
    6) $\int_0^1 \sin(100\pi x) \, dx = 0$.

2. Proporre una formula di quadratura per il calcolo di integrali del tipo

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} f(x^2) \, dx$$

   Successivamante calcolare l'integrale per $f(x) = x \sin(x)$, con $n = 2, 4, 6, \ldots, kmax$, crescente (finché la precisione desiderata $tol = 1.0e - 10$ non sia stata raggiunta, oppure il massimo numero dei nodi consentito $kmax = 128$ non sia stato superato) e confrontare le approssimazioni ottenute con il valore esatto $I = 2^{1/4}\sqrt{\pi(\sqrt{2} + 2)}/16$.

3. Calcolare l'integrale

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{3/2} \, dx$$

   e confrontare il valore ottenuto con il valore esatto $I = 5/(2e) + 3/4\sqrt{\pi}\,(1 - \mathtt{erf}(1))$.

4. Qual è la formula più efficace per calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{P_9(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

   dove $P_9(x)$ è un polinomio di grado 9? Calcolare l'integrale per $P_9(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^2 + 9$ e confrontare il valore ottenuto con il valore esatto $I = 1251\pi/128$.

5. Sono dati i due integrali:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2(x) e^{\sin(2x)} dx = 3.9774632605064206$$

   e

$$I_2 = \int_0^1 \cos^2(x) e^{\sin(2x)} dx = 1.429777221309004$$

(a) Si implementi in linguaggio `Matlab` la formula di quadratura composta basata sul metodo dei trapezi e la si applichi al calcolo dei due integrali con un numero di intervalli pari a $n-1$ (quindi n nodi complessivi), con $n = 2^r$, $r = 1, \ldots, 10$.

(b) Si usi la function `gaussq.m`, disponibile sul portale, per il calcolo degli stessi integrali con la formula di quadratura di Gauss-Legendre con n nodi, $n = 2^r$, $r = 1, \ldots, 10$.

(c) Si confrontino i risultati ottenuti con le due formule di quadratura in forma di tabella.

(d) Si confrontino i grafici degli errori relativi associati ai valori approssimati dell'integrale, ottenuti con le due formule di quadratura, in funzione del numero complessivo di nodi.

(e) Si commentino i risultati ottenuti sulla base delle proprietà di convergenza delle due formule e delle proprietà degli integrali cui vengono applicate.

6. Calcolare l'integrale

$$\int_{\Gamma} e^{x+y}\, ds$$

ove Γ è l'ellisse di equazione $x^2/4 + y^2/9 = 1$ con la formula di quadratura più efficace.