LABORATORIO 11

Argomenti: equazioni differenziali ordinarie

Risolvere i seguenti problemi differenziali che nascono dallo studio dei sistemi biologici.

1. **Modello di crescita Malthusiana.**

   Supponiamo di avere una popolazione di batteri composta al tempo $t = 0$ da P_0 individui. Denotiamo con $P(t)$ la popolazione al tempo t. È verosimile che, per ogni istante t, in un piccolo intervallo temporale dt nasca una quantità di nuovi individui proporzionale alla popolazione e al tempo trascorso dt cioè pari a $n\,P(t)\,dt$, dove n è un numero costante che rappresenta il tasso di natalità. Analogamente ci si aspetta che nel tempo dt muoiano $m\,P(t)\,dt$, dove m è il tasso di mortalità. La popolazione al tempo $t + dt$ sarà quindi pari a:

   $$P(t + dt) = P(t) + n\,P(t)\,dt - m\,P(t)\,dt = P(t) + (n - m)P(t)dt$$

   Abbiamo quindi

   $$\frac{P(t + dt) - P(t)}{dt} = (n - m)P(t)$$

   e sostituendo il rapporto incrementale con la derivata, se si suppone dt molto piccolo, avremo che la popolazione in ogni istante soddisfa il seguente problema di Cauchy:

   $$\begin{cases} P'(t) = CP(t), & t \geq 0, \\ P(0) = P_0, \end{cases}$$

   dove $C = n - m$ rappresenta il fattore di crescita della popolazione ed è detto parametro di crescita malthusiana.

   La soluzione analitica del problema è

   $$P(t) = P_0 e^{Ct}$$

   e, pertanto, la popolazione cresce in modo esponenziale se il tasso di natalità è superiore a quello di mortalità e decresce esponenzialmente nel caso opposto.

2. **Modello di crescita di Verhulst (crescita logistica).**

   Supponiamo che la popolazione di batteri abbia un fattore di crescita C positivo ma sia posto in un ambiente limitato nel quale non possono convivere più di B batteri e supponiamo che inizialmente $P_0 << B$. In questo caso, il cambiamento della popolazione nel tempo sarà proporzionale al numero di batteri preesistenti modulato dal fatto che più di B batteri non possono vivere contemporaneamente: il coefficiente di proporzionalità deve decrescere all'aumentare della popolazione. Il modello differenziale diventa:

   $$\begin{cases} P'(t) = CP(t)\left(1 - \dfrac{P(t)}{B}\right), & t \geq 0, \\ P(0) = P_0, \end{cases}$$

   Si osservi che la crescita si annulla quando $P(t) = B$. Questa equazione è detta equazione logistica di Verhulst e la sua soluzione analitica è

   $$P(t) = \frac{B}{1 + \frac{B - P_0}{P_0} e^{-Ct}}$$

è detta funzione logistica.

Risolvere l'equazione logistica con il metodo di Eulero esplicito per $t \in [0, 20]$, assumendo che il parametro di crescita Malthusiana sia $C = 2$, che non possano vivere più di $B = 100$ individui e che la popolazione iniziale sia di $P_0 = 2$ individui. Ripetere l'esercizio, assumendo gli stessi valori precedentemente considerati per C e per B e scegliendo $P_0 = 200$.

3. **Modello di Lotka-Volterra.**

Supponiamo ora che due popolazioni batteriche $P_1(t)$ e $P_2(t)$ convivano nello stesso ambiente e si influenzino mutuamente. Siano C_1 e C_2 i rispettivi fattori di crescita. Il modello diventa un sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} P_1'(t) = C_1 P_1(t) \left(1 - \dfrac{P_1(t)}{B_1}\right) + d_2 P_1(t) P_2(t), \quad t \geq 0, \\ P_2'(t) = C_2 P_2(t) \left(1 - \dfrac{P_2(t)}{B_2}\right) + d_1 P_1(t) P_2(t) \\ P_1(0) = P_{10} \\ P_2(0) = P_{20}, \end{cases}$$

ove B_1 e B_2 sono legati all'abbondanza dei nutrienti e quindi rappresentano la competizione all'interno di una stessa specie e d_1 e d_2 si riferiscono all'interazione tra popolazioni.

Il primo modello di questo tipo, più semplice, fu ricavato per vie indipendenti da Lotka e da Volterra, e viene detto di Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} P_1'(t) = C_1 P_1(t) + d_2 P_1(t) P_2(t), \quad t \geq 0, \\ P_2'(t) = C_2 P_2(t) + d_1 P_1(t) P_2(t) \\ P_1(0) = P_{10} \\ P_2(0) = P_{20}. \end{cases}$$

Lo studio del sistema dinamico definito da tale sistema di equazioni differenziali consente di individuare tutti i tipi di evoluzione che si possono avere a partire da una qualsiasi situazione iniziale.

Analizzando le equazioni si osserva che sono possibili tre interazioni tra le due specie e queste sono rappresentate dai segni dei coefficienti:

i) cooperazione: $C_1, C_2 < 0$, cioè nessuna delle due popolazioni può sopravvivere da sola, e $d_1, d_2 > 0$, cioè le due popolazioni traggono ciascuna vantaggio della presenza dell'altro;

ii) competizione: $C_1, C_2 > 0$, cioè ciascuna delle due popolazioni crescerebbe se fosse da sola, e $d_1, d_2 < 0$, cioè ciascuna popolazione è danneggiata dalla presenza dell'altro (per esempio, le due popolazioni vivono delle stesse risorse);

iii) preda (P_1) - predatore (P_2): $C_1 > 0$ e $C_2 < 0$, cioè la preda crescerebbe se non ci fosse il predatore e il predatore scomparirebbe in assenza di prede, $d_1 > 0$ e $d_2 < 0$, cioè la presenza della preda avvantaggia il predatore e la presenza del predatore danneggia la preda.

Il sistema presenta due punti di equilibrio, cioè due punti in cui $P_1' = 0$ e $P_2' = 0$ e, quindi, il livello di entrambe le popolazioni rimane costante. Il primo si ha per $P_1 = 0$ e $P_2 = 0$ e rappresenta l'estinzione di entrambe le specie: se le popolazioni hanno 0 individui continueranno ad avere 0 individui in ogni istante successivo. Il secondo si ha per $P_1 = -C_2/d_1$ e $P_2 = -C_1/d_2$ e corrisponde invece alla situazione in cui i predatori incontrano e mangiano, in ogni unità di tempo, un numero di prede esattamente uguale al numero di prede che nascono, e questo numero di prede corrisponde proprio alla soglia critica di cibo che fa rimanere stazionaria la popolazione dei predatori. Il primo punto di equilibrio è instabile, il secondo invece è stabile e il livello dei predatori e delle prede è ciclico e oscilla intorno a questo punto fisso.

Risolvere il problema con il metodo di Eulero esplicito per $t \in [0, 10]$, assumendo $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $d_2 = -1$ e $d_1 = 1$. Scegliere dapprima $P_1(0) = 2$ e $P_2(0) = 2$ e poi $P_1(0) = 1.2$ e $P_2(0) = 1.2$.