

Đồ họa máy tính

Tuần 5: Phương pháp vẽ ellipse



KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

5.1. Phát biểu bài toán

5.2. Phương pháp

5.3. Giải thuật

5.1. Phát biểu bài toán

- Vẽ ellipse dựa vào việc **xác định các điểm** thuộc **phương trình ellipse** trên **lưới tọa độ nguyên**.
- Các điểm vẽ cần thỏa yêu cầu **xấp xỉ tốt nhất**.
- Các điểm vẽ cần thỏa yêu cầu **liên tục trong lân cận 8** của điểm ảnh.
- **Điểm vẽ tại bước $i+1$** được xác định từ **điểm vẽ tại bước i** .

5.1. Phát biểu bài toán

Giới hạn bài toán

- Khảo sát ellipse tâm $O(0, 0)$.
- Khảo sát vẽ cung chắn $\frac{1}{4}$ ellipse.

(do tính đối xứng của đường tròn qua $y=0$, $x=0$)

5.2. Phương pháp

- Tìm hàm lượng giá để xác định điểm vẽ kế tiếp từ điểm vẽ hiện thời.

Xét vùng 1 ($|dy/dx| \leq 1$).

Giả sử tại bước k , ta có điểm (x_k, y_k) .

Tại bước $k+1$, cần chọn 1 trong 2 điểm sau:

$$(x_{k+1}, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}).$$

5.2. Phương pháp

Xét hàm $f_{\text{ellipse}}(x, y) = r_y^2 x^2 + r_x^2 y^2 - r_x^2 \cdot r_y^2$,

$$f_{\text{ellipse}}(x, y) = \begin{cases} < 0 & (x, y) \text{ thuộc miền trong của ellipse} \\ = 0 & (x, y) \text{ thuộc ellipse} \\ > 0 & (x, y) \text{ thuộc miền ngoài của ellipse} \end{cases}$$

Để chọn điểm kế, xét đại lượng $f_{\text{ellipse}}(x, y)$ tại điểm giữa 2 điểm cần chọn:

$$p1_k = f_{\text{ellipse}}(x_k + 1, y_k - \frac{1}{2}) = r_y^2(x_k + 1)^2 + r_x^2(y_k - \frac{1}{2})^2 - r_x^2 \cdot r_y^2 \quad (1)$$

5.2. Phương pháp

Nếu $p_{1k} < 0 \Rightarrow$ Chọn điểm (x_k+1, y_k) .

Nếu $p_{1k} \geq 0 \Rightarrow$ Chọn điểm $(x_k+1, y_k - 1)$.

Cần xác định công thức qui nạp để tính p_k ,

$$P1_{k+1} = f_{\text{ellipse}}(x_{k+1}+1, y_{k+1}-\frac{1}{2}) = r_y^2(x_k+1+1)^2 + r_x^2(y_{k+1}-\frac{1}{2})^2 - r_x^2 \cdot r_y^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$p1_{k+1} = p1_k + 2r_y^2(x_k+1) + r_y^2 + r_x^2 [(y_{k+1}-\frac{1}{2})^2 - (y_k-\frac{1}{2})^2] \quad (3)$$

$$p1_0 = f_{\text{ellipse}}(1, r_y - \frac{1}{2}) = r_y^2 - r_x^2 \cdot r_y + \frac{1}{4} \cdot r_x^2 \quad (4)$$

5.2. Phương pháp

Xét vùng 2 ($|dy/dx| > 1$).

Giả sử tại bước k , ta có điểm (x_k, y_k) .

Tại bước $k+1$, cần chọn 1 trong 2 điểm sau:

$$(x_k, y_k - 1), (x_{k+1}, y_{k+1}).$$

5.2. Phương pháp

Xét vùng 2 ($|dy/dx| > 1$).

Để chọn điểm kế, xét đại lượng $f_{\text{ellipse}}(x, y)$ tại điểm giữa 2 điểm cần chọn:

$$P2_k = f_{\text{ellipse}}(x_k + 1/2, y_k - 1) = r_y^2(x_k + 1/2)^2 + r_x^2(y_k - 1)^2 - r_x^2 \cdot r_y^2 \quad (5)$$

5.2. Phương pháp

Xét vùng 2 ($|dy/dx| > 1$).

Nếu $p_{2k} > 0 \Rightarrow$ Chọn điểm $(x_k, y_k - 1)$.

Nếu $p_{2k} \leq 0 \Rightarrow$ Chọn điểm $(x_k+1, y_k - 1)$.

Cần xác định công thức qui nạp để tính p_{2k} ,

$$P_{2_{k+1}} = f_{\text{ellipse}}(x_{k+1} + \frac{1}{2}, y_{k+1} - 1) = r_y^2 (x_{k+1} + \frac{1}{2})^2 + r_x^2 (y_k - 1 - 1)^2 - r_x^2 \cdot r_y^2 \quad (6)$$

Từ (5) và (6), ta có:

$$p_{2_{k+1}} = p_{2_k} - 2r_x^2 (y_k - 1) + r_x^2 + r_y^2 [(x_{k+1} + \frac{1}{2})^2 - (x_k + \frac{1}{2})^2] \quad (7)$$

$$p_{2_0} = f_{\text{ellipse}}(x_{\text{last}} + \frac{1}{2}, y_{\text{last}} - 1) = r_y^2 (x_{\text{last}} + \frac{1}{2})^2 + r_x^2 (y_{\text{last}} - 1)^2 - r_x^2 r_y^2 \quad (8)$$

5.3. Giải thuật

B1. Nhập bán trục r_x, r_y , tâm C (x_c, y_c).

B2. Vẽ điểm đầu (x_0, y_0) = (0, r_y).

B3. Tính các thông số cơ bản $2 \cdot r_y^2 \cdot x_0$, $2 \cdot r_x^2 \cdot y_0$, $p1_0 = r_y^2 - r_x^2 \cdot r_y + \frac{1}{4} \cdot r_x^2$

B4. $k = 0$

B5. Thực hiện Lặp

B6. Nếu $p1_k < 0$ thì Điểm kế ($x=x_k+1, y=y_k$) và cập nhật

$$2 \cdot r_y^2 x_{k+1} = 2 \cdot r_y^2 x_k + 2 \cdot r_y^2,$$

$$p1_{k+1} = p1_k + 2 \cdot r_y^2 x_{k+1} + r_y^2$$

B7. Nếu $p1_k \geq 0$ thì Điểm kế ($x=x_k+1, y=y_k-1$) và cập nhật

$$2 \cdot r_y^2 x_{k+1} = 2 \cdot r_y^2 x_k + 2 \cdot r_y^2,$$

$$2 \cdot r_x^2 y_{k+1} = 2 \cdot r_x^2 y_k - 2 \cdot r_x^2,$$

$$p1_{k+1} = p1_k + 2 \cdot r_y^2 x_{k+1} - 2 \cdot r_x^2 y_{k+1} + r_y^2$$

B7. Đến khi $2 \cdot r_y^2 x \geq 2 \cdot r_x^2 y$

5.3. Giải thuật

B8. $x_{\text{last}} := x, y_{\text{last}} := y.$

B9. Tính các thông số cơ bản: $2 \cdot r_x^2 \cdot y_{\text{last}}, 2 \cdot r_y^2 \cdot x_{\text{last}},$

$$p2_0 = r_y^2 (x_{\text{last}} + \frac{1}{2})^2 + r_x^2 (y_{\text{last}} - 1)^2 - r_x^2 r_y^2$$

B10. $k = 0$

B11. Thực hiện Lặp

B12. Nếu $p2_k > 0$ thì Điểm kế $(x=x_k, y=y_k-1)$ và cập nhật

$$2 \cdot r_x^2 y_{k+1} = 2 \cdot r_x^2 y_k - 2 \cdot r_x^2,$$

$$p2_{k+1} = p2_k - 2 \cdot r_x^2 y_{k+1} + r_x^2$$

B13. Nếu $p2_k \geq 0$ thì Điểm kế $(x=x_k+1, y=y_k-1)$ và cập nhật

$$2 \cdot r_y^2 x_{k+1} = 2 \cdot r_y^2 x_k + 2 \cdot r_y^2,$$

$$2 \cdot r_x^2 y_{k+1} = 2 \cdot r_x^2 y_k - 2 \cdot r_x^2$$

$$p2_{k+1} = p2_k + 2 \cdot r_y^2 x_{k+1} - 2 \cdot r_x^2 y_{k+1} + r_x^2$$

5.3. Giải thuật

B14. Xác định 3 điểm đối xứng với (x,y) qua các trục $x=0$, $y=0$

B15. Tính tiền 4 điểm vừa xác định theo vectơ gia số (x_c, y_c) .

B16. $k:=k+1$

B16. Đến khi $y = 0$