Phân tích thống kê dữ liệu nhiều biến

PHỤ LỤC: **MATRIX DIFFERENTIATION**

PGS.TS. Lý Quốc Ngọc

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Nội dung

1.Mệnh đề 1

$$y = Ax$$

(mx1) (mxn) x (nx1)

Với A không phụ thuộc x: $\dfrac{\partial y}{\partial x} = A$

Chứng minh: với mỗi phần tử thứ i của y có: $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$

Từ đó suy ra: $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} = a_{ij}$

Với i=1, 2, …, m ; j=1, 2, …, n thì: $\dfrac{\partial y}{\partial x} = A$

2.Mệnh đề 2

$$\alpha = y' Ax$$

(1x1) (1xm) x (mxn) x (nx1)

Với A không phụ thuộc x: $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = y' A$ and $\dfrac{\partial \alpha}{\partial y} = x' A'$

Chứng minh:

$$\frac{\partial (y' A)x}{\partial x} = y' A$$

$$\frac{\partial (y' Ax)}{\partial y} = \frac{\partial (x' A')y}{\partial y} = x' A'$$

Nội dung

3.Mệnh đề 3

$$\alpha = x' A x$$

(1x1) (1xn) x (nxn) x (nx1)

Với A không phụ thuộc x: $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = x'(A + A')$

Chứng minh:

Ta có: $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

Xét phân tử thứ k của x: $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j$

Với k=1, 2, …, n thì: $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = x' A' + x' A = x'(A + A')$

3.Mệnh đề 4

$$\alpha = x' A x$$

(1x1) (1xn) x (nxn) x (nx1)

Với A đối xứng, không phụ thuộc x: $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = 2x' A$

Nội dung

3.Mệnh đề 5

$$\frac{\partial |X|}{\partial x_{ij}} = X_{ij} \text{ if all elements of } X \text{ (nxn) are distinct}$$

$$= \begin{Bmatrix} X_{ii}, i = j \\ 2X_{ij}, i \neq j \end{Bmatrix} \text{if } X \text{ is symmetric}$$

X_{ij} is the (i, j)th cofactor of X

3.Mệnh đề 6

$$\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} = -X^{-1} J_{ij} X^{-1} \text{ if all elements of } X \text{ (nxn) are distinct}$$

$$= \begin{Bmatrix} -X^{-1} J_{ii} X^{-1}, i = j \\ -X^{-1}(J_{ij} + J_{ji}) X^{-1}, i \neq j \end{Bmatrix} \text{if } X \text{ is symmetric}$$

J_{ij} *d*enotes a matrix with a 1 in the (i, j)th place and zeros elsewhere.

Nội dung

3.Mệnh đề 7

$$\frac{\partial trXY}{\partial X} = Y' \text{ if all elements of } X \text{(nxn) are distinct}$$

$$= Y + Y' - Diag(Y) \text{ if } X \text{(nxn) is symmetric}$$

J_{ij} denotes a matrix with a 1 in the (i, j)th place and zeros elsewhere.