

Xử lý ảnh số và video số

Tuần 7: Phép biến đổi Fourier

TS. Lý Quốc Ngọc



KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

7. Phép biến đổi Fourier

7.1. Cơ sở lý thuyết

7.2. Phép biến đổi Fourier rời rạc

7.3. Ứng dụng

7. Phép biến đổi Fourier

7.1. Cơ sở lý thuyết

Một số khái niệm cơ bản

- Spatial frequency
- Chuỗi Fourier
- Phép biến đổi Fourier

7. Phép biến đổi Fourier

Spatial frequency

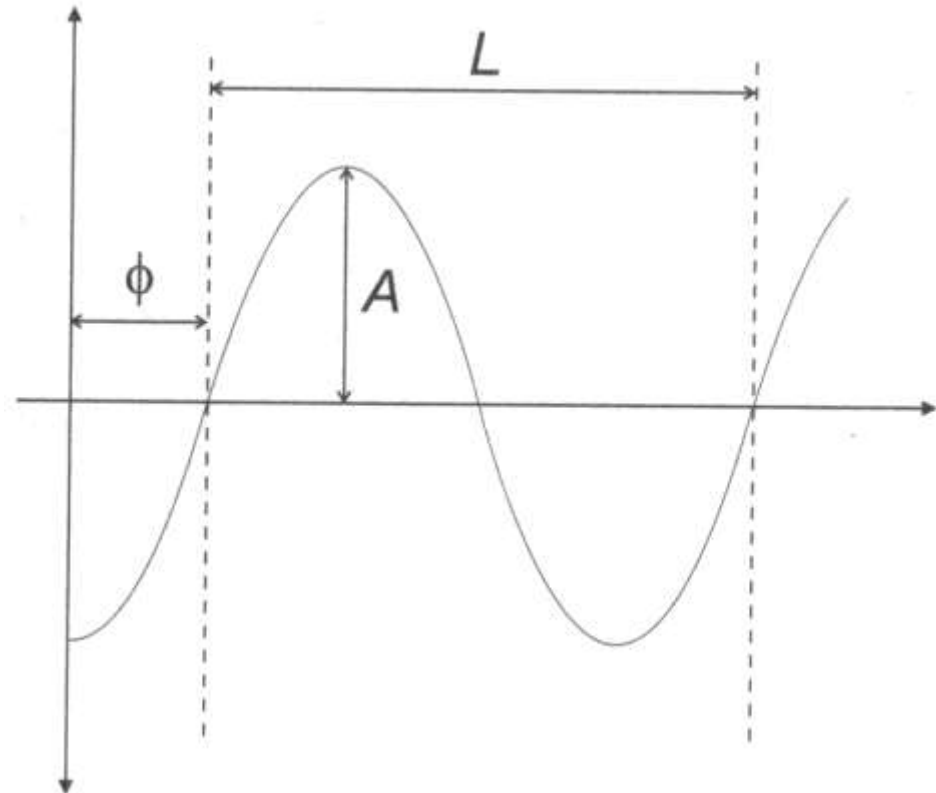
-Hàm tuần hoàn hình Sin, có

Chu kỳ: L

Tần số: $1/L$

Biên độ: A

Pha: Φ



7. Phép biến đổi Fourier

Spatial frequency

Ví dụ: $f(x, y) = 128 + A \sin\left(\frac{2\pi ux}{N-1} + \phi\right)$

- Mean grey level: 128
- Amplitude $A \in [1, 127]$
- N: width of image (pixels)
- u: spatial frequency (number of cycles of sinusoid that fits in the width of image) (dividing by N -> spatial frequency in units of cycles per pixel).

- Φ : Pha

7. Phép biến đổi Fourier

Spatial frequency

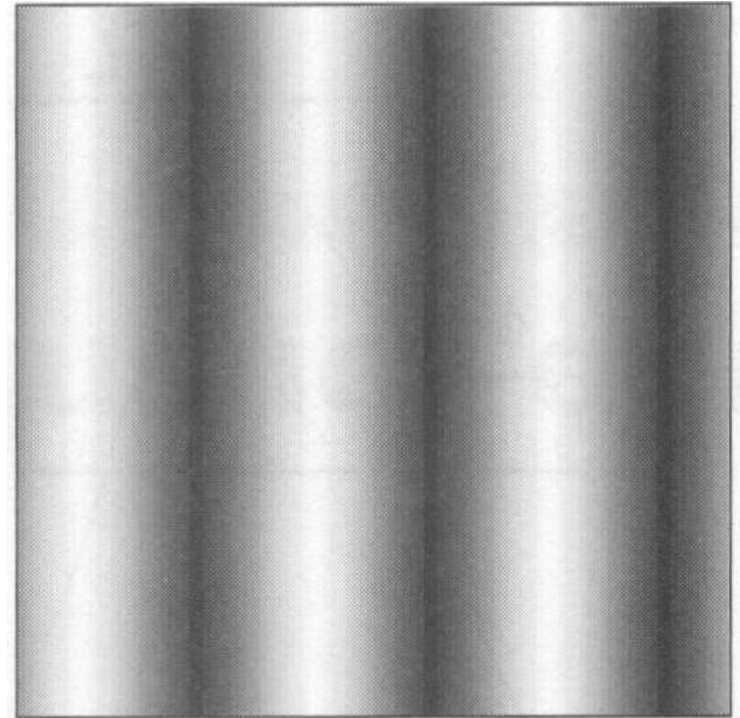
Ví dụ: $f(x, y) = 128 + A \sin\left(\frac{2\pi ux}{N-1} + \phi\right)$

- $A=127$

- $N=100$

- $u=3$

- $\Phi=0$



7. Phép biến đổi Fourier

Spatial frequency

Hình (a)

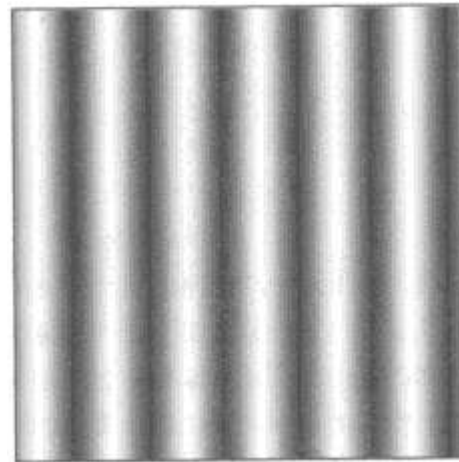
$$u=6$$

Hình (b)

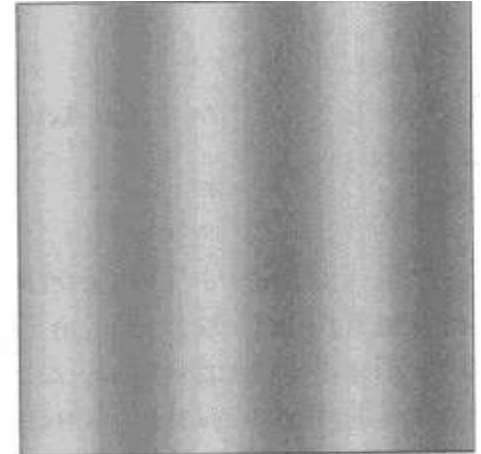
Giảm A khoảng 60%

Hình (c)

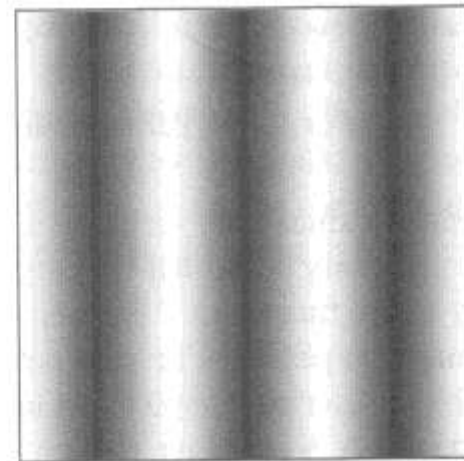
$$\Phi=\pi/2$$



(a)



(b)



(c)

7. Phép biến đổi Fourier

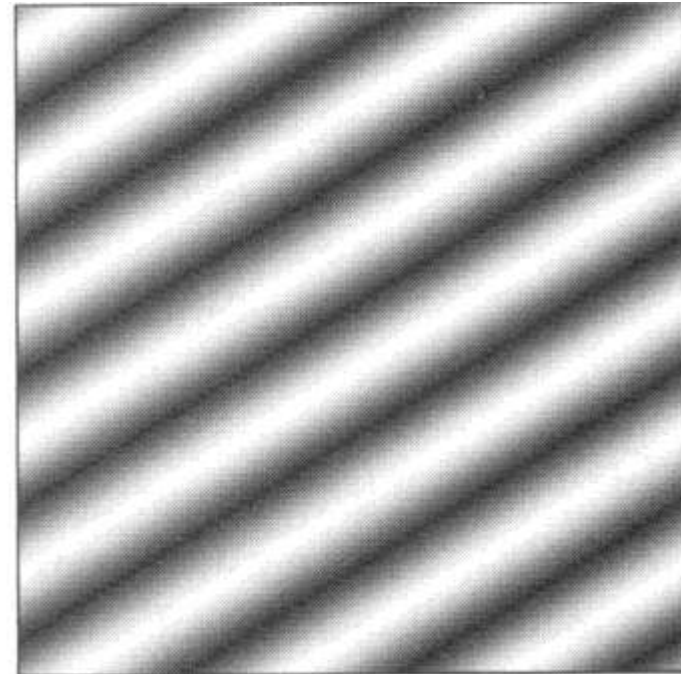
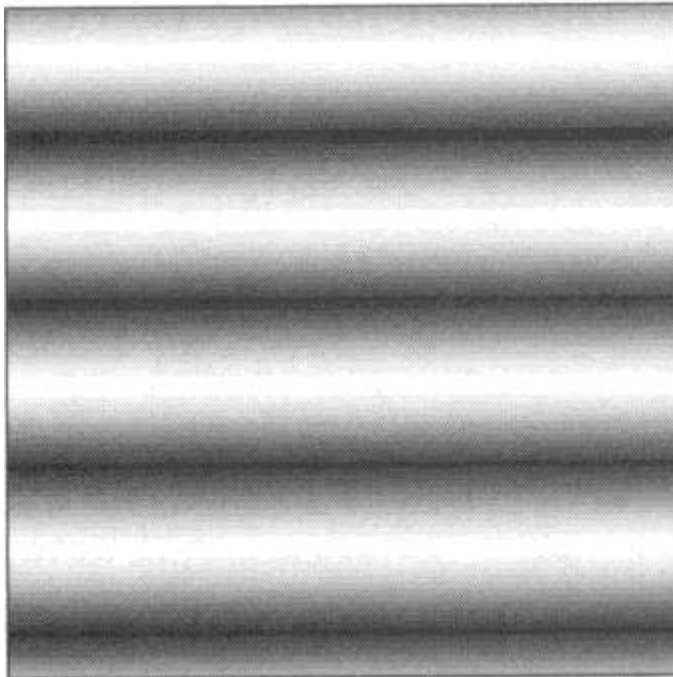
Spatial frequency

Hình (a)

$u=0, v=4$

Hình (b)

$u=3, v=5$



7. Phép biến đổi Fourier

Chuỗi Fourier (Jean Baptiste Joseph Fourier)

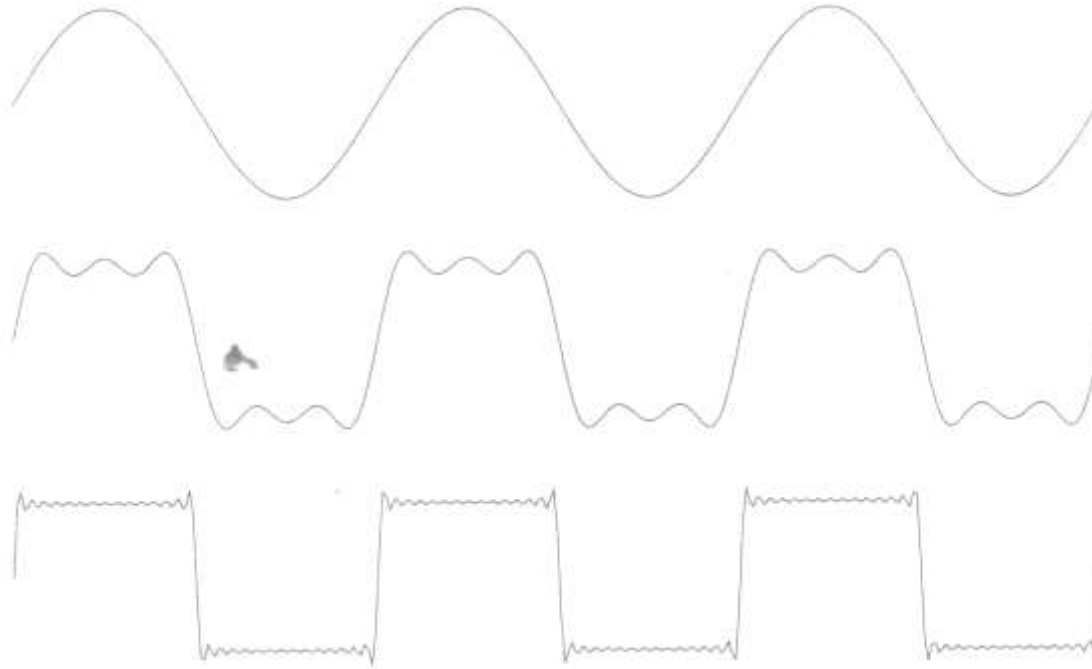
Hàm tuần hoàn có thể được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các hàm cơ sở sinusoids.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \end{aligned}$$

Period: L , Frequency: n

7. Phép biến đổi Fourier

Chuỗi Fourier (Jean Baptiste Joseph Fourier)



Chuỗi Fourier gồm các hàm cơ sở sin

(a) 1 hàm (b) 3 hàm (c) 15 hàm cơ sở

7. Phép biến đổi Fourier

Chuỗi Fourier (Jean Baptiste Joseph Fourier)

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{u,v} \cos\left(\frac{2\pi(ux + vy)}{L}\right) + b_{u,v} \sin\left(\frac{2\pi(ux + vy)}{L}\right)$$

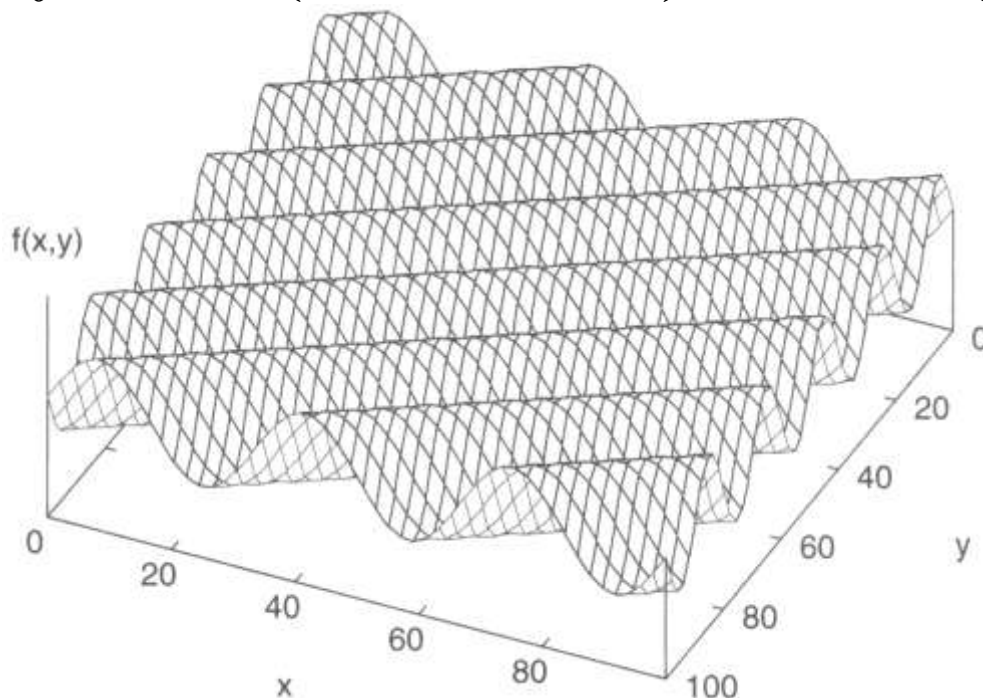
u, v : số chu kỳ trong khoảng chiều dài L .

7. Phép biến đổi Fourier

Chuỗi Fourier (Jean Baptiste Joseph Fourier)

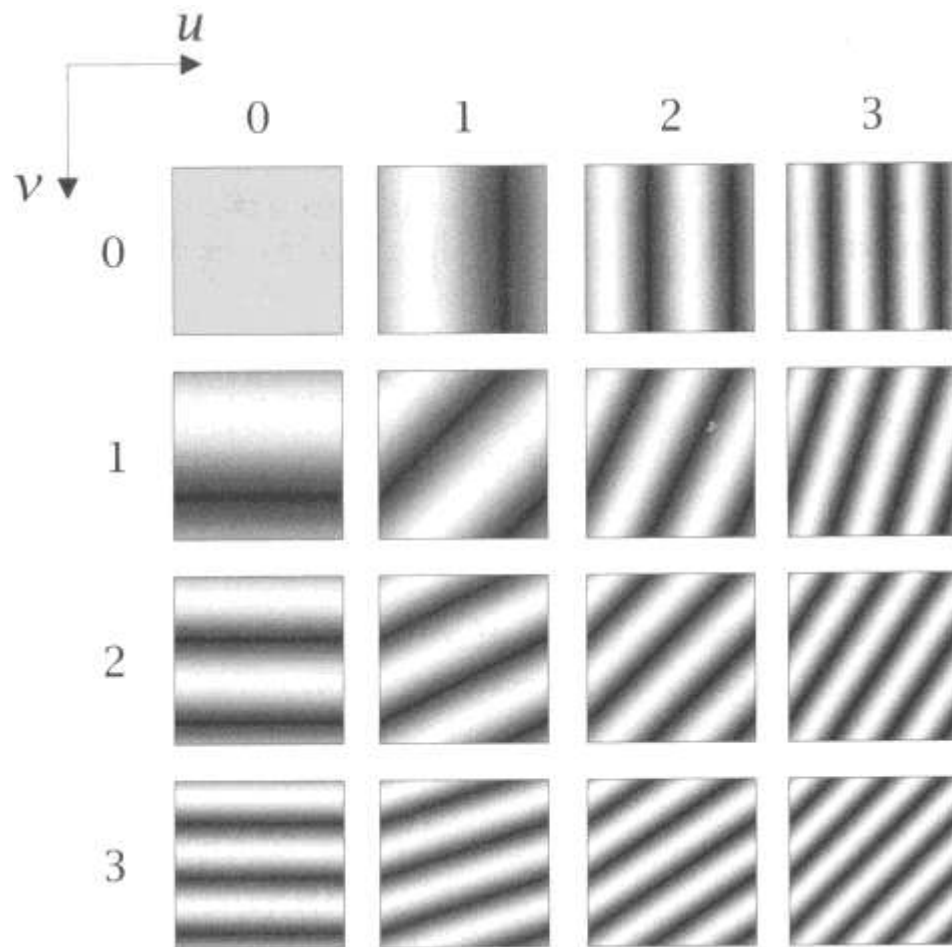
$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{u,v} \cos\left(\frac{2\pi(ux + vy)}{L}\right) + b_{u,v} \sin\left(\frac{2\pi(ux + vy)}{L}\right)$$

$u=3, v=5$



7. Phép biến đổi Fourier

Chuỗi Fourier (Jean Baptiste Joseph Fourier)



Các ảnh cơ sở trong
phép khai triển Fourier
của ảnh

7. Phép biến đổi Fourier

Phép biến đổi Fourier thuận

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy$$

Phép biến đổi Fourier ngược

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) e^{2\pi i(xu+yv)} du dv$$

7. Phép biến đổi Fourier

Các đại lượng cơ bản

Phép biến đổi Fourier của hàm thực $f(x,y)$

$$F(u, v) = R(u, v) + i.I(u, v)$$

Phổ tần số

$$|F(u, v)| = (R^2(u, v) + I^2(u, v))^{1/2}$$

Pha

$$\phi(u, v) = \arctan[(I(u, v) / R(u, v))]$$

7. Phép biến đổi Fourier

Tính chất quan trọng

Định lý Convolution

$$\zeta \{(f * h)(x, y)\} = F(u, v).H(u, v)$$

$$\zeta \{f(x, y).h(x, y)\} = (F * H)(u, v)$$

7. Phép biến đổi Fourier

Phép biến đổi Fourier thuận rời rạc

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right)}$$

$$u = 0, 1, \dots, M-1 \quad v = 0, 1, \dots, N-1$$

Phép biến đổi Fourier ngược rời rạc

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right)}$$

$$x = 0, 1, \dots, M-1 \quad y = 0, 1, \dots, N-1$$

7. Phép biến đổi Fourier

Tính chất quan trọng

DC component of spectrum

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

Symmetric

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

7. Phép biến đổi Fourier

Tính chất quan trọng

Định lý Convolution

$$\zeta \{ (f * h)(x, y) \} = F(u, v) \cdot H(u, v)$$

$$\zeta \{ f(x, y) \cdot h(x, y) \} = (F * H)(u, v)$$

7. Phép biến đổi Fourier

- Lọc thông các thành phần tần số thấp
- Lọc thông các thành phần tần số cao