

Capítulo 9

Introducción al control estadístico de procesos

-
1. Fundamentos de los gráficos de control
 2. Gráfico de control para la media
 3. Gráficos de control para la dispersión
 4. Capacidad de un proceso. Índice de capacidad
 5. Gráficos P y NP
 6. Muestreo de recepción: Plan Military Standard
-

⁰Apuntes realizados por Ismael Sánchez. Universidad Carlos III de Madrid.

9.1. Fundamentos de los gráficos de control

9.1.1. Variabilidad de un proceso

Un proceso industrial, ya sea destinado a producir un artículo o prestar un servicio, es una sucesión de operaciones, en cada una de las cuales se va añadiendo valor al producto (o servicio) intermedio hasta lograr el producto final. Estas operaciones intermedias también admiten, a su vez, la denominación de procesos. Por ejemplo, desde que marcamos un número de teléfono hasta que el destinatario recibe la llamada se produce una sucesión de procesos intermedios: la red ha de detectar que queremos realizar una llamada, se ha de traducir nuestra marcación en un número de teléfono concreto, se ha de localizar el destino en la red, se ha de buscar la ruta que seguirá la señal, etc. A los efectos que nos interesan en este tema, denominaremos proceso a un determinado conjunto de operaciones que añaden valor a un producto o servicio y cuyo resultado estamos interesados en controlar.

Nuestro interés está en controlar la calidad del valor añadido en un proceso. Para ello, usaremos una o varias magnitudes que sean indicadores de dicha calidad. Esas magnitudes dependerán de cada caso concreto: tiempos, voltajes, resistencias de rotura, dimensiones, durezas, etc.

Cualquier proceso está sujeto a la influencia de muchos factores no controlados, y por tanto a variabilidad en el resultado final. De esta forma, si repetimos el conjunto de operaciones que forman el proceso, el resultado será en general diferente sin que ello implique que esté sucediendo nada anómalo. Así, si repetimos un proceso en condiciones de funcionamiento homogéneas, las magnitudes que estemos utilizando para monitorizar el proceso no darán siempre el mismo valor. Si, por ejemplo, repetimos la acción de llamar a un mismo número de teléfono, el tiempo transcurrido hasta que se establece la conexión será en general diferente. Esta variabilidad en el resultado final está presente en todos los procesos productivos y ha de tenerse en cuenta a la hora de controlar dicho proceso. Utilizando léxico estadístico, **podemos interpretar un proceso como un experimento aleatorio**, donde la variable respuesta es la magnitud que nos describe la calidad del proceso. Los factores que no controlamos y que hacen que las sucesivas repeticiones del proceso den resultados diferentes, serán lo que hemos venido denominando el azar. Entonces **la magnitud que controlamos puede interpretarse como una variable aleatoria**. El valor numérico concreto que obtenemos al ejecutar el proceso es sólo una realización de dicha variable aleatoria.

En este tema nos ocuparemos en monitorizar un proceso teniendo en cuenta dicha variabilidad inevitable. Para ello haremos el seguimiento en el tiempo de magnitudes que nos interesen y que estén relacionadas con la calidad. La idea principal que hay detrás de este seguimiento, es que si los factores que producen la variabilidad no se alteran, las magnitudes que monitorizemos serán variables aleatorias de distribución estable y reconocible. De esta forma, si en algún momento se produce algún cambio no deseado, o algún desajuste, dicha variabilidad cambiará y podremos detectar el desajuste.

Además de la variabilidad intrínseca del proceso debida a factores no controlados (azar), el sistema de medida de las características de interés también estará sujeto a variabilidad, pues no existe el sistema de medición perfecto. La variabilidad *detectada* es, así, la suma de la variabilidad *real* más la variabilidad de la *medición*. Un esquema útil para resumir los distintos factores que

provocan variabilidad en un proceso es el siguiente (esquema de las 6 Ms):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Materia prima} \\ \text{Métodos de producción} \\ \text{Mano de obra} \\ \text{Máquinas} \\ \text{Medio ambiente} \\ \text{Medición} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Variabilidad en el producto final}$$

9.1.2. Comportamiento esperado de un proceso en estado de control

Si consiguiésemos controlar todos los factores que afectan a nuestro producto, éste sería siempre igual, y las magnitudes que usásemos para monitorizar la calidad tendrían siempre el mismo valor constante. En la práctica siempre habrá factores que no podremos controlar, por lo que el producto final tendrá una **calidad variable**. Por tanto, cuando se habla de **controlar la calidad** nos estamos refiriendo a **controlar la variabilidad de esa calidad**. Aunque no se puede dar una relación exhaustiva de las causas que provocan la variabilidad, es interesante hacer una clasificación entre causas asignables a factores concretos (y controlables) y causas no asignables (y por tanto no controlables). No obstante, la frontera entre ambas no estará, en general, perfectamente definida.

- **Causas asignables:** serán aquellas producidas por **factores importantes**, los cuales queremos y podemos controlar para mantenerlos en un **nivel aceptable e invariable**. Como puede verse, la definición tiene un alto grado de imprecisión, pues la declaración de *factor importante* o de nivel de control *aceptable* dependerá forzosamente de cada caso concreto. La idea clave, sin embargo, es que sobre una causa asignable se tiene un control suficiente, de manera que cuando ésta cambia, el nivel de calidad del producto puede ser no aceptable. Por ejemplo, si la temperatura afecta al rendimiento de un proceso químico, la variación de la temperatura será una causa de variabilidad asignable. Por contra, en una planta de embalaje, la temperatura ambiente no será en general una causa asignable, pues al variar no tiene por qué alterarse la calidad del empaquetamiento.
- **Causas no asignables:** son aquellas producidas por **factores secundarios** cuyo efecto se considera poco relevante para el proceso. También pueden venir provocadas por factores importantes que varían de forma poco significativa. Una causa no asignable produce una variabilidad en la calidad que la organización está dispuesta a asumir, y por tanto no intentará actuar sobre ella.

Si las causas no asignables son las que se asumen como inevitables, ellas serán las que determinan el carácter aleatorio de las magnitudes que se analizan en el control estadístico. **La variabilidad debida a causas no asignables determina, por tanto, la calidad final que la organización desearía para toda su producción.** A continuación se muestra un esquema que resume las distintas características de estos dos tipos de causas de variabilidad.

| Causas no asignables | Causas asignables |
|--|---|
| Suelen ser muchas e incluso desconocidas | Suelen ser pocas y fáciles de identificar |
| Cada una produce poca variabilidad | Sus efectos son importantes |
| Son parte permanente e inherente del proceso | Aparecen esporádicamente y se detectan fácilmente |
| Su eliminación es difícil y es responsabilidad de la dirección | Son fáciles de eliminar |
| Afectan a todo el proceso | Actúan en un punto concreto del proceso |

Lo dicho hasta ahora puede resumirse de la siguiente manera:

1. Aunque un proceso se encuentre bajo condiciones óptimas de funcionamiento siempre tendrá una producción de calidad variable.
2. Si el proceso se encuentra realmente bajo condiciones óptimas de funcionamiento, la variabilidad será debida sólo a causas no asignables y ha de ser, por tanto, asumida por la organización.

El control del proceso se hará mediante el control de su variabilidad. Más concretamente, consistirá en **controlar si la variabilidad observada es la que se espera si sólo actuaran causas no asignables**. El control de un proceso es por tanto una tarea que se resolverá utilizando la estadística. El control de un proceso a través del control de su variabilidad es lo que se denomina **control estadístico de procesos** (o Statistical Process Control -SPC-). Si bien la aplicación del SPC es una tarea estadística su definición es una decisión estratégica. Este carácter estratégico viene determinado precisamente por el conjunto de causas de variabilidad no asignables que se mencionaron anteriormente. Es tarea de la dirección de la organización determinar qué factores está dispuesta a controlar y cuáles no controlará. De los factores controlados, la dirección debe especificar qué niveles de variabilidad está dispuesta a aceptar. Al hacer esto, la dirección está definiendo la calidad final que tendrá su producto. La labor del SPC será, en esencia, asegurar que el producto final tenga esa calidad deseada.

Se define proceso en estado de control como aquel proceso en el que sólomente actúa un sistema estable de causas de variabilidad (causas no asignables) y cuya calidad final es, en consecuencia, predecible estadísticamente (Shewart).

La calidad del producto final será, entonces, inversamente proporcional a esta variabilidad. Esta variabilidad conseguida en estado de control es medida, usualmente, a través de la varianza de la variable que se emplee para caracterizar la calidad. Supondremos en este capítulo que dichas variables son cuantitativas, tales como longitudes, pesos, tiempos, etc. Si la variabilidad de estas variables sólo procede de causas asignables, será muy razonable esperar que su distribución se aproximará en gran medida a la normal. Esta aproximación a la normal puede justificarse mediante el teorema central del límite. **Las causas asignables serán muy numerosas y cada una de ellas tendrá una aportación muy pequeña a la variabilidad final, por lo que su superposición se aproximará, en general, a la normal.** Si la característica considerada sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ cuando el proceso está bajo control, el 99,73 % ($\approx 99,7\%$) de los artículos se encontrará en un intervalo de amplitud 6σ ($\mu \pm 3\sigma$). Por tanto, en estado de control, sólo una minoría de los artículos (3 de cada mil, o más exactamente 2.7 de cada mil) estará fuera de este intervalo. Este intervalo ($\mu \pm 3\sigma$) constituye, por tanto, un intervalo de tolerancia natural o intrínseca del proceso al comprender prácticamente a la totalidad de los artículos fabricados en condiciones de control.

Un artículo puede, por tanto, estar fuera de este intervalo $\mu \pm 3\sigma$ por dos razones:

- Porque haya ocurrido una causa asignable que ha modificado la característica del artículo de forma significativa. Diremos entonces que **el proceso está fuera de control**. Por ejemplo, en el caso de los cilindros cuya longitud interesa controlar, puede ser que haya disminuido la temperatura de los cilindros por un error en el sistema que controla la temperatura. Esta menor temperatura aumenta la dureza del metal, lo que se traduce en unas peores propiedades

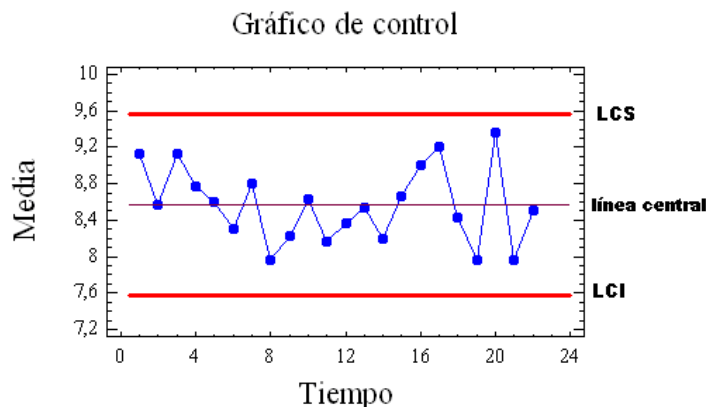
mecánicas para ser cortado y una mayor dispersión en las longitudes finales. Es necesario, entonces, reparar el sistema para recuperar el control del proceso.

- El proceso está bajo control, pero el azar ha querido que la variabilidad no asignable sea alta. Por ejemplo, en el caso de los cilindros, puede ser que casualmente la vibración en el momento del corte sea mayor de lo normal, y puede que justo ocurra en un cilindro en el que hay una composición microscópica que le confiere, por azar, una dureza algo mayor; y que por azar eso sucede cuando la máquina es manejada por un operario que está algo más distraído de lo normal. En ningún momento se puede hablar de desajustes que sean necesario investigar y reparar.

Como la probabilidad de que un artículo se encuentre fuera de dicho intervalo en estado de control es realmente baja (0.3 %, o tres de cada mil) será más prudente suponer que la razón de estar fuera del intervalo $\mu \pm 3\sigma$ se debe a la primera de las razones expuestas: la aparición de una causa asignable, por lo que se dará la alarma y se pondrán en marcha los mecanismos para detectar las causas y devolver al proceso al estado de control. Con este procedimiento hay, por tanto, una probabilidad del 0.3 % de dar una falsa alarma (o más exactamente, el 0.27 %).

9.1.3. Gráficos de control

Un gráfico de control es la representación de la evolución temporal de una característica de la calidad del producto o servicio de interés. La figura siguiente muestra un ejemplo de este tipo de gráficos.



Los elementos básicos son la **línea central**, que representa el nivel medio de dicha característica, y los límites de control: **límite de control superior** o **LCS** y **límite de control inferior** o **LCI**. La utilización del gráfico de control es, en principio, bastante simple: si el proceso está bajo control (sólo actúan causas de variabilidad no asignables), la práctica totalidad de las observaciones representadas estarán dentro de dichos límites de control, mientras que si el proceso está fuera de control (está actuando alguna causa asignable) las observaciones caerán, con mucha probabilidad, fuera de dichos límites. Las observaciones suelen corresponder a mediciones realizadas sobre muestras de artículos: valores medios, desviaciones típicas, rangos, etc; aunque también existen gráficos realizados sobre observaciones individuales. Estas mediciones se realizan a lo largo

del tiempo, por lo que **el gráfico de control es una evolución temporal de la calidad**. Los puntos representados se unen por líneas para visualizarlo mejor.

A pesar de su aparente simplicidad, la interpretación del gráfico de control ha de ser hecha con cierta cautela. Como veremos más adelante, incluso si todos los puntos están dentro de los límites de control, es posible que el proceso esté fuera de control.

Sea τ el estadístico que se utiliza para medir la variable de interés (estadístico: función de los datos que no depende de las características de la población, como la media muestral, varianza muestral, rango muestral...). Por ejemplo, supongamos una muestra de n clientes a los que se tarda en prestar un servicio unos tiempos t_1, t_2, \dots, t_n . La media aritmética de dichos tiempos es un estadístico que se puede usar como indicador de la calidad de dicho servicio. Tendríamos entonces que la magnitud que representaríamos en el gráfico es

$$\tau = \bar{t} = \frac{t_1 + \dots + t_n}{n},$$

para sucesivas muestras de n individuos. Dicho estadístico τ será una variable aleatoria, pues su valor depende de los n individuos concretos que analicemos. El gráfico de control será, por tanto, la representación de sucesivas realizaciones de la variable aleatoria τ . Sea μ_τ el valor medio de dicho estadístico (es decir $E(\tau) = \mu_\tau$) y sea σ_τ su desviación típica (es decir, $\text{Var}(\tau) = \sigma_\tau^2$). La estructura de un gráfico de control es la siguiente

| | | |
|----------------------------------|---|------------------------------|
| Límite de control superior (LCS) | = | $\mu_\tau + L_s \sigma_\tau$ |
| Línea central | = | μ_τ |
| Límite de control inferior (LCI) | = | $\mu_\tau - L_i \sigma_\tau$ |

donde L_s y L_i son las distancias de los límites de control a la línea central en términos de la desviación típica del estadístico que se emplea. En general, se emplea la misma distancia para el límite superior e inferior, es decir, $L_s = L_i = L$. La idea es elegir L de tal manera que si el proceso está bajo control sea muy probable que la evolución de τ se desarrolle dentro de los límites, pero que si el proceso sale de control aumente la probabilidad de que τ se coloque fuera de dichos límites y se pueda así dar una señal de alarma. Si L es muy alto, será muy poco probable que, si el proceso está en estado de control, las observaciones estén fuera de los límites; es decir, una falsa alarma será muy poco probable. Sin embargo, si el proceso está fuera de control por poco margen, sería muy difícil detectarlo. Por el contrario, si L es muy bajo, será muy probable detectar que el proceso está fuera de control, pero será también muy probable dar falsas alarmas. Usualmente, se elige $L = 3$. La principal razón para justificar el valor $L = 3$ es que, en el caso en que el estadístico τ utilizado siga una distribución normal, o razonablemente aproximada, el intervalo de $\mu_\tau \pm 3\sigma_\tau$ corresponderá con el 99,7% de la población, como ya se vió en el tema anterior. Por tanto, bajo normalidad y si el proceso está bajo control, la práctica totalidad de las observaciones estarán dentro de dicho límites. Existe, no obstante, una probabilidad de 0.003 (0.3%) de que se esté fuera de los límites sin estar fuera de control. En ese caso se estaría dando una falsa alarma. La utilización de $L = 3$ ha proporcionado muy buenos resultados en la vida real, por lo que su uso es bastante general.

La forma más general de gráfico de control es, por tanto,

| | | |
|---------------|---|---------------------------|
| LCS | = | $\mu_\tau + 3\sigma_\tau$ |
| Línea central | = | μ_τ |
| LCI | = | $\mu_\tau - 3\sigma_\tau$ |

(9.1)

De esta forma, si las causas de variabilidad se mantienen estables, la distribución de τ no cambiará (la media será siempre μ_τ y la varianza σ_τ^2). Los distintos valores observados de τ serán

debidos sólo a la variabilidad muestral y, en el caso de τ normal, estarán entre los límites con probabilidad 0.997. Sin embargo, si se produce un desajuste en el proceso que haga cambiar la media μ_τ y/o la varianza σ_τ^2 la evolución de τ será diferente, y empezará a tomar valores fuera de los límites con mucha mayor probabilidad.

9.2. Gráfico de control para la media

El gráfico de control de la media, también llamado Gráfico \bar{X} , recoge la evolución de la media muestral, en muestras de tamaño n , de la característica de calidad de interés. Por ejemplo, el tiempo medio de atención a un cliente tomando muestras de 10 clientes, o el radio medio de un cilindro, tomando muestras de 20 cilindros. Supondremos en este capítulo que dicha media muestral \bar{X} sigue una distribución normal. Si la variable de interés X sigue una distribución normal, la media muestral \bar{X} será también normal. Si la variable original no es normal, pero n es elevado, por el teorema central del límite \bar{X} será aproximadamente normal. Existen, además, transformaciones que permiten convertir una variable aleatoria continua asimétrica en una variable que se aproxime razonablemente a la normal. Por otra parte, si el proceso está en estado de control, es muy razonable esperar que la variable de interés sea normal (¿por qué?). Por esta razón, la construcción de los gráficos \bar{X} se realiza suponiendo que la media muestral sigue una distribución normal. Por tanto, las propiedades de nuestra media muestral serán:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

donde μ y σ^2 son la media y varianza, respectivamente, de la variable de interés X cuando la variabilidad procede sólo de causas no asignables, es decir, **cuando el proceso está bajo control**. Bajo esta hipótesis, un intervalo que comprenda al 99.7 % de la probabilidad estará comprendido en $\mu \pm 3\sigma/\sqrt{n}$. El gráfico de control tendrá las siguientes características:

| | |
|---|-------|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{Línea central} &= \mu \\ \text{LCI} &= \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$ | (9.2) |
|---|-------|

Se ha de estimar, por tanto, los parámetros μ y σ . **Para estimarlos se toman muestras de la producción (o prestación del servicio) durante un periodo prolongado de tiempo en el que se sepa que el proceso está bajo control.** Una vez que se ha construido el gráfico, éste se utilizará en primer lugar para comprobar que realmente el proceso estuvo bajo control mientras se recogía esta información inicial. En caso contrario se ha de prescindir de aquellas muestras en las que el proceso no estuvo bajo control y se repetirá el cálculo del gráfico. En la utilización de los gráficos de control hay que distinguir, entonces, dos etapas:

1. Contrucción de los gráficos, utilizando la información contenida en un conjunto de muestras iniciales.
2. Una vez construido el gráfico, se representa la evolución de las muestras obtenidas en tiempo real, y se controla así el proceso. El gráfico no se vuelve ya a modificar, salvo que haya transcurrido mucho tiempo y se quieran actualizar sus límites

El periodo de tiempo en el que se tomen los datos iniciales para la etapa de construcción del gráfico debe ser lo suficientemente amplio para permitir que haya cambios de turno, variabilidad en la materia prima, horas punta del servicio y horas valle, etc. La estimación de los parámetros será, además, una tarea que ha de someterse a revisión periódica. Veamos a continuación cómo ha de hacerse la estimación de μ y σ .

9.2.1. Estimación de los parámetros del gráfico \bar{X}

Sea X la variable que mide la calidad de los artículos producidos, o uno de los aspectos de la calidad que nos interese. Supongamos que se recogen un total de k muestras a intervalos regulares de tiempo y en cada muestra hay n elementos. Sea x_{ij} el valor del elemento j -ésimo ($j = 1, \dots, n$) de la muestra i -ésima ($i = 1, \dots, k$). El conjunto total de datos será:

$$\underbrace{(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1j}, \dots, X_{1n})}_{\text{muestra 1}}, \dots, \underbrace{(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ij}, \dots, X_{in})}_{\text{muestra } i\text{-ésima}}, \dots, \underbrace{(X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{kj}, \dots, X_{kn})}_{\text{muestra } k}.$$

Si el proceso estuviese bajo control durante toda la recogida de estos nk datos, éstos constituirían una muestra aleatoria simple (de tamaño nk) de una población normal $N(\mu, \sigma^2)$. El gráfico se construye, entonces, de la siguiente manera:

1. **Se calcula la media y varianza de cada muestra.** Por ejemplo, para los n datos de la primera muestra:

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 &= \frac{\sum_{j=1}^n X_{1j}}{n}, \\ S_1^2 &= \frac{\sum_{j=1}^n (X_{1j} - \bar{X}_1)^2}{n}, \\ \hat{S}_1^2 &= \frac{\sum_{j=1}^n (X_{1j} - \bar{X}_1)^2}{n-1}.\end{aligned}$$

Se tendrán, por tanto, k medias y k varianzas.

2. **Se calcula la media total.** La media total será:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{X}_i}{k}.$$

Este estimador será centrado si la media μ del proceso ha sido constante durante la recogida de la información. Sin embargo, puede demostrarse que los estimadores S_1 y \hat{S}_1 no son estimadores insesgados de σ aun estando el proceso bajo control ($E(S_1) \neq \sigma$; $E(\hat{S}_1) \neq \sigma$). El sesgo depende, además, del tamaño de la muestra n . No obstante, el sesgo para poblaciones normales está tabulado (ver apéndice). La desviación típica muestral s es una variable aleatoria que verifica

$$E(S_j) = c_2 \sigma, \quad (9.3)$$

donde los valores de c_2 están tabulados para distintos tamaños muestrales. Por tanto se tiene que

$$\sigma = \frac{E(S_j)}{c_2},$$

Podremos construir un estimador insesgado de σ promediando los estimadores S_j (y así estimar $E(S_j)$) y dividiendo por c_2 , obteniendo :

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_2}, \quad (9.4)$$

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^k S_i}{k}. \quad (9.5)$$

Otra posible opción sería utilizar un estimador insesgado para la varianza de cada muestra. Por ejemplo, para la muestra 1:

$$\hat{S}_1 = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_{1j} - \bar{X}_1)^2}{n-1}},$$

en lugar de S_1 . Este estimador verifica que

$$E(\hat{S}_j) = c_4 \sigma, \quad (9.6)$$

$$\text{Var}(\hat{S}_j) = (1 - c_4^2) \sigma^2, \quad (9.7)$$

donde c_4 está tabulado en función de n . Por tanto,

$$\sigma = \frac{E(\hat{S}_j)}{c_4}.$$

Un estimador insesgado de σ será

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{S}_T}{c_4}, \quad (9.8)$$

$$\hat{S}_T = \frac{\sum_{i=1}^k \hat{S}_i}{k}. \quad (9.9)$$

El análisis realizado con este procedimiento no es muy distinto al que se realice utilizando S_j y el correspondiente coeficiente c_2 . Si utilizamos \hat{S}_j para medir la desviación típica de cada muestra, el gráfico de control teórico para la media será

| | |
|---|--------|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \mu + 3 \frac{E(S_j)}{c_2 \sqrt{n}} \\ \text{Línea central} &= \mu \\ \text{LCI} &= \mu - 3 \frac{E(S_j)}{c_2 \sqrt{n}} \end{aligned}$ | (9.10) |
|---|--------|

y el estimado

| | |
|---|--------|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\bar{s}}{c_2 \sqrt{n}} \\ \text{Línea central} &= \bar{\bar{x}} \\ \text{LCI} &= \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\bar{s}}{c_2 \sqrt{n}} \end{aligned}$ | (9.11) |
|---|--------|

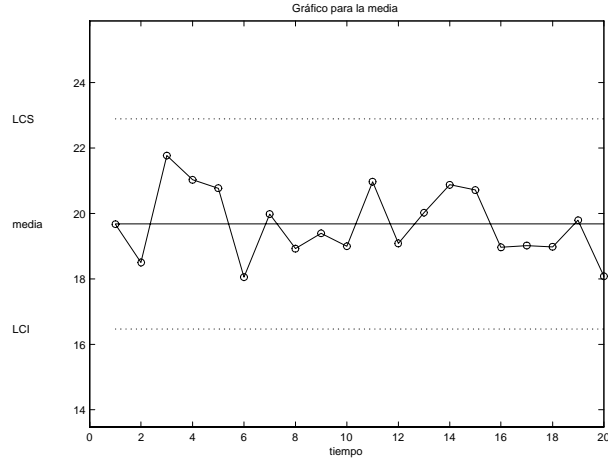


Figura 9.1: Gráfico de control para las medias. Datos de 20 muestras de tamaño 5.

Por el contrario, si se utiliza el estimador \hat{s}_j se tendrá el siguiente gráfico de control teórico para la media

$$\begin{aligned} \text{LCS} &= \mu + 3 \frac{E(\hat{S}_j)}{c_4 \sqrt{n}} \\ \text{Línea central} &= \mu \\ \text{LCI} &= \mu - 3 \frac{E(\hat{S}_j)}{c_4 \sqrt{n}} \end{aligned} \quad (9.12)$$

y el estimado será

$$\begin{aligned} \text{LCS} &= \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\hat{s}_T}{c_4 \sqrt{n}} \\ \text{Línea central} &= \bar{\bar{x}} \\ \text{LCI} &= \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\hat{s}_T}{c_4 \sqrt{n}} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Recordemos que estamos aún en la etapa de construcción del gráfico de control, y que para ello estamos suponiendo que los datos que se poseen son representativos del proceso en estado de control. Esta suposición hemos de corroborarla con este gráfico inicial. Si algún punto saliese de los límites de este gráfico concluiremos que el proceso estaba fuera de control y lo eliminaremos. A continuación se recalculará $\bar{\bar{x}}$ y \bar{s} (o \hat{s}_T) con las muestras restantes, dibujaremos un nuevo gráfico y repetiremos el proceso hasta que todas las muestras estén dentro de los límites. La figura 9.1 es un ejemplo de este tipo de gráficos donde se tienen 20 muestras de tamaño 5 cada una. Puede observarse que todas las medias se encuentran entre los límites de control.

Otra opción para realizar este gráfico es utilizar el rango como medida de variabilidad. El rango de una muestra es la diferencia entre los valores extremos. Por ejemplo, en la muestra 1:

$$R_1 = \max(x_{11}, \dots, x_{1n}) - \min(x_{11}, \dots, x_{1n}).$$

El rango será, por tanto, proporcional a la variabilidad de la variable. En muchas ocasiones se analiza la variabilidad a través del rango, en lugar de la desviación típica muestral. La razón

principal es su simplicidad de cálculo. Además, en muestras pequeñas, es un estimador de la desviación típica casi tan eficaz, desde el punto de vista matemático, como la desviación típica muestral. Supongamos que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y R es el rango de una muestra de tamaño n de dicha variable aleatoria normal. El rango será también una variable aleatoria. Esta variable aleatoria depende de σ y de n y fue tabulada por primera vez por Pearson en 1932. La distribución que está tabulada es la de la variable aleatoria

$$W = \frac{R}{\sigma},$$

para varios tamaños muestrales. Llamemos $d_2 \equiv E(W)$ y $d_3 \equiv \sqrt{\text{Var}(W)}$, donde d_2 y d_3 están tabulados. Entonces:

$$\mu_R \equiv E(R) = E(W)\sigma = d_2\sigma, \quad (9.14)$$

$$\sigma_R \equiv \sqrt{\text{Var}(R)} = d_3\sigma. \quad (9.15)$$

Por tanto, de la expresión (9.14) se obtiene que

$$\sigma = \frac{E(R)}{d_2}.$$

Por tanto un estimador de σ será

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2},$$

donde

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^k R_i}{k}. \quad (9.16)$$

Por tanto, el gráfico de control teórico para la media, utilizando el rango como medida de variabilidad es,

| | |
|---|--------|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \mu + 3 \frac{E(R)}{d_2 \sqrt{n}} \\ \text{Línea central} &= \mu \\ \text{LCI} &= \mu - 3 \frac{E(R)}{d_2 \sqrt{n}} \end{aligned}$ | (9.17) |
|---|--------|

y el estimado

| | |
|---|--------|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \\ \text{Línea central} &= \bar{\bar{x}} \\ \text{LCI} &= \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \end{aligned}$ | (9.18) |
|---|--------|

Las constantes d_2 y d_3 están tabuladas considerando que la distribución de referencia es normal. Sin embargo Burr demostró en 1967 que estas constantes varían muy poco para una amplia variedad de distribuciones, con tal que $n \leq 10$.

Ejemplo 1 *Un proceso industrial fabrica un sensor de velocidad para un controlador electrónico para frenos ABS. Las especificaciones de dicho sensor requieren que su impedancia sea de 30 kohms ± 10 kohms. Para realizar el control estadístico de ese proceso se recogen muestras de 6 sensores cada media hora. Con los datos de un total de 30 muestras se obtiene la siguiente información: $\bar{\bar{x}} = 30,11$, $\bar{R} = 5,40$.*

El gráfico de control de la media basado en medir las dispersiones con los rangos se muestra en (9.18). Para tamaños muestrales de $n = 6$ se tiene en las tablas que $d_2 = 2,534$. Por tanto,

$$\begin{aligned} LCS &= 30,11 + 3 \frac{5,40}{2,534\sqrt{6}} = 32,72 \\ \text{Línea central} &= 30,11 \\ LCI &= 30,11 - 3 \frac{5,40}{2,534\sqrt{6}} = 27,50 \end{aligned} \quad (9.19)$$

9.3. Gráficos de control para la dispersión

Estamos suponiendo que la variable X es normal. Por tanto su distribución no depende sólo de la media μ , sino de la varianza σ^2 . Por consiguiente, para comprobar que el proceso esté bajo control no basta con demostrar que μ ha sido estable; es decir, que los puntos del gráfico de media están entre sus límites. Hemos de comprobar también que la varianza σ^2 de la variable de interés X permanece estable. Esto se puede llevar a cabo con un gráfico de control para las desviaciones típicas. Veamos a continuación gráficos para controlar que la dispersión de la variabilidad es estable a lo largo de la producción o la prestación del servicio. Veremos dos tipos de gráficos según la dispersión se mida a través de la desviación típica o del rango. Al igual que con el gráfico de las medias, primero habrá que construir sus límites con un conjunto de información inicial.

9.3.1. Gráfico de control de la desviación típica

El gráfico de control de la desviación típica (corregida por grados de libertad) o Gráfico S se utiliza para controlar que la desviación típica es estable, y por tanto representativa de la variabilidad debida a causas no asignables. Utilizando las propiedades (9.6) y (9.7) se tiene que, un gráfico de control teórico para la desviación típica será:

$$\begin{aligned} LCS &= E(\hat{S}) + 3\sqrt{\text{Var}(\hat{S})} = c_4\sigma + 3\sqrt{1 - c_4^2}\sigma = B_6\sigma \\ \text{Línea central} &= E(\hat{S}) = c_4\sigma \\ LCI &= E(\hat{S}) - 3\sqrt{\text{Var}(\hat{S})} = c_4\sigma - 3\sqrt{1 - c_4^2}\sigma = B_5\sigma \end{aligned}$$

donde $B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$, $B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}$ están tabulados en función del tamaño muestral. Como σ es desconocido, se utilizará el estimador insesgado

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{s}_T}{c_4}.$$

Por tanto, el gráfico de control para las desviaciones típicas es

$$\begin{aligned} LCS &= B_6 \frac{\hat{s}_T}{c_4} = B_4 \hat{s}_T \\ \text{Línea central} &= c_4 \frac{\hat{s}_T}{c_4} = \hat{s}_T \\ LCI &= B_5 \frac{\hat{s}_T}{c_4} = B_3 \hat{s}_T \end{aligned}$$

donde B_3 y B_4 están tabulados (ver apéndice). La estimación \hat{s}_T es la obtenida en la sección anterior con las muestras iniciales. Si algún dato cae fuera de los límites se considerará que el

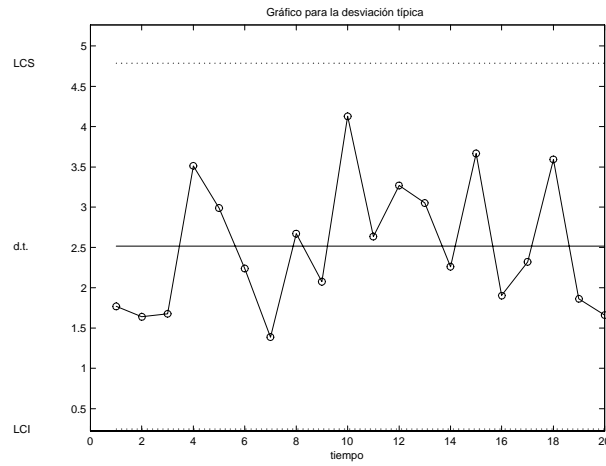


Figura 9.2: Gráfico de control para la desviación típica. Gráfico realizado con 20 muestras de tamaño 5

proceso ha estado fuera de control en ese momento, por lo que ese datos no puede emplearse para la construcción de ningún gráfico de control. Por tanto, **la muestra hay que eliminarla tanto para el cálculo del gráfico de medias como de desviaciones típicas. Hay que recalcular, por tanto, ambos gráficos.**

La figura 9.2 es un ejemplo de gráfico de control para la desviación típica. Los datos con los que se ha realizado este gráfico y el de la media son los mismos, por lo que puede considerarse que el proceso ha estado bajo control durante la recogida de datos.

9.3.2. Gráfico de control del rango

Utilizando las propiedades del rango muestral vistas en las expresiones (9.14) y (9.15) se tiene que un gráfico de control teórico para el rango tendrá las siguientes características:

| |
|---|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \mu_R + 3\sigma_R = d_2\sigma + 3d_3\sigma = D_2\sigma \\ \text{Línea central} &= \mu_R = d_2\sigma \\ \text{LCI} &= \mu_R - 3\sigma_R = d_2\sigma - 3d_3\sigma = D_1\sigma \end{aligned}$ |
|---|

donde $D_1 = d_2 - 3d_3$; $D_2 = d_2 + 3d_3$. Como σ será, en general, desconocido, se empleará el estimador

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2},$$

y el gráfico de control será:

| |
|---|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= d_2 \frac{\bar{R}}{d_2} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_4 \bar{R} \\ \text{Línea central} &= d_2 \frac{\bar{R}}{d_2} = \bar{R} \\ \text{LCI} &= d_2 \frac{\bar{R}}{d_2} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_3 \bar{R} \end{aligned}$ |
|---|

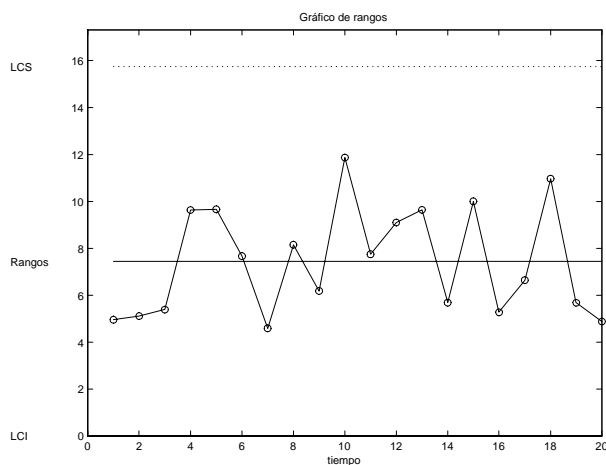


Figura 9.3: Gráfico de control de rangos. 20 muestras de tamaño 5

donde $D_3 = (1 - 3d_3/d_2)$ y $D_4 = (1 + 3d_3/d_2)$ están tabulados en función del tamaño muestral. La figura 9.3 es un ejemplo de este gráfico. La interpretación de este gráfico es como en los casos anteriores. Si el proceso ha estado bajo control todos los puntos estarán dentro de los límites de control. En caso contrario no podremos usar ese dato para la construcción de gráfico y habrá que eliminar dicha muestra y **recalcular tanto este gráfico como el de las medias**

Una vez que hemos construido el gráfico para la media y para la dispersión con el conjunto de muestras iniciales, daremos por concluida la etapa de diseño de los gráficos de control y los mantendremos ya fijos. Pasaremos entonces a utilizarlos en tiempo real, analizando la estabilidad del proceso con nuevas muestras tomadas a intervalos regulares de tiempo. Si una muestra cae entonces fuera de los límites de control habrá que analizar rápidamente qué ocurrió para recuperar el control del proceso. Cada cierto tiempo es conveniente actualizar los límites de control con nuevas mediciones.

9.3.3. Tamaño de la muestra y frecuencia de muestreo

Cada punto de un gráfico de control corresponde al valor observado del estadístico de interés (por ejemplo la media muestral, rango,...) evaluado en una muestra de tamaño n en cierto instante. Es necesario, por tanto, determinar dicho tamaño muestral así como la frecuencia con que se computará.

En la determinación del tamaño muestral intervienen factores económicos y estadísticos, por lo que no se puede establecer un método universal. En general, a mayor tamaño muestral, menor será la varianza del estadístico y más fácil será detectar desviaciones del estado de control. Por ejemplo, la desviación típica de la media muestral es σ/\sqrt{n} , por lo que si n es alto la desviación típica es baja. Esto hará que los límites que contengan al 99.7% de los valores en estado de control serán más estrechos. Por tanto, si el proceso sale fuera de control será más fácil que los puntos alcancen de los límites y detectemos el desajuste, sin que aumente la probabilidad de falsa alarma que seguirá siendo del 0.3%.

Sin embargo, en algunos casos, las mediciones de la característica de calidad pueden tener un coste alto, por lo que no será factible tomar muestras grandes. Por otra parte, para poder tener una muestra grande será necesario esperar mucho tiempo, por lo que se tardará más en detectar fallos, con el consiguiente coste. Sea p la probabilidad de que un punto del gráfico esté fuera de los límites de control. El cálculo de esta probabilidad es sencillo y dependerá del tamaño muestral seleccionado y del estado del proceso (ver hoja de problemas). Por las propiedades de la distribución geométrica, se sabe que el número medio de sucesos hasta que un punto esté fuera de los límites (hasta que suceda el suceso de probabilidad p) es:

$$\text{Número medio de muestras hasta la detección} = \frac{1}{p}.$$

De esta forma se puede saber el tiempo que se tardará en detectar desajustes. Esta información es de mucha utilidad para decidir tanto la frecuencia de muestreo como el tamaño muestral, aunque la decisión final puede estar influida por más factores. Al número medio de muestras hasta la detección del desajuste se le llama también ARL, que proviene de las siglas en inglés *Average Run Length*, (*longitud media de la racha*)

9.4. Capacidad de un proceso. Índice de capacidad

Se define capacidad de un proceso en el que la calidad se mide a través de una variable cuantitativa X con $\text{Var}(X) = \sigma^2$ como:

$$\text{Capacidad} = 6\sigma,$$

donde σ es la desviación típica de la variable **cuando el proceso está bajo control**. La capacidad del proceso es una medida de la calidad del proceso muy utilizada en la práctica. La capacidad es una cualidad negativa. A mayor capacidad mayor variabilidad. Estimar la capacidad se resume en estimar σ . Esta estimación se hace a partir de los gráficos elaborados anteriormente. Los pasos para estimar la capacidad se pueden resumir de la siguiente forma:

1. Se seleccionan k muestras de tamaño n recogidas durante un intervalo amplio de tiempo.
2. Se construye, con los datos obtenidos de dichas muestras, un gráfico de control para X y otro para la dispersión (el de rangos o el de desviaciones típicas).
3. Si alguna muestra está fuera de los límites, se elimina y se recalculan ambos gráficos (media y dispersión), repitiéndose este proceso hasta que todas las muestras estén entre los límites de control.
4. Una vez asegurado que los datos proceden de un proceso en estado de control se ha de verificar la hipótesis de normalidad de los datos mediante algún procedimiento estadístico (contraste de normalidad, gráfico en papel probabilístico-normal, etc).
5. La estimación de la capacidad será, si se utiliza la desviación típica de cada muestra sin corregir por grados de libertad:

$$\text{Capacidad estimada} = 6\hat{\sigma} = 6\frac{\bar{s}}{c_2}.$$

Si se utiliza la desviación típica corregida:

$$\text{Capacidad estimada} = 6\hat{\sigma} = 6\frac{\hat{s}_T}{c_4}.$$

Si se utiliza el rango para medir la variabilidad, se tendrá la siguiente estimación de la capacidad

$$\text{Capacidad estimada} = 6\hat{\sigma} = 6\frac{\bar{R}}{d_2}.$$

No debe confundirse la capacidad de un proceso (o máquina o tarea concreta) con las tolerancias técnicas del producto. Las tolerancias son los requerimientos técnicos para que el producto sea admisible para su uso, mientras que la capacidad es una característica estadística del proceso que elabora dicho producto. Para comparar ambas características se define el **índice de capacidad** de un proceso C_p de la siguiente manera:

$$C_p = \frac{\text{Tolerancia}}{\text{Capacidad}} = \frac{\text{LTS-LTI}}{6\sigma},$$

donde LTS es el límite de tolerancia superior y LTI el inferior. Si $C_p > 1$ se dice que el proceso es **capaz**, pues prácticamente todos los artículos que produzca estarán dentro de las tolerancias requeridas. Si $C_p < 1$ se dice que el proceso **no es capaz**. Si $C_p \approx 1$ habrá que vigilar muy de cerca el proceso, pues cualquier pequeño desajuste provocará que los artículos no sean aceptables.

9.5. Interpretación de los gráficos de control

La interpretación de los gráficos de control se basa en la siguiente idea general: *si el proceso está en estado de control, los gráficos deben mostrar un comportamiento aleatorio dentro de los límites de control; por tanto una evolución de los gráficos que tenga un patrón no aleatorio o/y fuera de los límites será indicio de existencia de causas asignables.*

Se suele interpretar en primer lugar los gráficos de la variabilidad (rango o desviación típica), pues un aumento de la variabilidad puede provocar un aumento de la media muestral, mientras que el fenómeno inverso no ocurre. Los aspectos a analizar son: puntos fuera de los límites, tendencias o rachas, patrones no aleatorios.

9.5.1. Puntos fuera de los límites de control

Si uno o más puntos de un gráfico de control está fuera de los límites es indicio de que el proceso se ha desajustado y conviene analizar el proceso para encontrar la causa. Un punto fuera de los límites puede ser debido a alguno de los siguientes motivos:

- El punto ha sido mal calculado.
- Los límites han sido mal calculados o el gráfico mal dibujado.

- Hay variaciones en el sistema de medición del dato (nuevos calibres, distinto aparato de medida).
- Una variación de la media pero no en la variabilidad puede venir provocada por un desajuste en la maquinaria o desgaste de alguno de sus elementos.
- Un aumento de la variabilidad pero no de la media puede venir provocada por envejecimiento de alguno de los componentes del proceso o por variaciones en la calidad de la materia prima.
- Una disminución de la variabilidad (puntos por debajo del límite inferior) implica una mejora del sistema, por lo que debe investigarse la causa.

9.5.2. Tendencias o rachas

Cuando un conjunto de puntos consecutivos presentan una **tendencia creciente o decreciente durante 7 puntos** (*'regla del 7'*) es indicio de que algo está ocurriendo en el proceso, pues la probabilidad de que muchos puntos formen una tendencia sólo por azar es prácticamente nula. Por tanto ha de investigarse la presencia de una causa asignable incluso si dichos puntos están dentro de los límites. Por ejemplo, un desajuste paulatino de una herramienta provocará un desajuste paulatino en la media del proceso. Es necesario detectar ese desajuste y no esperar a que produzcan valores fuera de los límites de control. Un desgaste en la sujeción de una herramienta de corte irá aumentando gradualmente la variabilidad en la longitud de corte. Ese desgaste puede detectarse sin necesidad de llegar a que el sistema produzca piezas defectuosas.

Cuando un conjunto de **7 puntos sucesivos se encuentran consistentemente a un lado de la línea central del gráfico** (racha) es indicio de anomalía incluso si se encuentran dentro de las líneas de control. De nuevo, la probabilidad de que sólo por azar más de 7 puntos se encuentren en un lado del gráfico es prácticamente nula, por lo que habrá que investigar la presencia de causas asignables.

9.5.3. Patrones no aleatorios

Además de tendencias o rachas, pueden aparecer otros patrones en los datos que deben llevar al análisis del sistema incluso si los datos evolucionan dentro de los límites de control. Por ejemplo:

- Periodicidades en forma de ciclos, con sucesiones regulares de picos y valles.
- Inestabilidad: grandes fluctuaciones de la media, producidos, posiblemente por sobreajustes del proceso, falta de entrenamiento de los operarios o heterogeneidad en la materia prima.
- Sobrestabilidad: Ocurre este fenómeno cuando la variabilidad observada es consistentemente menor que la esperada. Esto puede ser debido tanto a un cálculo erróneo de los límites como a causas asignables que afecten positivamente al proceso.

9.5.4. Tests de inestabilidad

Los tests de inestabilidad consisten en la detección de patrones en los gráficos que sean muy poco probables si el proceso está bajo control. La mayoría de los programas informáticos los incluye. Para detectarlos se dividen las dos áreas alrededor del límite central en tres zonas iguales: A, B, C (ver gráfico). Cada línea corresponderá, entonces, a una desviación típica.

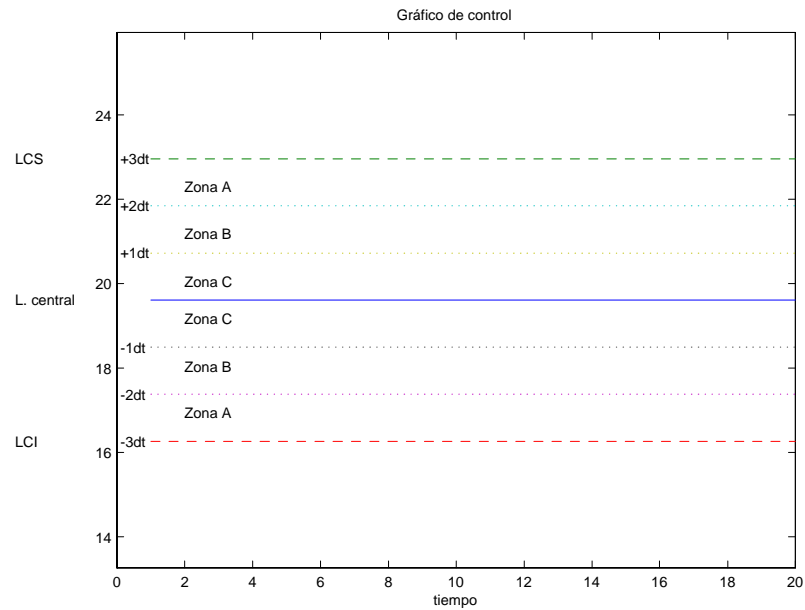


Figura 9.4:

Existen un total de ocho patrones. Si se detecta la presencia de alguno de ellos se ha de considerar la posibilidad de que sea debido a alguna causa asignable. Estos patrones son los siguientes:

- **Patrón 1:** Un punto fuera de las líneas de control (fuera de la zona A).
- **Patrón 2:** 2 puntos de 3 consecutivos dentro de la zona A o exteriores a ella.
- **Patrón 3:** 4 de 5 puntos consecutivos en la zona B o A.
- **Patrón 4:** 8 puntos consecutivos en la misma mitad del gráfico.
- **Patrón 5:** 15 puntos consecutivos en las zonas C.
- **Patrón 6:** 8 puntos seguidos sin caer en la zona C, aunque estén a ambos lados del gráfico.
- **Patrón 7:** 14 puntos seguidos alternativos (cada uno en una mitad diferente al anterior)
- **Patrón 8:** 7 puntos seguidos creciendo o decreciendo

El uso de estos patrones se suele hacer con la ayuda de un ordenador.

9.6. Gráficos P y NP

9.6.1. Gráfico P

En este gráfico se muestra la evolución de la proporción de individuos que tienen cierto atributo. Por ejemplo, la proporción de artículos defectuosos, la proporción de llamadas telefónicas que

quedaron bloqueadas, la proporción de clientes que presentan una reclamación, etc. Llamaremos p a esta proporción.

Veamos primeramente el contexto estadístico en el que nos encontramos. Supongamos un proceso que opera de manera **estable** (bajo control) y cuyo resultado es un artículo o un servicio. Supongamos que en ese estado la probabilidad de que un artículo sea defectuoso sea p . Supongamos que en un instante t_i analizamos un tamaño muestral n_i (número de piezas producidas o número de clientes a los que se ha prestado el servicio), el número de artículos (o servicios) defectuosos será d_i , que será una variable aleatoria al depender de los elementos n_i concretos que hayan caído en nuestras manos en ese instante. Por tanto, la proporción de artículos defectuosos de cada muestra, que denotaremos por $\hat{p}_i = d_i/n_i$ será una variable aleatoria. En general se tendrá que $\hat{p}_i \neq p$. El valor p es un valor poblacional, mientras que \hat{p}_i es sólo una estimación de p obtenida con n_i observaciones. El objetivo del **gráfico P** será comprobar si la evolución de los valores \hat{p}_i observados son compatibles con un mismo valor poblacional p , y por tanto la diferencia entre el valor observado \hat{p}_i y el poblacional p se debe sólo a la variabilidad muestral.

Supongamos, además, que en esta situación de estabilidad el proceso evoluciona de manera **independiente**; es decir, la probabilidad de que se produzca un artículo o servicio defectuoso es independiente de si el anterior artículo o servicio fue o no defectuoso. Bajo estos supuestos de **estabilidad e independencia**, la probabilidad de que cada artículo sea defectuoso es siempre la misma e igual a p . Cada artículo producido puede entonces asociarse a una variable aleatoria de **Bernoulli** que tome valor $x_i = 1$ si el artículo es defectuoso ($P(X_i = 1) = p$) o $x_i = 0$ si es aceptable ($P(X_i = 0) = 1 - p$). Por tanto, el número de unidades defectuosas d_i de un total de n_i unidades es una variable aleatoria **Binomial** con función de probabilidad

$$P(d_i = r) = \binom{n_i}{r} p^r (1 - p)^{n_i - r}; r = 0, 1, 2, \dots, n_i.$$

La media y varianza serán:

$$\begin{aligned} E(d_i) &= pn_i, \\ \text{Var}(d_i) &= n_i p(1 - p). \end{aligned}$$

Como puede verse, ambos parámetros, media y varianza, dependen sólo de p , por lo que para analizar la evolución del número de artículos defectuosos no es necesario construir un gráfico de control para la media y otro para la variabilidad, como ocurría en el control por variables, sino que con un gráfico de control del parámetro p es suficiente. El gráfico se realiza tomando muestras de tamaño n_i (no tienen por qué ser todas de igual tamaño) y contando el número de artículos defectuosos d_i . Nuestro interés está en la evolución de la proporción de artículos defectuosos, es decir,

$$\hat{p}_i = \frac{d_i}{n_i} = \frac{\text{número de defectuosos en la muestra } i\text{-ésima}}{\text{tamaño muestral de la muestra } i\text{-ésima}}.$$

Entonces, la proporción de artículos defectuosos en un total de n_i unidades puede escribirse como

$$\begin{aligned} \hat{p}_i &= \frac{d_i}{n_i} = \frac{1 + 0 + 1 + 0 + 0 + \dots}{n_i} \\ &= \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{n_i}}{n_i} \Rightarrow \bar{X} \end{aligned}$$

y es, por tanto, una media muestral de variables de Bernoulli. Es fácil, entonces, deducir las siguientes propiedades:

$$E(\hat{p}_i) = p$$

$$\text{Var}(\hat{p}_i) = \frac{p(1-p)}{n_i}$$

y, si n_i es suficientemente grande, podremos aplicar el Teorema Central del Límite y utilizar que, aproximadamente,

$$\hat{p}_i \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n_i}\right).$$

El gráfico de control P sirve para ver la evolución de este **estadístico** \hat{p}_i a medida que se van recogiendo muestras consecutivas de tamaño n_i . Como en gráficos anteriores, el gráfico P tiene los siguientes elementos

$$\begin{aligned}\text{Límite de Control Superior} &= E(\hat{p}_i) + 3\sqrt{\text{Var}(\hat{p}_i)} \\ \text{Línea Central} &= E(\hat{p}_i) \\ \text{Límite de Control Inferior} &= E(\hat{p}_i) - 3\sqrt{\text{Var}(\hat{p}_i)}\end{aligned}$$

tomándose como límite inferior el cero si resultase un valor negativo. Si la proporción de unidades defectuosas p es conocida, el gráfico de control será

$$\begin{aligned}\text{Límite de Control Superior} &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}} \\ \text{Línea Central} &= p \\ \text{Límite de Control Inferior} &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}}\end{aligned}\tag{9.20}$$

Puede verse que los límites de control **no** son, en general, dos líneas rectas, sino que variarán con el tamaño muestral n_i . Esta variación se necesita para asegurar que en cada momento existe una probabilidad del 99,7 % de estar entre los límites si el proceso está bajo control. En el caso de p conocido, los pasos a seguir para la construcción del gráfico son:

1. Tomar muestras de tamaño muestral n_i . El tamaño muestral se decide según las características de cada caso. El tamaño muestral debe ser elevado, tanto para que la aproximación a la normal sea buena, como para dar oportunidad a que aparezcan piezas defectuosas. De esta forma, el 99,7 % de los valores estarán dentro de los límites de control cuando el proceso esté en estado de control. Las muestras suelen tomarse a intervalos regulares de tiempo, aunque el tamaño muestral no necesita ser el mismo.
2. Dibujar el gráfico con las especificaciones mostradas en (9.20).
3. Calcular la proporción de artículos defectuosos en cada muestra:

$$\hat{p}_i = \frac{\text{número de defectuosos}}{n_i}.$$

| Muestra : | Nº de diodos inspeccionados | Diodos defectuosos | \hat{p}_i |
|-----------|-----------------------------|--------------------|-------------|
| 1 | 126 | 8 | 0,063 |
| 2 | 118 | 10 | 0,085 |
| 3 | 122 | 10 | 0,082 |
| 4 | 129 | 9 | 0,070 |
| 5 | 124 | 10 | 0,081 |
| 6 | 136 | 10 | 0,074 |
| 7 | 119 | 9 | 0,076 |
| 8 | 127 | 9 | 0,071 |
| 9 | 114 | 20 | 0,175 |
| 10 | 127 | 11 | 0,087 |
| 11 | 119 | 12 | 0,101 |
| 12 | 115 | 5 | 0,043 |
| 13 | 110 | 11 | 0,100 |
| 14 | 103 | 6 | 0,058 |
| 15 | 108 | 10 | 0,093 |
| 16 | 116 | 4 | 0,034 |
| 17 | 119 | 7 | 0,059 |
| 18 | 118 | 8 | 0,068 |
| 19 | 107 | 10 | 0,093 |
| 20 | 113 | 13 | 0,115 |
| Total : | 2370 | 192 | |

Cuadro 9.1: Datos ejemplo 1

- Colocar los valores \hat{p}_i ordenados en el tiempo en el gráfico e interpretarlo.

Ejemplo 1:

Los diodos para un circuito impreso son producidos de forma continua en cierto proceso industrial. Un operario va tomando aleatoriamente diodos de la cadena de producción y va comprobando si son defectuosos o aceptables. Como la cadena no tiene un ritmo de producción constante (sigue un ritmo de producción denominado *just – in – time*, donde el ritmo de la cadena se va determinando según el nivel de stock final e intermedio), el ritmo de inspección no es tampoco constante. El operario, por tanto, no toma siempre la misma cantidad de diodos para realizar la inspección. La Tabla 9.1 muestra el tamaño de las muestras recogidas y el número de diodos que resultaron defectuosos.

Se sabe por la información histórica del proceso, que si sólo actúan causas no asignables (azar), se espera que el 8 % de los diodos sean defectuosos. Se quiere construir un gráfico de control para la proporción de diodos defectuosos. El gráfico se muestra en la figura 9.5. En dicho gráfico puede verse cómo los límites de control, aunque están usando el mismo valor $p = 0,08$ tienen distinto ancho, debido a que las muestras son de distinto tamaño. Existe un punto fuera de control que habrá que investigar. Algunas aplicaciones informáticas permiten realizar un gráfico con límites de control que sí son líneas rectas. Para ello utilizan como tamaño muestral en las fórmulas (9.20) el promedio de los tamaños muestrales; es decir, usan, en lugar de n_i

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{k}.$$

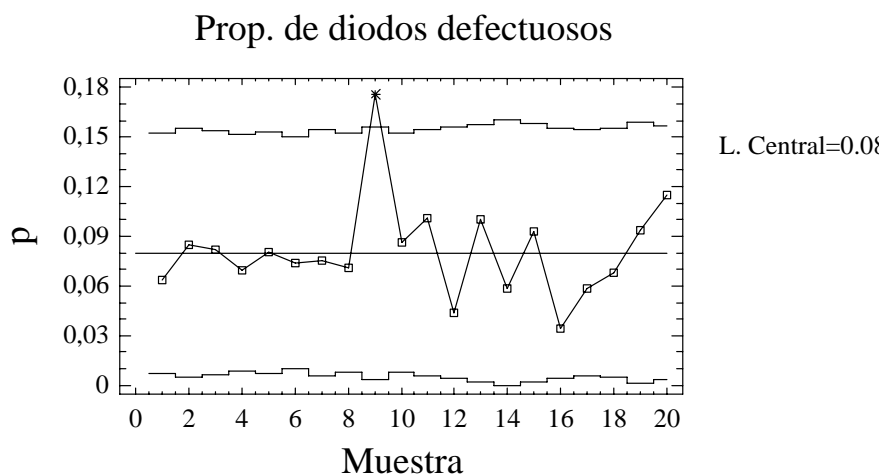


Figura 9.5: Gráfico P para la proporción de diodos defectuosos con p conocido: $p = 0,08$.

Cuando no hay un valor de p conocido es necesario estimarlo con unas muestras iniciales. Estas muestras deben estar recogidas cuando el proceso se encuentra en estado de control. Los pasos a seguir para la construcción del gráfico en este caso son:

1. Tomar k muestras (al menos 20) de tamaño muestral n_i ($i=1,\dots,k$).
2. Calcular la proporción de artículos defectuosos en cada muestra

$$\hat{p}_i = \frac{\text{número de defectuosos}}{n_i}.$$

3. Calcular una estimación del valor poblacional p a través de la proporción total de defectuosos:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k d_i}{\sum_{i=1}^k n_i}.$$

Este valor de \bar{p} constituirá la línea central del gráfico de control. Si durante este periodo de recogida de información el proceso ha estado bajo control, este estimador será un buen estimador de p . Este estimador es mejor que promediar los diferentes valores de \hat{p}_i , es decir:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^k \hat{p}_i}{k},$$

pues en este promedio no estamos teniendo en cuenta que cada muestra tiene tamaño muestral distinto y, por tanto, precisión distinta.

4. Calcular los límites de control de manera que si el proceso está bajo control, y basándonos en la normalidad, sólo 3 de cada mil muestras estén fuera de los límites. Esto es equivalente,

utilizando las propiedades de la distribución normal, a poner los límites en tres desviaciones típicas. Por tanto, el gráfico de control tiene las características siguientes:

$$\begin{aligned}\text{Límite de Control Superior} &= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}} \\ \text{Línea Central} &= \bar{p} \\ \text{Límite de Control Inferior} &= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}\end{aligned}\tag{9.21}$$

5. Dibujar el gráfico con la línea central y los límites de control y colocar los valores \hat{p}_i ordenados en el tiempo. Si algún valor estuviese fuera de los límites habría que rechazar dicha muestra y repetir el proceso con las restantes. Una vez que se tiene un gráfico con todos los valores dentro de los límites pueden considerarse éstos válidos y puede utilizarse el valor estimado \bar{p} para posteriores muestras.

Ejemplo 1 (continuación):

Con los datos del ejemplo 1 y sin utilizar el valor de $p = 0,08$, se obtendría un valor estimado de

$$\bar{p} = \frac{192}{2370} = 0,081\tag{9.22}$$

Los límites serán $\bar{p} \pm 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n_i} = 0,081 \pm 0,819/\sqrt{n_i}$ (se usa el límite inferior 0 si resulta un número negativo). La figura 9.6 muestra el nuevo gráfico de control

En este gráfico se vuelve a apreciar que hay un punto fuera de control. Por tanto la estimación de p hecha en 9.22 no es adecuada. Si eliminamos la muestra 9 del análisis y rehacemos el gráfico se tiene la nueva estimación:

$$\bar{p} = \frac{192 - 20}{2370 - 114} = 0,076,$$

y los nuevos límites serán $\bar{p} \pm 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n_i} = 0,076 \pm 0,795/\sqrt{n_i}$. La figura 9.7 muestra el nuevo gráfico. En esta ocasión todos los puntos se encuentran dentro de los límites, por lo que la estimación de p puede utilizarse para controlar el proceso en posteriores muestras.

Al no ser los límites constantes se ha de tener cuidado para interpretar tendencias y rachas en estos gráficos. Un procedimiento para simplificar la interpretación de los gráficos P es el uso de valores estandarizados. En este caso los valores representados en el gráfico son

$$z_i = \frac{\hat{p}_i - \bar{p}}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}},$$

donde \bar{p} es utilizado en lugar de p si este valor no es conocido. Con estos datos se tiene que

$$\begin{aligned}E(z_i) &= 0 \\ \text{Var}(z_i) &= 1\end{aligned}$$

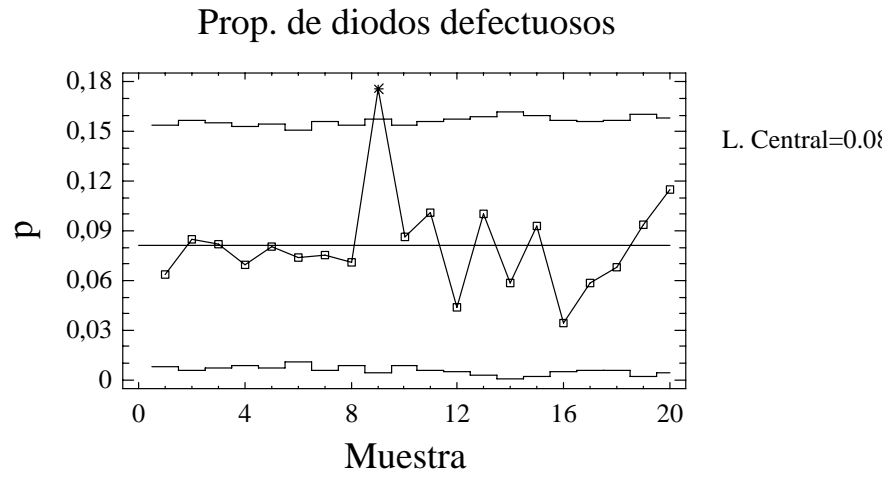


Figura 9.6: Gráfico P para el porcentaje de diodos defectuosos. El valor de p está estimado con los datos.

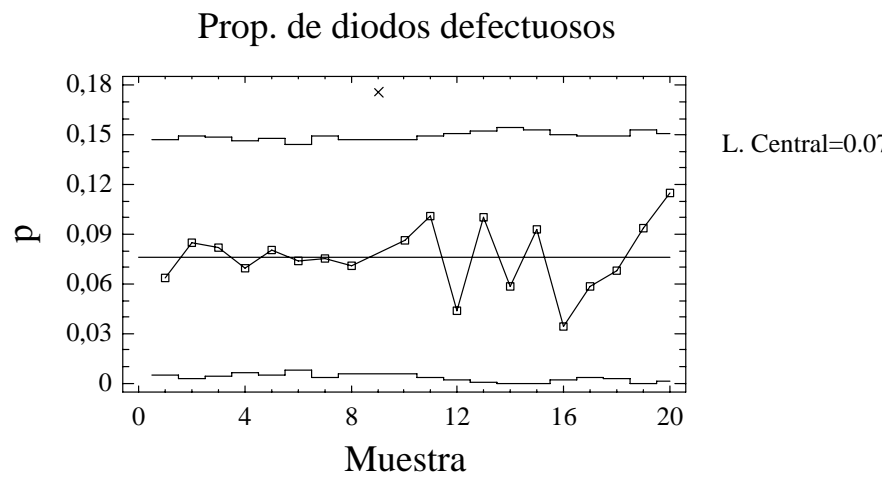


Figura 9.7: Gráfico P para el porcentaje de diodos defectuosos. La muestra 9 ha sido eliminada (aparece con el símbolo X).

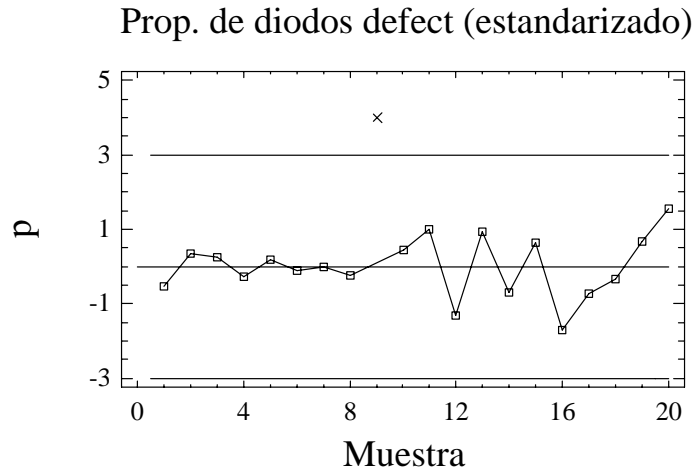


Figura 9.8: Gráfico P estandarizado para el porcentaje de diodos defectuosos. La muestra 9 ha sido eliminada (aparece con el símbolo X).

y por tanto el **gráfico estandarizado** tendrá las siguientes características

$$\begin{aligned}
 \text{Límite de Control Superior} &= 3 \\
 \text{Línea Central} &= 0 \\
 \text{Límite de Control Inferior} &= -3
 \end{aligned}
 \tag{9.23}$$

la figura 9.8 muestra el gráfico estandarizado correspondiente al ejemplo 1 con p estimado.

Como puede observarse, la construcción del gráfico se resume a la obtención de una buena estimación de p . A partir de entonces, y una vez fijada la estrategia de muestreo (tamaños muestrales, frecuencia, criterios para determinar que una pieza es defectuosa), lo que hay que hacer para controlar estadísticamente el proceso es:

1. Tomar una muestra de tamaño n_i
2. Calcular los LCS y LCI con ese valor n_i y colocarlos en el gráfico
3. Contar el número de piezas defectuosas d_i y calcular la proporción sobre el total de la muestra \hat{p}_i .
4. Colocar este valor \hat{p}_i en el gráfico y verificar si el proceso está bajo control

9.6.2. Gráfico NP

Se aplica al mismo tipo de procesos que en el caso anterior. La diferencia está en que, en lugar de contabilizar proporción de artículos defectuosos en una muestra, se considera el número de artículos defectuosos. En general, es útil si:

- (a) el número es más relevante que la proporción,
- (b) el tamaño muestral es constante.

Aunque matemáticamente sería posible construir un gráfico NP con tamaño muestral variable, su interpretación sería complicada, por lo que este tipo de gráficos se utiliza exclusivamente con muestras de tamaño constante $n_i = n$, $i = 1, 2, \dots$. Llamemos d_i al número de artículos defectuosos en una muestra de tamaño n . El gráfico de control será:

$$\text{Límite de Control Superior} = E(d_i) + 3\sqrt{\text{Var}(d_i)}$$

$$\text{Línea Central} = E(d_i)$$

$$\text{Límite de Control Inferior} = E(d_i) - 3\sqrt{\text{Var}(d_i)}$$

Sea p la proporción total de defectuosos que produce el proceso. Entonces d_i sigue una distribución binomial de media np y varianza $np(1-p)$. Si n es grande, dicha distribución puede aproximarse a la normal (ver apéndice del Capítulo 2). Por tanto, para n elevado, aproximadamente,

$$d_i = n\hat{p}_i \sim N(np, np(1-p)).$$

Por tanto el gráfico de control NP será:

$$\text{Límite de Control Superior} = np + 3\sqrt{np(1-p)}$$

$$\text{Línea Central} = np$$

$$\text{Límite de Control Inferior} = np - 3\sqrt{np(1-p)}$$

y si la aproximación a la normal es buena, contendrá al 99.7% de los datos si el proceso está bajo control. De nuevo, si el límite de control resultase negativo se usaría al valor cero. Para construir el gráfico de control es necesario estimar p , salvo que se conozca ya su valor. Al igual que en el caso anterior, tanto el nivel medio como la variabilidad dependen sólo del parámetro p , por lo que un solo gráfico será suficiente para controlar el proceso. Para construir el gráfico se siguen los siguientes pasos:

1. Se toman k muestras de tamaño n . El número de muestras k debe ser elevado (más de 20). también el tamaño muestral n debe ser grande (mayor de 50) y han de tomarse consecutivamente y a intervalos iguales
2. Contar el número de artículos defectuosos en cada muestra d_i
3. Contar el número total de defectuosos $d_1 + d_2 + \dots + d_k$ y hallar el número medio de defectuosos por muestra:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k d_i}{nk} = \frac{\sum_{i=1}^k d_i}{k} = \frac{\bar{d}}{n} \Rightarrow \bar{d} = n\bar{p}.$$

Este valor \bar{d} será un buen estimador de np , media del proceso, si el proceso ha estado bajo control durante esta etapa de recogida de información. Este valor medio $\bar{d} = n\bar{p}$ será la línea central del gráfico de control.

4. Se calculan los límites de control a tres desviaciones típica, obteniéndose:

$$\text{Límite de Control Superior} = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

$$\text{Línea Central} = n\bar{p}$$

$$\text{Límite de Control Inferior} = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

5. Se dibuja el gráfico trazando la línea central en $n\bar{p}$ y los límites de control. Los límites de control serán ahora constantes, al ser constante el tamaño muestral n .
6. Colocar los valores d_i de forma secuencial. Si alguno se encuentra fuera de los límites de control habrá que eliminarlo y volver a reconstruir el gráfico con las muestras restantes.

La capacidad se sigue definiendo de la misma manera que en los gráficos P, es decir $(1-p)$. Por tanto la estimación de la capacidad es

$$\text{Estimación de la capacidad} = (1 - \bar{p}),$$

Ejemplo 2:

Se desea construir un gráfico de control NP para controlar un proceso que fabrica un chip que se insertará en una tarjeta de telefonía. Se tienen 25 muestras, cada una formada por 50 chips. El número de chips defectuosos en cada una de las muestras se muestra en la Tabla 9.2.

El gráfico de control que resulta se encuentra en la figura 9.9. En él puede apreciarse que hay una observación fuera de control por lo que habrá que eliminarla antes de considerar que la estimación de p es definitiva y pueda ser utilizada para analizar posteriores muestras. En este gráfico el LCI es cero, pues el valor que se obtiene aplicando la fórmula correspondiente es negativo: $LCI = -1.87$.

9.7. Muestreo de recepción: Plan Military Standard (I.T. Industrial)

En las secciones anteriores se describe un conjunto de técnicas para controlar la calidad durante el proceso de producción. Una vez que el producto está terminado, se agrupa en **lotes** y se vende. Durante la transacción, es frecuente que se realice lo que se denomina un **muestreo de recepción o de aceptación**. El muestreo de recepción consiste en tomar una muestra de artículos del lote que se quiere vender, se analizan los elementos de dicha muestra y en función del resultado se decide aceptar o rechazar **todo** el lote. El muestreo de aceptación se realiza cuando no es factible, o es antieconómico, la inspección del 100 % de los artículos. Por ejemplo, los ensayos requeridos pueden ser muy caros o incluso pueden requerir la destrucción del artículo. En otras ocasiones, la inspección puede necesitar mucho tiempo. En productos de alta precisión suele ser habitual la inspección de todos los artículos. Existe todo un sector de la industria dedicado al diseño de instrumentos de medida que permitan una inspección rápida o incluso automática.

Al basar la decisión sobre el lote en el resultado de analizar una muestra, se corre el riesgo de tomar una decisión equivocada. Por ejemplo, puede que en el lote haya muchos artículos defectuosos, pero que por azar la muestra tenga todos los artículos aceptables. En este caso, el comprador

| Muestra: | Tamaño de la muestra | Número de artículos defectuosos | \hat{p}_i |
|----------|----------------------|---------------------------------|-------------|
| 1 | 50 | 3 | 0.06 |
| 2 | 50 | 5 | 0.10 |
| 3 | 50 | 5 | 0.10 |
| 4 | 50 | 1 | 0.02 |
| 5 | 50 | 10 | 0.20 |
| 6 | 50 | 4 | 0.08 |
| 7 | 50 | 2 | 0.04 |
| 8 | 50 | 5 | 0.10 |
| 9 | 50 | 6 | 0.12 |
| 10 | 50 | 4 | 0.08 |
| 11 | 50 | 1 | 0.02 |
| 12 | 50 | 0 | 0.00 |
| 13 | 50 | 4 | 0.08 |
| 14 | 50 | 6 | 0.12 |
| 15 | 50 | 2 | 0.04 |
| 16 | 50 | 2 | 0.04 |
| 17 | 50 | 3 | 0.06 |
| 18 | 50 | 4 | 0.08 |
| 19 | 50 | 2 | 0.04 |
| 20 | 50 | 5 | 0.10 |
| 21 | 50 | 4 | 0.08 |
| 22 | 50 | 5 | 0.10 |
| 23 | 50 | 2 | 0.04 |
| 24 | 50 | 4 | 0.08 |
| 25 | 50 | 2 | 0.04 |
| Total : | 1250 | 91 | |

Cuadro 9.2: Datos ejemplo 2

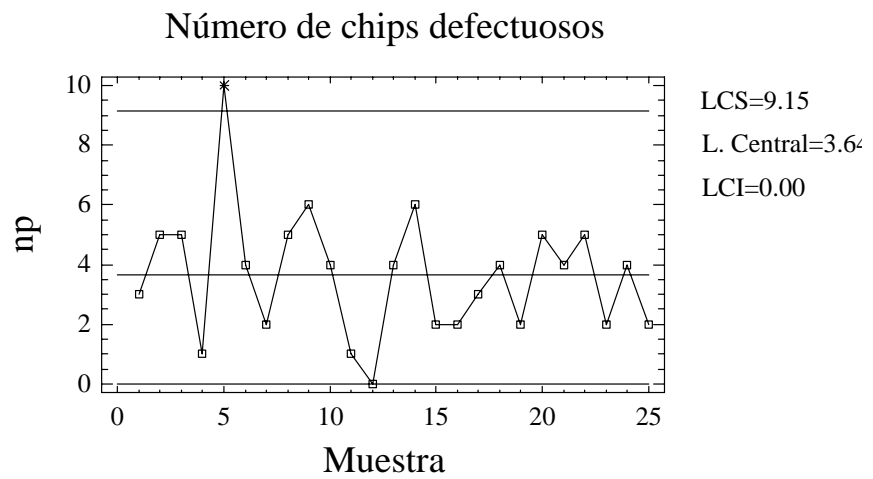


Figura 9.9: Gráfico NP para el número de chips defectuosos en 25 lotes de 50 chips cada uno.

puede adquirir un lote que no desea. El comprador corre entonces el riesgo de adquirir un lote inaceptable.

El azar debido al muestreo puede producir también el caso contrario: un lote con muy pocos artículos defectuosos puede rechazarse si casualmente la muestra seleccionada tiene muchos artículos defectuosos. vemos entonces que también el vendedor corre riesgos en un muestreo de aceptación: el riesgo de que le rechacen un lote aceptable.

Llamaremos Nivel de Calidad Aceptable (NCA, o p_A , o en inglés AQL: acceptable quality level) a la proporción de artículos defectuosos del **lote** que el comprador está dispuesto a asumir. Llamemos p al porcentaje de artículos defectuosos que tiene realmente el lote. Entonces, si $p \leq p_A$ el lote es **aceptable**, y si $p > p_A$ el lote es **rechazable**. El valor de p no es conocido, salvo que analicemos todo el lote en cuyo caso no tendríamos problemas de muestreo. Lo único que tendremos será la estimación de p que se realice a partir de una muestra.

El problema del muestreo de recepción consiste en decidir el tamaño muestral n y el número máximo de artículos defectuosos c que estaremos dispuestos a admitir. Si el número de artículos defectuosos d que encontremos en la muestra es $d > c$ rechazaremos el lote; mientras que si $d \leq c$ aceptaremos todo el lote. Los valores de n y c se tomarán de manera que los riesgos que corran tanto el vendedor como el comprador sea pequeños. El diseño de planes de muestreo de recepción es, en general, complejo. En esta sección simplemente nos ocuparemos de presentar un plan de muestreo denominado plan Military Standard, sin entrar en las justificaciones estadísticas en que se basa.

La estandarización de los procedimientos de muestreo de aceptación comenzó a producirse durante la II guerra mundial por EEUU. Dicho estándar se denominó Military Standard (MIL STD). Desde entonces, el plan Military Standard se ha convertido en el plan de recepción. Este estándar cubre diferentes tipos de muestreo. En este tema nos ocuparemos sólo de los planes simples, en los que la decisión sobre el lote se toma extrayendo una sola muestra.

Para un mismo tamaño de lote y un mismo nivel de calidad aceptable (NCA o AQL o valor p_A) se especifican tres planes de inspección:

1. *Normal*: para aquellos casos en los que la calidad que se espera del proveedor es similar al NCA
2. *Reducido*: para aquellos casos en los que la calidad esperada sea muy alta ($p < p_A$). En este tipo de muestreo, el tamaño muestral es inferior al plan *normal*.
3. *Riguroso*: implica un elevado tamaño muestral. Se utiliza cuando se espera una calidad inferior a la AQL ($p > p_A$).

Existen una serie de reglas que determinan el plan de muestreo anterior. Estas reglas pueden resumirse en los siguientes puntos:

- El plan de inspección *normal* se realizará al comienzo de la tarea de inspección.
- *Cambio de plan normal a riguroso*: se pasará de inspección normal a rigurosa si dos de cinco lotes consecutivos han sido rechazados.
- *Cambio de plan riguroso a normal*: se pasará de control riguroso a normal cuando se acepten cinco lotes consecutivos

Sample Size Code Letters (MIL STD 105E, Table 1)

| Lot or Batch Size | Special Inspection Levels | | | | General Inspection Levels | | |
|-------------------|---------------------------|-----|-----|-----|---------------------------|----|-----|
| | S-1 | S-2 | S-3 | S-4 | I | II | III |
| 2 to 8 | A | A | A | A | A | A | B |
| 9 to 15 | A | A | A | A | A | B | C |
| 16 to 25 | A | A | B | B | B | C | D |
| 26 to 50 | A | B | B | C | C | D | E |
| 51 to 90 | B | B | C | C | C | E | F |
| 91 to 150 | B | B | C | D | D | F | G |
| 151 to 280 | B | C | D | E | E | G | H |
| 281 to 500 | B | C | D | E | F | H | J |
| 501 to 1200 | C | C | E | F | G | J | K |
| 1201 to 3200 | C | D | E | G | H | K | L |
| 3201 to 10000 | C | D | F | G | J | L | M |
| 100001 to 35000 | C | D | F | H | K | M | N |
| 35001 to 150000 | D | E | G | J | L | N | P |
| 500001 to 500000 | D | E | G | J | M | P | Q |
| 500001 and over | D | E | H | K | N | Q | R |

Figura 9.10: Tabla de Códigos en función del coste de inspección (Fuente: Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*).

- *Cambio de plan normal a reducido*: se pasará de muestreo normal a reducido si no se rechaza ningún lote durante diez lotes seguidos.
- *Cambio de plan reducido a normal*: se pasará de muestreo reducido a normal si un lote es rechazado. También puede volverse al plan normal cuando el número de defectuosos no lleva ni a aceptar ni a rechazar el lote.
- Si se está en el plan de inspección riguroso durante más de diez lotes, la inspección debe concluir y se debe proponer al vendedor que aumente los niveles de calidad de su producción.

Este conjunto de reglas se resumen en la figura 9.11

El plan MIL STD 105E varía también en función del coste del muestreo, existiendo varios niveles según el coste de inspección. Estos niveles son:

- Coste de inspección alto: Nivel I.
- Coste de inspección estándar: Nivel II.
- Coste de inspección bajo: Nivel III.
- Niveles especiales (por ejemplo, en ensayos destructivos): Niveles S-1 a S-4

Para aplicar el plan hay que seguir los siguientes pasos:

1. Decidir el AQL o p_A .

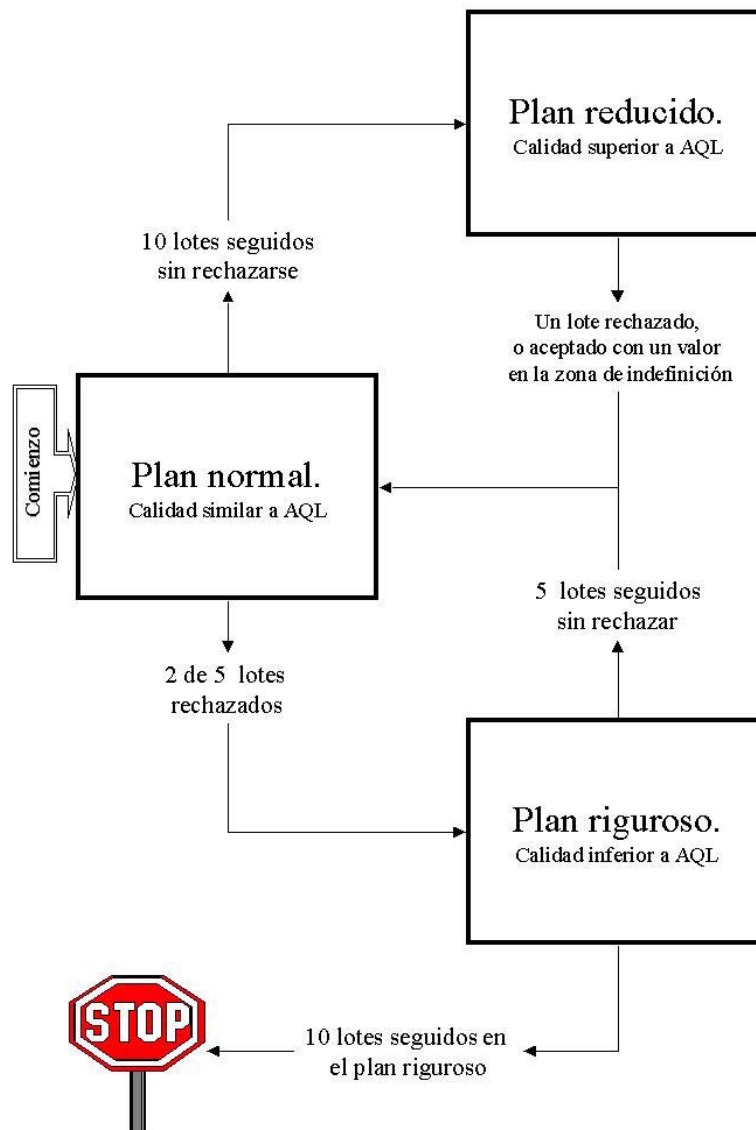


Figura 9.11: Plan MIL STD 105E. Reglas para el cambio de nivel de muestreo

2. Determinar el nivel de inspección en función de su coste (nivel I, II, III, o niveles especiales).
3. Con el tamaño del lote y el nivel de inspección anterior ir a la **tabla de códigos** (Tabla 9.10) y encontrar el código de inspección.
4. Determinar el plan de inspección (normal, riguroso (o estricto) y reducido).
5. Con el código de inspección y el plan de inspección, acudir a la tabla correspondiente: Inspección normal: Tabla 9.12, inspección reducida: Tabla 9.13, inspección estricta: Tabla 9.14) y encontrar el plan de muestreo.
6. Tomar la muestra y ejecutar la inspección. Con el resultado evaluar un posible cambio de plan.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2 *Se desea diseñar un plan de muestreo MIL STD 105E con las siguientes características: $p_A = 0,004$ (0.4 %) y lotes de 1000 unidades. Para diseñar el plan MIL STD supondremos un nivel II (coste estándar). En la Tabla 9.10 leemos el código de inspección, que es J. Si utilizamos el plan de muestreo normal acudiremos a la tabla 9.12. En esa tabla, con el código J y un valor de $p_A = 0,4\%$ nos encontramos con una flecha. Por tanto utilizaremos el primer plan en la dirección de la flecha. En este caso el plan pasará de código J a código K; se inspeccionan 125 artículos y se rechaza el lote si se encuentran $c > 1$ artículos defectuosos. Se acepta si se encuentra un artículo defectuoso o ninguno.*

Master Table for Normal Inspection — Single Sampling (MIL-STD-105E, Table II-A)
acceptable quality level (normal inspection)

| Sample size code letter | 0.010 | 0.015 | 0.025 | 0.040 | 0.065 | 0.10 | 0.15 | 0.25 | 0.40 | 0.65 | 1.0 | 1.5 | 2.5 | 4.0 | 6.5 | 10 | 15 | 25 | 40 | 65 | 100 | 150 | 250 | 400 | 650 | 1000 |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| A | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| B | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| C | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| D | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| E | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| F | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| G | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| H | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| I | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| J | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| K | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| L | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| M | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| N | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| P | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| Q | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |
| R | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re | Ac Re |

= Use first sampling plan below arrow. If sample size equals, or exceeds, lot or batch size, do 100 percent inspection.
 = Use last sampling plan above arrow.
 Ac = Acceptance number.

Figura 9.12: Plan de muestreo para Inspección NORMAL.(Fuente: *Montgomery, Introduction to Statistical Quality Control*). Valores de $p_A > 10$ representan número de defectos por 100 unidades.

Master Table for Reduced Inspection — Single Sampling (MIL-STD-105E, Table II-C)

Acceptable Quality Levels (risk not important)

| Sample size | Acceptable Quality Levels (risk not important) | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------|--|------|-------|------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 0.1% | 0.2% | 0.025 | 0.05 | 0.1 | 0.15 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 3.0 |
| A | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| B | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| C | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| D | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| E | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| F | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| G | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| H | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| I | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| J | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| K | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| L | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| M | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| N | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| O | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| P | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Q | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| R | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

⬆ = Use first sampling plan below arrow. If sample size equals or exceeds last number, use last plan. If sample size is less than first number, use first plan. If sample size is between two numbers, use the higher number. If sample size is between two numbers, use the higher number. If sample size is between two numbers, use the higher number.

Ac = Acceptance number.
 Re = Reject number.
 + = If the acceptance number has been exceeded, the lot is rejected and accepted for 100 percent inspection.

Figura 9.13: Plan de muestreo para Inspección REDUCIDA. (Fuente: *Montgomery, Introduction to Statistical Quality Control*). Valores de $p_A > 10$ representan número de defectos por 100 unidades.

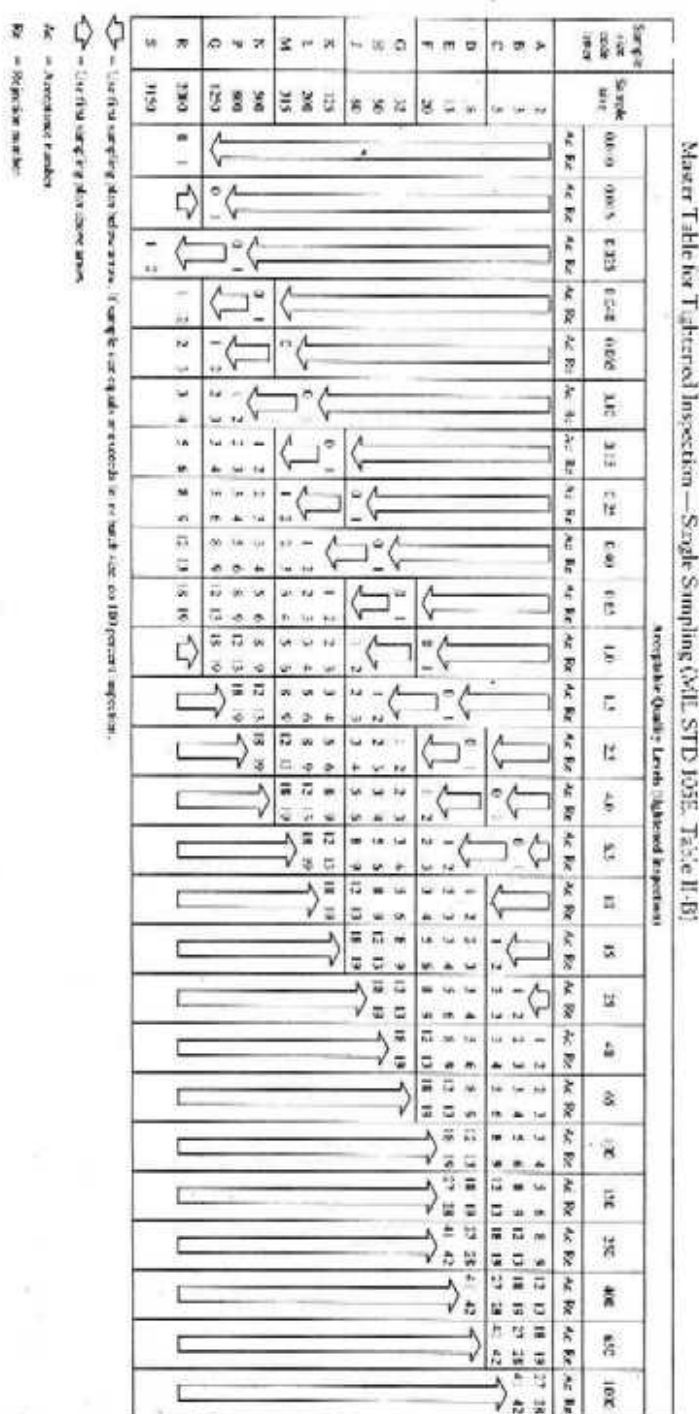


Figura 9.14: Plan de muestreo para Inspección Estricta. (Fuente: *Montgomery, Introduction to Statistical Quality Control*). Valores de $p_A > 10$ representan número de defectos por 100 unidades.

.1. Tablas para gráficos de control

| Observaciones en la muestra, n | Gráficos de medias con dispersión basada en | | | Gráficos para Rangos | | | | Gráficos para desviaciones típicas (corregidas) | | | |
|-----------------------------------|--|---------------|-------------|----------------------|-------|-------|-------|--|-------|-------|-------|
| | $\bar{s} :$ | $\hat{s}_T :$ | $\bar{R} :$ | D_1 | D_2 | D_3 | D_4 | B_3 | B_4 | B_5 | B_6 |
| | c_2 | c_4 | d_2 | | | | | | | | |
| 2 | 0.5642 | 0.7979 | 1.128 | 0 | 3.686 | 0 | 3.267 | 0 | 3.267 | 0 | 2.606 |
| 3 | 0.7236 | 0.8862 | 1.693 | 0 | 4.358 | 0 | 2.575 | 0 | 2.568 | 0 | 2.276 |
| 4 | 0.7979 | 0.9213 | 2.059 | 0 | 4.698 | 0 | 2.282 | 0 | 2.266 | 0 | 2.088 |
| 5 | 0.8407 | 0.9400 | 2.326 | 0 | 4.918 | 0 | 2.115 | 0 | 2.089 | 0 | 1.964 |
| 6 | 0.8686 | 0.9515 | 2.534 | 0 | 5.078 | 0 | 2.004 | 0.030 | 1.970 | 0.029 | 1.874 |
| 7 | 0.8882 | 0.9594 | 2.704 | 0.204 | 5.204 | 0.076 | 1.924 | 0.118 | 1.882 | 0.113 | 1.806 |
| 8 | 0.9027 | 0.9650 | 2.847 | 0.388 | 5.306 | 0.136 | 1.864 | 0.185 | 1.815 | 0.179 | 1.751 |
| 9 | 0.9139 | 0.9693 | 2.970 | 0.547 | 5.393 | 0.184 | 1.816 | 0.239 | 1.761 | 0.232 | 1.707 |
| 10 | 0.9227 | 0.9727 | 3.078 | 0.687 | 5.469 | 0.223 | 1.777 | 0.284 | 1.716 | 0.276 | 1.669 |
| 11 | 0.9300 | 0.9754 | 3.173 | 0.811 | 5.535 | 0.256 | 1.744 | 0.321 | 1.679 | 0.313 | 1.637 |
| 12 | 0.9359 | 0.9776 | 3.258 | 0.922 | 5.594 | 0.283 | 1.717 | 0.354 | 1.646 | 0.346 | 1.610 |
| 13 | 0.9410 | 0.9794 | 3.336 | 1.025 | 5.647 | 0.307 | 1.693 | 0.382 | 1.618 | 0.374 | 1.585 |
| 14 | 0.9453 | 0.9810 | 3.407 | 1.118 | 5.696 | 0.328 | 1.672 | 0.406 | 1.594 | 0.399 | 1.563 |
| 15 | 0.9490 | 0.9823 | 3.472 | 1.203 | 5.741 | 0.347 | 1.653 | 0.428 | 1.572 | 0.421 | 1.544 |
| 16 | 0.9523 | 0.9835 | 3.532 | 1.282 | 5.782 | 0.363 | 1.637 | 0.448 | 1.552 | 0.440 | 1.526 |
| 17 | 0.9551 | 0.9845 | 3.588 | 1.356 | 5.820 | 0.378 | 1.622 | 0.466 | 1.534 | 0.458 | 1.511 |
| 18 | 0.9576 | 0.9854 | 3.640 | 1.424 | 5.856 | 0.391 | 1.608 | 0.482 | 1.518 | 0.475 | 1.496 |
| 19 | 0.9599 | 0.9862 | 3.689 | 1.487 | 5.891 | 0.403 | 1.597 | 0.497 | 1.503 | 0.490 | 1.483 |
| 20 | 0.9619 | 0.9869 | 3.735 | 1.549 | 5.921 | 0.415 | 1.585 | 0.510 | 1.490 | 0.504 | 1.470 |
| 21 | 0.9638 | 0.9876 | 3.778 | 1.605 | 5.951 | 0.425 | 1.575 | 0.523 | 1.477 | 0.516 | 1.459 |
| 22 | 0.9655 | 0.9882 | 3.819 | 1.659 | 5.979 | 0.434 | 1.566 | 0.534 | 1.466 | 0.528 | 1.448 |
| 23 | 0.9670 | 0.9887 | 3.858 | 1.710 | 6.006 | 0.443 | 1.557 | 0.545 | 1.455 | 0.539 | 1.438 |
| 24 | 0.9684 | 0.9892 | 3.895 | 1.759 | 6.031 | 0.451 | 1.548 | 0.555 | 1.445 | 0.549 | 1.429 |
| 25 | 0.9696 | 0.9896 | 3.931 | 1.806 | 6.056 | 0.459 | 1.541 | 0.565 | 1.435 | 0.559 | 1.420 |