UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – UFG
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
SEMESTRE SELETIVO 2018/1

CURSO:	Engenharia da Computação
DISCIPLINA:	ESTRUTURA DE DADOS II
PROFESSORA:	Ma. Renata Dutra Braga (renata@inf.ufg.br ou professorarenatabraga@gmail.com)
TEMA DA AULA:	Árvores de busca binária e árvores AVL
AULAS	28 e 30/05/2018

Árvores de Pesquisa Binária

DEFINIÇÕES

13.1 Fundamentos

Uma *árvore* A é uma coleção de $n \geqslant 0$ nós organizados de forma hierárquica. Se $n = 0$, então A é uma *árvore vazia*; senão, A tem as seguintes propriedades:

- Existe um nó especial em A, denominado *raiz* de A, a partir do qual todos os demais nós de A podem ser acessados.
- Os demais nós de A são divididos em k coleções disjuntas, A_1, A_2, ..., A_k, denominadas *subárvores* de A.
- As subárvores A_1, A_2, ..., A_k também são árvores.

Por definição, árvores são estruturas recursivas. Quando a raiz de uma árvore é removida, o que sobra é uma coleção de árvores. Por exemplo, quando a raiz a é removida da árvore da Figura 13.1, obtemos as árvores com raízes b e c, respectivamente. Então, cada nó numa árvore A é raiz de uma subárvore de A.

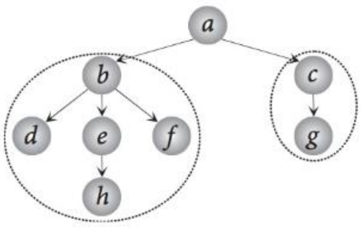


Figura 13.1 | Árvore e subárvores.

Seja A uma árvore com raiz r_0 e subárvores A_1, A_2, ..., A_k, cujas raízes são r_1, r_2, ..., r_k, respectivamente. Então, r_0 é *pai* de r_1, r_2, ..., r_k, ou, equivalentemente, r_1, r_2, ..., r_k são *filhos* de r_0. A raiz r_0 é o único nó de A que não tem pai. Um nó que não tem filhos é uma *folha*. Se uma árvore A tem apenas um nó, esse nó é raiz e folha de A, ao mesmo tempo. Por exemplo, na árvore da Figura 13.1, o nó a é pai dos nós b e c; o nó g é filho do nó c; o nó a é a raiz da árvore e os nós d, f, g e h são as folhas da árvore.

O número de filhos de um nó é o *grau do nó*. Por exemplo, na Figura 13.1, o grau do nó a é 2, o grau de b é 3, o grau de c e e é 1 e o grau dos demais nós é 0. O *grau de uma árvore* é o máximo grau de seus nós. Por exemplo, o grau da árvore na Figura 13.1 é 3, pois nessa árvore cada nó tem no máximo três filhos.

O *nível* da raiz de uma árvore é 1. O *nível* dos filhos de um nó num nível h é $h + 1$. A *altura* de uma árvore é o máximo nível de seus nós (ou 0, se a árvore é vazia). Por exemplo, a altura da árvore na Figura 13.1 é 4; a altura da subárvore enraizada em b é 3 e a altura da subárvore enraizada em c é 2.

Há várias aplicações de árvores em computação. Por exemplo, num sistema operacional, árvores são usadas para organizar arquivos em subdiretórios.

13.2 Árvores binárias

Árvore binária é uma árvore de grau 2, ou seja, uma árvore em que todo nó tem no máximo dois filhos. Numa árvore binária, há distinção entre as subárvores *esquerda* e *direita*. Por exemplo, as árvores na Figura 13.2 são distintas, pois uma tem a subárvore direita vazia e a outra tem a subárvore esquerda vazia.

Figura 13.2 | Duas árvores binárias distintas.

Para criar uma árvore binária, é preciso definir a *estrutura* de seus nós e o tipo de *ponteiro* que será usado para apontar a sua raiz, como na Figura 13.3.

```
#define fmt "%d "                    // formato de exibicao dos itens
typedef int Item;                    // tipo dos itens na arvore
typedef struct arv {                 // estrutura dos nos da arvore
   struct arv *esq;
   Item item;
   struct arv *dir;
} *Arv;                              // tipo de ponteiro para arvore
```

O tipo `Item`, definido como `int`, indica que os itens na árvore binária serão números inteiros. A constante `fmt` indica o formato de exibição de um item da árvore e, portanto, deve ser compatível com o tipo `Item`.

O tipo `Arv`, definido como ponteiro para `struct arv`, serve para declarar um ponteiro para árvore binária (isto é, um ponteiro que aponta a *raiz* da árvore). Se `R` aponta uma árvore binária, `R->item` é o item na raiz dessa árvore, `R->esq` aponta a sua subárvore esquerda e `R->dir` aponta a sua subárvore direita.

13.2.1 Criação de árvores binárias

A função que cria um nó de árvore binária, definida na Figura 13.4, aloca uma estrutura de árvore (do tipo `struct arv`), inicia seus campos com os valores que recebe como parâmetros e, no fim, devolve o endereço dessa estrutura.

```
Arv arv(Arv e, Item x, Arv d) {
   Arv n = malloc(sizeof(struct arv));
   n->esq  = e;
   n->item = x;
   n->dir  = d;
   return n;
}
```

Figura 13.4 | Função para criação de um nó de árvore binária.

Por exemplo, a chamada `arv(NULL,1,NULL)` cria uma árvore cuja raiz guarda o item `1` e cujas subárvores esquerda e direita são vazias (isto é, cria uma folha). Analogamente, a execução do comando a seguir cria a árvore da Figura 13.5.

```
Arv R = arv(arv(arv(NULL,
                    4,
                    NULL),
                2,
                arv(NULL,
                    5,
                    NULL)),
            1,
            arv(NULL,
                3,
                arv(NULL,
                    6,
                    NULL)));
```

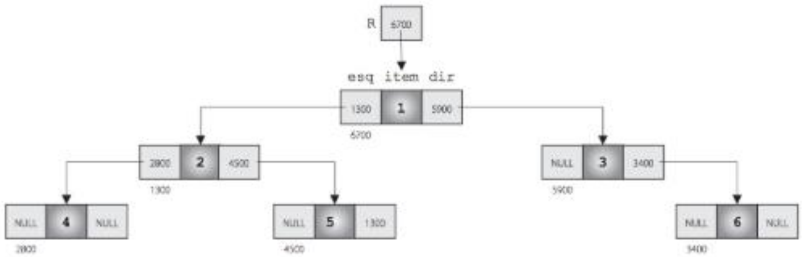


Figura 13.5 | Representação de árvore binária na memória.

13.2.2 Percursos em árvores binárias

Um *percurso* é uma forma sistemática de *visitar* e *processar* os nós de uma árvore.

O *percurso em largura* visita os nós de uma árvore, em nível, da esquerda para a direita. Por exemplo, o percurso em largura visita os nós da árvore na Figura 13.5 nessa ordem: `1`, `2`, `3`, `4`, `5`, `6`. Para percorrer uma árvore em largura, criamos uma fila contendo apenas o endereço de seu nó raiz. A partir daí, enquanto a fila não estiver vazia: o endereço de um nó é removido da fila, o item nesse nó é exibido e os endereços de seus filhos são inseridos na fila. A função para percurso em largura, definida na Figura 13.6, usa o tipo `Fila`, definido no Capítulo 4.

```
void emnivel(Arv A) {
   if( A==NULL ) return;
   Fila F = fila(MAX); // fila de Arv
   enfileira(A,F);
   while( !vaziaf(F) ) {
      Arv A = desenfileira(F);
      printf(fmt,A->item);
      if( A->esq != NULL ) enfileira(A->esq,F);
      if( A->dir != NULL ) enfileira(A->dir,F);
   }
}
```

Figura 13.6 | Função para percurso em largura (ou em nível).

Na função `emnivel()`, a constante `MAX` depende da altura da árvore percorrida. Para percorrer uma árvore binária de altura $h > 0$, com todos os níveis completos, `MAX` deve ser definido como 2^{h-1}. Essa é uma limitação do percurso em largura.

Um *percurso em profundidade* pode ser de três tipos básicos:

- **Em-ordem**: percorre a subárvore esquerda, depois visita a raiz da árvore e, finalmente, percorre a subárvore direita. Por exemplo, o percurso em-ordem visita os nós da árvore na Figura 13.5 nessa ordem: `4`, `2`, `5`, `1`, `3`, `6`.
- **Pré-ordem**: visita a raiz da árvore, depois percorre a subárvore esquerda e, finalmente, percorre a subárvore direita. Por exemplo, o percurso pré-ordem visita os nós da árvore na Figura 13.5 nessa ordem: `1`, `2`, `4`, `5`, `3`, `6`.
- **Pós-ordem**: percorre a subárvore esquerda, depois percorre a subárvore direita e, finalmente, visita a raiz da árvore. Por exemplo, o percurso pós-ordem visita os nós da árvore na Figura 13.5 nessa ordem: `4`, `5`, `2`, `6`, `3`, `1`.

A vantagem dos percursos em profundidade é que eles podem ser facilmente implementados de forma recursiva. Além disso, enquanto o espaço de memória usado pelo percurso em largura cresce *exponencialmente* em função da altura da árvore percorrida, o espaço de memória usado pelos percursos em profundidade cresce apenas *linearmente* em função dessa altura. As funções para os percursos em profundidade são definidas nas Figuras 13.7, 13.8 e 13.9. Nelas, o processamento dos nós consiste apenas em sua exibição no vídeo.

```
void emordem(Arv A) {
   if( A==NULL ) return;
   emordem(A->esq);
   printf(fmt,A->item);
   emordem(A->dir);
}
```

Figura 13.7 | Função para percurso em-ordem.

```
void preordem(Arv A) {
   if( A==NULL ) return;
   printf(fmt,A->item);
   preordem(A->esq);
   preordem(A->dir);
}
```

Figura 13.8 | Função para percurso pré-ordem.

```
void posordem(Arv A) {
   if( A==NULL ) return;
   posordem(A->esq);
   posordem(A->dir);
   printf(fmt,A->item);
}
```

Figura 13.9 | Função para percurso pós-ordem.

13.2.3 Destruição de árvore binária

A função para destruição de árvore binária, definida na Figura 13.10, usa um percurso *pós-ordem*: primeiro ela destrói a subárvore esquerda, depois ela destrói a subárvore direita e, por fim, ela desaloca a raiz da árvore. Note que esse é o único percurso em profundidade que resolve o problema. Se, por exemplo, fosse usado um percurso pré-ordem, a raiz da árvore seria desalocada antes que suas subárvores fossem destruídas; portanto, não seria mais possível destruir as subárvores, pois os endereços de suas raízes seriam perdidos com o nó raiz.

```
void destroi(Arv *A) {
   if( *A == NULL ) return;
   destroi(&(*A)->esq);
   destroi(&(*A)->dir);
   free(*A);
   *A = NULL;
}
```

Figura 13.10 | Função para destruição de árvore binária.

De fato, para cada tipo de operação feita com uma árvore binária, em geral, há um único tipo de percurso que pode produzir o resultado desejado.

13.3 Árvores de busca binária

Uma *árvore de busca binária A* é uma árvore binária vazia ou, então, uma árvore binária cuja raiz armazena um item *r* e tem as seguintes propriedades:

- Todo item na subárvore esquerda de *A* é *menor ou igual* a *r*.
- Todo item na subárvore direita de *A* é *maior* que *r*.
- Cada subárvore de *A* é uma árvore de busca binária.

Uma consequência importante dessas propriedades é que a *projeção* de uma árvore de busca binária sempre produz uma sequência *ordenada* de itens. Por exemplo, a Figura 13.11 mostra uma árvore de busca binária e sua projeção.

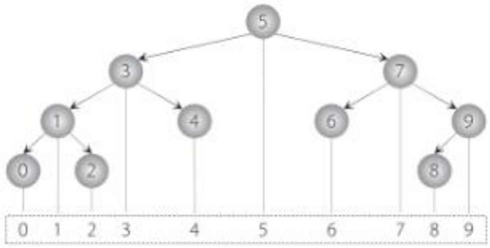


Figura 13.11 | Uma árvore de busca binária e sua projeção (ordenada).

13.3.1 Inserção em árvore de busca binária

A função para inserir um novo item numa árvore de busca binária, definida na Figura 13.12, usa um percurso *pré-ordem*: primeiro ela verifica se a árvore está vazia e, caso esteja, ela coloca o novo item na raiz da árvore; se não, se o novo item for menor ou igual àquele na raiz da árvore, recursivamente, ela o insere na subárvore esquerda; caso contrário, recursivamente, ela o insere na subárvore direita. Note que, como o ponteiro para a árvore pode ser alterado durante uma inserção, ele deve ser passado por referência.

```
void ins(Item x, Arv *A) {
   if( *A == NULL ) *A = arv(NULL,x,NULL);
   else if( x <= (*A)->item ) ins(x,&(*A)->esq);
   else ins(x,&(*A)->dir);
}
```

Figura 13.12 | Função para inserção em árvore de busca binária.

A função `ins()` garante a criação de uma árvore de busca binária, independentemente da ordem em que suas chamadas são feitas no programa. Por exemplo, a árvore na Figura 13.11 pode ser criada e exibida do seguinte modo:

```
Arv R = NULL;
ins(5,&R); ins(7,&R); ins(3,&R); ins(9,&R); ins(1,&R);
ins(6,&R); ins(4,&R); ins(8,&R); ins(0,&R); ins(2,&R);
emordem(R);
```

13.3.2 Busca em árvore de busca binária

A busca de um item numa árvore de busca binária também é simples. Dados um item `x` e um ponteiro `A` para uma árvore de busca binária, a função definida na Figura 13.13 devolve `1` (*verdade*), se `x` está em `A`, e `0` (*falso*) se `x` não está em `A`.

```
int busca(Item x, Arv A) {
   if( A == NULL ) return 0;
   if( x == A->item ) return 1;
   if( x <= A->item ) return busca(x,A->esq);
   else return busca(x,A->dir);
}
```

Figura 13.13 | Função para busca em árvore de busca binária.

A cada comparação, se `x` não está na raiz da árvore `A`, apenas uma das subárvores de `A` precisa ser recursivamente inspecionada no próximo passo. Portanto, se `A` for uma árvore *balanceada* (isto é, se cada nó de `A` tem aproximadamente o mesmo número de descendentes à esquerda e à direita), a eficiência da busca em `A` é a mesma da busca binária (*vide* Capítulo 8). Por outro lado, se `A` for uma árvore *degenerada* (isto é, muito desbalanceada), a eficiência da busca em `A` é a mesma da busca linear (*vide* Capítulo 8). Na prática, se uma árvore de busca binária é criada pela inserção de itens em ordem aleatória, ela tende a ser balanceada. A Figura 13.14 mostra exemplos de árvores balanceada e degenerada.

Figura 13.14 | Árvores balanceada e degenerada.

13.3.3 Remoção em árvore de busca binária

A remoção em árvore de busca binária é mais difícil do que a inserção e a busca. Para simplificar, primeiro vamos considerar a remoção de um item *máximo* da árvore de busca binária. Para isso, partindo da raiz da árvore, seguimos sempre o ponteiro à direita, enquanto ele não for `NULL`. Quando chegarmos a um nó cujo ponteiro à direita é `NULL`, estaremos no nó que guarda um item máximo da árvore (Figura 13.14). Então, basta remover esse nó e devolver o item que ele armazena.

A função que remove um item máximo de uma árvore de busca binária é definida na Figura 13.15. Note que o nó que guarda um item máximo da árvore de busca binária *não* pode ter filho à direita (senão, ele não seria máximo), mas ele pode ter um filho à esquerda (Figura 13.14b). Portanto, quando esse nó é removido, o ponteiro que o apontava deve passar a apontar seu filho à esquerda (caso ele não tenha filho à esquerda, o ponteiro que o apontava ficará nulo).

```
Item remmax(Arv *A) {
   if( *A == NULL ) abort();
   while( (*A)->dir != NULL ) A = &(*A)->dir;
   Arv n = *A;
   Item x = n->item;
   *A = n->esq;
   free(n);
   return x;
}
```

Figura 13.15 | Função que remove e devolve um item máximo de uma árvore de busca binária.

Agora, vamos considerar a remoção de um item `x`, que está na *raiz* da árvore de busca binária `A`. Então, há três casos possíveis:

- Se o nó apontado por `A` *não tem filhos*, então ele deve ser desalocado e o ponteiro `A` deve ser anulado (isto é, a árvore fica vazia).
- Se o nó apontado por `A` *tem um único filho*, então ele deve ser desalocado e o ponteiro `A` deve passar a apontar esse filho.
- Se o nó apontado por `A` *tem dois filhos*, então o item nesse nó deve ser substituído por um item máximo removido de sua subárvore esquerda.

Os dois primeiros casos podem ser resolvidos diretamente e o terceiro caso pode ser facilmente resolvido com a função `remmax()`. Para entender a estratégia adotada nesse último caso, basta lembrar que, numa árvore de busca binária `A`, cada item na subárvore esquerda de `A` é menor que todo item na subárvore direita de `A`. Portanto, substituindo o item na raiz de `A` por um item máximo removido de sua subárvore esquerda, podemos garantir que a árvore resultante da remoção do item `x` ainda será uma árvore de busca binária (como mostra a Figura 13.16), ou seja:

- Todo nó à esquerda de A terá um item menor ou igual àquele em A.
- Todo nó à direita de A terá um item maior que aquele em A.

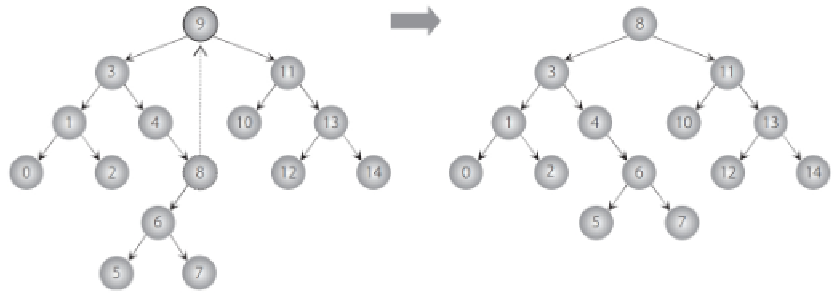


Figura 13.16 | Remoção de um nó com dois filhos.

Para generalizar essa ideia, precisamos considerar que o item a ser removido pode estar em qualquer nó da árvore, não apenas na raiz. Nesse caso, antes de removê-lo, precisamos encontrá-lo na árvore. Para isso, basta adaptar a lógica da função de busca em árvore (Figura 13.13). A função que remove um item x qualquer de uma árvore de busca binária A é definida na Figura 13.17.

```
void rem(Item x, Arv *A) {
   if( *A == NULL ) return;
   if(x == (*A)->item ) {
      Arv n = *A;
      if( n->esq == NULL ) *A = n->dir;
      else if ( n->dir == NULL ) *A = n->esq;
      else n->item = remmax(&n->esq);
      if( n != *A ) free(n);
   }
   else if( x <= (*A)->item ) rem(x,&(*A)->esq);
   else rem(x,&(*A)->dir);
}
```

Figura 13.17 | Função para remoção em árvore de busca binária.

Exercícios

13.1 Crie o arquivo `arv.h`, com os tipos e funções para árvores definidos nesse capítulo (exceto a função `emnivel()`, que depende do tipo `Fila`), e use esse arquivo num programa que cria e exibe a árvore da Figura 13.5.

13.2 Crie a função `nos(A)`, que devolve o total de *nós* na árvore binária `A`.

13.3 Crie a função `folhas(A)`, que devolve o total de *folhas* na árvore binária `A`.

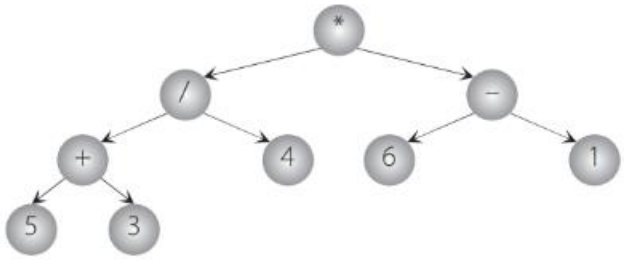
13.4 Crie a função `altura(A)`, que devolve a *altura* da árvore binária `A`.

13.5 Crie a função `tem(A,x)`, que informa se a árvore binária `A` tem o item `x`.

13.6 Uma árvore `A` é *estritamente binária* se cada nó em `A` é uma folha ou tem dois filhos. Crie a função `eb(A)`, que informa a árvore `A` é estritamente binária.

13.7 Duas árvores binárias `A` e `B` são *iguais* se elas têm a mesma forma e os mesmos itens. Crie a função `igual(A,B)`, que informa se `A` é igual a `B`.

13.8 Uma expressão aritmética pode ser representada por uma árvore binária cuja raiz é uma operação e cujas subárvores são operandos. Por exemplo, a expressão `((5+3)/4)*(6-1)` pode ser representada como na figura a seguir. Crie a função `valor(A)`, que avalia uma expressão aritmética representada por uma árvore binária `A` (cujos nós guardam números inteiros).



13.9 Crie a função `exibe_dec(A)`, que exibe os itens de uma árvore de busca binária em ordem decrescente.

10. **(Valor 10) Faça uma representação gráfica de uma árvore binária que represente a expressão aritmética (3+6)*(4-1)+ (6/2)*(5-1).**

11. **Dado o seguinte programa, faça a representação gráfica da árvore criada.**

```
#include <stdio.h>
```

```
struct arv {
 char info;
 struct arv* esq;
 struct arv* dir;};
typedef struct arv Arv;

Arv* inicializa(void){
 return NULL;}

Arv* cria(char c, Arv* sae, Arv* sad){
 Arv* p=(Arv*)malloc(sizeof(Arv));
 p->info = c;
 p->esq = sae;
 p->dir = sad;
 return p;}

int vazia(Arv* a){
 return a==NULL;}


void imprime (Arv* a){
 if (!vazia(a)){
        printf("%c ", a->info); /* mostra raiz */
        imprime(a->esq); /* mostra sae */
        imprime(a->dir); /* mostra sad */        }
}

int main(){

        Arv* a1= cria('e',inicializa(),inicializa());
        Arv* a2= cria('c',inicializa(),a1);
        Arv* a3= cria('f',inicializa(),inicializa());
        Arv* a4= cria('g',inicializa(),inicializa());
        Arv* a5= cria('d',a3,a4);
        Arv* a = cria('b',a2,a5 );
        imprime(a);
}
```

Árvores AVL

Uma árvore binária *T* é denominada AVL quando, para qualquer nó de *T*, as alturas de suas duas subárvores, esquerda e direita, diferem em módulo de até uma unidade. Nesse caso, *v* é um nó *regulado*. Em contrapartida, um nó que não satisfaça essa condição de altura é denominado *desregulado*, e uma árvore que contenha um nó nessas condições é também chamada *desregulada*. Naturalmente, toda árvore completa é AVL, mas não necessariamente vale a recíproca. Por exemplo, a árvore da Figura 5.2(a) é AVL, enquanto a da Figura 5.2(b) não o é, pois a subárvore esquerda do nó *v* assinalado possui altura 2 e a subárvore direita é de altura zero.

Balanceamento de Árvores AVL

A primeira tarefa consiste em mostrar que toda árvore AVL é balanceada. Para tal, a ideia é considerar uma árvore AVL com n nós, determinar o valor máximo que sua altura h pode alcançar e verificar se esse valor satisfaz h = O(log n). Ou, então, pode-se fixar h e determinar o valor mínimo do número de nós. Isto é, o problema que se apresenta pode ser formulado nos seguintes termos: dada uma árvore AVL de altura h, qual seria o valor mínimo possível para n? Para resolver esse problema, observa-se, inicialmente, que numa árvore binária de altura h a altura de uma das subárvores da raiz é h – 1, enquanto a da outra é menor ou igual a h – 1. Numa árvore AVL, porém, a altura dessa última subárvore se restringe a h – 1 ou h – 2, uma vez que, se fosse menor do que h – 2, sua raiz estaria desregulada. Contudo, como se deseja uma árvore AVL com número mínimo de nós, deve-se considerar a segunda subárvore como de altura h – 2 e não h – 1. Essa observação permite construir a árvore procurada de forma recursiva. Seja Th uma árvore AVL com altura h e número mínimo de nós. Para formar Th, consideram-se, inicialmente, os casos triviais. Se h = 0, Th é uma árvore vazia. Se h = 1, Th consiste em um único nó. Quando h > 1, para formar Th, escolhe-se um nó r como raiz. Em seguida, escolhe-se Th−1 para formar a subárvore direita de t, e Th−2 para a esquerda. A Figura 5.3 ilustra o processo de construção.

Formação dos grupos para apresentação dos Seminários.

- Temas:
    - Árvores binária
    - Árvores de busca binária
    - Árvores AVL
    - Árvores Patrícia
    - B-Trees
- Máximo de 3 alunos
- Serão apresentados no dia 18/06/2018
- Entrega dos slides e código-fonte, até o dia 17/06/2018
    - Conceitos importantes
    - Exemplo de aplicação
    - Implementação de funções: insere, exclui, remove, mostra, grau de um determinado nó, grau da árvore, filhos de um determinado nó, altura da árvore.

  É independente de linguagem de programação.