# Álgebra

@ferstudiesss_

# PRODUCTOS NOTABLES

## cuadrado de binomio

$$(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(a-b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$$

## suma por diferencia

$$(a+b)\cdot(a-b) = (a^2 - b^2)$$

## cubo de binomio

$$(a+b)^3 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$

$$(a-b)^3 = (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$$

## suma o resta de cubos

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a^3 + b^3)$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a^3 - b^3)$$

## binomios con término común

$$(x+a)\cdot(x+b) = (x^2 + (a+b)x + ab)$$

# ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

$$ax = b$$

incógnita

números reales

el mayor exponente de la incógnita x es 1

## resolución

aislar la incógnita a un lado de la ecuación y los números al otro

→ Para cambiar de lado una suma o resta, se cambia el signo

→ Para cambiar de lado una multiplicación, esta pasa dividiendo todo el otro lado, sin cambiar su signo

→ Para cambiar de lado una división, esta pasa multiplicando todo el otro lado, sin cambiar su signo

## soluciones

| $a \neq 0$ | $a=0$ y $b=0$ | $a=0$ y $b \neq 0$ |
|---|---|---|
| solución única | infinitas soluciones | no hay solución |
| $x = 1$ | $0 = 0$ | $1 = 3$ |

## ECUACIÓN CON COEFICIENTES LITERALES

Además de la incógnita tiene otras letras que representan términos de la ecuación

$$a(x+b) + x(b-a) = 2b(2a-x)$$
$$ax + ab + bx - ax = 4ab - 2bx$$
$$bx + 2bx = 4ab - ab$$
$$3bx = 3ab$$
$$x = a$$

## ECUACIÓN FRACCIONARIA

Uno o más términos tienen un valor fraccionario, para resolver hay que eliminar el denominador

$$\frac{2}{3}(2x-1) = \frac{3}{2}(x-1) \quad /\cdot 6$$
$$\frac{12}{3}(2x-1) = \frac{18}{2}(x-1)$$
$$8x - 4 = 9x - 9$$
$$5 = x$$

## ECUACIÓN CON VALOR ABSOLUTO

La incógnita esta definida como un valor absoluto, al resolver habrán dos soluciones

$$\sqrt[2]{(x-2)^2} = 5$$
$$|x-2| = 5$$
$$+(x-2) = 5 \qquad -(x-2) = 5$$
$$x = 7 \qquad x = -3$$

# ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

$$ax^2 + bx + c = 0$$

➡ el mayor exponente de la incógnita es dos, su resultado son dos soluciones o raíces

## ¿cómo resolver?

① Fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

② Factorizar

$$x^2 - 12x - 28 = 0$$
$$(x-14)(x+2) = 0$$
$$x_1 = 14 \quad x_2 = -2$$

## propiedades

$\Delta \rightarrow$ discriminante

$$b^2 - 4ac$$

$< 0$ soluciones no reales

$= 0$ soluciones reales e iguales

$> 0$ soluciones reales y distintas

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

# INECUACIONES

es una desigualdad de términos algebraicos, con números o letras y una incógnita

## desigualdades

$c > a$ → c mayor que a

$c \geq a$ → c mayor o igual que a

$b < a$ → b menor que a

$b \leq a$ → b menor o igual que a

## propiedades

### SUMA O RESTA

$c + b > a = c > a - b$

$c - b > a = c > a + b$

el sentido de la desigualdad NO cambia

### MULTIPLICACIÓN

$c \cdot b > a \; = c > a : b$

cuando es positivo NO cambia el sentido

$c \cdot - b > a \; = c < a : -b$

cuando es negativo CAMBIA el sentido

### DIVISIÓN

$c : b > a \; = c > a \cdot b$

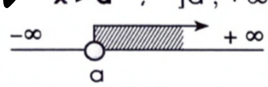
cuando es positivo NO cambia el sentido

$c : - b > a \; = c < a \cdot -b$

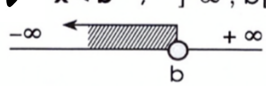
cuando es negativo CAMBIA el sentido

## intervalos

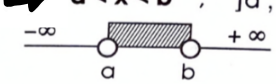
**$x > a$** , $]a, +\infty[$




**$x < b$** , $]-\infty, b[$

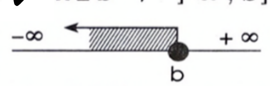



**$a < x < b$** , $]a, b[$

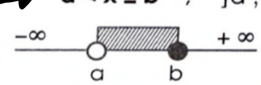



**$x \geq a$** , $[a, +\infty[$


**$x \leq b$** , $]-\infty, b]$




**$a < x \leq b$** , $]a, b]$




## inecuación de primer grado

tienen una incógnita de exponente uno, para resolverla hay que despejar esta incógnita considerando las propiedades

$a \neq 0$

solución única


$a = 0$

y la desigualdad es verdadera

infinitas soluciones


$a = 0$

y la desigualdad es falsa

no hay solución

# SISTEMAS DE ECUACIONES

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right|$$

dos ecuaciones lineales con las mismas incógnitas y con a,b,c,d,e,f números reales

## soluciones

### ➡ UNICA

cuando $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$

el sistema tiene una única solución

### ➡ INFINITAS

cuando $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

el sistema tiene infinitas soluciones

### ➡ VACIA

cuando $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$

el sistema tiene solución vacía

⚠ antes de analizar el sistema y sus soluciones hay que ordenarlo

## métodos de resolución

la solución del sistema (x,y) debe satisfacer a las dos ecuaciones

### ① SUSTITUCIÓN

despejar una incógnita de una de las ecuaciones y reemplazarla en la otra

ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 18 \\ 3x - 4y = 5 \end{array}\right|$$

$y = 18 - 2x$

$3x - 4(18 - 2x) = 5$

$3x - 72 + 8x = 5$

$11x = 77$

$x = 7$

$y = 4$

### ② IGUALACIÓN

despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego igualarlas

ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x + y = 2 \end{array}\right|$$

$y = 5 - 2x$

$y = 2 - x$

$5 - 2x = 2 - x$

$5 - 2 = -x + 2x$

$x = 3$

$y = -1$

### ③ REDUCCIÓN

multiplicar una de las ecuaciones por un número tal que se elimine una de las incógnitas al sumar ambas ecuaciones

ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 20 \\ x - 2y = 3 \end{array}\right| /\cdot -2$$

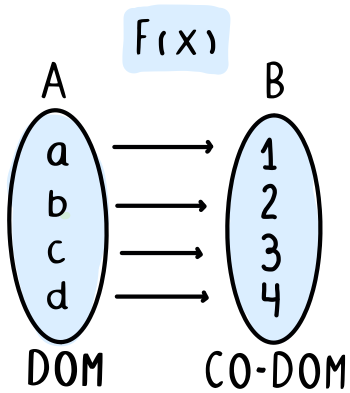
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 4y = -6 \end{array}\right| /+$$

$0 + 7y = 14$

$y = 2$

$x = 7$

# Funciones




**DOMINIO** conjunto de pre imágenes
valores que se le asignan a x

**CO-DOMINIO** valores que puede
tomar la función

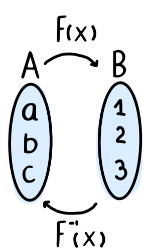
**RECORRIDO** conjunto de imágenes
valores asociados a una x

## FUNCIÓN INVERSA

$F(x) = A \longrightarrow B$ función original

$F^{-1}(x) = B \longrightarrow A$ función inversa

→ solo las funciones biyectivas tienen función inversa




→ EXPRESIÓN ALGEBRAICA

1. despejar x
2. intercambiar
   x→y e y→x

→ $F^{-1}(x)$ es una REFLEXIÓN de F(x) en el plano

## DETERMINAR

### dominio

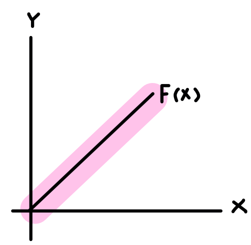
¿Para qué valores de x se anula la función?

$$F(x) = \frac{2}{x-1} \Rightarrow \begin{array}{l} x-1 \neq 0 \\ x \neq 1 \end{array}$$

### recorrido

Determinar el dominio de su función inversa

## plano cartesiano



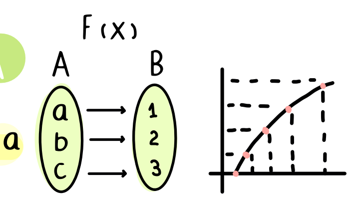

**COORDENADAS**

( X,Y )

X: pre imágenes
Y: imágenes

## FUNCIÓN BIYECTIVA

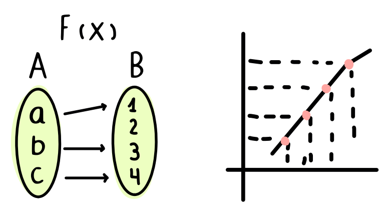
Es una función inyectiva y epiyectiva a la vez




corta las rectas paralelas al eje x siempre en solo un punto

## FUNCIÓN INYECTIVA

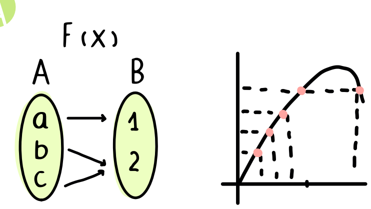
También llamada uno a uno, para cada valor de x hay un valor de y distinto, pueden sobrar elementos




corta las rectas paralelas al eje x en un punto o menos

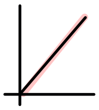
## FUNCIÓN EPIYECTIVA

También llamada sobreyectiva, el recorrido coincide con el co dominio, no sobran elementos

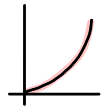



corta las rectas paralelas al eje x en un punto o más

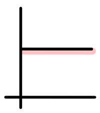
# CLASIFICACIÓN



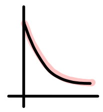
Función continua



Función creciente



Función constante



Función decreciente

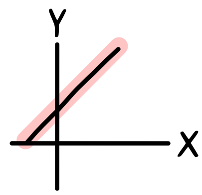
## Función afín

$F(X) = mx + n$

m = pendiente $\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

n = coef de posición (Y)

→ no pasa por el origen

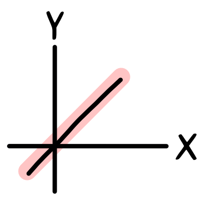



## Función lineal

$F(X) = mx$

m = pendiente $\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

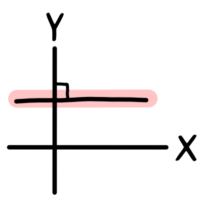
→ pasa por el orgien




## Función constante

$F(X) = Z$

→ para cualquier valor de X, Y vale lo mismo (Z)




# Composición de funciones

Para las funciones

$g: A \to B$ y $f: B \to C$

se define la función compuesta

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

→ el recorrido de g es el dominio de f

→ es asociativa pero no conmutativa

EJEMPLO

$F(X) = 2X \quad g(X) = 3X$

$F(g(2))$

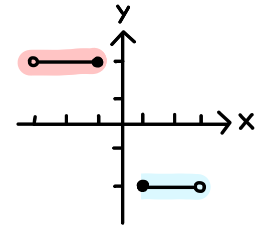
$F(3 \cdot 2) = F(6)$

$2 \cdot 6$

$12$

# FUNCIÓN POR TRAMOS

Para ciertos valores de X hay una expresión y para otros valores de X hay otra expresión




○—— no lo incluye

●—— si lo incluye

$$F(X) \begin{cases} 2 \text{ si } -3 < X < -1 \\ -2 \text{ si } 1 < X < 3 \end{cases}$$

# Traslación

$F(X) = F(X - h) + K$

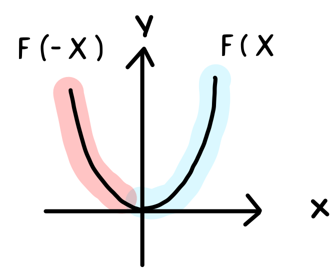
| HORIZONTAL | VERTICAL |
| --- | --- |
| h < 0 izquierda | K < 0 abajo |
| h > 0 derecha | K > 0 arriba |

# Reflexión

## RESPECTO AL EJE Y

- se sustituye (x) por (-x) y la gráfica de F(-x) será la reflexión de F(x)
- funciones par

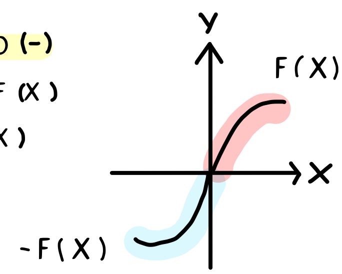
ejemplo: parábola




## RESPECTO AL EJE X

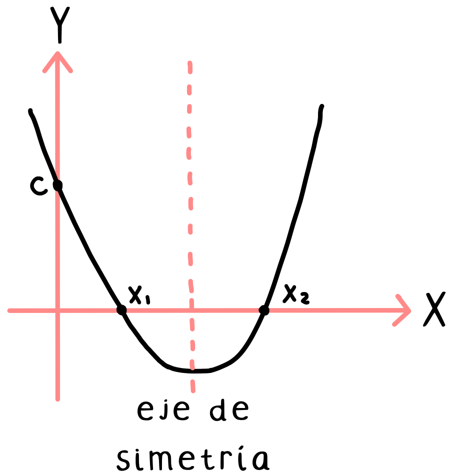
- se le antepone un signo (-) a F(X) y la gráfica de -F(X) será la reflexión de F(X)
- funciones impar

ejemplo: asintotas



# función cuadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$

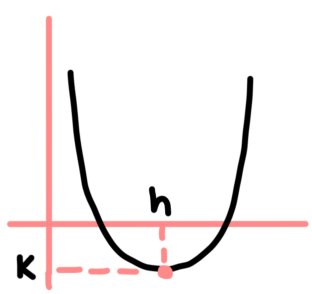



Al graficar se forma una parábola simétrica respecto al eje Y o eje de simetría

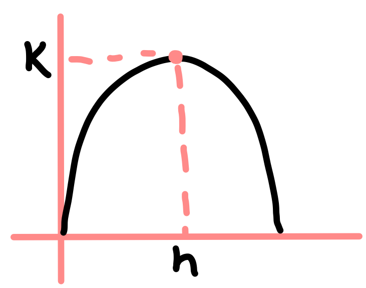
## DOMINIO Y RECORRIDO

el dominio de una función cuadrática son todos los reales, y el recorrido dependerá del valor de a

Si $a > 0 \rightarrow$ Rec $[k, +\infty[$

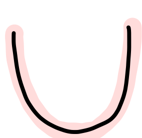



Si $a < 0 \rightarrow$ Rec $]-\infty, k]$

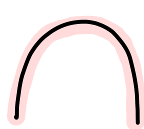



## Concavidad

Si $a > 0$



Si $a < 0$



## Apertura

Si $|a| > 1$

se contrae la parábola

Si $0 < |a| < 1$

se dilata la parábola

# Intersección eje y

La parábola intersecta al eje Y en el punto

$(0, c)$ → se obtiene al igualar x en 0 y resolver la ecuación

# Intersección eje x

La parábola intersecta al eje x en los puntos que corresponden al valor de sus soluciones

$\Delta < 0$ → no intersecta al eje x

$\Delta = 0$ → intersecta al eje x en un punto

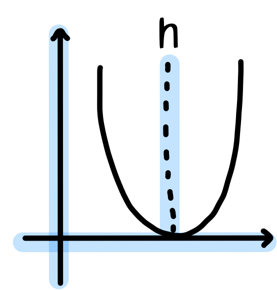
$\Delta > 0$ → intersecta al eje x en dos puntos

$F(x) = ax^2 + bx + c$ ➡ $F(x) = a(x - h)^2 + K$

# Eje de simetria

divide a la parábola en dos partes iguales y simétricas

$h = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ➡ $h = \frac{-b}{2a}$



# INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

señala en qué intervalos la función crece y en qué intervalos la función decrece

Si $a > 0$ ➡ crece $\left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$ decrece $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right[$

Si $a < 0$ ➡ crece $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right[$ decrece $\left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$

## Vértice

Es el punto máximo o mínimo de la parábola y es la intersección entre el eje de simetría y la parábola

$(h, K)$

$V = (h, F(h))$ ➡ $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

## Desplazamientos

$$F(X) = a(X-h)^2 + K$$

la función se desplaza h y K unidades respecto a la función original $F(X) = X^2$

h unidades en el eje x $<$ + derecha, − izquierda

K unidades en el eje Y $<$ + arriba, − abajo

# Función inversa

Las funciones cuadráticas no cumplen con las condiciones para que exista su función inversa, por lo que para encontrarla hay que restringir su dominio. Recuerda que el dominio de la función orgininal será el recorrido de la función inversa

1. restringir el dominio de 0 a $\infty^+$ ⇨ Rec de la $F(X)^{-1}$
2. despejar la ecuación en términos de Y usando factorización o la ecuación general
3. cambiar las X por Y, Y las Y por X
4. verificar si las soluciones cumplen con las restricciones de dominio

## EJEMPLO

31) Sea f: [1; +∞[ → [−4; +∞[ con $f(x) = x^2 - 2x - 3$, ¿cuál es la inversa de f?

$F(X) = X^2 - 2X - 3$ $\qquad F(X)^{-1} = ? \Rightarrow 1 + \sqrt{4-X}$

1. Dom: [1, +∞[ $\qquad$ Dom: [-4, +∞[
   Rec: [-4, +∞[ $\qquad$ Rec: [1, +∞[

2.
$$Y = X^2 - 2X - 3$$
$$X^2 - 2X - 3 - Y = 0$$
$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$X = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3-Y)}}{2}$$
$$X = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12 - 4Y}}{2}$$
$$X = \frac{2 \pm \sqrt{16 - 4Y}}{2}$$
$$X = \frac{2 \pm \sqrt{4(4-Y)}}{2}$$
$$X = \frac{2 \pm 2\sqrt{4-Y}}{2}$$
$$X = \frac{\cancel{2}(1 \pm \sqrt{4-Y})}{\cancel{2}}$$
$$X = 1 \pm \sqrt{4-Y}$$

3.
$$Y = 1 + \sqrt{4-X}$$
$$Y = 1 - \sqrt{4-X}$$

4. el menor valor que puede tomar x es -4

$Y = 1 + \sqrt{4 - -4} = 1 + \sqrt{16}$ = positivo

cumple con las restricciones de recorrido

$Y = 1 - \sqrt{4 - -4} = 1 - \sqrt{16}$ = negativo

NO cumple con las restricciones de recorrido

# Función potencia

- $a \neq 0$
- $n \in \mathbb{N} - \{1\}$
- $x$ y $a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f(x) = ax^{n}}$$

impar

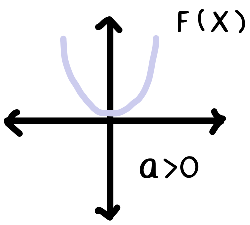
**DOMINIO**
todos los reales

**RECORRIDO**
depende de a y n

## función par

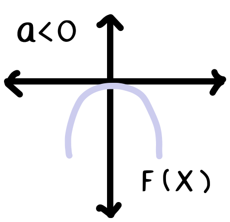
cuando n es par ➜ $f(x) = f(-x)$

PARÁBOLA




RECORRIDO

$\mathbb{R}^{+}_{0}$



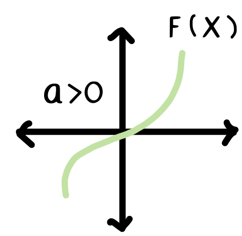

RECORRIDO

$\mathbb{R}^{-}_{0}$

## función impar

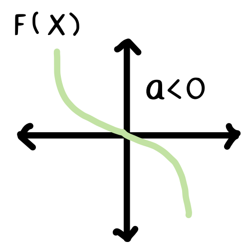
cuando n es impar ➜ $f(-x) = -f(x)$

ASÍNTOTA




RECORRIDO

$\mathbb{R}$




RECORRIDO

$\mathbb{R}$

## Datos Bonus

mientras mayor sea n, más cerca del eje x estará la función

cuando n está entre 0 y 1 se forma una función raíz

mientras mayor sea a, más cerca del eje y estará la función

cuando n es uno se forma una función lineal

## DESPLAZAMIENTO

$f(x) = a(x+b)^{n} + c$

- *horizontal* depende de b
  - $+$ izquierda
  - $-$ derecha
- *vertical* depende de c
  - $+$ arriba
  - $-$ abajo

## VERTICE / PUNTO DE SIMETRÍA

$n$ = par y $a < 0$

$V(-b, c)$

$n$ = par y $a > 0$

$V(b, -c)$

$n$ = impar y $a < 0$

$PS(-b, c)$

$n$ = impar y $a > 0$

$PS(b, -c)$

$$\sqrt[2]{X} = X^{\overset{n}{\boxed{1/2}}}$$