RESUMEN 16

ÁLGEBRA Y FUNCIONES II

Nombre : ___________________

Curso : ___________________

Profesor : ___________________

PREUNIVERSITARIO
PEDRO DE VALDIVIA
Tu Libertad de Elegir

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

Sea **a** $\in \mathbb{R} - \{0\}$ y **m, n** $\in \mathbb{Z}$. Entonces:

PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

CUOCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Sean **a**, **b** $\in \mathbb{R} - \{0\}$ y **m**, **n** $\in \mathbb{Z}$. Entonces:

PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

CUOCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

POTENCIA DE UNA POTENCIA

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Sean **a**, **b** $\in \mathbb{R} - \{0\}$ y **m**, **n** $\in \mathbb{Z}$. Entonces:

POTENCIAS DE IGUAL BASE

$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$, con **a distinto** de **-1** y **1**

POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

$a = b \Rightarrow a^n = b^n$, **con n par**

$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$, **con n impar**

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Ecuación exponencial es aquella que tiene la o las (s) incógnita(s) en el exponente de una o más potencias.

Para resolver una ecuación exponencial se debe reducir cada miembro de la igualdad a una potencia y luego igualar las bases, aplicando las propiedades correspondientes. Las bases deben ser distintas de **cero**, **uno** y **menos uno**.

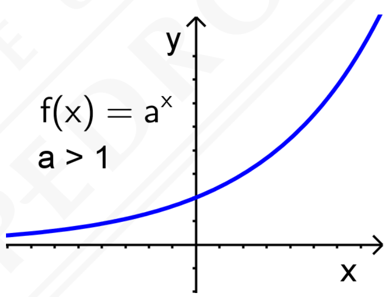
FUNCIÓN EXPONENCIAL

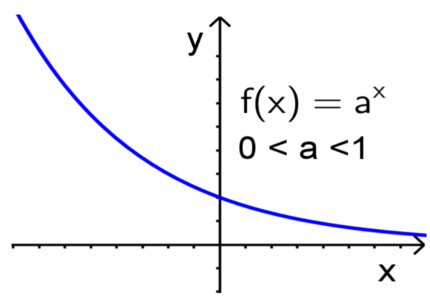
La función **f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$** definida por **$f(x) = a^x$, con a $\in \mathbb{R}^+$ y a $\neq$ 1** se denomina **función exponencial**.

Propiedades

- El Dominio es: $D_f = \mathbb{R}$.
- El Recorrido es: $R_f = \mathbb{R}^+$.
- La función exponencial es **biyectiva.**
- La gráfica intersecta al eje de las ordenadas en el punto (0,1).
- Si a > 1, entonces $f(x) = a^x$ es creciente.
- Si 0 < a < 1, entonces $f(x) = a^x$ es decreciente.
- La gráfica no intersecta al eje de las abscisas.

GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL





RAÍCES

DEFINICIONES

DEFINICIÓN 1: Si **n** es un entero par positivo y **a** es un real no negativo, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el único real **b**, no negativo, tal que $b^n = a$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ b \geq 0}$$

DEFINICIÓN 2: Si **n** es un entero impar positivo y **a** es un real cualquiera, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el único real **b** tal que $b^n = a$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ b \in \mathbb{R}}$$

Observaciones:

- Si **n** es un entero par positivo y **a** es un real negativo, entonces $\sqrt[n]{a}$ **NO ES REAL.**
- La expresión $\sqrt[n]{a^k}$, con **a** real no negativo, se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}}$$

- Se define para todo número real:

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

PROPIEDADES

Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ están definidas en $\mathbb{R}$, entonces:

MULTIPLICACIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$$

DIVISIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},\ b \neq 0}$$

PROPIEDADES

Si $a \in \mathbb{R}^+$, m y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

POTENCIA DE UNA RAÍZ

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$$

RAÍZ DE UNA RAÍZ

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}}$$

PROPIEDADES

AMPLIFICACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DEL ORDEN DE UNA RAÍZ

$$\boxed{\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \sqrt[mn]{\mathbf{a}^m}\ ,\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \mathbf{m, n} \in \mathbb{Z}^+}$$

PRODUCTO DE RAÍCES DE DISTINTO ÍNDICE

$$\boxed{\sqrt[n]{\mathbf{a}} \cdot \sqrt[m]{\mathbf{b}} = \sqrt[mn]{\mathbf{a}^m \cdot \mathbf{b}^n}\ ,\ \mathbf{a, b} \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \mathbf{m, n} \in \mathbb{Z}^+}$$

FACTOR DE UNA RAÍZ COMO FACTOR SUBRADICAL

$$\boxed{\mathbf{b} \cdot \sqrt[n]{\mathbf{a}} = \sqrt[n]{\mathbf{b}^n \cdot \mathbf{a}}\ ,\ \mathbf{a, b} \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \mathbf{m, n} \in \mathbb{Z}^+}$$

RACIONALIZACIÓN

Racionalizar el denominador de una fracción consiste en transformarla en una fracción equivalente cuyo denominador no contenga raíces.

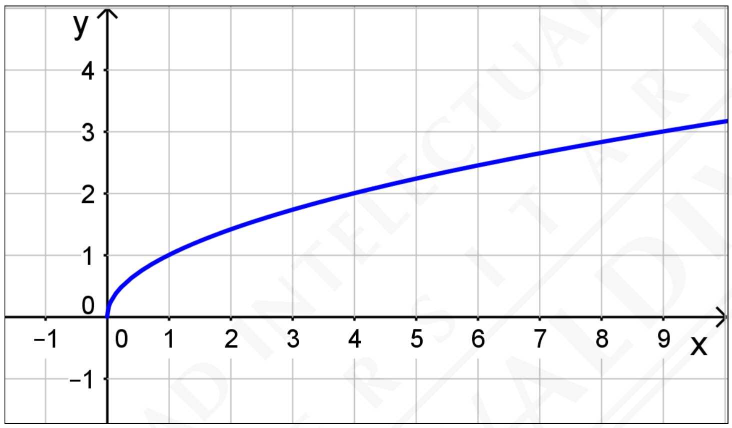
CASO 1: Fracciones de la forma $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b} \cdot \sqrt{\mathbf{c}}}$

CASO 2: Fracciones de la forma $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{p} \cdot \sqrt{\mathbf{b}} + \mathbf{q} \cdot \sqrt{\mathbf{c}}}$

FUNCIÓN RAÍZ

La función **f:** $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}}$, se denomina **función raíz**.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN RAÍZ



Observaciones:

- La función es creciente.
- La función raíz cuadrada es considerada como un modelo de crecimiento lento.
- La función raíz es **biyectiva**.

LOGARITMOS

DEFINICIÓN

El logaritmo de un número real positivo **b** en base **a**, positiva y distinta de 1, es el número **m** a que se debe elevar la base para obtener dicho número.

$$\boxed{\log_a b \Leftrightarrow a^m = b,\ b>0,\ a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}}$$

Observaciones:

- La expresión $\log_a b = m$ se lee "el logaritmo de **b** en base **a** es **m**".
- El logaritmo es la operación inversa de la exponenciación.
- $\log_{10} a = \log a$

CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN DE LOGARITMO

- $\boxed{\log_a 1 = 0}$
- $\boxed{\log_a a = 1}$
- $\boxed{\log_a a^m = m}$

Propiedades de los logaritmos

Sean $b > 0$, $c > 0$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Logaritmo de un producto

$$\boxed{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$$

Logaritmo de un cuociente

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$$

Logaritmo de una potencia

$$\boxed{\log_a b^n = n \log_a b}$$

Logaritmo de una raíz

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b, \text{ con } n > 0}$$

Cambio de base

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

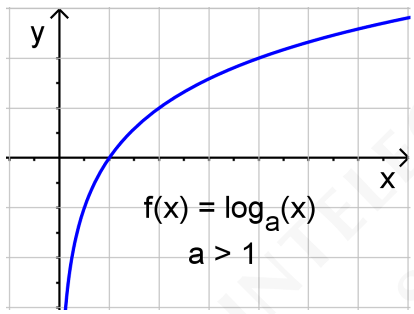
Observación:

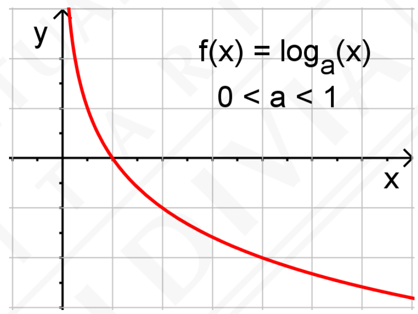
$$\boxed{\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y}$$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Una función **f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,** definida por **$f(x) = \log_a x$, con $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$** se denomina **función logarítmica**.

GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA





Observaciones:

- El dominio es: $Df = \mathbb{R}^+$
- El recorrido es: $Rf = \mathbb{R}$
- La gráfica intersecta al eje x en el punto (1, 0).
- Si $a > 1$, entonces $f(x) = \log_a x$ es creciente.
- Si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = \log_a x$ es decreciente.
- La curva no intersecta al eje y.
- La función logarítmica es **biyectiva.**