RESUMEN 11

ÁLGEBRA Y FUNCIONES I

Nombre : ___________________

Curso : ___________________

Profesor : ___________________

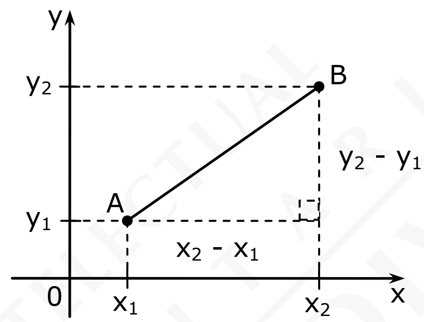
PREUNIVERSITARIO
PEDRO DE VALDIVIA
Tu Libertad de Elegir

ECUACIÓN DE LA RECTA

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos (medida del segmento generado por dichos puntos), $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, se determina mediante la expresión:

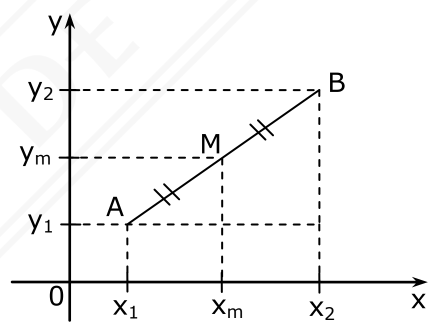
$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$



COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Dados los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

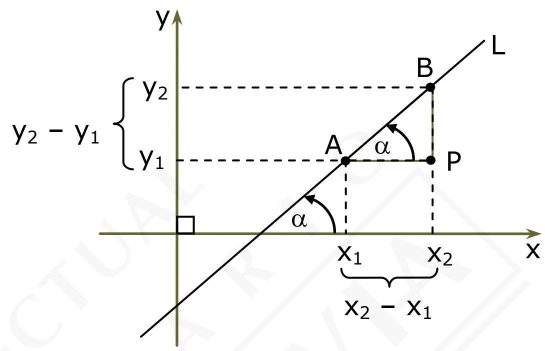
$$\boxed{x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}\ ,\quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$



PENDIENTE DE UNA RECTA

Es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación (ángulo que forma la recta con el eje x, en sentido antihorario, desde el eje x hacia la recta)

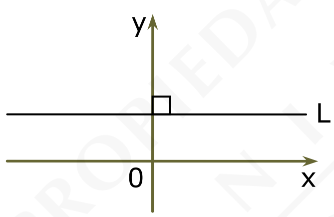
$$\boxed{m = tg\,\alpha = \frac{BP}{PA} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



RELACIÓN ENTRE EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN Y LA PENDIENTE DE LA RECTA

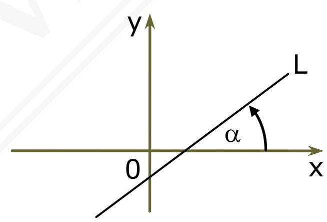
Sea α el ángulo de inclinación y sea **m** la pendiente de la recta **L.** Entonces:

(α = 0º) si y sólo si (m = 0)



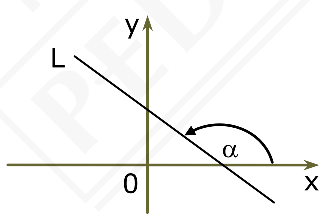
L es paralela al eje x

(0º < α < 90º) si y sólo si (m > 0)



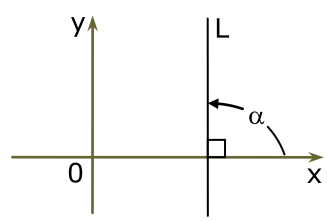
L tiene pendiente positiva

(90º < α < 180º) si y sólo si (m < 0)



L tiene pendiente negativa

(α = 90º), si y sólo si (m no está definida)



L es paralela al eje y

ECUACIÓN DE LA RECTA EN EL PLANO

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

A, B y C son Reales
Si A = 0 $\Rightarrow$ B $\neq$ 0
Si B = 0 $\Rightarrow$ A $\neq$ 0

ECUACIÓN PRINCIPAL DE LA RECTA

$$\boxed{y = mx + n}$$

m = pendiente, $m = -\frac{A}{B}$

n = coeficiente de posición

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO $A(x_1, y_1)$ Y TIENE PENDIENTE DADA m

$$\boxed{(y - y_1) = m(x - x_1)}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS $A(x_1, y_1)$ Y $B(x_2, y_2)$

$$\boxed{(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

ECUACIÓN DE SEGMENTOS O CANÓNICA

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS QUE ESTÁN EN LOS EJES.

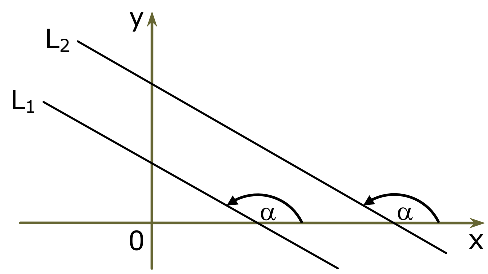
$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

a ≠ 0 y b ≠ 0
(a, 0) es el punto del eje X
(0, b) es el punto del eje Y

RECTAS PARALELAS

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales o ambas tienen pendientes que se indeterminan.

Sean L_1 y L_2 rectas de pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Entonces:

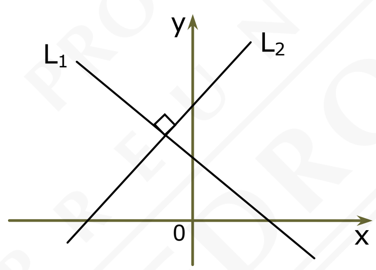


Si m_1 y m_2 pertenecen a los reales, entonces $L_1 // L_2$ si y sólo si $m_1 = m_2$

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1 ó cuando en una de las rectas la pendiente es cero y en la otra la pendiente se indetermina.

Sean L_1 y L_2 rectas de pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Entonces:



Si m_1 y m_2 pertenece a los reales, entonces $L_1 // L_2$ si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

SISTEMAS DE ECUACIONES

Dos ecuaciones de primer grado, las cuales tienen las mismas dos incógnitas, constituyen un **sistema de ecuaciones lineales**.

La forma general de un sistema de ecuaciones de primer grado es:

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{array}\right|$$

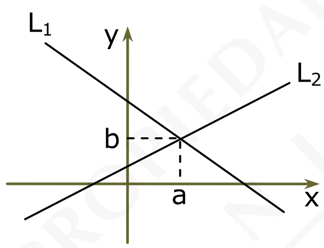
donde A, B, C, D, E y F son números reales.

Se denomina **solución del sistema** a todo par ordenado (x, y) que **satisfaga simultáneamente** ambas ecuaciones.

RESOLUCIÓN GRÁFICA

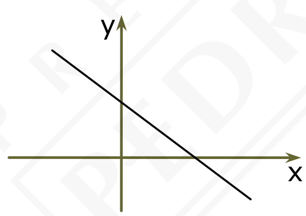
Para resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ambas rectas se representan en un sistema de ejes coordenados, obteniendo de esta forma uno de los siguientes casos:

1.- Las rectas se intersectan en un punto, cuyas coordenadas (a, b) corresponden a la solución del sistema. Las rectas L_1 y L_2 son secantes.



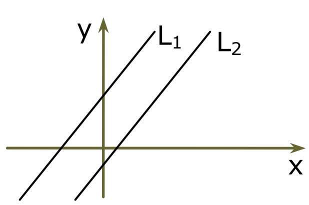
$L_1 \cap L_2 = (a, b)$

2.- Las dos rectas son paralelas coincidentes, dando origen a infinitas soluciones



$L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$

3. Las dos rectas son paralelas no coincidentes, por lo tanto no hay solución.



$L_1 \cap L_2 = \varnothing$ (vacío)

RESOLUCIÓN ALGEBRAICA

Para resolver algebraicamente un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas existen varios métodos; utilizaremos sólo tres de ellos: sustitución, igualación y reducción.

MÉTODO DE IGUALACIÓN: Se debe **despejar** la misma variable en ambas ecuaciones y luego éstos resultados se igualan, generándose así una ecuación con una incógnita.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN: Se debe **despejar** una de las variables en una de las ecuaciones y luego **reemplazarla** en la otra ecuación, generándose así una ecuación con una incógnita.

MÉTODO DE REDUCCIÓN: Se deben **igualar** los coeficientes de una de las incógnitas, en ambas ecuaciones, multiplicando ambos miembros convenientemente, luego se suman o restan ambas ecuaciones, resultando así una ecuación con una incógnita.

ANÁLISIS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Sea el sistema: $\begin{array}{l|} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \hline \end{array}$. Entonces:

I) El sistema tiene **solución única** si $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

II) El sistema tiene **infinitas soluciones** si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

III) El sistema **no tiene solución** si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen aplicación en problemas de planteo cuyo enunciado implica utilizar dos ecuaciones de dos incógnitas que podrá ser resuelto mediante un sistema de ecuaciones. Cómo por ejemplo: problemas de edades, de cifras o dígitos, etc.

INECUACIONES DE PRIMER GRADO Y PROBLEMAS DE INECUACIONES

Una relación entre números o letras en que se usan los signos <, >, ≤ o ≥ se llama **desigualdad.**

Cuando una desigualdad presenta una incógnita se denomina **inecuación** y su valor de verdad (verdadero o falso) dependerá del valor que le asignemos a la incógnita. Para resolver inecuaciones es necesario conocer las propiedades de las desigualdades.

PROPIEDADES

- Si a los dos miembros de una desigualdad se le suma un mismo número, el sentido de la desigualdad **no cambia**

Si **a, b, c** son números reales y $\mathbf{a < b}$, entonces $\mathbf{a + c < b + c}$

- Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican por un mismo **número positivo**, el sentido de la desigualdad **no cambia**

Si **a, b, c** son números reales tales que $\mathbf{a < b}$ y $\mathbf{c > 0}$, entonces $\mathbf{ac < bc}$

- Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican por un mismo **número negativo**, el sentido de la desigualdad **cambia**

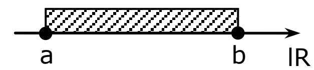
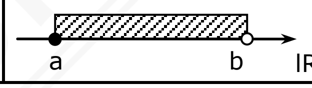
Si **a, b, c** son números reales tales que $\mathbf{a < b}$ y $\mathbf{c < 0}$, entonces $\mathbf{ac > bc}$

- Si de los miembros de una desigualdad, ambos positivos o ambos negativos, se consideran sus recíprocos la desigualdad **cambia**

Si $\mathbf{0 < a < b}$ ó $\mathbf{a < b < 0}$, entonces $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}$

INTERVALOS EN $\mathbb{R}$

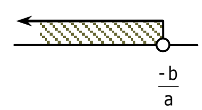
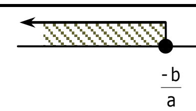
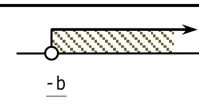
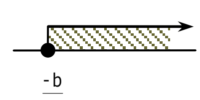
Se llama intervalo en IR al conjunto de números reales que cumple con la desigualdad dada.

Intervalo cerrado desde a hasta b, inclusive.	$[a\ ,\ b] = \{x \in \mathrm{IR}\ /\ a \le x \le b\}$	
Intervalo abierto entre a y b.	$]a\ ,\ b[\ = \{x \in \mathrm{IR}\ /\ a < x < b\}$	
Intervalo semiabierto o semicerrado.	$]a\ ,\ b] = \{x \in \mathrm{IR}\ /\ a < x \le b\}$ $[a\ ,\ b[\ = \{x \in \mathrm{IR}\ /\ a \le x < b\}$	 

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son desigualdades que se pueden reducir a una de las formas siguientes: $ax + b \ge 0$, $ax + b \le 0$, $ax + b > 0$ ó $ax + b < 0$, con $a \ne 0$, y que son verdaderas para un conjunto de valores de la incógnita **x**, el cual se llama **conjunto solución** de la inecuación. Este conjunto se puede representar mediante la notación de conjunto, intervalo o gráfica.

Al despejar la incógnita en una inecuación lineal, se llega a una de las siguientes situaciones:

Inecuación	Conjunto Solución	Representación Gráfica
$x < \frac{-b}{a}$	$S = \left]-\infty, \frac{-b}{a}\right[$	
$x \le \frac{-b}{a}$	$S = \left]-\infty, \frac{-b}{a}\right]$	
$x > \frac{-b}{a}$	$S = \left]\frac{-b}{a}, +\infty\right[$	
$x \ge \frac{-b}{a}$	$S = \left[\frac{-b}{a}, +\infty\right[$	

SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Es un sistema formado por dos o más inecuaciones de primer grado con una incógnita.

El conjunto solución del sistema es la intersección de los conjuntos solución de cada inecuación. Es decir, si S_1, S_2, ..., S_n son los conjuntos solución de cada inecuación y S es el conjunto solución del sistema, entonces:

$$\boxed{\mathbf{S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \ldots \cap S_n}}$$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

$|x| \leq a$, si y sólo sí $-a \leq x \leq a$
$|x| \geq a$, sí y sólo sí $x \leq -a$ o $x \geq a$

OBSERVACIÓN:

- Si $x^2 \leq a^2$, siendo **a** un número real no negativo, entonces $|x| \leq a$.
- Si $x^2 \geq a^2$, siendo **a** un número real no negativo, entonces $|x| \geq a$.

PROBLEMAS DE INECUACIONES

En estos problemas aparecen expresiones que hay que traducir a los símbolos >, <, ≥ o ≤, tales como: "a lo menos" (≥), "cuando mucho" (≤), "como mínimo" (≥), "como máximo" (≤), "sobrepasa" (>), "no alcanza" (<), etc. Una vez planteada la inecuación o sistema de inecuaciones, se determina el conjunto solución, y al igual que en los problemas de ecuaciones hay que fijarse en la pregunta del problema.