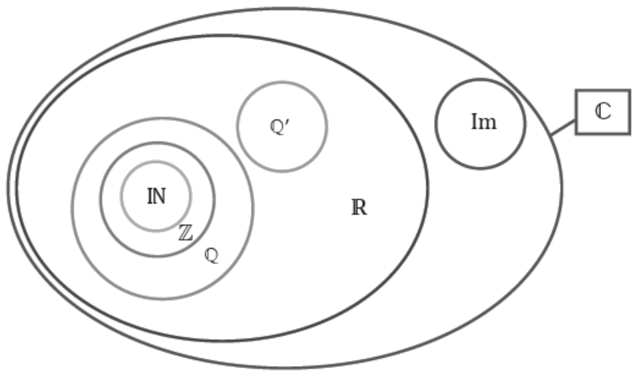
RESUMEN P.S.U. MATEMÁTICA

NÚMEROS (17 PREGUNTAS)



- **Números Naturales** ($\mathbb{N}$): Son los elementos del conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$.
  - Números Primos: Números Naturales que solo tienen dos divisores, la unidad y el mismo número. $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23 \dots\}$.
    Recuerda: El 1 no es un número primo
  - Números Compuestos: Números Naturales que tienen más de dos divisores. $C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \dots\}$

- **Números Cardinales** ($\mathbb{N}_0$): Son los elementos del conjunto $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

- **Números Enteros** ($\mathbb{Z}$): Son los elementos del conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- **Números Racionales** ($\mathbb{Q}$): Son los del conjunto $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.
  - Las equivalencias más utilizadas entre fracciones, decimales y porcentajes son:

$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$ $\qquad$ $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 33\frac{1}{3}\%$

$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$ $\qquad$ $\frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

$\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$ $\qquad$ $\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$

$\frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$ $\qquad$ $\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\%$

  - **Orden en** $\mathbb{Q}$: Una forma de comprobar cuándo una fracción en mayor o menor que otra es simplemente haciendo un producto en forma cruzada. La otra posibilidad es pasar las fracciones a decimales.

- **Números Irracionales** ($\mathbb{Q}'$): Son los números que no se pueden escribir como fracción, por ejemplo $\sqrt{2}$.
- **Números Reales** ($\mathbb{R}$): Son todos los números que pertenecen a los racionales o a los irracionales.
- **Aproximaciones:** Existen varios métodos de aproximación siendo estos:
  - *Truncamiento:* Se eliminan las cifras a partir de un orden considerado. Ejemplo: Aproximar por truncamiento el número 2,345378 a las milésimas. Simplemente se eliminan las cifras que están después de las milésimas, resultando 2,345.
  - *Redondeo:* Se eliminan las cifras a partir de un orden considerado, pero teniendo en cuenta que si la primera cifra eliminada es 5 o más de 5 a la última cifra decimal que se deja se le añade uno. Ejemplo: Aproximar por redondeo el número 4,2451 a las centésimas y luego a las milésimas. En el primer caso, resulta 4,25 y en el segundo 4,245.

- *Aproximación por defecto:* Una aproximación es por defecto si la aproximación es menor que el número inicial. El truncamiento es siempre una aproximación por defecto. Ejemplo: Al aproximar a la centésima por defecto el número 2,438 resulta 2,43; donde $2{,}43 < 2{,}438$.
- *Aproximación por exceso:* Una aproximación es por exceso si la aproximación es mayor que el número inicial. Ejemplo: Al aproximar a la centésima por exceso el número 5,732 resulta 5,74; donde $5{,}74 > 5{,}732$.

- **Números Complejos** ($\mathbb{C}$): Son los números de la forma $a+bi$, con a y b pertenecientes a $\mathbb{R}$. Ejemplo: $5-4i$
  - Los Complejos también pueden ser representados por pares ordenados. Por ejemplo: $5-4i=(5,-4)$
  - Cuando un número complejo no tiene parte real, se dice que es un imaginario puro Ejemplo: $\sqrt{-9}=3i$
  - Como $i=\sqrt{-1}$ podemos obtener los valores de:
$$i^2=-1$$
$$i^3=-i$$
$$i^4=1$$
  - ***Complejo Conjugado:*** Sea el complejo $z=a+bi$, se denomina conjugado de z, al complejo $\bar{z}=a-bi$. Por ejemplo: Si $z=5-2i$, entonces $\bar{z}=5+2i$.

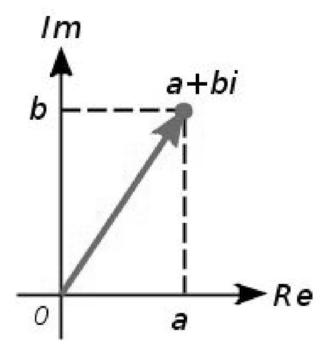
- Operatoria de números complejos: Los números complejos se pueden sumar, restar y multiplicar en forma análoga a binomios algebraicos.

  - **Suma de Números Complejos:** Se suman las partes reales primero y luego las partes imaginarias (como con los términos semejantes). Ejemplo:
$$(4-i)+(-6+2i)=-2+i$$
  - **Resta de Números Complejos:** Se restan las partes reales primero y luego las partes imaginarias. Ejemplo:
$$2+3i-(5-7i)=2+3i-5+7i=-3+10i$$
  - **Multiplicación de Números Complejos:** Para multiplicar se debe operar como una multiplicación de binomios. Ejemplo:
$$\begin{aligned}(1-9i)(2-5i)&=2-5i-18i+45i^2\\&=2-45-5i-18i\\&=-43-23i.\end{aligned}$$

  - **División de Números Complejos:** Para dividir números complejos es necesario amplificar la fracción por el **conjugado** del denominador.

Ejemplo: $\frac{2-3i}{1+i}\rightarrow\frac{2-3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{-1-5i}{1-i^2}=\frac{-1-5i}{1+1}=\frac{-1-5i}{2}$.

  - **Representación gráfica de un número complejo:** Podemos representar un número complejo en un sistema cartesiano, haciendo coincidir el eje x (horizontal) con la parte real del número complejo y el eje y (vertical) con la parte imaginaria.



  - **Módulo de un complejo:** Si $z=a+bi$, entonces el módulo de z es $|z|$, tal que $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
- **Potencias:** Una potencia es el resultado de multiplicar un número por sí mismo varias veces.

Propiedades de las potencias: Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{m}$ números reales distintos de cero.

1. $a^0 = 1$ **Obs:** 0^0 es indeterminado
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
3. $a^n : a^m = a^{n-m}$
4. $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m}$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
7. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
8. $(a : b)^n = a^n : b^n$

- **Raíces:** Las raíces son la operación contraria a las potencias. La raíz enésima de b se denota como $\sqrt[n]{a}$ tal que:

$$\boldsymbol{a^n = b \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b}} \qquad \text{Con } n \in \mathbb{N}$$

Donde $\boldsymbol{n}$ se conoce como índice de la raíz y $\boldsymbol{b}$ como radical o cantidad del sub-radical.

Propiedades de las raíces: Considere que $\boldsymbol{a, b, k, m,}$ y $\boldsymbol{n}$ son números reales distintos de cero y $a > 0$

1. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
3. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$
4. $\sqrt[n]{a^n \cdot b^m} = a\sqrt[n]{b^m}$
5. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$
6. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n : k]{a^{m : k}}$
7. $\sqrt[n]{a^n} = a$
8. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

- **Logaritmos:** Exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado. Si se escribiera como ecuación, $\boldsymbol{\log_b a = x}$, donde $\boldsymbol{b}$ es la base del logaritmo y $\boldsymbol{a}$ es su argumento, con $b > 0, \quad b \neq 1, a > 0$ corresponde a resolver $\boldsymbol{b^x = a}$. Es decir:

$$\mathbf{\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a}$$

Propiedades de los logaritmos: Sean a, b, c números reales y positivos, $b \neq 1$

1. Logaritmo de la base
$$\log_b b = 1$$
2. Logaritmo de la unidad
$$\log_b 1 = 0$$
3. Logaritmo de un producto
$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$
4. Logaritmo de un cociente
$$\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$$
5. Logaritmo de una potencia
$$\log_b a^c = c \cdot \log_b a$$
6. Logaritmo de una raíz
$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$$
7. Cambio de base
$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$
8. Propiedad especial
$$b^{\log_b (x)} = x$$

Algunos valores de logaritmos:

$\log 10 = 1$ $\qquad$ $\log 100 = 2$

$\log 0{,}1 = -1$ $\qquad$ $\log 0{,}01 = -2$