GUÍA TÉCNICA N°2: LEYES LÓGICAS Y SIMPLIFICACIÓN

Matemática

1. Equivalencia Lógica: Distintas formas de decir lo mismo

En el lenguaje natural, podemos expresar una idea de muchas formas. En lógica, ocurre lo mismo. Dos fórmulas son **Equivalentes** ($\equiv$) si tienen exactamente la misma tabla de verdad.

Ejemplo Introductorio: Analicemos la frase *'No es cierto que: tengo hambre y tengo sueño'*. ¿Es lo mismo que decir *'No tengo hambre O no tengo sueño'*?

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}$
V	V	V	**F**	F $\vee$ F	**F**
V	F	F	**V**	F $\vee$ V	**V**
F	V	F	**V**	V $\vee$ F	**V**
F	F	F	**V**	V $\vee$ V	**V**

Conclusión: Las columnas sombreadas son idénticas. Las expresiones son intercambiables.

2. El 'Kit de Herramientas': Las 6 Leyes Fundamentales

Para no hacer tablas de verdad gigantes, usamos estas leyes para transformar expresiones complejas en simples.

1. **Doble Negación:**
$$\neg(\neg p) \equiv p$$
Ejemplo: 'No es cierto que no voy a ir' = 'Voy a ir'.

2. **Leyes de De Morgan (Para negar grupos):**
   - $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (La negación de Y es O).
   - $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (La negación de O es Y).

   Ejemplo: Negar 'Como postre O tomo café' es 'NO como postre Y NO tomo café'.

3. **Definición de Implicancia (¡Vital!):**
$$p \implies q \equiv \neg p \vee q$$
Explicación: Una implicancia solo es falsa si el primero es V y el segundo F. La expresión $\neg p \vee q$ captura exactamente eso. *Ejemplo:* 'Si llueve, me mojo' es equivalente a 'No llueve O me mojo'.

4. **Contrapositiva:**
$$p \implies q \equiv \neg q \implies \neg p$$
Ejemplo: 'Si soy chileno, soy sudamericano' $\equiv$ 'Si NO soy sudamericano, NO soy chileno'.

5. **Distributividad (Como en álgebra):**

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Nota: El operador de afuera se 'reparte' a los de adentro.

6. **Leyes de Absorción (Para simplificar rápido):**

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Ejemplo: 'Soy Eduardo Y (Soy Eduardo o soy Astronauta)'. Basta con decir 'Soy Eduardo'. Lo demás sobra.

3. Ejemplos Resueltos: Simplificación

Caso 1: Negar una Implicancia

Problema: Niegue la expresión 'Si estudias, apruebas'.

$$\neg(p \implies q)$$

1. Transformamos la implicancia (Ley 3): $\neg(\neg p \vee q)$
2. Aplicamos De Morgan (Ley 2): $\neg(\neg p) \wedge \neg q$
3. Doble negación (Ley 1): $p \wedge \neg q$

Resultado: 'Estudias Y NO apruebas'. (Esta es la única forma de demostrar que la promesa era falsa).

Caso 2: Reducción

Problema: Simplifique $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
1. Factorizamos por p (Distributividad Inversa): $p \wedge (q \vee \neg q)$
2. Analizamos el paréntesis: $(q \vee \neg q)$ siempre es Verdadero (Tautología).
3. Nos queda: $p \wedge \text{Verdadero} \equiv p$

Resultado: p.

4. 4. Entrenamiento (Dificultad Ascendente)

Utilice las leyes lógicas para transformar o simplificar las siguientes expresiones.

Nivel 1: Traducción Directa

1. Escriba la contrapositiva de: 'Si hay sol, vamos a la playa'.
2. Transforme la implicancia a 'O' ($\vee$): 'Si no pagas, te cortan la luz'.
3. Aplique De Morgan: $\neg(A \wedge \neg B)$.

Nivel 2: Simplificación Intermedia

4. Simplifique: $\neg(\neg p \vee q) \vee q$
5. Demuestre que: $(p \wedge q) \implies p$ es una Tautología (siempre V).
6. Use absorción en: $A \vee (A \wedge B \wedge C)$.

Nivel 3: Ingeniería Lógica

7. Niegue la siguiente frase completa: 'Si como mucho y no hago ejercicio, entonces engordo'.
8. Simplifique al máximo: $[p \implies (q \wedge \neg q)]$.
9. Simplifique: $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$.
10. Demuestre sin tablas de verdad que: $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$.

Recursos Digitales y Material Complementario
`edu2610.github.io/educacion`