

GUÍA TÉCNICA N°3: CUANTIFICADORES LÓGICOS

Matemática

1. Contexto: Cuando la lógica se vuelve global

Hasta ahora hemos trabajado con proposiciones fijas como ' p : El auto es rojo'. Pero en la ciencia y la vida real, rara vez hablamos de un solo objeto. Solemos hacer afirmaciones sobre **grupos**:

- '**Todos** los metales conducen electricidad'.
- '**Algún** estudiante aprobó el examen'.

Para transformar estas frases en matemática, necesitamos los **Cuantificadores**.

2. Los Dos Gigantes: \forall y \exists

2.1. A. El Cuantificador Universal (\forall)

Se lee: '**Para todo...**', '**Todos**', '**Cualquiera**'. Indica que una propiedad se cumple para el 100 % de los elementos de un conjunto.

Ejemplos

- **Lenguaje:** 'Todos los humanos son mortales'.
- **Lógica:** $\forall x \in \text{Humanos} : x \text{ es mortal}$.
- **Verdad:** Para que sea VERDADERO, no puede fallar ni uno.

2.2. B. El Cuantificador Existencial (\exists)

Se lee: '**Existe un...**', '**Algún**', '**Hay al menos uno**'. Indica que la propiedad se cumple para **uno o más** elementos (no necesariamente todos).

Ejemplos

- **Lenguaje:** 'Hay cisnes que son negros'.
- **Lógica:** $\exists x \in \text{Cisnes} : x \text{ es negro}$.
- **Verdad:** Para que sea VERDADERO, basta con encontrar **uno solo**.

3. El Arte de la Negación (¡Cuidado!)

El error más común es creer que lo contrario de 'Todos aprueban' es 'Nadie aprueba'. **Eso es FALSO.**

- **Negar el Universal ($\neg\forall$):** Para demostrar que es falso que 'Todos dicen la verdad', basta con encontrar a **un mentiroso**.

$$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$$

Frase: 'Todos van a la fiesta' $\xrightarrow{\text{Negación}}$ 'Existe al menos uno que NO va'.

- **Negar el Existencial ($\neg\exists$):** Para demostrar que es falso que 'Existe un unicornio', debo probar que **todos** los animales NO son unicornios.

$$\neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \neg P(x)$$

Frase: 'Alguien rompió el vidrio' $\xrightarrow{\text{Negación}}$ 'Todos NO rompieron el vidrio' (Nadie lo rompió).

Lo anterior es equivalente a probar la 'no existencia' de alguien que cumpla la propiedad

4. Ejemplos Resueltos

Ejemplo 1: Evaluación de Verdad

Universo: Números naturales $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Afirmación: $\forall x, x > 0$.

Análisis: El 1 es mayor a 0, el 2 también... el 5 también. Cumplen todos.

Valor de Verdad: Verdadero.

Ejemplo 2: Negación en Contexto

Afirmación: 'Todos los políticos son corruptos'.

Negación Lógica: No necesito que todos sean honestos. Solo necesito encontrar uno.

Resultado: 'Existe al menos un político que NO es corrupto'.

5. Ejercicios de Entrenamiento

Ítem I: Verdadero o Falso

Considere el grupo de amigos: Ana (15 años), Beto (18 años), Carla (18 años).

1. $\forall x, x$ es mayor de edad (≥ 18). (--)
2. $\exists x, x$ tiene nombre que empieza con C. (--)
3. $\forall x, x$ tiene menos de 20 años. (--)
4. $\exists x, x$ tiene 14 años. (--)

Ítem II: Traductor Lógico

Escriba la *NEGACIÓN* lógica de las siguientes frases (No diga si es *V* o *F*, solo *niéguela*).

5. 'Todos los días sale el sol'.
6. 'Existe una manzana que es azul'.
7. 'Todas las respuestas de esta guía son correctas'.
8. 'Algún alumno se quedó dormido'.
9. 'Para todo número, su cuadrado es positivo'.
10. 'Hay al menos un país donde no llueve'.