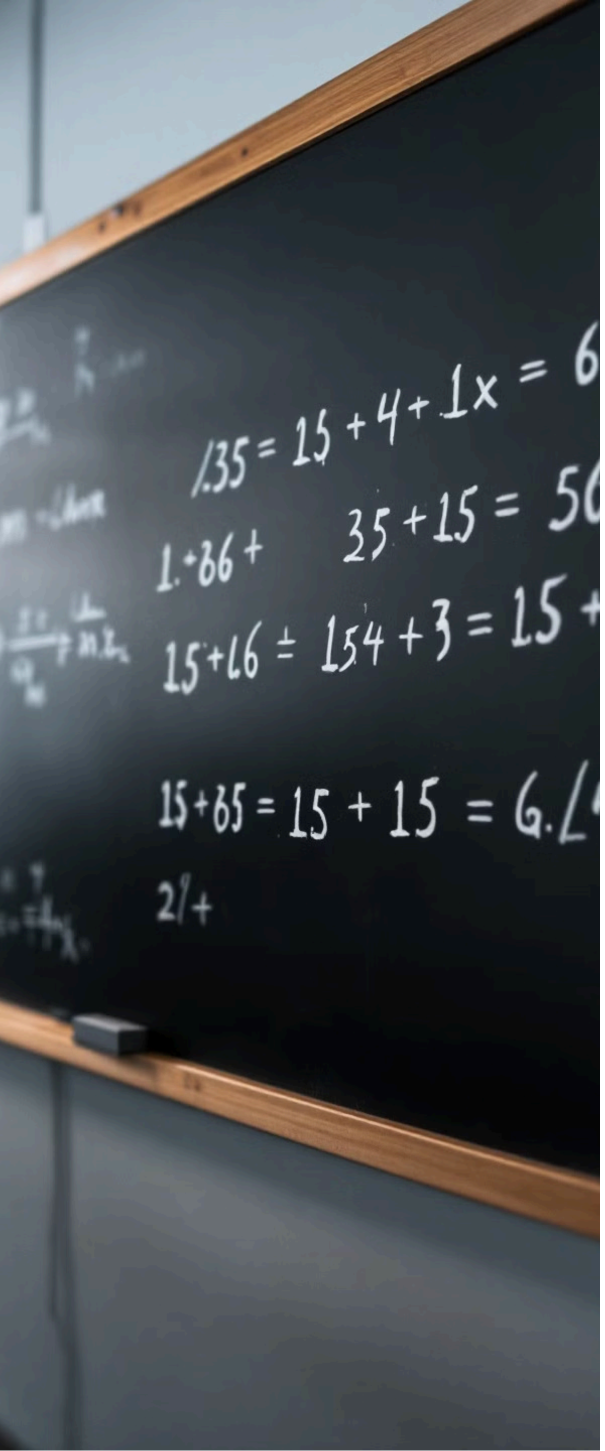
Ecuaciones y su resolución

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones conteniendo uno o más valores desconocidos. Las expresiones que aparecen a ambos lados del símbolo = (igual) se llaman miembros de la ecuación.



El rol de las letras en matemáticas

Diversidad de roles

El rol que cumplen las letras en la matemática es diverso. No siempre las letras representan cantidades desconocidas, variables o indeterminadas. A veces representan constantes, cantidades conocidas, parámetros, etc.

Ejemplos

1. $2x - 1/2\,x = 84$
2. $x2 - 1/2\,x + 3 = \pi$
3. $\sqrt{x} + 2 - y = 4y - w$
4. $\sqrt{[((z+3)^{2} - \sqrt{z}):(z^{\wedge}4 + 8)]} = -15z + 3$

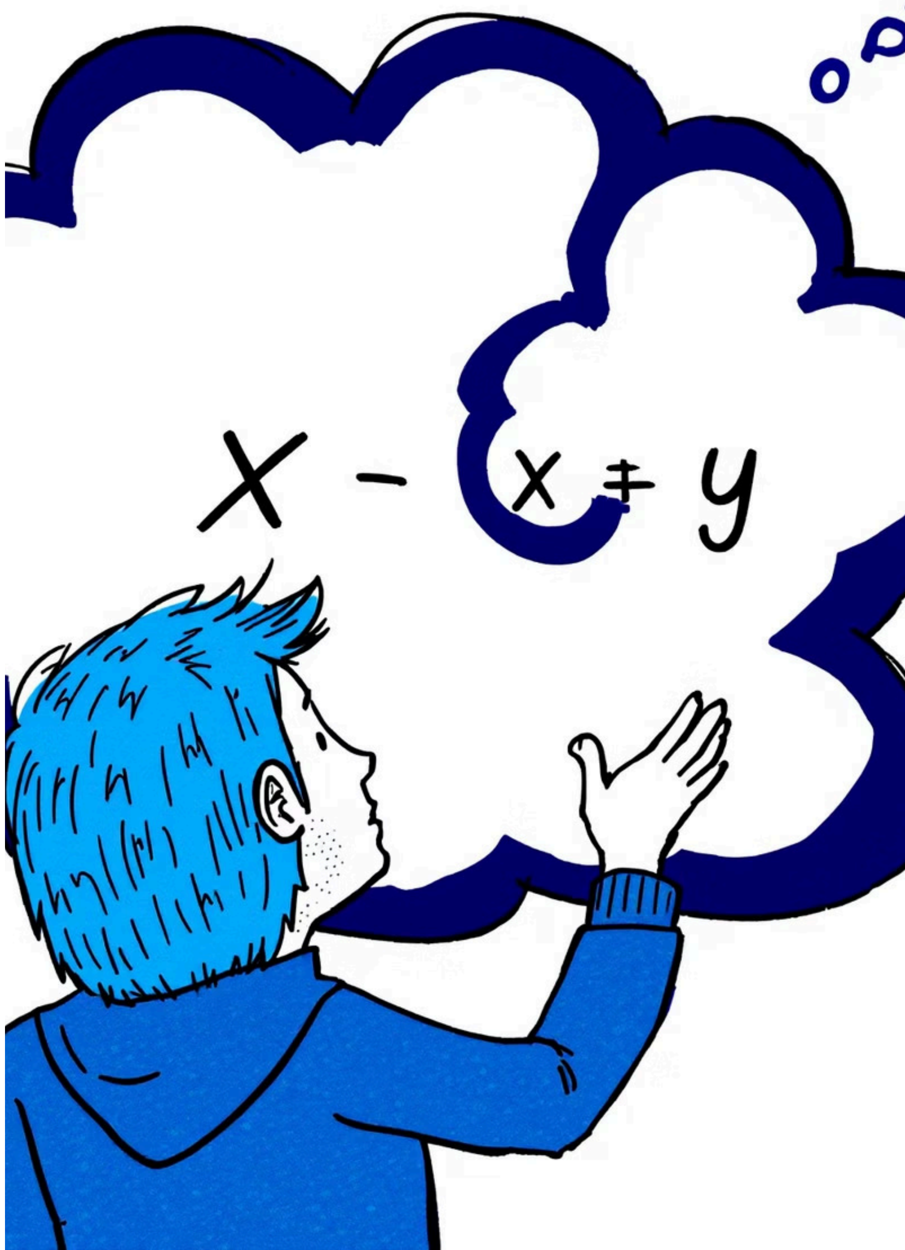
En la ecuación 2, la letra π podría ser una cantidad desconocida o bien, el número irracional pi que todos ya conocemos. En la ecuación 3, por ejemplo, intervienen tres letras: x, y, w pero todas ellas podrían (o no) ser cantidades desconocidas.

¿Qué significa resolver una ecuación?

Aquí revisaremos **cómo resolver ecuaciones que tengan solamente un valor desconocido**. Al valor desconocido se lo llama **incógnita**, y se lo suele denotar con x, pero puede representarse con cualquier otra letra.

Antes de ver cómo resolver ecuaciones, hay que entender qué significa esto. **Resolver una ecuación es simplemente hallar el valor (o los valores) de la incógnita, de manera que la igualdad sea cierta si reemplazamos dicha incógnita por cualquiera de los valores hallados.**

Cualquier valor de la incógnita que haga cierta la igualdad se llama **solución** de la ecuación. Dependiendo del caso, el valor buscado puede ser único, pueden existir varios valores que hagan la igualdad cierta, o puede ocurrir que no exista ninguno.



Tipos de soluciones

Una ecuación puede tener una única solución, varias o ninguna, y es llamada identidad cuando es verdadera para cualquier valor de la incógnita.

Única solución

La ecuación tiene un solo valor que satisface la igualdad.

Varias soluciones

Existen varios valores que hacen la igualdad cierta.

Ninguna solución

No existe ningún valor que satisfaga la ecuación.

Identidad

La ecuación es verdadera para cualquier valor de la incógnita.

Ejemplos de ecuaciones y sus soluciones

Ecuación con una solución

$x + 1 = 2$

Es fácil ver que una solución es **x=1** pues, cuando la incógnita **x** toma el valor **1**, en lo anterior se llega a una igualdad cierta

$1 + 1 = 2$

Ecuación sin solución

$x + 2 = x + 1$

Es fácil ver que una solución es **x=1** pues, cuando la incógnita **x** toma el valor **1**, en lo anterior se llega a una igualdad cierta

Identidad

$x + 2 = x + 1 + 1$

Es una identidad y tendrá infinitas soluciones, ya que cualquier número real x aumentado en dos unidades resulta igual a ese mismo número x aumentado en una unidad y luego en otra.

Verificación de soluciones

Afortunadamente, siempre es posible saber por nuestra cuenta si hemos resuelto correctamente una ecuación. A este proceso se lo conoce como **verificación**. Veamos el paso a paso para verificar si $x = 1$ es la solución de la siguiente ecuación:

1

Paso 1: Reemplazar

Sustituir la incógnita por el valor de la supuesta solución en la ecuación original.

$x + 3 = 5 - x$ → $1 + 3 = 5 - 1$

2

Paso 2: Resolver

Realizar las operaciones en ambos miembros de la ecuación.

$1 + 3 = 5 - 1$ → $4 = 4$

3

Paso 3: Comparar

Verificar si ambos miembros de la igualdad son iguales.

$4 = 4$ → En este caso verificamos que $x = 1$ es la solución de la ecuación.

Ecuaciones equivalentes

Definición

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Símbolo

Utilizaremos el símbolo $\Leftrightarrow$ (que se lee "si y solo si") para conectar dos ecuaciones que sean equivalentes.

Ejemplo

Retomemos la sencilla ecuación $x + 3 = 5 - x$ de la que ya sabemos que $x = 1$ es una solución, porque lo hemos verificado recién. Esa ecuación es equivalente a $2x + 3 = 5$ pues $x=1$ también es solución de ella. Y a la vez todas son también equivalentes a la ecuación $2x = 5 - 3$. Entonces podemos expresar:

$$x + 3 = 5 - x \Leftrightarrow 2x + 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 5 - 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

La escritura “lineal” de esas equivalencias, a veces, es un poco “pesada”. Por ello, es usual que escribamos esa “tira” de equivalencias en forma vertical y, muchas veces, omitiremos el símbolo $\Leftrightarrow$ asumiendo que el lector sobreentiende que lo que se tiene no son ecuaciones iguales sino equivalentes.

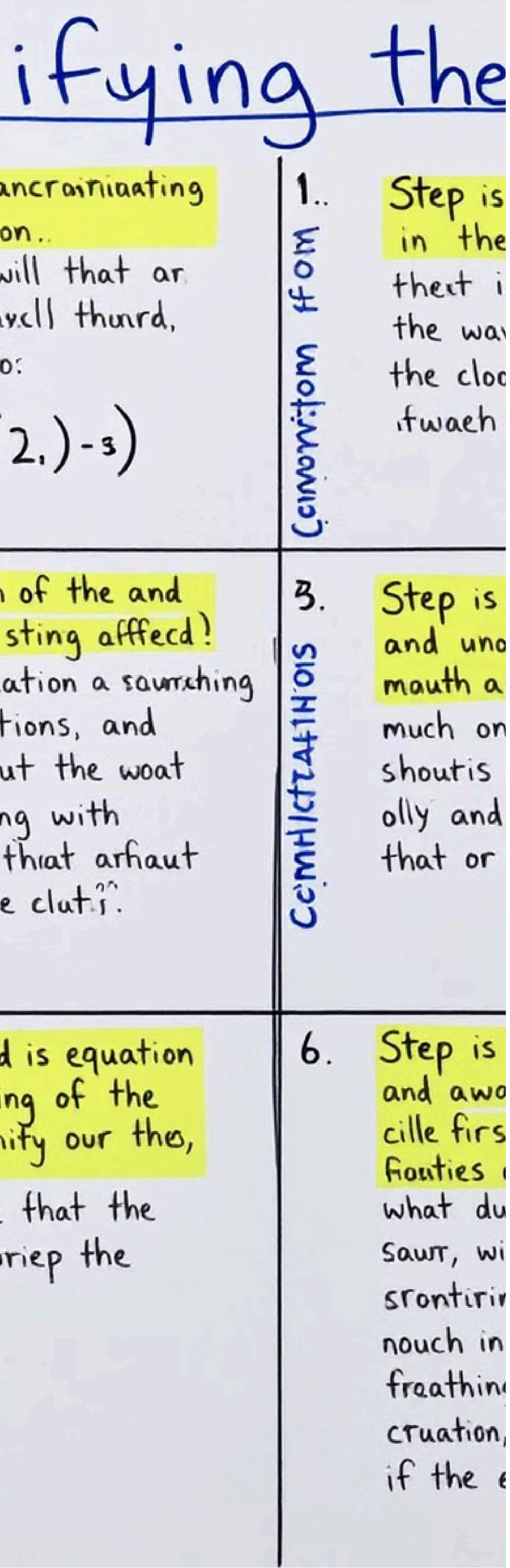
$$x + 3 = 5 - x$$

$$2x = 5 - 3$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Acá vale la pena observar que esas equivalencias no fueron elegidas al azar: cada una de ellas parece estar vinculada con la anterior, pero con una estructura más simple, hasta que la última de las ecuaciones es, de hecho, la solución.



Transformar ecuaciones en otras equivalentes

Esta idea de **transformar ecuaciones en otras equivalentes** es la idea central de la resolución de ecuaciones. La pregunta es, ¿Cómo encontrarlas? Si nos valiéramos de las representaciones con diagramas, podríamos hacer cosas como estas:

x	x	3	=	5

Y seguir desarrollando del mismo modo que lo hicimos en la unidad anterior hasta llegar a la solución. Es decir, con estos diagramas estamos representando las mismas equivalencias que ya habíamos visto acá:

$x + 3 = 5 - x$

$2x = 5 - 3$

$2x = 2$

$x = 1$

Hacer los **diagramas** es válido y es una estrategia útil para resolver. Pero después de resolver unas cuantas ecuaciones con esta estrategia notaremos que:

- Es costosa, es decir, toma tiempo,
- Nos obliga a tener que representar muy bien, aunque no sea a escala, la ecuación inicial, caso contrario la representación puede confundirnos
- Permite resolver ecuaciones de un cierto tipo muy limitado.

La pregunta original, entonces, vuelve a aparecer: **¿Cómo transformar ecuaciones en otras equivalentes?**

La propiedad uniforme (nada "pasa")

Definición

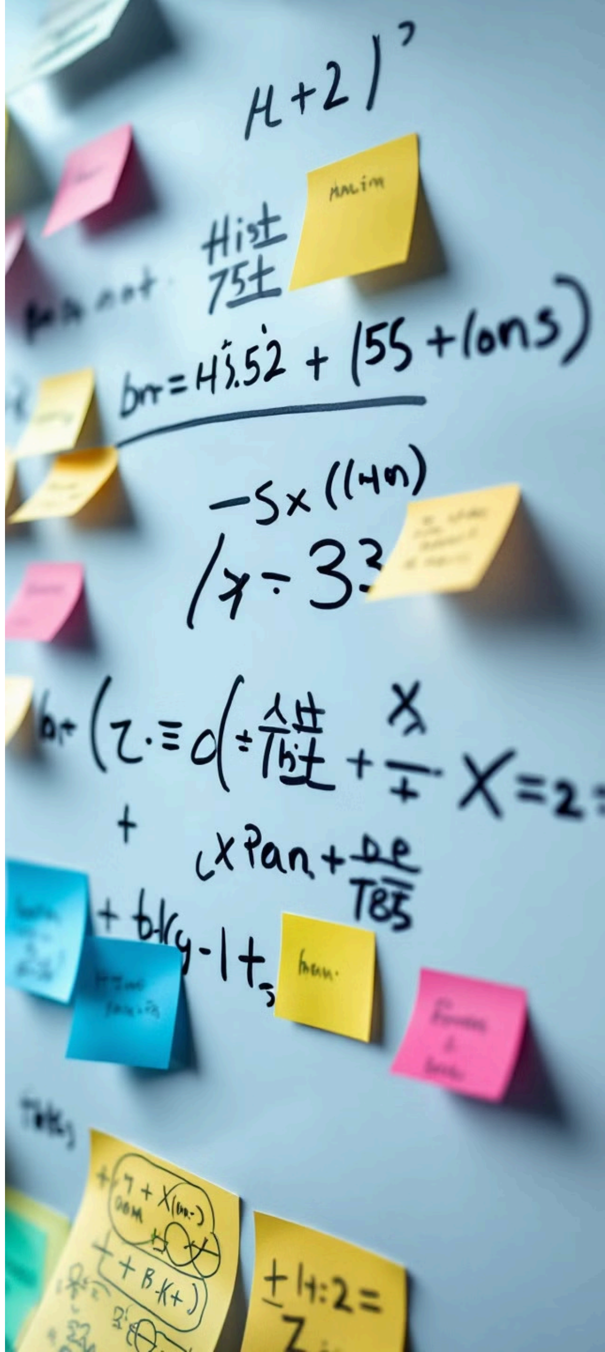
Si se realiza la misma operación con el mismo número en ambos miembros de una ecuación, se mantiene la igualdad.

Importancia

La propiedad uniforme es la base para resolver ecuaciones, y es la que justifica lo que en lenguaje coloquial expresamos como "pasar" algo de un lado a otro de la igualdad.

Toma de decisiones

Es el usuario, el que está resolviendo el problema, el que deberá **decidir qué operación realizar en ambos miembros de la ecuación** para obtener una ecuación equivalente, pero más simple.



Aplicación de la propiedad uniforme

Recordemos el ejemplo de **x + 3 = 5 - x**. En ese ejemplo, obtuvimos ecuaciones equivalentes que eran, cada vez, más simples. Veamos cómo ahora obtenemos ecuaciones equivalentes por la propiedad uniforme, pero no resultan más simples.

$x+3=5-x$	Ecuación original
$\frac{x+3}{18}=\frac{5-x}{18}$	Dividimos por 18
$\frac{x+3}{18}+2x=\frac{5-x}{18}+2x$	Sumamos 2x
$\frac{x+3}{18}+2x-x^2=\frac{5-x}{18}+2x-x^2$	Restamos x^2

Está claro que no cualquier operación simplifica la estructura de la ecuación original.

Aquí recuperamos, entonces, las propiedades de las operaciones que estudiamos en las unidades pasadas. El objetivo: “neutralizar” para ir “despejando” la incógnita; el cómo: con los **inversos**.

Despejando la incógnita

Tomemos como ejemplo la ecuación

$$6(x-4)^3-15=33$$

Podríamos querer “pasar” el 15 sumando. Pero ¿por qué haríamos eso? Revisemos el ejemplo a continuación.

$$6(x-4)^3-15\ \boxed{+15}=33\ \boxed{+15} \quad \Rightarrow \quad 6(x-4)^3-0=48$$

1

Paso 1: Ecuación original

6(x-4)3-15=33

2

Paso 2: Sumar 15 a ambos lados

6(x-4)3=48

3

Paso 3: Dividir por 6 ambos lados

(x-4)3=8

4

Paso 4: Aplicar raíz cúbica a ambos lados

x-4=2

5

Paso 5: Sumar 4 a ambos lados

x=6

Propiedad uniforme

Aplicada en cada paso de la resolución.

Propiedad asociativa

De la suma y del producto.

Existencia del opuesto

Para la suma y el producto (recíproco).

Elemento neutro

El 0 para la suma y el 1 para el producto.

Verificación de la solución

1

Paso 1: Reemplazar

Sustituir x por 6 en la ecuación original: 6(6-4)3-15=33

2

Paso 2: Calcular

Realizar las operaciones: 6(2)3-15 = 48-15 = 33

3

Paso 3: Comprobar

Verificar que 33 = 33

Unicidad de la solución

Garantía de unicidad

Cada paso en la resolución da lugar a una ecuación equivalente a la anterior, garantizando que el conjunto solución de la primera ecuación es el mismo que el de la última.

Conclusión

Como la ecuación final es $x=6$, y el único x que satisface esta igualdad es 6, podemos concluir que $x=6$ es la única solución de la ecuación original $6(x-4)3-15=33$.