

Ecuaciones en Derivadas Parciales y Series de Fourier

Eduardo Gambín Monserrat y Rubén Gaspar Marco

Introducción

Este documento ha sido redactado blablabla.

Índice general

I Ecuaciones en derivadas parciales	4
1. La ecuación de la cuerda vibrante	6
1.1. Formulación física	6
1.2. Solución general de la ecuación de la cuerda vibrante	8
1.3. La cuerda vibrante en un intervalo	9
1.4. Propiedades de las soluciones	12
1.5. La solución de Bernoulli	14
2. La ecuación del calor	17
2.1. Formulación física	17
2.2. Resolución por separación de variables (dimensión uno)	18
2.2.1. Varilla con extremos nulos	18
3. La ecuación de Laplace	20
3.1. Interpretación física	20
3.1.1. Problema del calor estacionario	20
3.1.2. Tres problemas clásicos sobre la ecuación de Laplace	21
3.1.2.1. Problema de Dirichlet	21
3.1.2.2. Problema de Neumann	21
3.1.2.3. Problema de Robin	21
3.1.2.4. Ecuación de Poisson	21
3.1.3. Potencial electrostático	21
3.2. Resolución del problema de Dirichlet en el disco plano	22
3.3. El núcleo de Poisson	24
3.3.1. Propiedades del núcleo de Poisson	25

II Teoría de las series de Fourier 27

4. Series de Fourier 28

4.1. Introducción	28
4.2. Series de Fourier en $L^1(\mathbb{T})$	29
4.3. Derivación e integración de series de Fourier	32
4.4. Unicidad de las series de Fourier	33
4.5. Series de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$	34

5. Convolución y series de Fourier 36

5.1. Introducción	36
5.2. Aproximación de la identidad	38
5.3. Núcleo de Dirichlet	39
5.4. El fenómeno de Gibbs	40
5.5. Sumabilidad de Cesàro y núcleo de Fejér	40
5.6. Aplicación de la teoría de series de Fourier	42
5.6.1. La desigualdad isoperimétrica	42
5.6.2. La desigualdad de Weierstrass	42
5.6.3. Teorema de equidistribución de Weyl	43

III Ecuaciones en derivadas parciales (continuación) 44

6. Más sobre ecuaciones en derivadas parciales 45

6.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de Sturm-Liouville	45
6.2. Membrana vibrante rectangular	47
6.3. Funciones de Bessel	48
6.4. Membrana circular	49
6.5. Problema de autovalores de $-\Delta$	49
6.6. La función de Weierstrass	50
6.7. Función de Riemann	51

Parte I

Ecuaciones en derivadas parciales

Introducción a las EDPs

Definición. Llamamos **EDP** (Ecuación en Derivadas Parciales) a cualquier ecuación que relacione una variable independiente $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, una función incógnita $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y sus derivadas parciales

$$D^N u := \left(\frac{\partial^N u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)_{\sum_{i=1}^n \alpha_i = N}$$

hasta un cierto orden. A $N \in \mathbb{N}$ se le suele llamar **orden** de la EDP. Decimos también que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es **solución clásica** de la EDP si $f \in C^N(\Omega)$ y cumple la ecuación para todo $x \in \Omega$.

Para ciertos operadores diferenciales tomaremos informalmente¹ la siguiente notación

$$\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} := \frac{\partial^N}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n \quad (\text{Operador parciales})$$

$$\nabla := D^1 = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}) \quad (\text{Operador nabla o gradiente})$$

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \text{Tr}(D^2) \quad (\text{Operador laplaciano})$$

$$\text{div } \vec{F} := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_i \quad \vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}. \quad (\text{Operador divergencia})$$

que utilizaremos a lo largo de estos apuntes (en contra de nuestra voluntad, por supuesto). También usaremos a menudo, para una función f de variables x_1, x_2, \dots, x_n , la notación $f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}} := \partial_{x_{i_1}} \partial_{x_{i_2}} \cdots \partial_{x_{i_k}} f$, donde los i_j pueden ser iguales. También se usa, porque a la gente le gusta lo breve, la notación análoga $\partial_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}} := \partial_{x_{i_1}} \partial_{x_{i_2}} \cdots \partial_{x_{i_k}}$.

Observación. Sea $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\text{div}(\nabla u) = \Delta u$.

¹Physicists are satanic people.

Capítulo 1

La ecuación de la cuerda vibrante

1.1. Formulación física

Este problema fue introducido por el matemático francés *Jean le Rond D'Alembert* (1717-1783) en sus investigaciones sobre los fenómenos de las cuerdas vibrantes [2, pp. 214-249]

Supongamos una cuerda flexible¹ con extremos fijos. Buscamos modelizar la altura que alcanza la cuerda en cierto punto de la misma y cierto momento del tiempo concreto, es decir, que, suponiendo un extremo de la cuerda en el origen y otro en L , buscamos una función

$$u : (0, \infty) \times (0, L) \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto u(t, x)$$

que modeliza la altura de la cuerda en el punto x tras t segundos. Introducimos las siguientes hipótesis:

1. La cuerda es tensa de longitud L .
2. La densidad de la cuerda es constante con valor ρ .
3. La tensión de la cuerda es constante con valor τ .
4. Las vibraciones sólo se producen en el eje vertical (es decir, que no hay desplazamientos horizontales) y son de muy pequeña amplitud².

Vamos a intentar obtener a partir de este problema físico una ecuación diferencial que podamos resolver. Para ello, nos imaginamos la cuerda como la unión de N partículas P_1, \dots, P_N (*formulación de Lagrange* [1]) separadas horizontalmente una cantidad $\Delta x := L/N$ y cada una de masa $\rho \Delta x$ y supongamos por ahora $t > 0$ fijo. Para cada x_i , la fuerza neta (vertical) es

$$F(x_i) = m_i a_i = \rho \Delta x \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u(t, x_i)), \quad (1.1)$$

pero como la única fuerza a la que está sometida la cuerda es la tensión, tenemos

$$F(x_i) = \left(\vec{T}_-(x_i) \right)_{vert} + \left(\vec{T}_+(x_i) \right)_{vert}.$$

¹Entendemos por flexible que se puede estirar hasta cierto punto.

²Suponemos que la cuerda casi ni se mueve vaya. Esto sirve para luego hacer aproximaciones sospechosas con algún ápice de justificación que nos permiten llegar a una ecuación en derivadas parciales lineal para que no se nos complique mucho la vida.

Ahora bien, aplicando la tercera hipótesis, la tensión vale

$$\vec{T}_-(x_i) = \tau \frac{P_{i-1} - P_i}{\|P_{i-1} - P_i\|}, \quad \vec{T}_+(x_i) = \tau \frac{P_{i+1} - P_i}{\|P_{i+1} - P_i\|},$$

donde usando la controvertida³ hipótesis cuatro podemos aproximar

$$\|P_{i-1} - P_i\| = \|P_{i+1} - P_i\| \stackrel{\text{no desp. horiz.}}{\approx} \sqrt{(\Delta x)^2 + (u(t, x_{i+1}) - u(t, x_i))^2} \stackrel{\text{pequeño desp. vert.}}{\approx} \Delta x,$$

con lo que

$$\left(\vec{T}_\pm(x_i)\right)_{vert} \approx \tau \frac{u(t, x_{i+1}) - u(t, x_i)}{\Delta x} \implies F(x_i) = \frac{u(t, x_{i+1}) + u(t, x_{i-1}) - 2u(t, x_i)}{\Delta x}.$$

Así, despejando en 1.1, finalmente llegamos a la expresión (notemos que utilizamos la notación u_{tt} para referirnos a $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)

$$u_{tt}(t, x_i) = \frac{\tau}{\rho} \frac{u(t, x_{i+1}) - 2u(t, x_i) + u(t, x_{i-1}))}{(\Delta x)^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{u(t, x_i + \Delta x) - 2u(t, x_i) + u(t, x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2},$$

de la que vamos a obtener la ecuación que andamos buscando, pero primero debemos conocer un resultado previo.

Lema 1.1. Si $f \in C^2((a - \delta, a + \delta))$ para cierto $\delta > 0$, entonces se verifica que

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Demostración. Basta con desarrollar por Taylor o usar L'Hôpital. □

Por tanto, tomando límites cuando Δx tiende a cero llegamos finalmente a la ecuación diferencial

$$u_{tt}(t, x) = \frac{\tau}{\rho} u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$$

donde habitualmente se escribe $\frac{\tau}{\rho} = c^2$ y se le llama a c velocidad⁴.

Así llegamos finalmente a la **ecuación de la cuerda vibrante** (también llamada **ecuación de ondas en una dimensión**) de extremos fijos

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \in (0, \infty) \\ u(0, x) = f(x), & x \in (0, L) \\ u_t(0, x) = g(x), & x \in (0, L), \end{cases}$$

donde la segunda condición nos dice que los extremos de la cuerda son fijos, la tercera nos indica la posición inicial de la cuerda y la cuarta la velocidad inicial.

Ejemplo 1.2. Existen variantes de este problema con ligeras modificaciones [3]:

- **Con rozamiento.** La ecuación en ese caso es $u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) - \mu u_t(t, x)$.

³Notemos que Δx depende directamente del número de partículas que hay. A más partículas, menos distancia. Esto nos hace desconfiar de lo justo que es despreciar otros valores desde el principio manteniendo este.

⁴Descomponiendo en unidades básicas, $\frac{\text{N}}{\text{kg/m}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{\text{kg/m}} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$.

- **Con fuerza externa.** La ecuación en ese caso es $u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) + F(t, x)$, que es una ecuación en derivadas parciales no homogénea.
- **Con densidad no constante.** La ecuación en ese caso es $u_{tt}(t, x) = \frac{\tau}{\rho(x)} u_{xx}(t, x)$, que es una ecuación en derivadas parciales lineal con coeficientes variables.
- **Sin hipótesis 4.** La ecuación en ese caso es $u_{tt}(t, x) = c^2 \left(\frac{u_x(t, x)}{\sqrt{1+u_x(t, x)}} \right)_x$, que es una ecuación en derivadas parciales no lineal.
- **Varilla vibrante rígida.** La ecuación en ese caso es $u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) - M^2 u_{xxxx}(t, x)$, que es una ecuación en derivadas parciales de orden 4 (el último término es la rigidez de la varilla, que resta aceleración).

1.2. Solución general de la ecuación de la cuerda vibrante

Observando el experimento planteado, esperamos soluciones de tipo “onda viajera”⁵, que se suelen describir como $u(t, x) = F(x - ct)$ si la onda viaja hacia delante o $u(t, x) = F(x + ct)$ si la onda viaja hacia atrás, para cierta función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Esto motiva el siguiente resultado de existencia y unicidad.

Lema 1.3 (Lema de D’Alembert). *En las condiciones anteriores, se verifican:*

1. Si $F, G \in C^2(\mathbb{R})$, entonces $u(t, x) := F(x - ct) + G(x + ct)$ verifica la ecuación $u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x)$.
2. Si $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y cumple $u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x)$, entonces existen funciones $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ tales que $u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct)$.

Demostración. Veamos cada una.

1. $u_{tt}(t, x) = c^2 F''(x - ct) + c^2 G''(x + ct)$ y $u_{xx}(t, x) = F''(x - ct) + G''(x + ct)$.
2. Supongamos $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Haciendo un cambio de variable biyectivo

$$h := (\xi, \eta) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(t, x) \mapsto (x - ct, x + ct)$$

$$h^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(\xi, \eta) \mapsto \left(\frac{\eta - \xi}{2c}, \frac{\eta + \xi}{2} \right)$$

y tomando $v := u \circ h^{-1}$ podemos escribir las parciales de u como

$$u_t = (v \circ h)_t = v_{\xi} \xi_t + v_{\eta} \eta_t = -cv_{\xi} + cv_{\eta}$$

$$u_{tt} = c^2 v_{\xi\xi} - c^2 v_{\xi\eta} - c^2 v_{\eta\xi} + c^2 v_{\eta\eta}$$

$$u_x = (v \circ h)_x = v_{\xi} \xi_x + v_{\eta} \eta_x = v_{\xi} + v_{\eta}$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}.$$

Así, sustituyendo en la EDP tenemos

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 v_{\xi\xi} - c^2 v_{\xi\eta} - c^2 v_{\eta\xi} + c^2 v_{\eta\eta} - c^2 (v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) = -4c^2 v_{\xi\eta} \iff v_{\xi\eta} = 0.$$

⁵Consultar http://laplace.us.es/wiki/index.php?title=Archivo:Onda_viajera_suma.gif&limit=50 para ver una representación visual de este tipo de ondas.

Integrando dos veces para recuperar v , tenemos

$$v_{\xi\eta} = 0 \xrightarrow{\int d\eta} v_{\xi} = C(\xi) \xrightarrow{\int d\xi} v = F(\xi) + G(\eta),$$

donde $F := \int C(\xi) d\xi$, C y G han aparecido como resultado de agrupar las constantes de integración correspondientes. Finalmente, deshaciendo el cambio de variable, obtenemos que efectivamente

$$u(t, x) = (v \circ h)(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

□

Teorema 1.4 (Solución de la ec. de la cuerda vibrante en \mathbb{R}). *Sean $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces existe una única función $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ verificando las condiciones*

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

y esta viene dada por la expresión

$$u(t, x) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Demostración. Con el lema anterior hemos descubierto una solución general de esta ecuación diferencial. Ahora debemos imponer las condiciones iniciales con las que esperamos determinar F y G , es decir, las igualdades

$$\begin{cases} u(0, x) = f(x) & \text{(posición inicial)} \\ u_t(0, x) = g(x) & \text{(velocidad inicial)} \end{cases}$$

Por la primera, $F(x) + G(x) = u(0, x) = f(x)$ y por la segunda $-cF'(x) + cG'(x) = u_t(0, x) = g(x)$. De estas dos identidades obtenemos

$$\begin{aligned} cf'(x) + g(x) &= 2cG'(x) \implies \\ \implies G(x) &= \frac{1}{2c} \int_0^x cf'(s) + g(s) ds = \frac{f(x) - f(0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds \implies \\ \implies F(x) &= f(x) - \frac{f(x) - f(0)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds = \frac{f(x) + f(0)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds \implies \\ \implies u(t, x) &= F(x - ct) + G(x + ct) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \end{aligned}$$

que es la llamada **fórmula de D'Alembert**.

□

1.3. La cuerda vibrante en un intervalo

En la sección anterior hemos visto que la fórmula de D'Alembert junto a las condiciones iniciales nos proporcionan una solución general para el problema de la cuerda vibrante infinita. El objetivo de esta sección es adaptar la

fórmula al problema de una cuerda finita con extremos fijos⁶. Sin embargo, para poder utilizar esta fórmula para valores $x + ct > L$ o $x - ct < 0$, las condiciones iniciales f y g deben estar definidas en todo \mathbb{R} y no sólo en $[0, L]$. Vamos a estudiar la extensión de estas funciones.

La primera condición de contorno nos dice que debe valer, para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$u(t, 0) = \frac{f(-ct) + f(+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{+ct} g(s) ds,$$

de donde surge naturalmente la necesidad de que las extensiones de f y g sean impares (para que además funcionen para $f \equiv 0$ ó $g \equiv 0$). Por otro lado, la segunda condición de contorno determina

$$u(t, L) = \frac{f(L - ct) + f(L + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^{L+ct} g(s) ds,$$

que podemos cumplir aprovechando la imparidad si exigimos que las extensiones sean $2L$ -periódicas (podemos ver $L - ct$ como $-(L + ct)$).

Definición 1.5. Dada $f \in C([0, L])$, la función

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, L] \\ -f(-x), & x \in [-L, 0] \\ \tilde{f}(x - L), & x \geq L \\ \tilde{f}(x + L), & x \leq -L \end{cases}$$

es su **extensión impar y $2L$ -periódica**.

Para poder concluir definitivamente que

$$u(t, x) = \frac{\tilde{f}(x - ct) + \tilde{f}(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds, (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L]$$

es una solución a nuestro problema. Falta dar alguna hipótesis que nos garantice que \tilde{f} es de clase C^2 , que convenientemente es el siguiente resultado.

Lema 1.6. Sea $f \in C^2([0, L])$ y \tilde{f} su extensión impar $2L$ -periódica. Entonces $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$ si y sólo si

$$f(0^+) = f(L^-) = 0$$

y $\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R})$ si y sólo si es $C^1(\mathbb{R})$ y

$$f''(0^+) = f''(L^-) = 0.$$

Demostración. Por ser \tilde{f} $2L$ -periódica e impar, su continuidad viene determinada por la continuidad en $[0, L]$ (donde podemos ver \tilde{f} como f) y la de sus extremos a la izquierda y derecha del intervalo. Así, fijándonos únicamente en la continuidad en estos extremos:

$$\blacksquare \quad \tilde{f}(0^-) = -\tilde{f}(0^+) \iff f(0^+) = 0.$$

⁶Si intentamos imaginar lo que le ocurre a una onda una vez choca contra uno de los extremos de la cuerda, podemos (o no) darnos cuenta de que la onda se refleja al llegar a estos puntos. Se puede observar este efecto en <https://www.youtube.com/watch?v=1PsGZq5sLrw> o ver una representación digital en <http://www.clipartbest.com/clipart-9cpARjxcE>.

$$\blacksquare \quad \bar{f}(L^+) = \bar{f}(-L^+) = -\bar{f}(L^-) \iff f(L^-) = 0.$$

Por otro lado, para una extensión impar \bar{f} de una función $f \in C^1$, es lo mismo ser continua que ser C^1 , pues su derivada es una extensión par de la derivada de f y estaríamos en la misma situación del principio, solo que ahora no necesitamos hipótesis pues los signos negativos desaparecen:

$$\blacksquare \quad \bar{f}'(0^-) = \bar{f}'(0^+).$$

$$\blacksquare \quad \bar{f}(L^+) = \bar{f}(-L^+) = \bar{f}(L^-).$$

Si derivamos una segunda vez nos encontramos con una función impar y deberemos seguir el primer argumento. \square

De un modo similar se prueba el siguiente resultado.

Lema 1.7. Sea $g \in C^1([0, L])$ tal que $g(0) = g(L) = 0$. Entonces $\int_0^x \bar{g}(s) \, ds \in C^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Como $\int_0^x \bar{g}(s) \, ds$ es una primitiva de \bar{g} , es de clase C^2 si, y solo si, su derivada \bar{g} es de clase C^1 si, y solo si $g(0) = g(L) = 0$. En este último paso hemos utilizado el lema anterior. \square

Teorema 1.8 (Solución a la ec. de la cuerda vibrante en $[0, L]$ con extremos fijos). Sean $f \in C^2([0, L])$ y $g \in C^1([0, L])$ funciones que verifican $f(0) = f(L) = 0$, $g(0) = g(L) = 0$ y $f''(0) = f''(L) = 0$. Entonces el sistema

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \\ u_t(0, x) = g(x), & x \in [0, L] \end{cases}$$

tiene una única solución $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$, que además viene dada por

$$u(t, x) = \frac{\bar{f}(x - ct) + \bar{f}(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(s) \, ds.$$

Demostración. Procedemos como cualquier prueba de existencia y unicidad:

■ Existencia.

- Por los lemas de esta sección, $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
- Por el lema de D'Alembert, u cumple $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ por ser suma de ondas viajeras $F(x - ct)$ y $G(x + ct)$.
- Las condiciones de contorno $\forall t \in \mathbb{R}, u(t, 0) = u(t, L) = 0$ se cumplen, pues para ello hemos construido las extensiones impares y $2L$ -periódicas.

- Por último

$$\forall x \in [0, L], u(0, x) = \frac{\bar{f}(x) + \tilde{f}(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_x^x \bar{g}(s) ds = \bar{f}(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, L], u_t(0, x) &= \frac{-c\bar{f}'(x) + c\tilde{f}'(x)}{2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(s) ds \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{x+ct} \bar{g}(s) ds - \int_0^{x-ct} \bar{g}(s) ds \right) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2c} (c\bar{g}(x) + c\tilde{g}(x)) = \bar{g}(x) = g(x) \end{aligned}$$

- Unicidad.

Supongamos que $v \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$ es solución de la EDP. Si extendemos v en su segunda coordenada, de manera que $\bar{v} \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ sea impar y $2L$ -periódica en x , tendremos una solución C^2 del problema de la cuerda vibrante en \mathbb{R} con condiciones iniciales $\bar{v}(0, x) = \bar{f}(x)$ y $\bar{v}_t(0, x) = \bar{g}(x)$, cuya unicidad ya demostramos y restringiendo el dominio de x a $[0, L]$ ya lo tendremos. Así, lo único restante por probar es que efectivamente esta extensión \bar{v} es de clase C^2 , pero utilizando de nuevo los lemas de esta sección tenemos que es C^1 por ser $v(t, 0) = v(t, L) = 0$ y de clase C^2 por ser

$$\begin{aligned} v_{xx}(t, x) &= \frac{1}{c^2} v_{tt}(t, x) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{c^2 \bar{f}''(x-ct) + c^2 \bar{f}''(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} (c^2 \bar{g}'(x+ct) - c^2 \bar{g}'(x-ct)) \right) = \\ &= \frac{\bar{f}''(x-ct) + \bar{f}''(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} (\bar{g}'(x+ct) - \bar{g}'(x-ct)), \end{aligned}$$

y por tanto, utilizando que la derivación conserva la periodicidad e invierte la paridad,

$$\begin{aligned} v_{xx}(t, 0) &= \frac{1}{c^2} v_{tt}(t, 0) = \frac{\bar{f}''(-ct) + \bar{f}''(ct)}{2} + \frac{1}{2c} (\bar{g}'(ct) - \bar{g}'(-ct)) = 0 \\ v_{xx}(t, L) &= \frac{1}{c^2} v_{tt}(t, L) = \frac{\bar{f}''(-L-ct) + \bar{f}''(L+ct)}{2} + \frac{1}{2c} (\bar{g}'(L+ct) - \bar{g}'(-L-ct)) = 0, \end{aligned}$$

cumpliendo las condiciones del lema que nos garantiza que $\bar{v} \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

□

Más adelante veremos otras demostraciones distintas de la unicidad de esta función.

1.4. Propiedades de las soluciones

Aquí tenemos algunas de las propiedades de este tipo de ecuaciones.

Es reversible en el tiempo. Sea $u : \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ la solución de la ecuación diferencial

$$u_{tt}(t, x) - c^2 u_{xx}(t, x) = 0.$$

Si se conocen f, g tales que $u(0, x) = f(x)$ y $u_t(0, x) = g(x)$, se puede determinar $u(t, x)$ para todo $t > 0$, pero también se puede determinar para $t < 0$.

La velocidad de propagación finita. Dado $t_0 > 0$, si el soporte de $u(t_0, \cdot)$ está contenido en cierto intervalo $[a, b]$, entonces el soporte de $u(t_0 + T, \cdot)$ está contenido en $[a - cT, b + cT]$ para cierto $T > 0$. Esto es, (según el modelo) si la cuerda está en reposo fuera del intervalo $[a, b]$, lo seguirá estando fuera del intervalo $[a - cT, b + cT]$ transcurridos T segundos (o la unidad de tiempo que se esté usando).

De hecho, si u es la solución habitual

$$u(t, x) = \frac{\bar{f}(x - ct) + \bar{f}(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(s) \, ds,$$

entonces, para cierto $x_0 \in [0, L]$,

- $f(x_0)$ sólo influye en $u(t, x)$ cuando $x = x_0 \pm ct$.
- $g(x_0)$ sólo influye en $u(t, x)$ cuando $x \in [x_0 - ct, x_0 + ct]$.
- $u(t_0, x_0)$ sólo se ve influido por f y g en $|x - x_0| \leq ct_0$, para cierto $t_0 > 0$.

El operador no es regularizante. Es decir, para el operador $\square := \partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}$, la condición $\square u = 0$ no implica que u sea de clase C^∞ . De hecho, la fórmula de D'Alembert sugiere la existencia de soluciones de $\square u = 0$ de clase inferior a C^2 . Un estudio completo del operador \square necesita el concepto de “derivada débil”.

La energía se conserva. La energía mecánica de nuestro sistema se mantiene constante. Para que darle a esta propiedad algún valor, el resto de sección se la dedicaremos a definir y probar esta afirmación.

Si volvemos al modelo de la cuerda de N partículas, podemos definir la energía cinética de nuestro sistema como la suma de las energías cinéticas de cada partícula, y esta última la describiremos naturalmente como

$$E_{\text{cin}}(t, x_i) := \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho \Delta x}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_i) \right)^2.$$

Por otro lado, la energía potencial la calcularemos sumando el trabajo realizado por la tensión en cada partícula. Y este último lo modelizamos como la fuerza (tensión) por la extensión que provoca esta fuerza:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(t, x_i) &:= W_i := \|\vec{F}\| \cdot \text{distancia} = \tau \left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} - \Delta x \right) = \\ &= \tau \Delta x \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2} - 1 \right) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \tau \Delta x \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 + O\left(\left| \frac{\Delta u}{\Delta x} \right|^4 \right) - 1 \right) \approx \frac{\tau}{2} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 \Delta x. \end{aligned}$$

Si definimos la energía mecánica $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la suma de la energía cinética y la energía potencial de todas las partículas tenemos

$$\begin{aligned} E(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (E_{\text{cin}}(t, x_i) + E_{\text{pot}}(t, x_i)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\rho \Delta x}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_i) \right)^2 + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \right) = \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^L u_t(t, x)^2 \, dx + \frac{\tau}{2} \int_0^L u_x(t, x)^2 \, dx = \frac{\rho}{2} \int_0^L (u_t(t, x)^2 + c^2 u_x(t, x)^2) \, dx. \end{aligned}$$

Teorema 1.9. *La cuerda vibrante unidimensional con extremos fijos conserva la energía en el tiempo.*

Demostración. Sea $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$ la solución de la ecuación

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t > 0 \end{cases}.$$

Fijando $t > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx \right) \stackrel{\text{Leibniz integral rule}}{=} \frac{\rho}{2} \int_0^L (2u_t u_{tt} + c^2 2u_x u_{xt}) dx = \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^L (2u_t c^2 u_{xx} + c^2 2u_x u_{tx}) dx = \rho c^2 \int_0^L (u_t u_x)_x dx = \rho c^2 [u_t u_x]_0^L = \\ &= \rho c^2 (u_t(t, L) u_x(t, L) - u_t(t, 0) u_x(t, 0)) = \rho c^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, L) u_x(t, L) - \frac{\partial}{\partial t} u(t, 0) u_x(t, 0) \right) = 0 \end{aligned}$$

por lo que E debe ser una constante, como afirmábamos. \square

Observación. 1. Este teorema también es cierto con la hipótesis

$$u_x(t, 0) = u_x(t, L) = 0$$

para cuerdas con extremos libres en lugar de fijos.

$$2. E(0) = \frac{\rho}{2} \int_0^L (g^2 + c^2 f'^2) dx.$$

3. Si además se añade rozamiento, entonces la función energía es decreciente (es decir, $E'(t) \leq 0$ para todo $t \in (0, \infty)$).

Corolario 1.10 (unicidad). Si $u_1, u_2 \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$ son dos soluciones del sistema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} - \mu u_t + F(t, x) & (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, L] \\ u_t(0, x) = g(x), & x \in [0, L] \end{cases}$$

entonces $u_1 \equiv u_2$.

Demostración. $v := u_1 - u_2 \in C(\mathbb{R} \times [0, L])$ satisface

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} - \mu v_t & (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L] \\ v(t, 0) = v(t, L) = 0, & t > 0 \\ v(0, x) = v_t(0, x) = 0, & x \in [0, L], \end{cases}$$

por lo que la energía, que es decreciente y nula en $t = 0$, es constantemente nula y por tanto, $v_t \equiv v_x \equiv 0$, siendo v constantemente igual a cero, pues $v(0, x) = 0$. \square

Como última observación, los teoremas de conservación (o decrecimiento) de la energía suelen implicar la unicidad de las ecuaciones diferenciales (al menos en las estudiadas aquí).

1.5. La solución de Bernoulli

Si se considera el problema de la cuerda vibrante con con posición inicial un *arco de seno*

$$\begin{cases} u(0, x) = \sin(\pi x), & 0 < x < 1 \\ u_t(0, x) = 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

comprobamos con el método de D'Alembert que la solución es

$$u(t, x) = \text{sen}(\pi x) \cos(\pi t)$$

que es, respectivamente, el producto de una onda estacionaria y otra temporal con frecuencia de 0,5 hercios. Bernoulli⁷, tras observar las vibraciones de una cuerda real, propuso que la solución general del sistema

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

debería ser una *superposición* de ondas estacionarias, como vemos en la figura 1.1, por lo que

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_n(t)$$

donde el seno representa al armónico n -ésimo y la función T_n es la amplitud de dicho armónico, que suele estar asociada al timbre de lo que produce la vibración.

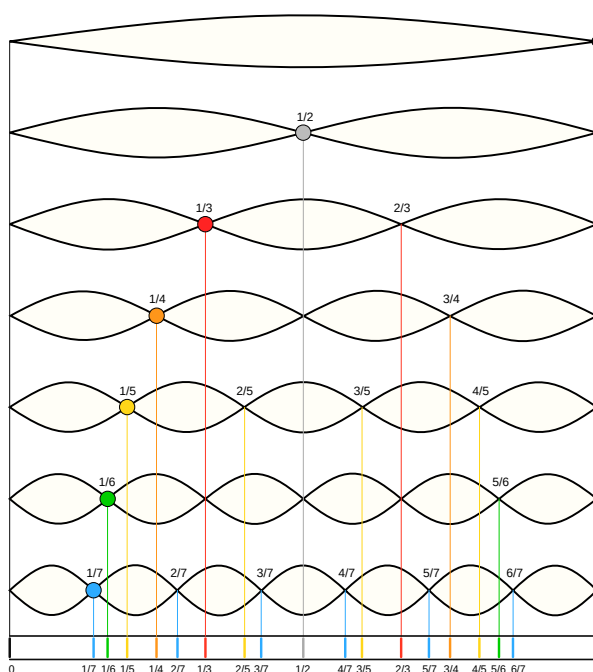


Figura 1.1: Armónicos de una cuerda. **Fuente:** Wikipedia/Armónicos.

Sustituyendo un sumando genérico en la ecuación diferencial, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_n(t) \right)_{tt} &= c^2 \left(\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_n(t) \right)_{xx} \implies \\ &\implies \cancel{\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} T_n''(t) = -c^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \cancel{\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} T_n(t) \implies \\ &\implies T_n''(t) = -c^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) \implies T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \end{aligned}$$

por lo que, para ser solución, u debe ser

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right].$$

⁷Se cree que fue Bernoulli el que en 1753 enunció este tipo de soluciones, aunque la aceptación de las mismas no fue mayoritario hasta el desarrollo de las series de Fourier.

Euler criticó esta solución por resultar “menos general” y “menos rigurosa” que la obtenida por D’Alembert, ya que afirmaba que sólo valdría para posiciones iniciales del tipo

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

y no para “curvas arbitrarias”, ya que, por ejemplo, las funciones con picos, las constantes a trozos o las no periódicas en general nunca podrían desarrollarse en series de senos. Sin embargo, Fourier postularía la estructura “armónica” de cualquier función arbitraria.

En teoría musical, la solución

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)$$

se interpreta como el producto de, respectivamente, la amplitud del armónico por una vibración temporal con frecuencia $f_n = \frac{nc}{2L}$ hercios. Ajustando la cuerda convenientemente (su longitud, su densidad o su tensión) se puede producir la frecuencia que queramos y por tanto cualquier nota musical deseada.

Capítulo 2

La ecuación del calor

2.1. Formulación física

Nos planteamos en este capítulo encontrar una EDP que modelice la propagación del calor en un cuerpo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (que en una dimensión es una varilla, en dos una lámina y en tres un sólido). La función u que intentamos determinar va a medir la temperatura en cierto punto tras t segundos transcurridos a partir de cierta temperatura inicial y ciertas condiciones de contorno¹.

Por motivos de tiempo, no podemos incluir la formulación física del problema (aunque nos gustaría).

Llegamos a la ecuación

$$\kappa \Delta u = \sigma \frac{\partial u}{\partial t}(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega$$

donde κ es la conductividad térmica y σ el calor específico. Tomando $\alpha = \frac{\kappa}{\sigma}$ (difusividad térmica) y añadiendo temperatura inicial y condiciones de contorno, tenemos

$$\begin{cases} u_t = \alpha \Delta u, & t > 0, \quad x \in \Omega \\ u(0, x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(t, x) = \varphi(t, x), & x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

En la justificación física se ha utilizado el siguiente lema.

Si $f \in C(\Omega)$ y $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ entonces se verifica

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x_0)} f(x) \, dx = f(x_0).$$

Demostración. Not yet. □

También se cumple esta propiedad para condiciones menos estrictas, como que $f \in L^1(\Omega)$ (hay que usar en la demostración el teorema de diferenciación de Lebesgue).

¹Nos referimos a lo que ocurre en los “bordes” del objeto sobre el que se propaga el calor.

2.2. Resolución por separación de variables (dimensión uno)

Si asumimos que la solución es de la forma

$$u(t, x) = \alpha T(t) X(x)$$

donde ninguna de estas funciones es idénticamente nula, llegamos a una solución del tipo

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

a la que podemos aplicarle condiciones de contorno.

2.2.1. Varilla con extremos nulos

Vamos a necesitar el siguiente lema.

Lema 2.1. *Dados n y m enteros no negativos, se verifica*

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \frac{L}{2}, & \text{si } n = m \end{cases}.$$

Ahora partimos del sistema

$$\begin{cases} u_t = \alpha \Delta u, & t > 0, x \in \Omega \\ u(0, x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(t, 0) = \varphi(t, L) = 0 \end{cases}$$

que nos conduce hasta la expresión

$$B_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

Para continuar necesitamos dos lemas más.

Lema 2.2. *Sean $f_n \in C^1([a, b])$ tales que las series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converjan uniformemente en $x \in [a, b]$. Entonces, la función $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es de clase $C^1([a, b])$ y*

$$F'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad x \in [a, b].$$

Lema 2.3 (prueba M de Weierstrass). *Sean $f_n \in C(\Omega)$ tales que*

$$\sup \{|f_n(x)| : x \in \Omega\} \leq M_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Entonces la serie $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniforme y absolutamente para todo $x \in \Omega$. En particular, $F \in C(\Omega)$.

Ahora vamos con el teorema.

Teorema 2.4 (ec. del calor en $[0, L]$ con extremos nulos). Sea $f \in C([0, L])$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$. Entonces

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad t \geq 0, \quad x \in [0, L]$$

es una función $C^\infty((0, \infty) \times [0, L]) \cap C^\infty([0, \infty) \times [0, L])$ y cumple la EDP

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx}, & x \in (0, L), \quad t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \end{cases}.$$

Demostración. Not yet. □

Algunos comentarios sobre este teorema:

1. La condición $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$ no se puede rebajar (de hecho, veremos que toda $f \in C^1([0, L])$ (con $f(0) = f(L) = 0$) la cumple).
2. Más adelante veremos la unicidad de estas soluciones.
3. El teorema no se aplica a $f(x) \equiv 1$, pues en ese caso $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \infty$ (ya que u no es de clase C^∞ en los extremos de la varilla).

Capítulo 3

La ecuación de Laplace

Recordamos que denotamos por $\Delta := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ el operador **laplaciano** en \mathbb{R}^n .

Definición 3.1. Decimos que $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es **armónica** en Ω (abierto), denotado $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, cuando $u \in C^2(\Omega)$ y

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

Ejemplo 3.2. 1. $F \in \mathcal{H}(\Omega) \implies u := \operatorname{Re} F, v := \operatorname{Im} F \in \mathcal{H}(\Omega)$, pues estas satisfacen (por ser F holomorfa) las ecuaciones de *Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x, \end{cases}$$

por lo que $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$.

3.1. Interpretación física

3.1.1. Problema del calor estacionario

Para el problema de propagación del calor en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & t > 0, x \in \Omega \\ u(0, x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(t, x) = \varphi(t, x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

¿cuál será la temperatura en equilibrio $\bar{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cuando $t \rightarrow \infty$? Se puede probar que debe cumplir

$$\begin{cases} \Delta \bar{u}(x) = 0, & x \in \Omega \\ \bar{u}(x) = \bar{\varphi}(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

3.1.2. Tres problemas clásicos sobre la ecuación de Laplace

3.1.2.1. Problema de Dirichlet

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Equivale a encontrar la temperatura de equilibrio en Ω , cuando se fija la temperatura φ en el borde.

3.1.2.2. Problema de Neumann

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ (\nabla u \cdot \vec{n})(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Equivale a encontrar la temperatura de equilibrio en Ω , cuando se fija un flujo de calor entrante φ .

3.1.2.3. Problema de Robin

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ (\nabla u \cdot \vec{n} + \gamma u)(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Equivale a añadir al anterior una proporcionalidad de escape térmico γ .

3.1.2.4. Ecuación de Poisson

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\rho \in C(\Omega)$, hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u(x) = \rho(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Versión no homogénea del problema de Dirichlet.

3.1.3. Potencial electrostático

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z)$ es la densidad de cargas eléctricas en el punto (x, y, z) y $\vec{E} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo eléctrico generado por f . ¿Podemos determinar \vec{E} a partir de f ?

La ley de Gauss dice que, para una bola B , “El flujo neto de \vec{E} saliente a través de ∂B es proporcional a la carga total dentro de B ”. Esto es,

$$\int_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_B f.$$

Usando el teorema de la divergencia, $\int_B \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n}$ y por tanto

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} f. \quad (3.1)$$

Además, si añadimos la hipótesis que enuncia que los campos electrostáticos son conservativos, es decir, que

$$W_{P \rightarrow Q} = \int_P^Q \vec{E}$$

solo depende del trayecto, entonces $\exists \bar{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \vec{E} = -\nabla \bar{V}$ y a V lo llamamos potencial electrostático. Así

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} (-\nabla \bar{V}) = -\Delta \bar{V},$$

y nuestro problema consiste en resolver la ecuación de Poisson

$$\begin{cases} \Delta \bar{V} = -\frac{1}{\epsilon_0} f, & x \in \Omega \\ \bar{V} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

3.2. Resolución del problema de Dirichlet en el disco plano

Sea $\mathbb{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Dado $\varphi \in C(\partial\mathbb{D})$, busco $u \in C^2(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{D} \\ u = \varphi, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Lema 3.3. Para coordenadas polares dadas por el cambio

$$\begin{aligned} h : (0, 1) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta), \end{aligned}$$

el laplaciano toma la forma

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} = \partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}.$$

Demostración. Definimos $v := u \circ h$, para la que se cumple

$$\begin{aligned} v_r &= (u \circ h)_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \\ v_{rr} &= u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \cos \theta \sin \theta + u_{yy} \sin^2 \theta \\ v_\theta &= (u \circ h)_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x r \sin \theta + u_y r \cos \theta \\ v_{\theta\theta} &= (u_{xx} x_\theta + u_{xy} y_\theta) x_\theta + u_x x_{\theta\theta} + (u_{yx} x_\theta + u_{yy} y_\theta) y_\theta + u_y y_{\theta\theta} = \\ &= u_{xx} x_\theta^2 + 2u_{xy} y_\theta x_\theta + u_x x_{\theta\theta} + u_{yy} y_\theta^2 + u_y y_{\theta\theta} = \\ &= r^2 (u_{xx} \sin^2 \theta - 2u_{xy} \cos \theta \sin \theta + u_{yy} \cos^2 \theta) + \\ &\quad - r (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 u_{xx} + u_{yy} &= u_{xx} \cos^2 \theta + u_{xx} \sin^2 \theta + u_{yy} \cos^2 \theta + u_{yy} \sin^2 \theta = \\
 &= (v_{rr} - \cancel{2u_{xy} \cos \theta \sin \theta}) + \left(\frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} - \left(-\cancel{2u_{xy} \cos \theta \sin \theta} - \frac{1}{r} (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) \right) \right) = \\
 &= v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{r} v_r.
 \end{aligned}$$

□

Apoyándonos en este lema, ahora buscamos, dada $\varphi \in C([0, 2\pi])$, soluciones de

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0, & (r, \theta) \in (0, 1) \times (0, 2\pi) \\ v(1, \theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Aplicando separación de variables, busco una solución del tipo

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

por lo que si $v(r, \theta) \neq 0$ debe valer

$$\begin{aligned}
 0 &= v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = R''\Theta + \frac{1}{r} R'\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' \\
 R''\Theta + \frac{1}{r} R'\Theta &= -\frac{1}{r^2} R\Theta'' \\
 r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} &= -\frac{\Theta''}{\Theta} = \rho,
 \end{aligned}$$

con ρ constante. Obtenemos dos EDO:

$$\begin{cases} r^2 R'' + r R' = \rho R \\ \exists \lim_{r \rightarrow 0^+} R \end{cases} \quad \begin{cases} \Theta'' = -\rho \Theta \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$

Resolvemos la segunda EDO:

- Caso $\rho = -\lambda^2 < 0$. Las soluciones de $\Theta'' = \lambda^2 \Theta$ son $\Theta = A \cosh \lambda \theta + B \sinh \lambda \theta$, pero esta solución no es periódica a no ser que $A = B = 0$, pero no nos interesa la solución trivial.
- Caso $\rho = 0$. La solución de $\Theta'' = 0$ es $\Theta = A\theta + B$, pero para que esta solución sea periódica debe valer $A = 0$, con lo que $\Theta_0 = B \in \mathbb{R}$.
- Caso $\rho = \lambda^2 > 0$. La solución de $\Theta'' = -\lambda^2 \Theta$ es $\Theta = A \cos \lambda \theta + B \sin \lambda \theta$, y por las demas condiciones,

$$\begin{aligned}
 \Theta(0) &= \Theta(2\pi) \rightarrow A = A \cos 2\pi\lambda + B \sin 2\pi\lambda \\
 \Theta'(0) &= \Theta'(2\pi) \rightarrow \lambda B = -\lambda A \sin 2\pi\lambda + \lambda B \cos 2\pi\lambda,
 \end{aligned}$$

equivalente al sistema lineal

$$\begin{cases} A(1 - \cos 2\pi\lambda) - B \sin 2\pi\lambda \\ A \sin 2\pi\lambda + B(1 - \cos 2\pi\lambda), \end{cases}$$

que tendrá más soluciones aparte de la trivial si, y solo si, el determinante es no nulo:

$$(1 - \cos 2\pi\lambda)^2 + (\sin 2\pi\lambda)^2 = 0 \iff \begin{cases} \cos 2\pi\lambda = 1 \\ \sin 2\pi\lambda = 0 \end{cases} \iff \lambda = n \in \mathbb{Z}.$$

En conclusión, $\rho = n^2 > 0$ y $\Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$, donde podemos obviar los $n < 0$.

Ahora resolvemos la primera EDO con la info anterior:

- Caso $n = 0$: La solución de $r^2 R'' + rR' = 0 \iff (rR')' = rR'' + R' = 0$ debe cumplir $rR' = a \in \mathbb{R}$ y por tanto

$$R' = \frac{a}{r} \xrightarrow{\int dr} R = a \log r + b.$$

Y como queremos que exista $\lim_{r \rightarrow 0^+} R = \lim_{r \rightarrow 0^+} a \log r + b$, debe ser $a = 0$ y $R_0 = b \in \mathbb{R}$.

- Caso $n \geq 1$: Vemos que, por compatibilidad del “grado” en r de la igualdad $r^2 R'' + rR' = n^2 R$, este debe disminuir en una unidad con la derivación de R . Así, buscando soluciones del tipo r^γ tenemos

$$\gamma(\gamma - 1)r^\gamma + \gamma r^\gamma = n^2 r^\gamma \iff \gamma^2 - \gamma + \gamma = n^2 \iff \gamma = \pm n.$$

Y como queremos que exista $\lim_{r \rightarrow 0^+} R = \lim_{r \rightarrow 0^+} A_n r^{-n} + B_n r^n$, debe ser $A_n = 0$ y $R_n = B_n r^n$.

En conclusión, el candidato a solución general es

$$v(r, \theta) = A_0 + \sum_{n>0} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

de donde el valor en la frontera debe ser de la forma

$$\varphi(\theta) = v(1, \theta) = A_0 + \sum_{n>0} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Usando ortogonalidad,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos n\theta d\theta \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

3.3. El núcleo de Poisson

Nos interesa escribir la solución de la ecuación de Laplace en forma integral utilizando un núcleo P (denominado **núcleo de Poisson**), algo como

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) P(r, \theta - \vartheta) d\vartheta.$$

Para ello, trataremos de escribir la solución $v(r, \theta) = A_0 + \sum_{n>0} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$ en forma compleja. Esto es

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= A_0 + \sum_{n>0} r^n \left(A_n \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} + B_n \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \right) = \\ &= A_0 + \sum_{n>0} r^n \left(\frac{A_n - iB_n}{2} e^{in\theta} + \frac{A_n + iB_n}{2} e^{-in\theta} \right) = \alpha_0 + \sum_{n>0} r^n (\alpha_n e^{in\theta} + \alpha_{-n} e^{-in\theta}) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \alpha_n e^{in\theta}. \end{aligned}$$

En este caso, el valor en la frontera lo escribiremos como

$$\varphi(\theta) = v(1, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{in\theta}.$$

Para determinar α_n , usamos ortogonalidad resultando en

$$\alpha_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \oint_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Así, ya tenemos una forma integral, pues

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \left(\oint_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) e^{-in\vartheta} d\vartheta \right) e^{in\theta} = \oint_0^{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \varphi(\vartheta) e^{-in\vartheta} e^{in\theta} \right) d\vartheta = \oint_0^{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \varphi(\vartheta) e^{-in\vartheta} e^{in\theta} \right) d\vartheta = \\ &= \oint_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta-\vartheta)} \right) d\vartheta = \oint_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) P(r, \theta - \vartheta) d\vartheta. \end{aligned}$$

Definición 3.4. Llamamos **núcleo de Poisson** en \mathbb{D} a la función

$$P(r, \theta) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$$

Lema 3.5. Para r, θ tal que $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, se cumple

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}$$

Demostración. Separamos en dos geométricas complejas. □

3.3.1. Propiedades del núcleo de Poisson

- $P(r, \theta) > 0$ en el disco.
- $P(r, \theta)$ es C^∞ en el disco. Va a ser solución regularizante porque su núcleo es regularizante y yo soy adivino.
- $\Delta P = \left(\partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} \right) P = 0$, pues

$$P(r, \theta) = \dots = \operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

- $\oint_0^{2\pi} P(r, \theta) d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \oint_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = 1$.
- $\lim_{r \rightarrow 1^-} P(r, \theta) = \begin{cases} 0 & \theta \in (0, 2\pi) \\ \infty & \theta = 0 \end{cases}$

Observación. Cuando $r \rightarrow 1^-$, P “se aproxima” a una delta de Dirac. Además, es la solución “formal” de

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{D} \\ u = \delta_{(1,0)}, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 3.6. Sea $\varphi \in C(\partial\mathbb{D})$. Entonces

$$v(r, \theta) := \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) P(r, \theta - \vartheta) d\vartheta$$

cumple

- $v \in C^\infty$
- $\Delta v = 0$ en el disco
- $\lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, \theta_0)} \varphi(r, \theta) = \varphi(1, \theta_0)$

Así, si $v|_{\partial\mathbb{D}} := \varphi$, entonces $v \in C(\mathbb{D})$.

Corolario 3.7 (Principio del máximo y del mínimo).

$$\min \varphi \leq v(r, \theta) \leq \max \varphi$$

Parte II

Teoría de las series de Fourier

Capítulo 4

Series de Fourier

4.1. Introducción

El objetivo principal de este tema es, dada una función $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , determinar cuándo se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$$

para $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a determinar. El matemático francés *Jean-Baptiste Joseph Fourier* afirmó en 1822 que esto es cierto para cualquier función f , pero no pudo demostrarlo con rigurosidad. Muchas otras grandes figuras de las matemáticas han contribuido desde entonces a la teoría sobre este tipo de desarrollos.

En lo que sigue tomaremos la notación

$$\mathbb{T} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [kL, (k+1)L) = \cdots \cup [0, L) \cup [L, 2L) \cup \cdots$$

y cuando digamos que $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ nos referiremos a $f : [0, L) \rightarrow \mathbb{C}$ extendida de forma L -periódica, es decir, $f(x+L) = f(x)$.

Lema 4.1. Si f es una función L -periódica, entonces

$$\int_a^{a+L} f(x) \, dx = \int_0^L f(x) \, dx$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nL \leq a < (n+1)L$. Entonces

$$\int_a^{a+L} f(x) \, dx = \int_a^{(n+1)L} f(x) \, dx + \int_{(n+1)L}^{a+L} f(x) \, dx$$

y haciendo los cambios de variable

$$\begin{aligned} x &= u + nL \\ dx &= du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= u + (n+1)L \\ dx &= du \end{aligned}$$

respectivamente, llegamos a

$$\int_a^{a+L} f(x) \, dx = \int_{a-nL}^L f(u+nL) \, du + \int_0^{a-nL} f(u+(n+1)L) \, dx = \int_0^L f(x) \, dx$$

como queríamos ver. \square

4.2. Series de Fourier en $L^1(\mathbb{T})$

En adelante utilizaremos siempre $L = 1$. Recordemos ahora el conjunto

$$L^1(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \int_{\mathbb{T}} |f(x)| \, dx < \infty \right\}$$

que tenía estructura de espacio vectorial. Este nos sirve para dar la siguiente definición.

Definición 4.2. Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, se define su **serie de Fourier (compleja)** como

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

donde para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(y) e^{-2\pi i n y} \, dy$$

que se denomina **n -ésimo cociente** de Fourier de f .

La pregunta que nos hacemos entonces es, ¿cuándo se puede escribir con rigor que una función es exactamente igual a su serie de Fourier? La respuesta a esta pregunta la iremos viendo a lo largo del capítulo.

Para poder demostrar el resultado principal de esta sección, el criterio de Dini, debemos introducir primero algunos resultados previos de análisis en varias variables.

Definición 4.3. Una función f se dice **simple** si existen A_1, \dots, A_n conjuntos medibles disjuntos y valores a_1, \dots, a_n (reales o complejos) tales que

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \chi_{A_k}(x)$$

donde χ_{A_k} es la función indicador del conjunto A_k .

Esta definición nos permite dar el siguiente resultado, que es un lema previo para poder demostrar el Lema 4.5, que usaremos en la demostración del criterio de Dini.

Lema 4.4. Si $f \in L^1((0, 1))$ entonces existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$$

en casi todo punto de $(0, 1)$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f(x) - s_n(x)| \, dx = 0.$$

Veamos ahora el lema importante.

Lema 4.5 (Riemann-Lebesgue). Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$.

Demostración. Veamos primero qué ocurre si $f \equiv \chi_{(a,b)}$. En ese caso tenemos que

$$\hat{f}(n) = \int_a^b e^{-2\pi i n x} dx = \left[-\frac{e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n} \right]_a^b = \frac{e^{-2\pi i n a} - e^{-2\pi i n b}}{2\pi i n}$$

y por tanto

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{\pi |n|}$$

que converge a 0 cuando $|n| \rightarrow \infty$. Notemos que lo mismo ocurre si f es una función simple, ya que tendríamos

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k}(x) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{k=1}^m a_k \int_{A_k} e^{-2\pi i n x} dx$$

que se resuelve de forma similar que lo anterior.

Supongamos ahora que $f \in L^1(\mathbb{T})$. Fijamos $\varepsilon > 0$. Sea s una función simple de la forma

$$s(x) = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{(a_k, b_k)}(x)$$

con $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ tal que $\|f - s\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$, que existe por el lema 4.4. Como hemos visto ya en el caso anterior, esta función cumple que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} |\hat{s}(n)| = 0$$

por lo que existe cierto $n_{\varepsilon, s} \in \mathbb{N}$ tal que $|\hat{s}(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $|n| > n_{\varepsilon, s}$. Concluimos entonces que, para $|n| > n_{\varepsilon, s}$, se cumple

$$\begin{aligned} |\hat{f}(n)| &= |\hat{f}(n) - \hat{s}(n) + \hat{s}(n)| \leq |\hat{f}(n) - \hat{s}(n)| + |\hat{s}(n)| = \\ &= \left| \widehat{(f - s)}(n) \right| + |\hat{s}(n)| = \int_0^1 |f(x) - s(x)| |e^{-2\pi i n x}| dx + |\hat{s}(n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

como queríamos ver. □

En adelante utilizaremos la siguiente notación

$$S_{M,N} f(x) = \sum_{n=-N}^M \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \qquad S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

para referirnos a las sumas parciales de las series de Fourier. Veamos por fin el criterio de Dini.

Teorema 4.6 (Criterio de Dini (débil)). Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ es derivable en $x_0 \in \mathbb{T}$, entonces

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^M \hat{f}(n) e^{2\pi i n x_0} = f(x_0).$$

Demostración. Para otro día si eso. □

Este criterio también es válido si f cumple condiciones menos estrictas que ser derivable. De hecho, basta garantizar que exista $\delta > 0$ tal que $g \in L^1((-\delta, \delta))$, con

$$g(t) = \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \cdot \frac{t}{e^{2\pi it} - 1}$$

que es equivalente a decir que se verifique

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty$$

puesto que $\left| \frac{t}{e^{2\pi it} - 1} \right| \approx \left| \frac{1}{2\pi i} \right|$ que es una constante y no afecta a la finitud integral.

Una versión más fuerte del criterio de Dini es la siguiente.

Teorema 4.7 (Criterio de Dini (fuerte)). Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y para $x_0 \in \mathbb{T}$ existen $f(x_0)^{\pm}$ y $f'(x_0)^{\pm}$, entonces

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^M \hat{f}(n) e^{2\pi i n x_0} = \frac{f(x_0)^- + f(x_0)^+}{2}.$$

Demostración. Para otro día si eso. □

Como ocurría en la versión débil, basta con que f verifique para cierto $\delta > 0$ que

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0^{\pm})}{t} \right| dt < \infty$$

Ejemplo 4.8. Vamos a estudiar la serie de Fourier y la convergencia de $f(x) = x$ con $|x| < \frac{1}{2}$. En este ejemplo $\mathbb{T} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Calculando sus coeficientes (resolviendo las integrales) tenemos que

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

por lo que, como x es claramente $L^1(\mathbb{T})$ y además derivable, utilizando el criterio de Dini podemos escribir

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(notemos que en el sumatorio hay que omitir $n = 0$ por lo ya visto).

Una duda que nos puede surgir es si una serie de Fourier es convergente en cierto punto si la función de la que proviene es continua en dicho punto. La respuesta nos la da el siguiente teorema.

Teorema 4.9 (du Bois-Reymond). Existe al menos una función $f \in C(\mathbb{T})$ tal que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(0)| = \infty.$$

Otra duda razonable es qué ocurre si se le exige a la función otra propiedad más fuerte, como que sea L^1 en \mathbb{T} . El siguiente resultado nos demuestra una vez más que nunca hay que hacer preguntas de las que no se quiere conocer la respuesta.

Teorema 4.10 (Kolmogórov). Existe al menos una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(0)| = \infty.$$

Una pequeña victoria es este último resultado del apartado.

Teorema 4.11 (Carleson). Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ o $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $p > 1$ entonces en casi todo punto de \mathbb{T} se verifica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x).$$

4.3. Derivación e integración de series de Fourier

Proposición 4.12. Si $f \in C^k(\mathbb{T})$ entonces

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\pi i n)^k \hat{f}(n)$$

y en particular

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2\pi i n)^k \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Demostración. Para otro día si eso. □

De esta propisición derivan algunos resultados.

Corolario 4.13. Si $f \in C^k(\mathbb{T})$ entonces

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{M_f}{|n|^k}, \quad |n| \geq 1.$$

Demostración. Para otro día si eso. □

Corolario 4.14. Si $f \in C^2(\mathbb{T})$ entonces

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

para todo $x \in \mathbb{T}$ y la convergencia de la serie es uniforme y absoluta.

Demostración. Para otro día si eso. □

Proposición 4.15. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\int_{\mathbb{T}} f(x) \, dt = 0$ y $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ su antiderivada. Entonces

$$\hat{F}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{2\pi i n}, \quad n \neq 0$$

y además, para $n \neq 0$, se tiene que

$$F(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(n)}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} + C$$

Demostración. Para otro día si eso. □

La constante de integración en la proposición anterior es el 0-coeficiente de $F(x)$ y se debe calcular a mano. También se puede probar utilizando el criterio de Dirichlet-Jordan que la fórmula para F converge uniformemente en \mathbb{T} . Notemos también que si $\int_{\mathbb{T}} f(x) \, dt \neq 0$ basta aplicar el teorema a $g(x) = f(x) - \hat{f}(0)$.

4.4. Unicidad de las series de Fourier

Hasta ahora nos hemos centrado en obtener desarrollos para funciones sin detenernos en observar si dicho desarrollo era único para cada función. El teorema que veremos a continuación afirma que sí, pero antes debemos conocer un resultado que usaremos en su demostración.

Lema 4.16 (Teorema fundamental del cálculo de Lebesgue). Si $f \in L^1((0, 1))$ entonces la función

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$$

es derivable en casi todo punto. Además, $F'(x) = f(x)$ en casi todo punto.

Ahora sí, procedemos con el resultado importante.

Teorema 4.17. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ tales que para cada $n \in \mathbb{Z}$ se verifica $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$. Entonces $f \equiv g$.

Demostración. Sea $h = f - g$ (que sigue siendo una función $L^1(\mathbb{T})$). Entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\hat{h}(n) = 0$. Veamos que $h \equiv 0$.

Caso 1. Si $h \in C^1(\mathbb{T})$ entonces utilizando el criterio de Dini débil llegamos a que

$$h(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{h}(n) e^{2\pi i n x} = 0$$

para todo $x \in \mathbb{T}$.

Caso 2. Si $h \in C(\mathbb{T})$ entonces tomamos

$$H(x) = \int_0^x h(t) \, dt$$

que es una función de clase $C^1(\mathbb{T})$ (notemos que es periódica, ya que $H(1) = \hat{h}(0) = 0$). Aplicando ahora la proposición 4.15 tenemos que

$$\hat{H}(n) = \frac{\hat{h}(n)}{2\pi i n} = 0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^*$. Aplicando Dini débil tenemos que $H(x) = \hat{H}(0)$, luego es una constante y su derivada h^1 es 0.

Caso 3. Si $h \in L^1(\mathbb{T})$ entonces basta con seguir un procedimiento análogo al caso anterior, utilizando en este caso el lema 4.16.

Por tanto $h \equiv 0$ y $f \equiv g$ como queríamos ver. □

Más adelante veremos otra forma de obtener la unicidad mediante el teorema de Féjer. La prueba anterior puede completarse también sin utilizar el lema 4.16 utilizando el siguiente razonamiento: si H es constante entonces

$$H(b) - H(a) = \int_a^b h(t) dt = 0$$

para a y b cualesquiera, luego

$$\int_{\mathbb{T}} h(t) s(t) dt = 0$$

para cualquier función simple s . Tomando una sucesión de funciones simples $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a $\text{sgn}(h(t))$ y aplicando el teorema de la convergencia dominada, nos queda que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} h(t) s_n(t) dt = \int_{\mathbb{T}} \lim_{n \rightarrow \infty} h(t) s_n(t) dt = \int_{\mathbb{T}} |h(t)| dt = 0.$$

4.5. Series de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$

Recordemos también el espacio vectorial de funciones

$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

que es el objeto de estudio de este apartado. Para ver algunas propiedades de este espacio, debemos primero conocer el siguiente resultado.

Lema 4.18 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ entonces

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x) g(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{T}} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Recordemos ahora el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

con el que se definía la norma

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx}$$

¹El teorema fundamental del cálculo nos garantiza que $H' \equiv h$ por ser h continua y H su antiderivada.

y se tenían la siguientes propiedades.

Proposición 4.19. *El espacio métrico $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^2})$ es completo. Además, $L^2(\mathbb{T}) \subsetneq L^1(\mathbb{T})$.*

Demostración. Únicamente tenemos demostración de la última parte. Utilizando el lema 4.18 y tomando $g(x) = 1$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)| \, dx \leq \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

por lo que si la segunda es finita, la primera también. Para ver que el contenido es estricto, basta ver que la función

$$f(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}, \quad |x| < \frac{1}{2}$$

está en $L^1(\mathbb{T})$ pero no en $L^2(\mathbb{T})$. □

La teoría sobre series de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$ es un caso especial de la teoría de bases ortonormales en un espacio de Hilbert, por lo que vamos a introducir también este concepto.

Definición 4.20. Sea \mathbb{H} un \mathbb{C} -espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación verificando:

1. Lineal en la primera variable: $\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle$.
2. Anti-lineal en la segunda variable: $\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \overline{\lambda_1} \langle f_1, g \rangle + \overline{\lambda_2} \langle f_2, g \rangle$.
3. Hermítica o auto-adjunta: $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$.
4. Definida positiva: $\langle f, f \rangle \geq 0$ y $\langle f, f \rangle = 0 \iff f \equiv 0$.

Tomando entonces la norma $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, el espacio métrico $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ se llama **espacio de Hilbert** si la norma $\|\cdot\|$ es completa.

Ejemplo 4.21. Veamos algunos ejemplos de espacios de Hilbert.

- $L^2(\mathbb{T})$ con la norma $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} \, dx$ ya hemos dicho que lo es.
- El espacio \mathbb{C}^k con el producto escalar usual $\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^k z_i \overline{w_i}$.
- El conjunto $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$ es un espacio de Hilbert con la norma $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$.

Para resolver algunos problemas en relación a series de Fourier, debemos conocer el siguiente resultado.

Proposición 4.22 (fórmula de Parseval). *Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces*

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Capítulo 5

Convolución y series de Fourier

5.1. Introducción

Definición 5.1. Dadas dos funciones $K, f \in L^1(\mathbb{T})$, se define la **convolución** de ambas como

$$(K * f)(x) = \int_{\mathbb{T}} K(x - y) f(y) \, dy$$

para $x \in \mathbb{T}$, siempre que la integral sea absolutamente convergente (es decir $\int_{\mathbb{T}} |K(x - y) f(y)| \, dy < \infty$).

Esta misma definición puede extenderse para dimensiones superiores de orden finito, aunque en este tema sólo consideraremos las unidimensionales en \mathbb{T} .

Ejemplo 5.2. Veamos algunos ejemplos que ya conocemos de convoluciones.

1. Las sumas parciales de Fourier son convoluciones, ya que

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \int_{\mathbb{T}} D_N(x - y) f(y) \, dy$$

donde $D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi i n x}$ es el llamado *núcleo de Dirichlet (de orden N)*.

2. Las soluciones de la ecuación del calor en \mathbb{R}^n también son convoluciones, pues el problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

tiene como solución la función

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} W_t(x - y) f(y) \, dy$$

donde $W_t(x) = (2\pi n t)^{-1} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ es el llamado *núcleo de Gauss-Weierstrass*.

3. Las soluciones a la ecuación de Laplace en \mathbb{D}

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \varphi(t) \, dt$$

son también convoluciones, siendo $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \theta}$ el *núcleo de Poisson*.

4. En general, los promedios sobre bolas también son convoluciones.

Una interpretación de las convoluciones si $\int_{\mathbb{T}} K(x) \, dx = 1$ es que “promedian” la función f en un entorno de un punto x “ponderando” por el peso de K . Veamos ahora algunas propiedades de este tipo de objetos.

Proposición 5.3. *La convolución de dos funciones $K, f \in L^1(\mathbb{T})$ existe en casi todo punto de \mathbb{T} . Además,*

$$\|K * f\|_{L^1} \leq \|K\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^1}.$$

Demostración. Llamamos

$$I(x) = \int_{\mathbb{T}} |K(x-y) f(y)| \, dy$$

y vamos a probar que para casi todo $x \in \mathbb{T}$ se tiene que $I(x) < \infty$. Dado que $I(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{T}$, tenemos que

$$0 \leq \int_{\mathbb{T}} I(x) \, dx = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |K(x-y)| |f(y)| \, dy \right) dx \stackrel{*}{=} \int_{\mathbb{T}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{T}} |K(x-y)| \, dx \right) dy \stackrel{**}{=} \|K\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^1} < \infty$$

donde en $*$ hemos utilizado el teorema de Fubini-Tonelli[4, Teorema 2.37] y en $**$ un cambio de variable con $z = x - y$. \square

Proposición 5.4. *La convolución vista como aplicación*

$$*: L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T}) \rightarrow L^1(\mathbb{T})$$

*es conmutativa y asociativa. Además, $\widehat{(K * f)}(n) = \hat{K}(n) \hat{f}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. La conmutatividad se obtiene directamente de la definición tomando el cambio de variable $z = x - y$. La asociatividad es un ejercicio, con la indicación de que se use Fubini. La última propiedad podemos verla directamente:

$$\begin{aligned} \widehat{(K * f)}(n) &= \int_{\mathbb{T}} (K * f)(x) e^{-2\pi i n x} \, dx = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} K(x-y) f(y) \, dy \right) e^{-2\pi i n x} \, dx \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{**}{=} \int_{\mathbb{T}} f(y) \left(\int_{\mathbb{T}} K(x-y) e^{-2\pi i n x} \, dx \right) dy \stackrel{**}{=} \int_{\mathbb{T}} f(y) e^{-2\pi i n y} \left(\int_{\mathbb{T}} K(z) e^{-2\pi i n z} \, dz \right) dy = \hat{K}(n) \hat{f}(n) \end{aligned}$$

donde en $*$ hemos utilizado el teorema de Fubini y en $**$ el cambio de variable $z = x - y$. \square

Del resultado anterior se deduce inmediatamente el siguiente.

Corolario 5.5. *Si $K, f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces*

$$(K * f)(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{K}(n) \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Las convoluciones resultan muy útiles en ingeniería como método de tratamiento de señales. Los filtros de paso alto o bajo o los ecualizadores (tanto sus versiones digitales como las analógicas) se construyen utilizándolas.

Volviendo al ámbito matemático, tenemos el siguiente resultado sobre derivación de convoluciones.

Proposición 5.6. Si $K \in C^N(\mathbb{T})$ y $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $K * f \in C^N(\mathbb{T})$ y además

$$D^{(m)}(K * f)(x) = \left((D^{(m)}K) * f \right)(x)$$

para todo $0 \leq m \leq M$.

Demostración. Esta demostración requiere del teorema de derivación de integrales paramétricas[4, Teorema 2.27], con el que se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\mathbb{T}} K(x-y) f(y) dy \right) = \int_{\mathbb{T}} K'(x-y) f(y) dy$$

(el correcto uso de este teorema es un ejercicio). □

5.2. Aproximación de la identidad

Definición 5.7. Una sucesión de funciones $L^1(\mathbb{T})$ reales $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice que es una **aproximación de la identidad** si verifica que

1. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\int_{\mathbb{T}} K_n(x) dx = 1$.
2. $A = \sup \left\{ \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)| dx : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$.
3. Para todo $\delta > 0$, se tiene $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta)} |K_n(x)| dx = 0$.

Intuitivamente, las aproximaciones de la identidad convergen a la función delta de Kronecker. Veremos también que las convoluciones $K_n * f$ convergen a f cuando $n \rightarrow \infty$, lo que motiva el nombre de “aproximación de la identidad” que se le ha proporcionado.

Ejemplo 5.8. Los promedios $K_n(x) = \frac{1}{2\varepsilon_n} \chi_{(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)}(x)$, el núcleo de Poisson $K_n(t) = P_{r_n}(2\pi t)$, el núcleo de Gauss-Weierstrass $K_n(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_n}} e^{-\frac{|x|^2}{4t_n}}$ en \mathbb{R} y el núcleo de Dirichlet $D_n(x) = \sum_{|m| \leq n} e^{2\pi i m x}$ son aproximaciones de la identidad.

A continuación tenemos los resultados principales de esta sección, pero antes (como ya viene siendo habitual) debemos conocer este resultado previo.

Lema 5.9. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces para $x \in \mathbb{T}$

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|f(x+h) - f(x)\|_{L^1} = 0.$$

Este lema es también válido para funciones L^1 en \mathbb{R}^n . Además, también se puede adaptar para funciones L^p (con la norma L^p también) usando la desigualdad integral de Minkowski[4, Teorema 8.14]. Ahora sí, procedemos con normalidad.

Teorema 5.10 (convergencia de aproximaciones de la identidad). Sea $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una aproximación de la identidad. Se verifican:

1. Si f es una función acotada y continua en $x_0 \in \mathbb{T}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (K_n * f)(x_0) = f(x_0)$.
2. Si $f \in C(\mathbb{T})$, entonces para todo $x \in \mathbb{T}$ se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} (K_n * f)(x) = f(x)$ y la convergencia es uniforme.
3. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces $K_n * f \rightarrow f$ con la norma L^1 .

Demostración. Para otro día si eso. □

La demostración anterior también es válida para aproximaciones de la identidad en dimensiones superiores si se exige en la segunda condición que f sea acotada en el abierto en el que esté definida.

Corolario 5.11. Sea $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una aproximación de la identidad tal que cada K_n es una función par. Entonces para cualquier función acotada f , la existencia de los puntos $f(x_0^\pm)$ garantiza que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (K_n * f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Demostración. La demostración de esta propiedad es un ejercicio. □

5.3. Núcleo de Dirichlet

El **núcleo de Dirichlet** viene dado por

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi i n x} = \frac{\text{sen}((2N+1)\pi x)}{\text{sen}(\pi x)}$$

con las siguientes propiedades:

1. $\int_{\mathbb{T}} D_N(x) \, dx = 1$.
2. $D_N(x) = D_N(-x)$.
3. $D_N(0) = 2N+1$.
4. $D_N(x) = 0 \iff x \in \left\{ \frac{\pm 1}{2N+1}, \dots, \frac{\pm N}{2N+1} \right\}$.
5. $\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)| \, dx \approx \log(N+1) \rightarrow \infty$.

Lema 5.12. Se tiene

$$L_N := \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)| \, dx \geq \frac{4}{\pi^2} \log(N+1).$$

Lema 5.13. Se tiene

$$\int_0^a D_N(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{(2N+1)\pi a} \frac{\sin x}{x} dx + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

uniformemente en $|a| \leq \frac{1}{2}$. En particular

$$\sup_{N \geq 1} \sup_{|a|, |b| \leq \frac{1}{2}} \left| \int_a^b D_N(x) dx \right| < \infty.$$

Teorema 5.14 (criterio de Dirichlet-Jordan). Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Se verifica:

1. Si f es creciente (o decreciente) en un entorno de a , entonces

$$\exists \lim_N S_N f(a) = \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2}.$$

2. Si f es creciente (o decreciente) en un entorno de $[a, b]$ y $C[a, b]$ entonces

$$\lim_N S_N f(x) = f(x) \text{ uniformemente } \forall x \in [a, b].$$

5.4. El fenómeno de Gibbs

Teorema 5.15 (criterio de Dirichlet-Jordan). Si $f \in C^1(\mathbb{T} \setminus \{a\})$ y presenta una discontinuidad de salto en a entonces

$$\lim_N S_N f\left(a \pm \frac{1}{2N+1}\right) = f(a^\pm) \pm 0,09 [f(a^+) - f(a^-)].$$

5.5. Sumabilidad de Cesàro y núcleo de Fejér

Definición 5.16. Decimos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S **en media** (o **en sentido de Cesàro**) si

$$\sigma_N := \frac{S_0 + \cdots + S_{N-1}}{N} \rightarrow S.$$

Lema 5.17. Si una serie converge a cierto S , también lo hace en sentido de Cesàro a ese mismo S .

1. $\sigma_N = \frac{S_0 + \cdots + S_{N-1}}{N} = \sum_{n=0}^N \frac{N-n}{N} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{N}\right) a_n.$
2. Hay más métodos clásicos de sumación.

Definición 5.18. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ se define

$$\sigma_N f(x) = \frac{S_0 f(x) + \cdots + S_{N-1} f(x)}{N}$$

y como $S_n f = D_n * f$, se tiene

$$\sigma_N f = \left(\frac{D_0 + \cdots + D_{N-1}}{N} \right) * f = F_N * f.$$

Definición 5.19. Se define el N -ésimo núcleo de Fejér como

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N}.$$

Lema 5.20. Vean

1. $F_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\text{sen } N\pi x}{\text{sen } \pi x} \right)^2$.
2. $\{F_N(x)\}_{N \geq 1}$ es una aproximación de la identidad en $L^1(\mathbb{T})$.

Propiedades:

1. $F_N \geq 0$ y $F_N(x) = F_N(-x)$.
2. $\int_{\mathbb{T}} F_N(x) \, dx = \int_{\mathbb{T}} |F_N(x)| \, dx = 1$.
3. $F_N(0) = N$.
4. $F_N(x) = 0 \iff x = \pm \frac{j}{N}$ donde $j = 1, \dots, \frac{N}{2}$.
5. Decaimiento:

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\text{sen } N\pi x}{\text{sen } \pi x} \right)^2 \lesssim \min \left\{ N, \frac{1}{N|x|^2} \right\}.$$

6. Coeficientes de Fourier: $\widehat{F_N}(n) = \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)_+$ para $n \in \mathbb{Z}$. De hecho,

$$\sigma_N f(x) = \sum_{|n| < N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)_+ \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Teorema 5.21 (Fejér). Varios:

1. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y existen $f(a^\pm)$ entonces

$$\lim_N \sigma_N f(a) = \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2}.$$

2. Si $f \in C(\mathbb{T})$ entonces

$$\lim_N \sigma_N f(x) = f(x) \text{ uniformemente } \forall x \in \mathbb{T}.$$

3. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces

$$\lim_N \|\sigma_N f - f\|_{L^1} = 0.$$

Corolario 5.22 (unicidad de las series de Fourier). Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ es tal que $\hat{f}(n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ entonces $f \equiv 0$.

Corolario 5.23 (eliminación del fenómeno de Gibbs). Si $M_1 \leq f(x) \leq M_2$ entonces $M_1 \leq \sigma_N f(x) \leq M_2$.

Corolario 5.24. El conjunto $\mathcal{T} = \text{span} \{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es denso en $C(\mathbb{T})$.

Corolario 5.25 (Weierstrass). El conjunto $\mathcal{P} = \text{span} \{x^n\}_{n \geq 0}$ de los polinomios es denso en $C([a, b])$. Es decir, si $C([a, b])$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe un polinomio $P(x)$ tal que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

5.6. Aplicación de la teoría de series de Fourier

5.6.1. La desigualdad isoperimétrica

Teorema 5.26. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple “regular” con $L(\Gamma) = L$. Entonces el área que encierra cumple

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

y la igualdad se da si y solo si Γ es una circunferencia.

Fórmula de Green en \mathbb{R}^2

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} dx \, dy = \frac{1}{2} \left| \int_{\partial\Omega} (-y \, dx + x \, dy) \right|.$$

Teorema 5.27 (Sobolev). Si $f \in W^1(L^1(\mathbb{R}^d))$ entonces

$$\|f\|_{L^{\frac{d}{d-1}}} \leq C_d \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|$$

donde puede tomarse $C_d = (\alpha_d)^{\frac{1}{d}}$.

5.6.2. La desigualdad de Weierstrass

Teorema 5.28 (Weierstrass). Sea $\alpha \in (0, 1)$ y

$$W_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i 2^n x}}{2^{n\alpha}}, \quad x \in \mathbb{T}.$$

Entonces $W_{\alpha} \in C(\mathbb{T})$ pero no es derivable en ningún punto. En verdad $W_{\alpha} \in C^{\alpha}(\mathbb{T})$ pero $W_{\alpha} \notin C^{\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T})$.

Lema 5.29. Si g acotada cumple $g \in Lip_\beta(x_0)$ con $\beta \in (0, 1)$ entonces

$$|(\Delta_k * g)(x_0)| \leq C_g 2^{-k\beta}.$$

5.6.3. Teorema de equidistribución de Weyl

Teorema 5.30 (equidistribución de Weyl). Si $\gamma \notin \mathbb{Q}$ y si $J = (a, b) \subset \mathbb{T}$ entonces

$$\lim_N \frac{|\{n = 1, \dots, N : \langle n\gamma \rangle \in J\}|}{N} = |J|.$$

Parte III

Ecuaciones en derivadas parciales (continuación)

Capítulo 6

Más sobre ecuaciones en derivadas parciales

6.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de Sturm-Liouville

Durante el desarrollo de este capítulo, utilizaremos los resultados demostrados en el libro de Peral Alonso [5, Sección 3.2].

A menudo, al resolver ecuaciones en derivadas parciales mediante “separación de variables” llegamos a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 2 del tipo

$$(P) = \begin{cases} a(t) x''(t) + b(t) x'(t) + c(t) x(t) = -\lambda x(t), & t \in [a, b] \\ \text{(condiciones de contorno)} \end{cases}$$

donde debemos determinar:

1. ¿Para qué valores de λ existen soluciones no triviales (es decir, x no idénticamente nulas)? Determinábamos que existían $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ que verificaban esta condición.
2. ¿Qué funciones son invariantes? Es decir, hallar las funciones $\phi_n(t)$ que verifican $L\phi_n(t) = -\lambda_n\phi_n(t)$ (donde L es el operador asociado a la ecuación diferencial).
3. ¿Son ortogonales estas funciones? Es decir, si se verifica que $\int_a^b \phi_n(t) \phi_m(t) dt = 0$ para $m \neq n$.
4. ¿Puede cualquier función f ser descrita como un desarrollo de la forma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t), \quad t \in [a, b]$$

para coeficientes $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adecuados?

Encontrando la respuesta a estas preguntas encontramos un candidato a solución de la ecuación.

Una pregunta natural es si estos 4 pasos son necesarios hacerlos cada vez que pretendamos resolver una ecuación en derivadas parciales o si existe una teoría general sobre ellas.

Definición 6.1. Un **operador de Sturm-Liouville regular** es un par (L, cc) formado por:

1. Un operador diferencial L de orden 2

$$Lx(t) = -[a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t)], \quad t \in [a, b].$$

2. Unas condiciones de contorno cc fijas

- O bien $a_1x(a) + a_2x'(a) = 0$ y $b_1x(b) + b_2x'(b) = 0$ (condiciones separadas).
- O bien $x(a) = x(b)$ y $x'(a) = x'(b)$ (condiciones periódicas).

Definición 6.2. Decimos que $\lambda \in \sigma(L, cc)$ si existe ϕ no idénticamente nula tal que

$$L\phi(t) = \lambda\phi(t) \quad \text{y} \quad \phi \in cc.$$

En ese caso decimos que λ es un **autovalor** de (L, cc) y que ϕ es su **autofunción** asociada.

Teorema 6.3. Sea (L, cc) un operador de SL regular. Entonces se cumple:

1. $\sigma(L, cc) = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde $\lambda_1 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$.
2. Si las condiciones de contorno son separadas, entonces todos los autovalores son simples. Si son periódicas solo sabemos que la dimensión el subespacio propio es finita.
3. Existe un peso $w(t) > 0$ tal que $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal en $L^2([a, b], w(t) dt)$ y en particular

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_w = \int_a^b \phi_n(t) \phi_m(t) w(t) dt = 0, \quad n \neq m.$$

4. Toda $f \in C^2([a, b]) \cap cc$ se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle_w \phi_n(t), \quad t \in [a, b]$$

con convergencia uniforme $\forall t \in [a, b]$.

Se cumplen algunas propiedades más que asemejan $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a un sistema trigonométrico:

1. ϕ_n tiene exactamente $(n - 1)$ ceros en (a, b) .
2. **Teorema de equiconvergencia:** Si $f \in L^1([a, b])$ entonces

$$\bar{S}_n f(t) = \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_m \rangle_w \phi_n(t)$$

cumple los mismos teoremas de convergencia que las series de Fourier usuales.

3. **Fórmula variacional de Rayleigh**

$$\lambda_n = \min \left\{ \langle L\phi, \phi \rangle_w : \phi \in C^2 \cap cc, \quad \|\phi\|_{L_w^2} = 1, \quad \phi \perp \{\phi_1, \dots, \phi_{n-1}\} \right\}$$

que permite aproximar λ_n numéricamente.

En algunos problemas de EDPs aparecen operadores SL singulares

- $a(t_0) = 0$ o bien $b(t), c(t) \rightarrow \infty$ en $t = t_0 \in [a, b]$.
- $[a, b]$ no sea compacto $\implies [0, \infty)$ ó $(-\infty, \infty)$.

En muchos casos el teorema es cierto con modificaciones meores.

Ejemplo 6.4. Ecuación de Bessel

$$-Lx(t) = x''(t) + \frac{1}{t}x'(t) - \frac{v^2}{t^2}x(t), \quad t \in [0, 1]$$

$\implies b(t) = \frac{1}{t}, c(t) = -\frac{v^2}{t^2}$ tienen un polo en $t = 0$.

Para el operador de Bessel, veremos que el problema de autovalores

$$\begin{cases} Lx(t) = \lambda x(t), & t \in [0, 1] \\ \exists x(0^+), & x(1) = 0 \end{cases}$$

tiene como solución

$$\phi_n(t) = J_r(\lambda_n t) \quad \text{con} \quad \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} = Z(J_r)$$

y además para tener

$$\langle \phi_n \phi_m \rangle_w = 0$$

se debe usar el peso

$$w(t) = \frac{1}{a(t)} e^{\int \frac{b(s)}{a(s)} ds} = e^{\log t} = t.$$

6.2. Membrana vibrante rectangular

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & t > 0, \quad (x, y) \in R \\ u(t, \cdot) \equiv 0 & \text{en } \partial R \text{ cond contorno} \\ u(0, \cdot) = f & u_t(0, \cdot) = g \text{ pos/vel inicial} \end{cases}$$

La solución es de la forma

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{n,m} \cos(c\rho_{n,m}t) + B_{n,m} \sin(c\rho_{n,m}t)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$$

y los coeficientes se calculan con las condiciones iniciales

$$A_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) dx dy$$

$$B_{n,m} = \frac{1}{c\rho_{n,m}} \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} g(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) dx dy$$

Interpretación

- Modos de vibración espacial: $V_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$.
- Frecuencias de vibración temporal: $\frac{c}{2\pi} \rho_{n,m} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2}$ en hercios.

6.3. Funciones de Bessel

Para $v \in \mathbb{N}$

$$z^2 f''(z) + z f'(z) + (z^2 - v^2) f(z) = 0, \quad z > 0$$

tiene como soluciones

$$f(z) = A J_v(z) + B Y_v(z)$$

donde $J_v \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es una función de Bessel de primera especie y Y_v de segunda dada por

$$J_v(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (v+j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+2j} \quad Y_v(z) \rightarrow \infty \text{ si } z \rightarrow 0^+$$

Lema 6.5. Se tiene

$$z J'_v(z) = v J_v(z) - z J_{v+1}(z).$$

Lema 6.6. Se tiene

$$2 \int_0^1 J_v(\lambda r)^2 r \, dr = \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right) J_v(\lambda)^2 + J'_v(\lambda)^2$$

y en particular si $J_v(\lambda) = 0$ se tiene

$$\int_0^1 J_v(\lambda r)^2 r \, dr = \frac{J_{v+1}(\lambda)^2}{2}.$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt, \quad x > 0 \quad \textbf{Función Gamma}$$

Lema 6.7 (fórmula de Sonine). Se tiene

$$\int_0^1 (1-r^2)^\mu J_v(\lambda r) r^{v+1} \, dr = \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1)}{\lambda^{\mu+1}} J_{v+\mu+1}(\lambda), \quad \mu, v > -1$$

En general J_v no tiene expresión explícita salvo en los casos $v = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}, \quad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Teorema 6.8. Se tiene

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}v + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

si $x \rightarrow \infty$.

Corolario 6.9. $\mathcal{Z}_+(J_n) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots\}$ con $\lambda_m \neq \infty$.

Denotaremos $\mathcal{Z}_+(J_n) = \{S_m^{(n)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ y puede probarse que

$$S_m^{(n)} = \left(m + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) \pi + O\left(\frac{1}{m}\right)$$

si $m \rightarrow \infty$.

Para $n \in \mathbb{N}$ fijo consideramos el problemas SL singular

$$\begin{cases} R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{n^2}{r^2}R(r) = -\lambda^2 R(r), & 0 < r < 1 \\ (CC) R(1) = 0 \text{ y } \exists R(0^+) \end{cases}$$

- Solución general $R(r) = AJ_n(\lambda r) + BY_n(\lambda r)$.
- $CC \implies B = 0$ y $\lambda \in \{s_{n,1} < s_{n,2} < \dots\} = \mathcal{Z}_+(J_n)$.
- Autofunciones: $\{\phi_m(r) = J_n(s_{n,m}r), m = 1, 2, \dots\}$.

Teorema 6.10. El sistema $\{\phi_n(r)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base ortogonal de $L_r^2(0, 1)$

$$f(r) = L_{r-}^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) J_n(s_{n,m}r), \quad a_m(f) = \frac{\int_0^1 f(r) J_n(s_{n,m}r) r dr}{J_{n+1}^2(s_{n,m})/2}$$

Además si $f \in C^2[0, 1]$ con $f(1) = 0$ (y $f(0) = 0$ si $n \neq 0$), entonces la convergencia es uniforme para $0 < r < 1$.

6.4. Membrana circular

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & t > 0, \quad (x, y) \in D \\ u(t, \cdot) \equiv 0 & \text{en } \partial D \text{ cond contorno} \\ u(0, \cdot) = f \quad u_t(0, \cdot) = g & \text{pos/vel inicial} \end{cases}$$

Busco soluciones de la forma $u(t, x, y) = T(t) V(x, y)$.

Lema 6.11. $v_{tt} = c^2 \Delta v$ en $D_R(0) \iff u(t, x) = v(t, Rx)$ es solución de $u_{tt} = \frac{c^2}{R^2} \Delta u$ en D .

6.5. Problema de autovalores de $-\Delta$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ acotado con $\partial\Omega$ regular. Determinar $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ en } \Omega \\ (a_1 u + a_2 \nabla u \cdot \vec{n})|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

tenga una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$. Es decir, $\lambda \in \sigma(-\Delta, \Omega, CC)$. Tipicamente se consideran las CC

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ ó } \nabla u \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0 \text{ ó } (\nabla u \vec{n} + \gamma u)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \gamma > 0 \quad (*)$$

Teorema 6.12 (general). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ acotado con $\partial\Omega \in C^\infty$. Consideramos $-\Delta u = \lambda u$ en Ω con CC como en (*).

1. Existen infinitos autovalores $\sigma(-\Delta, CC) = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y se cumple $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$. Además $0 \in \sigma(-\Delta, CC) \iff CC = C_n$.
2. Multiplicidad: $\dim E_\lambda = \dim \{\phi : -\Delta\phi = \lambda\phi\} < \infty$ para todo valor propio.
3. Ortogonalidad: $E_\lambda \perp E_\mu$ si $\lambda \neq \mu$.
4. $\exists \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ que forma una base ortonormal de autovectores en $L^2(\Omega)$

$$f = L^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, \quad \forall f \in L^2(\Omega)$$

y además si $f \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap CC$ la convergencia es uniforme en todo Ω .

5. Fórmula Rayleigh:

$$\lambda_n = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 : \phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \quad \|\phi\| = 1, \quad \phi|_{\partial\Omega} \equiv 0, \quad \phi \perp \{\phi_1, \dots, \phi_{n-1}\} \right\}$$

Corolario 6.13 (ec. calor en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$). Sea $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Entonces la EDP

$$\begin{cases} u_t = \kappa \Delta u, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u(0, \cdot) = f, & u(t, \cdot) \in CC \end{cases}$$

tiene como solución clásica

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa \lambda_n t} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x), \quad t > 0, x \in \Omega.$$

Corolario 6.14 (ec. ondas en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$). Sea $f, g \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Entonces la EDP

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\ u(0, \cdot) = f, \quad u_t(0, \cdot) = g, & u(t, \cdot) \in CC \end{cases}$$

tiene como solución clásica

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle f, \phi_n \rangle \cos(ct\sqrt{\lambda_n}) + \frac{\langle g, \phi_n \rangle}{c\sqrt{\lambda_n}} \sin(ct\sqrt{\lambda_n}) \right) \phi_n(x).$$

Teorema 6.15. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ entonces $\lambda_n \approx \frac{c_d n^{2/d}}{|\Omega|^{2/d}}$ si $n \rightarrow \infty$, con $c_d = (2\pi)^2 / |B_1(0)|^{2/d}$.

6.6. La función de Weierstrass

Teorema 6.16. Dado $\alpha \in (0, 1)$ se define $W_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i 2^n x}}{2^{n\alpha}}$ para $x \in \mathbb{R}$. Entonces $W_\alpha \in C(\mathbb{T})$ y no es derivable en ningún punto. De hecho, $W_\alpha \in C^\alpha(\mathbb{T})$ pero $W_\alpha \notin C^{\alpha+\varepsilon}(\mathbb{R})$ para ningún $\varepsilon > 0$.

Lema 6.17. Si $0 < \alpha < 1$ entonces $W_\alpha \in C^\alpha(\mathbb{T})$.

Lema 6.18. Sea $g \in C^\beta(x_0)$ acotada, con $0 < \beta < 1$. Entonces $|(\Delta_k * g)(x_0)| \leq C_g 2^{-k\beta}$ para cada $k = 1, 2, \dots$

Observación 6.19. Si g es lipschitziana en x_0 con $\beta = 1$ entonces $|(\Delta_k * g)(x_0)| \leq C_g \frac{\log N}{N}$.

Lema 6.20. Si $g \in C(\mathbb{T})$ y existe $g'(x_0)$ entonces $\lim_k (\psi_k * g)'(x_0) = 0$.

6.7. Función de Riemann

Es $R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{in^2 x}$ para $x \in \mathbb{R}$ y se demostró que era derivable en $\pi \frac{p}{q}$ con $p, q \in 2\mathbb{Z}^+$.

Bibliografía

- [1] Lagrange, J. L. (1759). *Recherches sur la nature et la propagation du son*.
- [2] D'Alembert, J. (1747). *Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin*.
- [3] Fletcher, N. H., Rossing T.D. (1991). *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag.
- [4] Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (2nd ed.). Wiley.
- [5] Peral Alonso, I. (1993). *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales*. Universidad Autónoma de Madrid.