(i) Sean $X_1, \dots, X_n \underset{iid}{\sim} N_p(\mu, I_p)$

$$f_{X_i}(x_i;\mu) = (2\pi)^{-p/2} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)'(x_i-\mu)}$$

$$L(\mu; x_1,\dots,x_n) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)'(x_i-\mu)}$$

$$l(\mu; \underset{\sim}{x}_{(n)}) = -\frac{np}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)'(x_i-\mu),$$

$\underset{\sim}{x}_{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$.

$$(I.1) \cdots\cdots (x_i-\mu)'(x_i-\mu) = (x_i-\bar{x}_n)'(x_i-\bar{x}_{(n)})$$
$$+ (\bar{x}_{(n)}-\mu)'(\bar{x}_{(n)}-\mu) + 2(\bar{x}_{(n)}-\mu)'(x_i-\bar{x}_{(n)})$$

Sumamos en (I.1) para $i=1,2,\dots,n$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)'(x_i-\mu) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_{(n)})'(x_i-\bar{x}_{(n)}) + n(\bar{x}_{(n)}-\mu)'(\bar{x}_{(n)}-\mu)$$

$$l(\mu : \mathcal{X}) = -\frac{np}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_{(n)})'(x_i-\bar{x}_{(n)})$$
$$-\frac{n}{2}(\bar{x}_{(n)}-\mu)'(\bar{x}_{(n)}-\mu) \quad \cdots\cdots (I.2)$$

Queremos maximizar $l(\mu : \mathcal{X})$ como función de μ y sólo el último término en (I.2) depende de μ

Como $(\overline{x}_{(n)}-\mu)'(\overline{x}_{(n)}-\mu) \geq 0$, entonces

el último término en (I.2) se maximiza si

$$\hat{\mu} = \overline{x}_n$$

$\therefore$ $\hat{\mu} = \overline{x}_n$ es el MLE para μ

en el contexto (i).

¿Sabemos la distribución "exacta" del estimador?

✓SI✓

p.ej. vía función característica $(i \equiv \sqrt{-1})$

$$\varphi_{\overline{X}_{(n)}}(t) = \mathbb{E}\left(e^{i\, t' \overline{X}_{(n)}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i \sum_{j=1}^{p} t_j \overline{X}_{\cdot j}}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{p} e^{i\, t_j \overline{X}_{\cdot j}}\right).$$

$$\overline{X}_{(n)} = \begin{pmatrix} \overline{X}_{\cdot 1} \\ \vdots \\ \overline{X}_{\cdot p} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\overline{X}_{(n)}}(t) = \prod_{j=1}^{p} \mathbb{E}\left(e^{i\, t_j \overline{X}_{\cdot j}}\right)$$ Porque $\overline{X}_{\cdot 1}, \dots, \overline{X}_{\cdot p}$ son v.a. independ. (*)

$$= \prod_{j=1}^{p} \varphi_{\overline{X}_{\cdot j}}(t_j) = \prod_{j=1}^{p} e^{i\, t_j \mu_j - \frac{1}{2} t_j^2 \cdot \frac{1}{n}}$$

(*) Por ejemplo: Sean $X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n1}$ las componentes 1 de los vectores $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$

Sean $X_{12}\ X_{22}, \dots, X_{n2}$ las componentes 2 de los vectores $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$

Por el supuesto en el contexto (i)

$X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n1}, X_{12}, X_{22}, \dots, X_{n2}$

son v.a. independ.

$\therefore\ \overline{X}_{\cdot 1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i1}$ es indep.

de $\overline{X}_{\cdot 2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i2}$

$$\varphi_{\overline{\mathbb{X}}_{(n)}}(\mathbb{t}) = e^{i\sum_{j=1}^{p} t_j \mu_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} t_j^2}$$

$$= e^{i\mathbb{t}'\mathbb{\mu} - \frac{1}{2n}\mathbb{t}'\mathbb{I}_p\mathbb{t}}$$

$$\therefore\ \overline{\mathbb{X}}_n \sim N_p\Big(\mathbb{\mu}, \overbrace{\tfrac{1}{n}\mathbb{I}_p}^{\mathbb{A}}\Big)$$

$$\overbrace{\left(\sqrt{n}\ \mathbb{I}_p\right)}^{\mathbb{A}^{-1/2}}\left(\overline{\mathbb{X}}_n - \mathbb{\mu}\right) = \sqrt{n}\left(\overline{\mathbb{X}}_{(n)} - \mathbb{\mu}\right) \sim N_p(0, \mathbb{I}_p)$$

$$\left(\overline{\mathbb{X}}_{(n)} - \mathbb{\mu}\right)'\mathbb{A}\left(\overline{\mathbb{X}}_{(n)} - \mathbb{\mu}\right) = \left(\overline{\mathbb{X}}_{(n)} - \mathbb{\mu}\right)'(n\,\mathbb{I}_p)\left(\overline{\mathbb{X}}_{(n)} - \mathbb{\mu}\right)$$

$$= n(\bar{\mathbb{X}}_{(n)} - \mathbb{M})'(\bar{\mathbb{X}}_{(n)} - \mathbb{M}) \sim \chi^2_{(p)}$$

Entonces podemos construir una región de confianza a nivel $(1-\alpha)\times 100\%$. para el verdadero valor de $\mathbb{M}$

$$\mathbb{P}\left(n(\bar{\mathbb{X}}_n - \mathbb{M})'(\bar{\mathbb{X}}_{(n)} - \mathbb{M}) \leq \chi^2_{1-\alpha, p}\right) = 1-\alpha$$