Información de Fisher.

Para una v.a. X con distribución $F(x;\theta) \in \{F(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$, la información de Fisher se define como

$$\mathbb{I}(\theta_0) \equiv \mathbb{E}_{\theta_0}\left(l'(X|\theta_0)^2 \right) = \mathbb{E}_{\theta_0}\left(\left[\left. \frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} \right]^2 \right)$$

$$l(X|\theta) = \log\{f(X|\theta)\}$$

$$\frac{\partial l(X|\theta)}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial f(X|\theta)}{\partial \theta}}{f(X|\theta)} \quad \text{función score}$$

Teorema 1 [1]

$$\mathbb{I}(\theta) = -\mathbb{E}_{\theta}\left(\frac{\partial^2 \log f(X|\theta)}{\partial \theta^2} \right)$$

$$= -\int \left\{ \frac{\partial^2 \log f(X|\theta)}{\partial \theta^2} \right\} f(x;\theta)\, dx$$

Teorema 2 (Asintoticidad Normal de los estimadores de máxima verosimilitud)

Sea $V(\theta) \equiv \frac{1}{n\,\mathbb{I}(\theta)}$, bajo las condiciones de regularidad apropiadas [1], tenemos que:

1 Si n es suficientemente grande

$$\frac{\left(\hat{\theta}_n^{(mv)} - \theta\right)}{\sqrt{\mathbb{V}(\theta)}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

2. Si $\widehat{\mathbb{V}(\theta)} \equiv \dfrac{1}{n\,\mathbb{I}\left(\hat{\theta}_n^{(mv)}\right)}$ y

n es suficientemente grande

$$\frac{\left(\hat{\theta}_n^{(mv)} - \theta\right)}{\sqrt{\widehat{\mathbb{V}(\theta)}}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

La notación $X \overset{\cdot}{\sim} F$ significa "La distribución de X es aproximadamente F"

El punto 1 establece que para tamaños de muestra "grandes" aproximadamente $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n^{(mv)} - \theta\right) \sim N\left(0, \mathbb{I}^{-1}(\theta)\right)$.

El punto 2 establece que este resultado asintótico sigue siendo válido aún si se reemplaza la estimación $\widehat{\mathbb{V}(\theta)}$ por $\mathbb{V}(\theta)$, como $\mathbb{V}(\theta)$ depende de θ y este es desconocido, el punto 2 establece como evaluar $\mathbb{V}(\theta)$.

(1) Condiciones de Regularidad: $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\int f(x|\theta)\,dx = \int \dfrac{\partial f(x|\theta)}{\partial\theta}\,dx$