Sea $\mathbb{A}$ una matriz simétrica de dimensión p y $\underline{x} \in \mathbb{R}^p$, decimos que

$$Q_{\mathbb{A}}(\underline{x}) = \underline{x}' \mathbb{A} \underline{x} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_i x_j$$

es la forma cuadrática correspondiente a $\mathbb{A}$.

Nos interesarán los casos[a] $Q_{\mathbb{A}}(\underline{x}) > 0$; $\forall \underline{x} \neq \mathbb{0}$ y $Q_{\mathbb{A}}(\underline{x}) \geq 0$; $\forall \underline{x}$, de los cuales clasificaremos a la matriz $\mathbb{A}$ como:

(1) $\mathbb{A}$ positivo definida si $Q_{\mathbb{A}}(\underline{x}) > 0$.

(2) $\mathbb{A}$ positivo semi-definida si $Q_{\mathbb{A}}(\underline{x}) \geq 0$.

Denotaremos el caso (1) como "$\mathbb{A} > 0$".

(a) Para $\mathbb{A}$ simétrica de dimensión p, también puede suceder que $Q_{\mathbb{A}}(\underline{x}) < 0$ (negativo definida) ó que $Q_{\mathbb{A}}(\underline{x}) \leq 0$ (negativo semi-definida), pero estos casos no los trataremos aquí.

Descomposiciones Espectrales para matrices

Descomposición de Jordan

Teorema (DJ) Toda matriz simétrica $\mathbb{A}$ de dimensión p se puede escribir como

$$\mathbb{A} = \Gamma \Delta \Gamma' = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \boldsymbol{\gamma}_j \boldsymbol{\gamma}_j',$$

donde

$$\Delta = DIAG(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

y

$$\Gamma = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \dots, \boldsymbol{\gamma}_p)$$

es una matriz ortogonal cuyas columnas son los vectores propios de $\mathbb{A}$

Ejemplo: Sea $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, para encontrar los valores propios de $\mathbb{A}$, resolvemos la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0 \quad \dots\dots (1)$$

Las soluciones de (1) (i.e. los valores propios de $\mathbb{A}$ son $\lambda_1 = 2+\sqrt{5}$ y $\lambda_2 = 2-\sqrt{5}$ y los vectores propios son soluciones de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2+\sqrt{5})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots (I)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2-\sqrt{5})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad -- \quad (\mathrm{II})$$

La ecuación (I) tiene un número infinito de soluciones no triviales (<u>no</u> cero), podemos caracterizar una de ellas

$$x_1 + 2x_2 = (2+\sqrt{5})x_1 \longrightarrow 0 = (1+\sqrt{5})x_1 - 2x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 = (2+\sqrt{5})x_2 \longrightarrow 0 = (\sqrt{5}-1)x_2 - 2x_1$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{2}{1+\sqrt{5}}x_2$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x_2 = \frac{4}{2}\frac{1}{1+\sqrt{5}}x_2 = \frac{2}{1+\sqrt{5}}x_2$$

$\therefore$ cualquier solución no trivial de (I) satisface

$$x_1 = \frac{2}{1+\sqrt{5}}x_2$$

Por ejemplo $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$, pero consideraremos

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3.804} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{3.804} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5257 \\ 0.8506 \end{pmatrix}$$

Análogamente para $\lambda_2 = 2-\sqrt{5}$ usando (II) podemos determinar $u_2 = \begin{pmatrix} 0.8506 \\ -0.5257 \end{pmatrix}$

notemos que u_1 y u_2 son ortogonales

$$u_1' u_2 = 0$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.5257 & 0.8506 \\ 0.8506 & -0.5257 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0.5257 & 0.8506 \\ 0.8506 & -0.5257 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5257 & 0.8506 \\ 0.8506 & -0.5257 \end{pmatrix}$$

$$= \Gamma \Lambda \Gamma'$$

Descomposición de valores Singolares

Teorema (SVD)

Toda matriz $\mathbb{A}$ de dimensiones $n \times p$ y con rango r se puede descomponer como

$$\mathbb{A} = \Gamma \Lambda \Delta',$$

donde: las matrices $\Gamma_{n \times r}$ y $\Delta_{p \times r}$ son ortonormales (en sus columnas)

$$\Gamma' \Gamma = \mathbb{I}_r = \Delta' \Delta$$

$\mathbb{I}_r \leftarrow$ matriz identidad de $r \times r$.

La matriz Λ es diagonal $\Lambda = \mathrm{DIAG}(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_r^{1/2})$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Los valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son los valores propios (diferentes de 0) de las matrices $\mathbb{A}\mathbb{A}'$ y $\mathbb{A}'\mathbb{A}$. Γ y Δ consisten de los r vectores propios de estas matrices (las columnas de Γ son los r vectores propios asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ en $\mathbb{A}\mathbb{A}'$; las columnas de Δ son los r vectores propios asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ en $\mathbb{A}'\mathbb{A}$).

No probaremos los teoremas (JD) y (SVD) aquí, para su demostración hay varios libros de álgebra lineal que se pueden consultar, por ejemplo "Introduction to Linear Algebra", Gilbert Strang, Wellesley College (2016), capítulos 6 y 7, Quinta Edición.

Los teoremas (JD) y (SVD) son cruciales en álgebra lineal y en particular en el estudio de matrices, los usaremos para revisar algunos resultados útiles.

Teorema A Si $\mathbb{A}$ es una matriz simétrica y $Q_{\mathbb{A}}(x) = x'\mathbb{A}x$ es la forma cuadrática correspondiente, entonces existe una transformación $T(\mathbb{x}) = \Gamma' \mathbb{x} \equiv \mathbb{y}$, tal que

$$\mathbb{x}' \mathbb{A} \mathbb{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2,$$

en donde $\mathbb{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_p)'$ y $\lambda_1, \cdots \lambda_p$ son los valores propios de $\mathbb{A}$

Dem

Por el teorema (DJ) podemos escribir $\mathbb{A} = \Gamma \Lambda \Gamma'$.

Sea $\mathbb{y} = \Gamma' \mathbb{x}$ para $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^p$, entonces

$$\mathbb{x}' \mathbb{A} \mathbb{x} = \mathbb{x}' \Gamma \Lambda \Gamma' \mathbb{x} = \mathbb{y}' \Lambda \mathbb{y} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2$$

$$\therefore \quad Q_A(\mathbb{x}) = \mathbb{x}' \mathbb{A} \mathbb{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2 \qquad \blacksquare$$

También se puede probar una relación existente entre matrices positivo definidas y sus valores propios

Teorema B Si $\mathbb{A}$ es una matriz simétrica de dimensión p, $\mathbb{A} > 0$ si y sólo si $\lambda_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, p$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de $\mathbb{A}$

★ NOTA:

Antes de proceder a probar el resultado, notemos que si $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^p$ y $\boxed{\mathbb{x} \neq \mathbb{0}}$, entonces $\Gamma' \mathbb{x} \neq \mathbb{0}$.

Si esto último NO sucediera entonces

$$\mathbb{0} = \Gamma' \mathbb{x} \quad \cdots (u)$$

pero como las columnas de Γ' son vectores ortogonales entonces Γ' es no singular, es decir existe Γ'^{-1} y de la ecuación (u)

$$\mathbb{0} = \Gamma'^{-1}\mathbb{0} = \mathbb{x}$$ lo cual es contradictorio

ya que se asumió $\mathbb{x} \neq 0$. Análogamente se tiene que si $\mathbb{y} = \Gamma'\mathbb{x}$ es diferente de $\mathbb{0}$, entonces $\mathbb{x} \neq 0$.

Procedemos a probar el teorema B

Dem (teor B)

Supóngase $\lambda_i > 0$; $\forall i = 1, 2, \ldots, p$, por el teor A, para $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^p$ con $\mathbb{x} \neq 0$ tenemos

$$Q_A(\mathbb{x}) = \mathbb{x}' A \mathbb{x} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_p y_p^2$$

y por la NOTA ★ $\mathbb{y}$ no es el vector $\mathbb{0}$

$$\therefore \quad Q_A(\mathbb{x}) > 0 \qquad \therefore \quad A > 0$$

Supóngase ahora que $A > 0$, entonces $\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^p$ t.q. $\mathbb{x} \neq \mathbb{0}$

$$(\alpha) \cdots\cdots \quad 0 < Q_A(\mathbb{x}) = \mathbb{x}' A \mathbb{x} \overset{\text{Teor A}}{=} \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_p y_p^2$$

Sean y en $\mathbb{R}^p$ dado por $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y

$x \equiv \Gamma^{-1} y$, como $y \neq 0$ entonces $x \neq 0$

y $\Gamma x = y$. Usando (α)

$$0 < Q_A(x) = x' A x = \lambda_1 .$$

Ahora sean $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y $x \equiv \Gamma^{-1} y$, entonces

$x \neq 0$ y $\Gamma x = y$. Usando (α)

$$0 < Q_A(x) = x' A x = \lambda_2 \quad \dots \text{ etc.}$$

$\blacksquare$

Recordemos que en un curso de álgebra lineal se suele probar que para una matriz de dimensión p

$$|A| = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ valores propios de } A$$

Entonces si A es una matriz simétrica y $A > 0$ por el Teorema B $|A| > 0$ lo cual implica que A^{-1} existe. Se tiene el siguiente

<u>Corolario</u> Si $\mathbb{A} > 0$, entonces $|\mathbb{A}| > 0$ y existe $\mathbb{A}^{-1}$.

<u>Teorema</u> C Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son matrices simétricas y $B>0$, entonces el máximo de $\dfrac{x'\mathbb{A}x}{x'\mathbb{B}x}$ está dado por el más grande valor propio de la matriz $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$[(b)]. De hecho, si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ son los valores propios de $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ listados en orden decreciente, entonces

$$(10)\dots \quad \min\left\{\frac{x'\mathbf{A}x}{x'\mathbf{B}x} : x\in\mathbb{R}^n;\ x\neq\mathbb{O}\right\} = \lambda_p \leq \lambda_{p-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$$

$$= \max\left\{\frac{x'\mathbb{A}x}{x'\mathbb{B}x} : x\in\mathbb{R}^n;\ x\neq 0\right\}$$

Para demostrar el teorema C se usan los teoremas (JD) y (SVD). En lugar de demostrar el teorema C nos enfocaremos en estudiar su utilidad para la definición de COMPONENTES PRINCIPALES.

El teorema C nos dice que si vemos al cociente

$\dfrac{x'\mathbb{A}x}{x'Bx}$ como función de x para $x\in\mathbb{R}^p$ y $x\neq\mathbb{O}$

(b) Asumiendo que los valores propios de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ son reales, Esto último es cierto si por ejemplo $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ fuera simétrica el más grande valor que $\frac{x'Ax}{x'Bx}$ puede tomar es λ_1 el mayor de los valores propios de $B^{-1}A$ ¿Para qué valor de x alcanza $\frac{x'Ax}{x'Bx}$ este máximo?

Supóngase que x_1 es el vector propio de $B^{-1}A$ asociado a λ_1, entonces

$$B^{-1}Ax_1 = \lambda_1 x_1$$

$$\Rightarrow \quad Ax_1 = \lambda_1 Bx_1 \qquad \text{porque } B>0$$

$$\Rightarrow \quad x_1'Ax_1 = \lambda_1 x_1'Bx_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1'Ax_1}{x_1'Bx_1} = \lambda_1 \qquad \text{porque } B>0$$

Lo anterior nos dice que el máximo se alcanza en $x = x_1$ el vector propio de $B^{-1}A$ asociado a λ_1

Notemos además que en el caso particular en que $B = I_{p\times p}$ tenemos $B^{-1}A = A$

Entonces $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ es una matriz simétrica entonces sus valores propios son reales y de hecho son los valores propios de $\mathbb{A}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. El teorema C nos dice que

$$\lambda_p \leq \frac{x' \mathbb{A} x}{x' x} \leq \lambda_1$$

Sea x_1 el valor propio asociado a λ_1 normalizado, es decir $\|x_1\| = x_1' x = 1$

Entonces

$$\mathbb{A} x_1 = \lambda_1 x_1$$

$$x_1' \mathbb{A} x_1 = \lambda_1 x_1' x_1 = \lambda_1$$

Es decir, el valor de x en donde $\frac{x' \mathbb{A} x}{x' x}$ alcanza el valor λ_1 es el valor propio de $\mathbb{A}$ asociado a λ_1, si además este vector se normaliza para tener norma 1 entonces:

$$\max\{ x' \mathbb{A} x : x \in \mathbb{R}^p \text{ y } \|x\| = 1 \} = \lambda_1$$

este máximo se alcanza para $x = x_1$

xG_1 = vector propio asociado a λ_1, normalizado