nota 1 (Propiedades de la traza)

(a) Supóngase que $\mathbb{A}$ es una matriz de dims $p \times n$ y $\mathbb{B}$ una matriz de dims $n \times p$

entonces: $\quad tr(\mathbb{A}\mathbb{B}) = tr(\mathbb{B}\mathbb{A})$

cuidado $\mathbb{A}\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}\mathbb{A}$ <u>no</u> son de las mismas dimensiones.

(b) Si $\mathbb{A}$ es de dimensiones 1×1, entonces

$tr(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$ "la traza de un escalar es el escalar"

---

nota 2

$\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n$ vectores aleatorios de dimensión $p \times 1$

$\mathbb{E}(\mathbb{X}_j) = \mathbb{M}$ y $VAR(\mathbb{X}) = \Sigma$

$(\mathbb{X}_j - \mathbb{M})' \Sigma^{-1} (\mathbb{X} - \mathbb{M})$ es de dims 1×1

$$\therefore \quad tr\left((\mathbb{X}_j - \mathbb{M})' \Sigma^{-1} (\mathbb{X}_j - \mathbb{M})\right) = (\mathbb{X}_j - \mathbb{M})' \Sigma^{-1} (\mathbb{X}_j - \mathbb{M})$$

Pero entonces

$$(x) \cdots\cdots \sum_{j=1}^{n} (\mathbb{X}_j - \mathbb{M})' \Sigma^{-1} (\mathbb{X}_j - \mathbb{M}) = \sum_{j=1}^{n} tr\left[\overbrace{(\mathbb{X}_j - \mathbb{M})'}^{A} \overbrace{\Sigma^{-1} (\mathbb{X}_j - \mathbb{M})}^{B}\right]$$

$$(a) \longrightarrow \; = \sum_{j=1}^{n} tr\left[\Sigma^{-1} (\mathbb{X}_j - \mathbb{M})(\mathbb{X}_j - \mathbb{M})'\right]$$

$$= tr\left[\sum_{j=1}^{n} \Sigma^{-1} (\mathbb{X}_j - \mathbb{M})(\mathbb{X}_j - \mathbb{M})'\right] = tr\left[\Sigma^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{n} (\mathbb{X}_j - \mathbb{M})(\mathbb{X}_j - \mathbb{M})'\right\}\right]$$

$\uparrow$

$tr(\mathbb{B} + \mathbb{G}) = tr(\mathbb{B}) + tr(\mathbb{G})$

nota 3

$$\sum_{j=1}^{n} (\mathbb{X}_j - \boldsymbol{\mu})(\mathbb{X}_j - \boldsymbol{\mu})' = \sum_{j=1}^{n} (\mathbb{X}_j - \bar{\mathbb{X}}_{(n)} + \bar{\mathbb{X}}_{(n)} - \boldsymbol{\mu})(\mathbb{X}_j - \bar{\mathbb{X}}_{(n)} + \bar{\mathbb{X}}_{(n)} - \boldsymbol{\mu})'$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ (\mathbb{X}_j - \bar{\mathbb{X}}_{(n)})(\mathbb{X}_j - \bar{\mathbb{X}}_{(n)})' \right\} + n(\bar{\mathbb{X}}_{(n)} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbb{X}}_{(n)} - \boldsymbol{\mu})',$$

toda vez que $\sum_{j=1}^{n} (\mathbb{X}_j - \bar{\mathbb{X}}_{(n)})(\bar{\mathbb{X}}_{(n)} - \boldsymbol{\mu}) = 0.$

Denotando por

$$\mathbb{A} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbb{X}_j - \boldsymbol{\mu})(\mathbb{X}_j - \boldsymbol{\mu})' \qquad \text{dims } p \times p$$

$$\mathbb{V} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbb{X}_j - \bar{\mathbb{X}}_{(n)})(\mathbb{X}_j - \bar{\mathbb{X}}_{(n)})' \qquad \text{dims } p \times p$$

$$\mathbb{P} = (\bar{\mathbb{X}}_n - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbb{X}}_{(n)} - \boldsymbol{\mu})' \qquad \text{dims } p \times p$$

podemos escribir la igualdad arriba como

$$\mathbb{A} = \mathbb{V} + n\mathbb{P}. \quad \text{------} \quad (v)$$

---

nota 4 (algunos resultados de cálculo matricial)

Las siguientes reglas para calcular derivadas de funciones que mandan matrices a escalares, se pueden encontrar en Press, S. J., (2005) "Applied Multivariate Analysis, Using Bayesian and Frequentist Methods of Inference", Second Edition, Dover, sección 2.14.2, página 42.

① Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son matrices de dimensiones $p \times p$, tales que $\mathbb{A} = \mathbb{A}'$ y $\mathbb{B} = \mathbb{B}'$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{B}} tr(\mathbb{A}\mathbb{B}) = 2\mathbb{A} - Diag(\mathbb{A}).$$

② Si $\mathbb{A}$ es una matriz de dimensiones $p \times p$ tal que $\mathbb{A} = \mathbb{A}'$ y $|\mathbb{A}| \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{A}} |\mathbb{A}| = 2|\mathbb{A}|\mathbb{A}^{-1} - Diag(|\mathbb{A}|\mathbb{A}^{-1})$$

- Para el caso ① $f(\mathbb{B}) = tr(\mathbb{A}\mathbb{B})$; $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{M} = \{ \mathbb{B} : \mathbb{B}$ es una matriz simétrica de dims. $p \times p \}$

- Para el caso ② $f(\mathbb{B}) = |\mathbb{B}|$; $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{M} = \{ \mathbb{B} : \mathbb{B}$ es una matriz simétrica de dims. $p \times p$ y tal que $|\mathbb{B}| \neq 0 \}$.

<u>Notación</u>: $A \equiv Diag(\mathbb{B})$ = matriz <u>diagonal</u> t.q. $A_{ii} = B_{ii}$ $i = 1, 2, \ldots, p$

3) Si $\mathbf{x}$ tiene dimensiones $p \times 1$

y $\mathbf{A}$ tiene dimensiones $p \times p$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x}) = 2 \mathbf{A} \mathbf{x},$$

si además $\mathbf{a}$ es de dimensiones $p \times 1$,
entonces

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}' \mathbf{x}) = \mathbf{a} .$$

Como consecuencia de lo anterior, para la función de $\boldsymbol{\mu}$ dada por

$$g(\boldsymbol{\mu}) \equiv (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{B} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{x}' \mathbf{B} \mathbf{x} - \mathbf{x}' \mathbf{B} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}' \mathbf{B} \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}$$

tenemos

$$(\mathrm{u}) \cdots \quad \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\mu}} = -\mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{x} + 2\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}$$

$$= -2\mathbf{B}\mathbf{x} + 2\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} = 2\mathbf{B}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{x}) .$$

Además $tr\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{B} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\} = tr\{\mathbf{B}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\}$

$= (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{B} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$, porque esta última matriz tiene dimensiones 1×1 $\therefore$ $g(\boldsymbol{\mu}) = tr\{\mathbf{B}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\}$

nota 5

Principio del supremo iterado:

Sea $f : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}$; $S, T \subset \mathbb{R}$

una función **acotada**. Entonces

$$\sup_{x \in S} \sup_{y \in T} \{f(x,y)\} = \sup_{y \in T} \sup_{x \in S} \{f(x,y)\}$$

$$= \sup_{(x,y) \in S \times T} \{f(x,y)\}$$