Educação a Distância EJA

Ensino Médio

Matemática

Aula 1

OBJETIVO

Recordar o aluno sobre o surgimento de nosso Sistema Numérico, juntamente com os conjuntos numéricos dos Racionais e Reais, trabalhando também com as operações básicas envolvendo estes números.

Conteúdos

- **Da Contagem às Operações**
- **Números Racionais**
- **Números Reais**

FIEP SESI SENAI IEL
SESI

INICIANDO O DIÁLOGO

Na aula de hoje iremos recordar conceitos matemáticos básicos, relacionados aos conjuntos numéricos dos Racionais e Reais existentes nas operações básicas de Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão.

LEITURA DE MUNDO

Desde que começaram a realizar contagens, ainda na Idade da Pedra, de início usando o princípio da correspondência biunívoca, utilizando pedras, paus, entalhes em ossos e, principalmente, os próprios dedos, os homens buscaram aperfeiçoar as estratégias de contagem até chegarem ao conceito da numeração posicional. Foi um salto fantástico e daí em diante a produção do conhecimento matemático passou a se desenvolver em ritmo veloz.

Estima-se que, na Índia, entre os séculos IV e VII da nossa era, o sistema decimal, hoje usado por nós, já estava plenamente estruturado.

Por volta do ano 800, esse sistema havia sido adotado pelos árabes, que o difundiram pelo mundo em suas viagens. Em 825, um estudioso persa, de nome al-Khowarizmi, escreve um livro sobre o sistema e os símbolos numéricos criados pelos hindus; é a primeira obra que explica, de forma metódica e organizada, o princípio do valor posicional e o uso do zero. A boa-nova chegou rapidamente ao mundo ocidental, e no decorrer do século XIII começaram a surgir obras de autores europeus divulgando o sistema indo-arábico.

Inicialmente, ao desenvolver a ideia de número, o homem se preocupava em contar os objetos que ele possuía ou podia ver. O zero ainda não era considerado um número.

Ele surgiu primeiro como uma espécie de marcador de lugar. Veja: no número 3.042 indicava apenas a ausência de centenas no número e só mais tarde ele foi reconhecido como um algarismo que representa a quantidade nula. Ainda falando sobre o nosso sistema numérico, os infinitos números que o formam são classificados de acordo com suas representações.

O primeiro conjunto numérico utilizado pelo homem foi o **Conjunto dos Números Naturais**, representado pela letra $N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, podemos dizer que este conjunto é formado pelos números inteiros positivos.

Uma das criações matemáticas que provocou maior polêmica foi a ideia de número negativo. Alguns matemáticos não conseguiam entender esse tipo de número. Afinal, "para que representar uma quantidade que não temos?", diziam. Com o tempo, a ideia foi sendo assimilada e foi criado um novo conjunto numérico, o **Conjunto dos Números Inteiros** , representado pela letra Z.

O Conjunto dos Números Inteiros, é nada mais que uma ampliação do Conjunto dos Números Naturais, ao qual foram acrescentados os números negativos.

$Z = \{... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$

Em linguagem matemática, escrevemos $Z \supset N$ (N está contido em Z) ou $N \subset Z$ (Z contém N).

Operações Básicas com Números Naturais

Na Matemática são consideradas como operações básicas as operações de adição, subtração, multiplicação e de divisão. Veremos inicialmente as de adição e de subtração.

Adição e Subtração com Números Naturais (N)

1º procedimento

Registro	Unidade de milhar	Centena	Dezena	Unidade
1253	1	2	5	3
+2325	2	3	2	5
3578	**3**	**5**	**7**	**8**

O que foi feito: Juntaram-se as unidades, dezenas, centenas e unidades de milhar para determinar a soma, isto é, o resultado da adição (3578).

2º procedimento

Registro	Dezena	Unidade
1	**1**	
57	5	7
+25	2	5
82	8	12 = **10** + 2

O que foi feito:

7+5 = 12 unidades = 10 unidades + 2 unidades. Formam = 1 dezena + 2 unidades.

3º procedimento 72 -56 =16

Registro	Decompondo 72	Números	Dezena	Unidades
6 12	**72 = 70 + 2**	72	60 +	12
~~7~~ ~~2~~	**72 = 60 + 10 +2**	— **56**	50 +	6
-5 6	**72 = 60 + 12**	**16**	**10 +**	**6**
1 6				

O que foi feito: O número 72 teve uma decomposição diferente da usual,inicialmente decomposto em 72 + 2 e, a seguir, em 60 + 12.

Multiplicação e Divisão de Números Naturais (N)

Na multiplicação os números são chamados de fatores, sendo a operação multiplicativa, e o resultado é o produto.

22 x 3 = 66

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 3 \\ \hline 66 \end{array}$$

Casos particulares da Multiplicação :

- **Qualquer número multiplicado por 1 o resultado da multiplicação será sempre ele mesmo.**
  Exemplo: **15 . 1 =15**
- **Qualquer número multiplicado por zero o resultado da multiplicação será sempre 0.**

Com base na operação de Multiplicação é importante mencionar sobre os **Números Múltiplos.**

Denominamos múltiplo de um número o produto desse número por um número natural qualquer, um bom exemplo de números múltiplos é encontrado na tradicional tabuada.

Portanto, os múltiplo de 2 são: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20, ...

Os múltiplos de 3 são: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...

Observe que os múltiplos do número escolhido obedecem a uma progressão aritmética com razão igual ao múltiplo estabelecido. Nos múltiplos de 2 a razão é 2, nos múltiplos de 3 a razão é 3 e assim sucessivamente, mas isso já é assunto para uma outra aula.

Na divisão, os números são chamados de dividendo (a parte que está sendo dividida) e divisor (a quantia de vezes que esta parte está sendo dividida), a operação é a divisão, e o resultado é o quociente.

dividendo ← 20 | 2 → divisor
0 | 10 → quociente
↓
resto

Se o resto da divisão for igual a zero, dizemos que a divisão é exata, caso contrário dizemos que essa divisão não é exata.

Para verificar se o resultado é verdadeiro basta substituir os valores na seguinte fórmula:

$D = d \cdot q + r$

$20 = 2 \cdot 10 + 0$

Casos particulares da Divisão

- Qualquer número dividido por 1 tem como resultado o próprio número. Exemplos:

$$5 : 1 = 5$$

$$256 : 1 = 256$$

- Um número dividido por ele mesmo dá como resultado 1. Exemplos:

$$20 : 20 = 1$$

$$4 : 4 = 1$$

- Zero dividido por qualquer número exceto o próprio zero, dá como resultado 0. Exemplo:

$$0 : 10 = 0$$

- Não existe divisão por zero. Exemplos:

$$30 : 0 = \text{não existe } \nexists$$

$$1 : 0 = \nexists$$

Números Racionais (Q)

O Conjunto dos Números Racionais, que nada mais é que o Conjunto dos Números Inteiros(Z) acrescentado os números fracionários e decimais.

Uma breve explanação sobre o que são números fracionários: A ideia de número fracionário surge da necessidade de se considerar uma ou mais partes de um objeto (o todo). De maneira geral, é representado na forma a/b, onde b é o denominador que indica partes iguais que se divide a unidade e é o numerador que indica quantas dessas partes foram consideradas, devendo o denominador ser sempre diferente de zero.

REPRESENTAÇÃO										LEITURA
1/2	1/2									Um meio ou metade
1/3	1/3	1/3								Um terço
1/4	1/4	1/4	1/4							Um quarto
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5						Um quinto
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6					Um sexto
1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7			Um setímo
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8			Um oitavo
1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9		Um nono
1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	Um décimo

Quando os denominadores forem números múltiplos de 10, lemos da seguinte forma:

Frações decimais, com denominadores múltiplos de 10	Leitura
$\frac{1}{100}$	Um centésimo
$\frac{1}{1000}$	Um milésimo
$\frac{1}{10000}$	Um désimo de milésimo

Lembrando que existem outros tipos de frações, como é o caso das F**rações Equivalentes,** que são aquelas que representam a mesma parte do todo. São escritas de formas diferentes, mas que representam a mesma quantidade.

Exemplo:

Um chocolate foi repartido em 6 partes iguais, logo cada parte representa 1/6 do chocolate todo. Se pegarmos 3 dessas partes estaremos com 3/6 do chocolate todo, mas isso representa também a metade do chocolate, 1/2. Dizemos então que 1/2 e 3/6 são frações equivalentes.

Números Racionais (Q) E Sua Representação Decimal

A representação destes números nada mais é , que o número escrito com vírgula. Observe:

$$2{,}3 = \text{dois inteiros e três décimos} = 2{,}0 + 0{,}3 = 2 + \frac{3}{10}$$

Conhecendo um pouco mais desta forma de representação:

Leitura	Representação decimal	Representação fracionária
Seis inteiros	**6,0**	$\frac{6}{1}$
Dois inteiros e três décimos, que correspondem a 23 décimos	**2,3**	$\frac{23}{10}$
Dois décimos	**0,2**	$\frac{2}{10}$
Treze milésimos	**0,013**	$\frac{13}{1000}$

Veja que o denominador determina o número de casas à direita da vírgula.

Operações Com Números Racionais (Q)

Adição e Subtração

Para efetuar uma adição, ou uma subtração, com frações de mesmo denominador, você adiciona (ou subtrai) os numeradores e mantém o denominador comum.

E quando os denominadores são diferentes, você se lembra como faz?

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1.2}{3.2} + \frac{1.3}{2.3} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

É só determinar as frações equivalentes e adicionar, ou subtrair frações, quando os denominadores forem diferentes. Veja este exemplo.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

Para adicionar, você precisa determinar as frações equivalentes destas frações.

Agora, é só observar a primeira coincidência dos denominadores, isto é,o menor múltiplo comum dos denominadores dados.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9}{18} + \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{17}{18}$$

Multiplicação e Divisão de Números Racionais (Q)

Na multiplicação de números racionais, devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador, assim como é mostrado nos exemplos abaixo:

$$\frac{8}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{32}{9}$$

$$\frac{-5}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{-5 \times 4}{2 \times 3} = \frac{-20}{6} = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3}$$

Na divisão de números racionais, devemos multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, como é mostrado no exemplo abaixo:

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{24}{12} = 2$$

Adição e Subtração de Numeros Racionais Decimal

Para adicionarmos dois ou mais números decimais é preciso colocar vírgula em baixo de vírgula.

Para fazermos qualquer adição, devemos saber que os números somados são chamados de parcelas e o resultado de soma total e que as parcelas tem que ser adicionadas da maior pela menor. Exemplo:

$$\begin{array}{r l} 13{,}140 & \longrightarrow \text{Acrescentamos o zero para completar casas decimais.} \\ +\ 4{,}879 & \\ \hline 18{,}019 & \longrightarrow \text{Soma total} \end{array}$$

Para subtrairmos dois números decimais, devemos da mesma forma que na adição colocar vírgula de baixo de vírgula.

Sendo que o diminuendo deve ser sempre maior que o subtraendo e o resultado recebe o nome de resto ou diferença. Exemplo:

$$\begin{array}{r l} \mathbf{6\ \ 13} & \\ 7{,}3\,7 & \longrightarrow \text{Minuendo} \\ 2{,}8\,0 & \longrightarrow \text{Subtraendo} \longrightarrow \text{acréscimo do zero para completar casas decimais.} \\ \hline 4{,}5\,7 & \longrightarrow \text{Resto ou Diferença} \end{array}$$

Multiplicação de Numeros Decimais por um Número Natural

A operação de multiplicação e operada com dois fatores e a multiplicação deles resulta em um produto.

$$\begin{array}{r l} 1\,3\ \ \ & \\ 3{,}2\,5 & \longrightarrow \text{fator} \\ \times\ \ 6 & \longrightarrow \text{fator} \\ \hline 1\,9{,}5\,0 & \longrightarrow \text{produto} \end{array}$$

Na multiplicação quando multiplicamos 5 centésimos por 6 obtivemos 30 centésimos. Deixamos 0 centésimos e transformamos os 30 centésimos em 3 décimos. Quando multiplicamos 2 décimos por 6 e somamos com 3 obtivemos 15 décimos, deixamos 5 décimos e transformamos os 10 décimos em 1 inteiro.

Para colocarmos a vírgula na casa decimal correta no produto (resultado da multiplicação) devemos olhar o número decimal do fator e contar quantas casas decimais ele tem, no caso do 3,25 tem 2 casas decimais, então devemos contar da direita para a esquerda 2 casas decimais no produto e colocar a vírgula na casa decimal correspondente.

Quando em uma multiplicação o 2º fator for um número natural com mais de um algarismo, devemos multiplicar com o da direita e depois fazer a multiplicação com o da esquerda. O resultados das multiplicações somamos.

$$\begin{array}{r} 9{,}3 \\ \times\ 1\ 2 \\ \hline \mathbf{1}\ 1\ 8\ 6 \\ +\ 9\ 3 \\ \hline 1\ 1\ 1{,}6 \end{array}$$

Para colocarmos a vírgula na casa decimal correta no produto (resultado da multiplicação) devemos olhar os números decimais dos fatores e contar quantas casas decimais ele tem, no caso do 9,3 tem 1, então andaremos da direita para a esquerda 1 casa decimal e colocaremos a virgula onde paramos.

Multiplicação de Números Decimais por um Número Decimal

Para multiplicarmos decimal com decimal resolveremos da mesma forma se fosse multiplicação de número natural com decimal, o que difere é quando formos colocar a vírgula no produto devemos contar as casas decimais dos dois fatores.

$$\begin{array}{r} 9{,}3 \\ \times\ 1,\ 2 \\ \hline \mathbf{1}\ 1\ 8\ 6 \\ +\ 9\ 3 \\ \hline 1\ 1,\ 16 \end{array}$$

Como somando as casas decimais dos dois fatores, teremos 2 casas decimais, assim andaremos 2 casas decimais da direita para a esquerda para colocarmos a vírgula.

Já na **Divisão que envolve Números Decimais,** temos a possibilidade de transformá-los em fração e então resolvemos como uma divisão de fração, conforme vimos a pouco, ou então podemos trabalhar com os números decimais mesmo, tomando cuidado com algumas regras que devem ser seguidas.

Para entendermos melhor, vamos assitir a Tele Aula 19.

http://www.telecurso.org.br/matematica-ens-f/

O Conjunto dos Números Reais.

Este conjunto engloba todos os conjuntos estudados anteriormente, inclusive o **Conjunto dos Números Irracionais.**

Mas o que são Números Irracionais?

Os Números Irracionais são representados pela letra **I**. Estes números não admitem **serem escritos na forma de fração, pois em suas formas decimais, consistem em números infinitos não periódicos**.

Os números acima são infinitos, não formam períodos, portando não são dízimas periódicas (ver conceito em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Dizima_periodica).

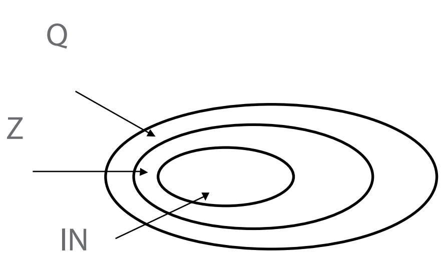
Outro número irracional muito usado na Geometria é o π (pi), descoberto por meio da divisão do comprimento de uma circunferência pelo diâmetro da mesma.

O π tem o valor aproximado de 3,141592653589793238462...

O número de Ouro é um outro exemplo de número irracional. Surge da relação existente na Sequencia de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...). Notemos que a sequencia é construída somando o termo atual com o anterior para descobrir o próximo.

Para você conhecer melhor este conjunto numérico assista a Tele Aula 59 do Novo Telecurso: http://www.telecurso.org.br/matematica-ens-f/?Ypage=2

A união dos números racionais e irracionais forma o conjunto dos números reais. Acompanhe o diagrama:



$IN \subset Z \subset Q$

O conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros, que, por sua vez, está contido no conjunto dos racionais. Portanto, você pode afirmar, por exemplo, que 2 é um número natural, inteiro e racional.

Como todo número natural é inteiro, todo número inteiro é racional e todo número racional é real, temos:

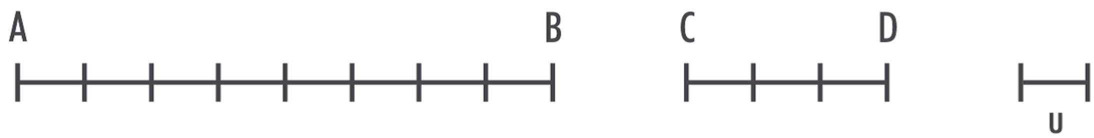
$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Indicamos por R* o conjunto de números reais sem o zero, ou seja, R* = R - {0}

Números Comensuráveis e Incomensuráveis

Há muito tempo, entre os anos 580 e 500 a.C., imaginava-se que com os números racionais todos os problemas da Matemática estariam resolvidos. Principalmente os relacionados com medições. Pensava-se, por exemplo, naquela época que qualquer segmento de reta poderia ser medido utilizando-se um número racional.

Exemplo: Dados dois segmentos e, sempre poderia ser encontrada uma medida u que coubesse um número inteiro de vezes dentro dos dois segmentos. Veja a figura:



Na figura, *u* cabe 8 vezes em $\overline{AB}$ e cabe 3 vezes em $\overline{CD}$.

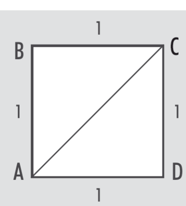
Esses segmentos são chamados de **comensuráveis** e suas medidas são AB = 8*u* e CD = 3*u*. Entretanto, logo os matemáticos descobriram que existem segmentos de reta que não podem ser medidos com os números racionais: são segmentos **incomensuráveis**.

A descoberta da incomensurabilidade entre dois segmentos decorreu da seguinte questão de geometria: os matemáticos não conseguiam encontrar uma medida que servisse para medir exatamente os lados e as diagonais de um quadrado.

Observe o quadrado ABCD. Seus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são iguais a 1, mas quanto mede sua diagonal $\overline{AC}$?

Os matemáticos mostraram que não existe um número racional para representar a medida de AC. Eles só conseguiram descobrir o valor de AC através do teorema de Pitágoras. Veja:

(Verifique este resultado na calculadora).



$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = 1 + 1 \rightarrow \overline{AC}^2 = 2 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2}$$

Seria o número $\sqrt{2}$ o único número irracional?

IIntervalos Reais

Entre dois números reais há sempre uma infinidade de outros números reais. Exemplo: Quais são os números reais compreendidos entre 0,6 e 2?

Podemos afirmar que existem infinitos.

Veja: 0,6... 0,61... 0,62... 0,7... 0,701... 0,8... 1... 1,4... 1,41... 2

Em linguagem matemática, podemos escrever: $\{x \in R \mid 0,6 < x < 2\}$

Chamamos esse tipo de conjunto de intervalo.

Intervalo aberto]a,b[é o conjunto dos números reais entre a e b (exclusive).

Veja: $]a,b[= \{x \in R \mid a < x < b\}$

Podemos representar este intervalo na reta numérica.

Veja: Intervalo fechado [a,b] é o conjunto dos números reais entre a e b (inclusive).

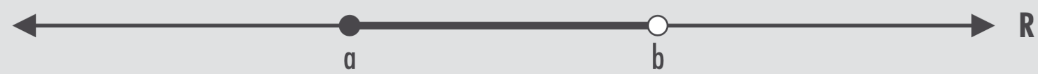
Na reta numérica, temos:

$[a,b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$

Intervalo aberto à direita e fechado à esquerda

Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita

$$[a,b[\; = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$$



SAIBA MAIS

Para saber mais sobre Números Racionais acesse o link: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/48-2.pdf

AMPLIANDO HORIZONTES

Assista a Teleaula 45 do Novo Telecurso: http://www.telecurso.org.br/matematica-ens-f/

TROQUE IDEIAS

Discuta com seus colegas sobre a natureza dos números.

VAMOS PRATICAR

Agora é com você! Com base em nossa primeira aula, resolva as questões propostas a seguir. **Bom trabalho!**

Desenhe uma reta numérica, localize os números e responda:

1. Quantos números inteiros existem nos seguintes intervalos numéricos:

   a) entre o -2 e o -3?

   b) entre o $-0,444...$ e o $+0,444...$?

   c) entre o $-3,65$ e o $+4,16$?

2. Escreva em ordem crescente os numerais:

$-3/4$ $+7/3$ $-9/3$ $+0{,}5$ $-2{,}333$ $+2{,}25$

3. Ao comprar uma caixa de frutas para revender, um feirante constatou que 3/20 do total das frutas estavam estragadas. Que porcentagem dessa caixa ele pode revender?

Escreva a resposta em porcentagem (denominador 100).

4. Escreva em forma de intervalo os números entre $-\frac{3}{4}$ e 1 (inclusive).

5. Represente os intervalos na reta real:

a) $[a, b] = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 3\}$

b) $]a, b[= \{x \in R \mid 2 < x < 4\}$

c) $[a, b[= \{x \in R \mid 0 \leq x < 2\}$

d) $]a, b] = \{x \in R \mid 1 < x \leq 2\}$