Números reales e intervalos

Sitio: Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida
Curso: Elementos de Analisis Matematico 1° G
Libro: Números reales e intervalos

Imprimido por: Eduardo Manuel Moreno
Día: domingo, 18 de agosto de 2024, 19:20

Tabla de contenidos

1. Introducción

Números reales e intervalos

Como viste en el problema 2 de esta semana, "El hotel de los números reales" , el conjunto de los números reales contiene a todos los números que conocés. Por ejemplo, son números reales aquellos representados por una fracción o un número con desarrollo decimal periódico o finito (estos son los números racionales) y son también números reales los que tienen desarrollo decimal infinito no periódico (es decir, los números irracionales).

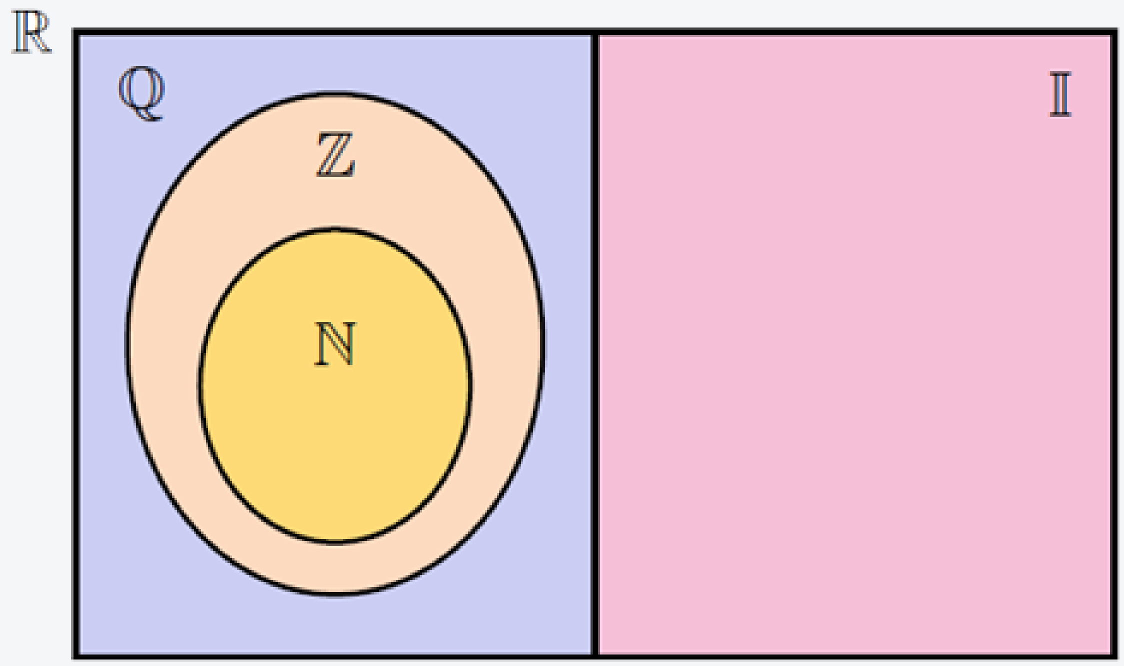
Ya sabemos que el conjunto de los números reales se obtiene de la unión del conjunto de los racionales e irracionales. Se denotan con la letra $\mathbb{R}$. Es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. La recta numérica completa es la representación del conjunto de los números reales: cada punto de la recta numérica puede asociarse a un único número real, y viceversa. Estudiaremos este conjunto con más detalle en lo que sigue.

2. Números reales

Números reales

El conjunto de los números reales se obtiene de la unión del conjunto de los racionales e irracionales. Se denotan con la letra $\mathbb{R}$. Es decir,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

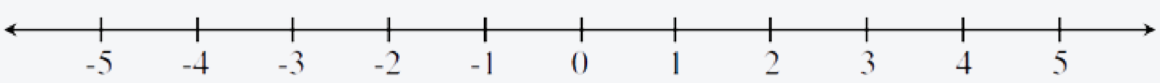


De la representación de la imagen, podemos ver que valen las siguientes relaciones:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

Recta numérica

La recta numérica completa es la representación del conjunto de los números reales: cada punto de la recta numérica puede asociarse a un único número real, y viceversa. La recta, que es continua, queda completamente cubierta al representar cada número real en ella.



De inspeccionar la recta, podemos ver que en el conjunto $\mathbb{R}$ tenemos definida una relación de orden que denotamos, como antes, con el símbolo $<$ (menor). Informalmente, decimos que $a < b$ (o $b > a$) si al ubicar ambos puntos en la recta numérica, a queda a la izquierda de b.

Los números reales también cumplen la propiedad de orden denso: entre dos números reales, siempre es posible encontrar otro número real.

2.1. Relación con el problema 2

Relación con el problema 2 "El hotel de los números reales"

Como observaste en el problema 2 de esta semana, debíamos ver cómo ordenar los huéspedes en aquel hotel de fantasía que imaginamos. Los huéspedes eran los siguientes:

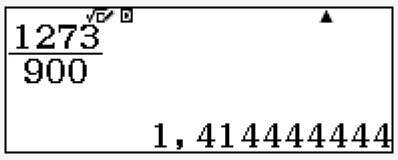
- Huésped 1: 1,4142
- Huésped 2: 1273 dividido 900
- Huésped 3: 1,4142 con período en la cifra 2 marcada en negrita
- Huésped 4: raíz cuadrada de 2

Por lo que sabemos, todos los números reales cumplen una relación de orden y, por lo tanto, dado un par de números reales, puede ocurrir que: o sean iguales, o el primero sea mayor que el segundo, o el segundo sea mayor que el primero. No hay más posibilidades. Entonces, salvando el caso en que sean iguales, dado un par de números, seguro puede establecerse una relación de menor o mayor estricto.

Los huéspedes 1, 2 y 3 corresponden a números racionales:

- el huésped 1, porque tiene un desarrollo decimal finito,
- el huésped 2, porque es cociente de números enteros y
- el huésped 3, porque tiene un desarrollo decimal infinito, pero periódico.

Luego, comparando sus desarrollos decimales es fácil ordenarlos. Para el huésped 2 podemos usar la calculadora para inspeccionar algunas cifras de su desarrollo decimal:



Entonces, es fácil ver que:

$$1,4142 < 1,414\hat{2} < 1,414\hat{4}$$

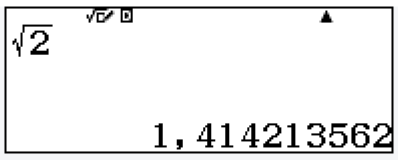
que es lo mismo que:

$$1,41420 < 1,4142\hat{2} < 1,4144\hat{4}$$

Ahora que esos huéspedes ya están ordenados, ¿qué ocurre con el huésped 4?

En el problema anterior vimos que raíz cuadrada de 2 es un número irracional y, por lo tanto, su desarrollo decimal es infinito, pero no es periódico .

Luego, podemos usar la calculadora para inspeccionar algunas cifras de su desarrollo decimal (y recordar que dicho desarrollo decimal será siempre aproximado y que, con suerte, la calculadora exhibirá los suficientes como para poder compararlos y ordenarlos)



En consecuencia, raíz cuadrada de 2 es un número mayor que 1,4142, pero menor que 1,41422, dado que su desarrollo decimal *hasta la quinta posición* es 1,41421. Es decir:

$$1,41420 < 1,41421 < 1,4142\hat{2} < 1,4144\hat{4}$$

Por lo tanto, el orden de los huéspedes es: huésped 1 - huésped 4 - huésped 3 - huésped 2 .

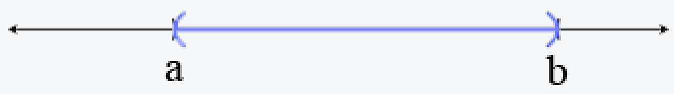
3. Intervalos

Intervalos

Existe una forma simple de expresar el conjunto de los números reales que satisfacen una desigualdad doble o simple, y es mediante intervalos. Por ejemplo, si a y b son dos números reales con $a < b$, el conjunto:

$$I = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

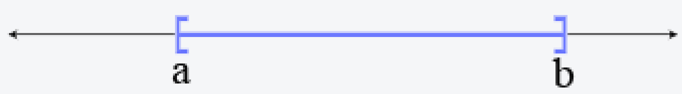
puede escribirse de manera más simple mediante el intervalo abierto (a, b), que representa la parte de la recta comprendida entre a y b, como se muestra a continuación.



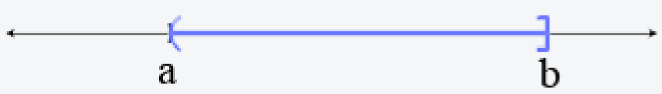
Recordemos que esta representación "continua" no era posible ni en $\mathbb{Q}$ ni en $\mathbb{I}$ puesto que, en ambos casos, su representación daba lugar a una recta "agujereada": la unión de ambos es, precisamente, lo que la completa. Esto hace posible que en $\mathbb{R}$ podamos representar el intervalo con una porción de línea continua.

Los intervalos pueden ser abiertos (como el anterior), cerrados o semiabiertos según sean las desigualdades involucradas.

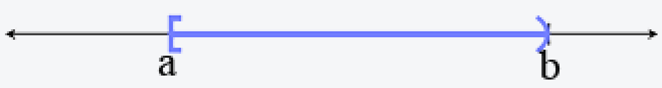
$$I = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$$



$$J = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} = (a, b]$$



$$K = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b)$$



También son abiertos o semiabiertos aquellos que representan a los conjuntos dados por desigualdades simples, como los que se muestran a continuación.

$$L = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} = (a, +\infty)$$

$$M = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} = (-\infty, a]$$

En estos casos, el símbolo ∞ no representa un número real y, por eso, los intervalos que lo involucran siempre se abren o cierran con paréntesis y no con corchete. Reservamos la notación del corchete para cuando vale la igualdad y se incluye a el/los extremo/s.

De esta forma, también podemos representar a $\mathbb{R}$ como el intervalo $(-\infty, +\infty)$.