Funciones reales de variable real

Sitio:	Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida	Imprimido por:	Eduardo Manuel Moreno
Curso:	Elementos de Analisis Matematico 1° G	Día:	domingo, 1 de septiembre de 2024, 20:02
Libro:	Funciones reales de variable real		

Tabla de contenidos

1. Introducción

En esta sección estudiaremos los siguientes contenidos:

- Funciones reales de variable real
- Formas de representación
- Representación gráfica
- Gráfico de una función

Te invitamos a navegar por la tabla de contenidos a la derecha para profundizar en estas temáticas.

2. Funciones reales de variable real

Como viste en el problema de inicio: "Una función para el conserje", esta semana nos introducimos en el estudio de ciertas funciones: las **funciones reales de variable real** , es decir, aquellas funciones cuyos elementos de "entrada" y de "salida" son números reales. Estudiaremos, además, con bastante detalle, algunas **formas usuales de representación.**

Innumerables situaciones correspondientes a diversas áreas y situaciones cotidianas pueden ser modeladas mediante funciones. Ya vimos que una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B. Esto significa que, dado un elemento $x \in A$, le corresponde un único valor que pertenece al conjunto B, al cual denotamos por $f(x)$. En general, esto lo escribimos así:

$$f : A \to B$$

y se lee " f es una función de A en B; aunque también es usual escribirlo así:

$$x \mapsto f(x)$$

en donde se indica qué valor de B se le asigna a cada $x \in A$, y $f(x)$ se lee "f de x". En particular, nosotros estudiaremos funciones reales de variable real: es decir, tanto el conjunto A como el B serán subconjuntos de los números reales (o él mismo: $A = B = \mathbb{R}$)

La pregunta es, entonces, ¿cómo asignamos elementos de un conjunto o subconjunto de los reales a otro?

Aquí entran en escena las operaciones en $\mathbb{R}$ estudiadas hasta ahora: la regla de asignación f se reduce al uso y combinación de una o varias de estas operaciones (suma, resta, producto, cociente, potencia, etc.). Por ejemplo, supongamos que en un empleo se paga $\$750$ por cada hora que se trabaja. Entonces la regla:

$$x \mapsto 750x$$

es una función que determina el salario obtenido al trabajar x horas. Este salario depende, obviamente, de la cantidad de horas trabajadas, lo que se expresa también como "el salario es función de las horas trabajadas". Lo anterior también es factible de ser expresado así

$$f(x) = 750x$$

en donde vemos que la operación que permite tomar los elementos de un conjunto A (el de las horas trabajadas) para obtener los del conjunto B (el del salario obtenido) es la multiplicación: para el cálculo del salario, multiplicamos las horas trabajadas por 750.

Claro, uno acá podría pensar que el modelo anterior es muy simple ya que no representaría un escenario, por ejemplo, en el que un o una trabajadora cobrara alguna asignación familiar por un monto fijo de $\$3200$. Sin embargo, si combinamos lo anterior con otra operación, la de la suma, podríamos representar este nuevo escenario.

Concretamente, la regla sería:

$$x \mapsto 750x + 3200$$

y ahora sería una función que determina el salario obtenido al trabajar x horas junto con el cobro de una asignación familiar dada por el monto fijo de $\$3200$. La regla de asignación combina, ahora, dos operaciones: suma y producto; y optamos por notarla con la letra g ya que usamos la f para la regla anterior:

$$g(x) = 750x + 3200$$

En general, el conjunto A se llama dominio de f o conjunto de partida, mientras que B se llama conjunto de llegada.

En forma general, se dice que una cantidad y es función de otra cantidad x, si el valor de la primera depende del valor que tome la segunda. Muchas veces, también, llamamos a estas cantidades como variables y, en este ejemplo, decimos que y es la variable dependiente y x la independiente.

Para simbolizar esto también se escribe:

$$y = f(x)$$

En este caso, además, convenimos en decir que la variable dependiente es y mientras que la independiente es x, ya que la regla f permite obtener y a partir de x.

Ejemplos

En este sentido, entonces, algunos ejemplos de funciones podrían ser:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$
- $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x} + 1$
- $f: [-5, -3] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - 2x$
- $\ldots$

La lista, desde luego, es infinita. Notar que, en todos los casos, siempre se indicó:

- el conjunto de partida, o dominio,
- el conjunto de llegada, o codominio, y
- la regla de asignación de uno en otro, es decir, el “cómo” los elementos de un conjunto “van a parar” a elementos del otro. Por ejemplo, en la primera de las funciones, el “cómo” es “elevando al cuadrado” .

3. Formas de representación

Como veíamos en la sección anterior, consideremos la regla:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por:

$$f(x)=x^2.$$

Es decir, la función f que va de los reales en los reales, tal que a cada x real le asigna su cuadrado x^2 .

En la siguiente tabla, vamos a calcular la imagen a través de esta función de algunos valores del dominio de f .

x	$f(x)$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$0^2 = 0$
$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$
$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^2 = 2$
2	$2^2 = 4$
5	$5^2 = 25$

La **tabla o registro tabular** es un recurso muy útil para empezar a estudiar y describir funciones.

Sin embargo, como cualquier otro recurso, tiene sus limitaciones. Por ejemplo, mientras el dominio de la función del ejemplo es infinito (son todos los números reales), los posibles valores de x que tabulemos serán siempre finitos. Es decir, **no existirá tabla por más exhaustiva que sea, que dé cuenta de una función cuyo dominio es infinito.**

Consideremos la función $f(x)=x^2$ que, como ya vimos, tiene dominio $\mathbb{R}$ y conjunto de llegada $\mathbb{R}$. Si miramos la tabla que produjimos recién, veremos que todos los valores de y que tabulamos (que no son más que las imágenes de x a través de f), resultaron siempre no negativos. Como vimos, no existe tabla que de cuenta de que y será siempre no negativo, más allá de los casos particulares de la tabla.

Para responder esto que es tan general, necesitamos argumentos generales también. Y en este caso esto es posible ya que la regla f no es más que “elevar al cuadrado” y, como sabemos, el resultado de elevar al cuadrado cualquier cantidad real x será positivo o 0 . Es decir, y es no negativo para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$.

Recordemos que el conjunto de llegada era $\mathbb{R}$, sin embargo, vemos que existen elementos de dicho conjunto que no son imágenes de x por f. Por ejemplo, -4 es un elemento del conjunto de llegada pues es un número real, sin embargo, -4 no es imagen de ningún x del dominio, pues no existe un número real que elevado al cuadrado dé negativo.

Esto da cuenta de que, en ocasiones, las imágenes de una función ocupan un subconjunto del conjunto de llegada. A este subconjunto que contiene las imágenes de la función, lo llamamos imagen. En el ejemplo anterior, ese subconjunto es $[0 ;+\infty)$; por lo que decimos que la imagen de f es $[0,+\infty)$.

Entonces, si una función f asigna elementos de A en B, decimos que su imagen es:

$$\operatorname{Im}(f)=\{y \in B: y=f(x) \text { para algún } x \in A\} .$$

- Dominio de f: todos los valores de x tales que $f(x)$ está definida.
- Imagen de f: todos los posibles resultados al efectuar $f(x)$.

Una nota sobre cómo nombramos a los objetos

En muchas ocasiones llamaremos "imagen" a dos cosas indistintamente. Por un lado, decimos que la imagen de una función es el conjunto formado por todos los posibles resultados al efectuar esa función a los elementos del dominio. A este objeto podemos llamarlo "conjunto imagen" o "imagen" de la función, para evitar cargarnos de palabras. A veces también se llama "rango" de la función.

Pero también llamamos "imagen" al resultado que se obtiene al aplicar la función a un valor del dominio, es decir, a cada elemento del conjunto imagen. En este caso, la imagen es un número (el resultado de aplicar la función) y no un conjunto. Por ejemplo, en la función $f(x)=x^2$ típicamente diremos que:

- la imagen de 3 es 9, la imagen de 2 es 4, o la imagen de 0 es 0, entre otras; pues todos ellos son los resultados de aplicar la función a cada uno de esos valores;
- la imagen de la función es $[0, +\infty)$, es decir, la imagen de la función es el conjunto formado por todas las imágenes que resultan de aplicar la función a los valores del dominio.

A continuación podrás encontrar la vinculación con el problema 1: "Una función para el conserje".

3.1. Relación con el problema 1

Relación con el problema 1 "Una función para el conserje"

Recordemos que en el hotel de los números reales, en el que cada una de las habitaciones era ocupada por un número real, el conserje quería que los huéspedes interactuaran más y mejor con sus opuestos, por lo que decide reasignarles nuevas habitaciones. Para ello, a cada huésped, le asigna la habitación que resulta de elevar al cuadrado su actual habitación. Así, por ejemplo, al huésped de la habitación 4, le asignará la habitación 16; al de la habitación raíz de 2, lo ubica en la habitación 2, etc.
En términos de las **funciones** que estudiamos, si x es el actual número de habitación, la habitación reasignada será $f(x)$ siendo $f(x)=x^2$. Como vimos, esa función, que en nuestro problema es la función del conserje, tiene dominio real, pero su imagen no es todo $\mathbb{R}$, sino $[0,+\infty)$.

Con esta información, ya podemos responder si quedarán habitaciones libres luego de la reasignación:

¡sí! Como la imagen es $[0,+\infty)$, todas las habitaciones negativas quedarán libres.

También nos preguntábamos si habrá huéspedes que no se muevan de sus habitaciones: ¡y la respuesta también es sí! Basta ver la tabla de valores que estudiamos recién para notar que el 0, por ejemplo, es un número que al elevarlo al cuadrado (es decir, reasignarle la habitación con la función del conserje) resulta 0: ¡entonces el 0 no se cambia de habitación!

Y, por último, nos preguntábamos si habrá huéspedes que compartan una misma habitación. Volvamos a la **tabla** que ya estudiamos para responder esto: **¿qué buscaríamos?** Buscaríamos, por ejemplo, números distintos de la columna de las x que tuvieran la misma imagen, es decir, el mismo número en la columna de las $f(x)$. **¡Y esto también ocurre! Por ejemplo, el 2 y el -2 tienen la misma imagen: 4. Es decir, esos dos huéspedes serían, ambos, asignados a la habitación 4 y, por lo tanto, compartirían habitación.**

4. Representación gráfica

Veamos otra forma de representación que será muy útil para estudiar funciones y comprender cómo cambia una variable en función de otra.

Gráfico de una función

Sería ingenuo pensar que desconocen qué es el gráfico de una función, pues gran parte de la formación de nivel secundario apunta a producirlos. Sin embargo, lo hemos omitido hasta ahora porque es una noción que requiere especial atención.

Por empezar, notemos que hasta ahora hemos representado las funciones que aquí estudiamos de dos formas bien distintas: a través de la regla de asignación f que usualmente viene dada por una fórmula o expresión en la ecuación $y=f(x)$, y a través de una tabla o registro tabular.

Tanto la ecuación como la tabla son **representaciones** de un objeto matemático teórico: la función. Y como cualquier representación, cada una tiene sus ventajas y limitaciones, que es importante conocer y valorar.

Por ejemplo, para la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2$ vimos que su fórmula está dada por $f(x)=x^2$ y que una posible tabla era la siguiente.

x	$f(x)$
-2	$(-2)^2=4$
-1	$(-1)^2=1$
0	$0^2=0$
$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$
$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^2=2$
2	$2^2=4$
5	$5^2=25$

Su fórmula dice mucho acerca de la función: para cada elemento del dominio, la imagen se obtiene elevando al cuadrado. Y saber que esa fórmula es “elevar al cuadrado” nos dice mucho sobre la función pues conocemos muchas propiedades de la operación “elevar al cuadrado”.

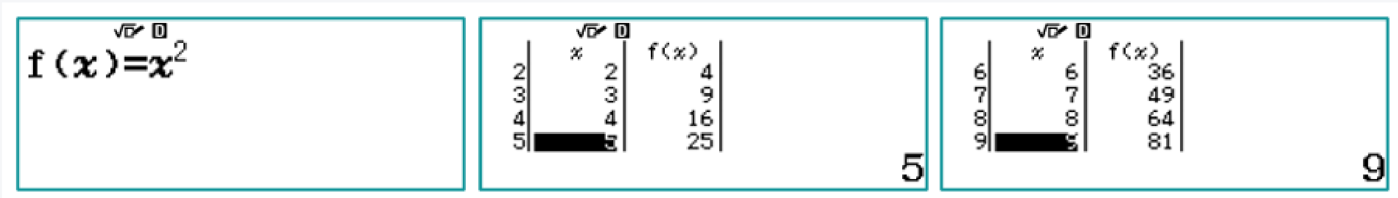
Por ejemplo:

- no es posible obtener imágenes negativas pues $x^2 \geq 0$ para todo x por definición de potencia par,
- habrá una misma imagen para dos valores distintos del dominio pues tanto x como $-x$ darán lugar al mismo x^2 ,

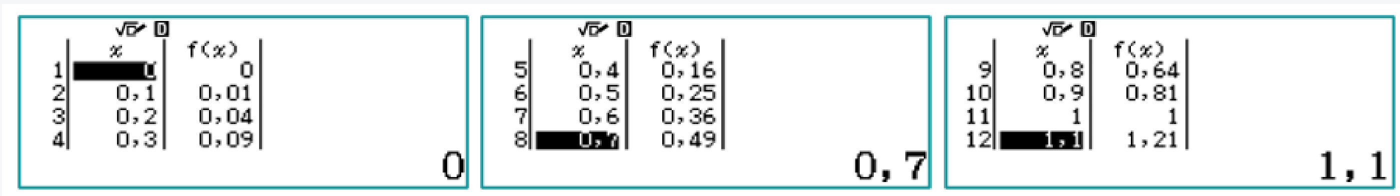
- el 0 , en cambio, es una imagen que resulta de un único \(x\) pues ya sabemos que la única solución de \(x^2=0\) es \(x=0\) ,
- \(\ldots\).

La lista es tan larga como propiedades o cuestiones interesantes notemos y podamos demostrar. Sin embargo, la tabla también es un registro útil.

Por ejemplo, uno podría pensar que al elevar al cuadrado un número positivo se obtiene siempre un número mayor que el original. Basta ver una tabla hecha en una calculadora científica (fx-570LA X , descargar emulador gratuito) como la que sigue para quedarse con esta idea.



Sin embargo, una misma tabla, pero con otros valores de interés puede revelar algo curioso: si \(x\) es un valor entre 0 y 1, elevar al cuadrado no devuelve un valor mayor que el original sino menor.



Observemos cómo, de hecho, en la tabla anterior, todas las imágenes de números entre 0 y 1 tiene como imagen números menores que los originales. Sin embargo, la imagen de 1,1 es 1,2; es decir, para valores mayores que 1 esto ya no parece ocurrir.

En este ejemplo sencillo, podemos ver cómo la tabla ofrece información que la ecuación no provee de forma tan evidente.

5. Gráfico de una función

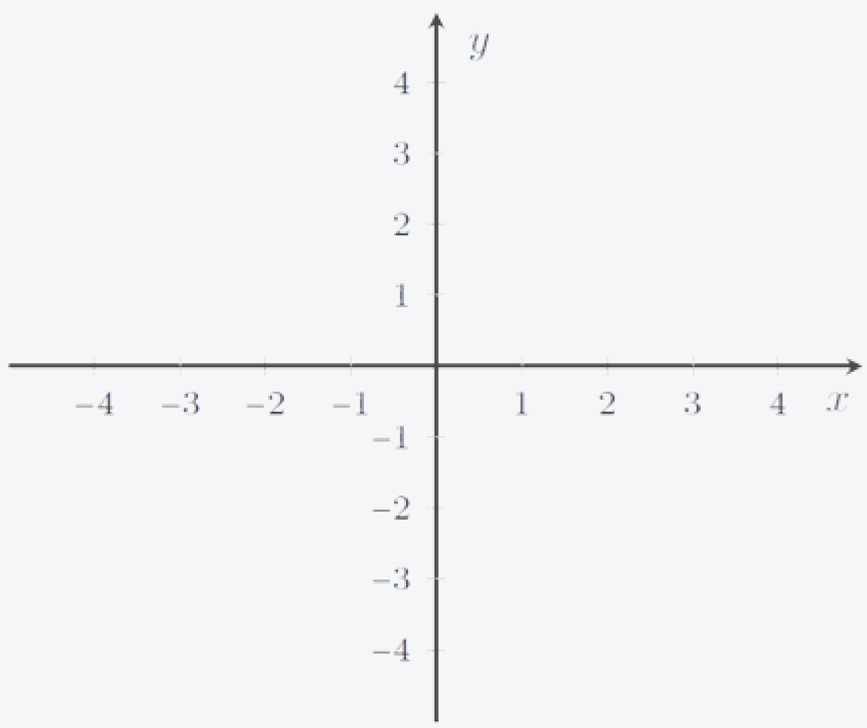
Desde luego, la tabla no constituye una demostración para afirmaciones generales pues, por más ejemplos que tomemos, solo podremos construir una tabla con una cantidad finita de valores. No obstante, tampoco podemos desconocer que es un soporte y una **representación útil** para identificar posibles propiedades y patrones; algo sumamente importante en matemática.

Sin embargo, existe otra forma de representar a las funciones que es tan potente (y limitada) como las anteriores: su gráfico.

Gráfico de una función

Así como en la recta numérica representamos números reales x, en el plano podemos representar puntos (x,y) donde tanto x como y son números reales y reciben el nombre de coordenadas.

Recordemos que el plano cartesiano, con dos ejes perpendiculares (los ejes cartesianos) y una métrica o unidad de medida en cada eje, es el que permite esta representación.



En general, llamamos eje de abscisas al eje horizontal y de ordenadas al vertical y ambos se intersecan en el punto O de coordenadas $(0,0)$ conocido como origen de coordenadas. También solemos notarlos como eje x y eje y aunque, como ya sabemos, la elección de la letra no es más que eso: una elección.

Es muy importante notar que, para esta representación, el orden de las coordenadas es fundamental: no representan al mismo punto el de coordenadas (x,y) que el de coordenadas (y,x).

Convencionalmente, la primera coordenada de un punto indica el desplazamiento horizontal desde el origen de coordenadas (hacia la derecha si es positiva, o hacia la izquierda si es negativa), mientras que la segunda indica el desplazamiento vertical (hacia arriba si es positiva, o hacia abajo si es negativa).

Del mismo modo que vimos en el recorrido 1: "Elementos de la teoría de conjuntos", a cada número real x le corresponde un único punto de la recta; también a cada punto del plano le corresponde un único par de coordenadas (x,y) que determina su ubicación en la representación del plano cartesiano (y recíprocamente).

Relación con el registro tabular

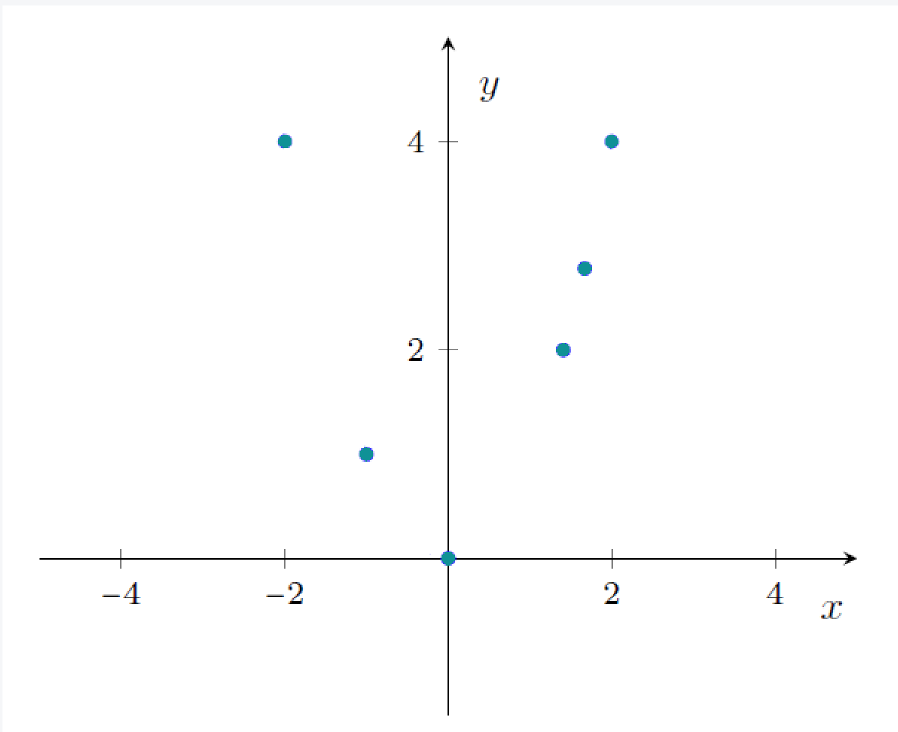
En el ejemplo de la función dada por la regla \(f(x)=x^2\), confeccionamos una tabla en la que recogimos algunos valores que toma la función para ciertos valores del dominio. Por supuesto, la elección es completamente arbitraria.

x	$f(x)$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$0^2 = 0$
$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$
$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^2 = 2$
2	$2^2 = 4$
5	$5^2 = 25$

Si miramos esa tabla, vemos que para los valores \(x\) de la primera columna, hay un siempre \(f(x)\) asociado lo que, a su vez, conforma un par ordenado \((x, f(x))\). En la tabla, entonces, se tienen los puntos de coordenadas:

\[(-2,4) ;(-1,1) ;(0,0) ;\left(\frac{5}{3}, \frac{25}{9}\right) ;(\sqrt{2}, 2) ;(2,4) \]

que, como ya vimos, podríamos representarlos en el plano cartesiano. Un gráfico de esos puntos es el que se ve a continuación.



Desde luego, toda representación es aproximada. Sin embargo, la ubicación de esos puntos en el plano parece sugerir una cierta disposición para los puntos de la forma \((x,x^2)\) que no es cualquiera, sino que tiene una estructura particular.

Esto nos da pie para introducir la idea de gráfico de una función.

Definición

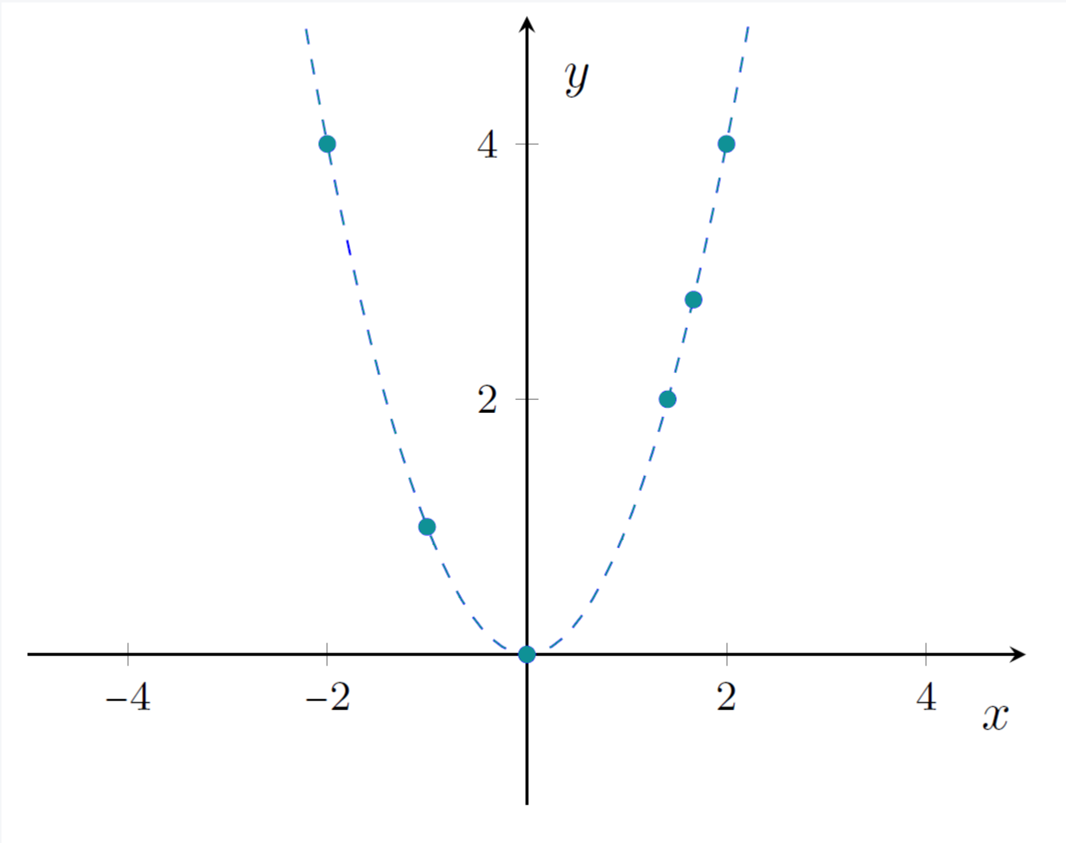
Si f es una función con dominio es un subconjunto A de los números reales, entonces la gráfica o gráfico de f es el conjunto de todos los puntos de la forma $(x, f(x))$, para $x \in A$: gráfico de $f=\{(x, y): x \in A, y=f(x)\}$

Es decir, el gráfico es la colección de puntos de coordenadas $(x, f(x))$, para todos los x del dominio.

¿Cómo representar gráficamente las funciones?

Un método para dibujar la gráfica de una función f es representar suficientes puntos de manera que se pueda sospechar cuál es la forma o estructura de la gráfica. Entonces, se unen los puntos marcados con una línea. Sin embargo, recordemos que el dominio de las funciones que estudiamos aquí es un subconjunto de los reales (o el propio conjunto $\mathbb{R}$), de modo tal que cualquier cantidad de puntos será siempre insuficiente para dar cuenta de la gráfica en su totalidad. Muchas veces, es deseable conocer de forma anticipada cuál es la estructura de la gráfica para elegir los puntos convenientemente y hacer una representación lo más precisa posible.

Por ejemplo, de la ubicación de los puntos que tabulamos para el caso (x,x^2), podríamos sospechar que la gráfica podría tener esta estructura.



En lo que sigue veremos que, para ciertas funciones, podemos identificar la forma de su gráfica de acuerdo con la ecuación o regla que la define. En esos casos, esbozar el gráfico de la función es más rápido y sencillo.