Vectores

Sitio: Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida
Curso: Elementos de Analisis Matematico 1° G
Libro: Vectores

Imprimido por: Eduardo Moreno
Día: lunes, 14 de octubre de 2024, 19:12

Tabla de contenidos

1. Relación con el problema 1

Relación con el problema 1: "Organizando las ventas"

En el problema "Organizando las ventas" ordenaron los elementos tanto de los precios de las velas aromáticas como de las cantidades vendidas, en una lista, encerrada entre paréntesis. Esta forma de organizar la información recibe el nombre de vector.

Además, sin saberlo, resolvieron varias operaciones entre vectores:

- Al calcular el ingreso total, aplicaron el producto escalar.
- Para actualizar la cantidad de ventas acumuladas, resolvieron una suma de vectores.
- Cuando triplicaron las cantidades vendidas, resolvieron una multiplicación por un escalar (número real).

En esta semana trabajaremos todo lo referido a vectores, tanto desde su tratamiento algebraico como geométrico.

¿Te acordás del problema 1? *Hacé clic en el botón para releerlo.*

2. Definición de vector

Un vector puede estar escrito como renglón o columna:

Vector renglón de n componentes

Un vector de n componentes se define como un conjunto ordenado de n números reales escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots , x_n)$$

donde $x_1, x_2, x_3, \dots , x_n \in \mathbb{R}$.

Vector columna de n componentes

Un vector columna de n componentes es un conjunto ordenado de n números reales escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donde $x_1, x_2, x_3, \dots , x_n \in \mathbb{R}$.

Los subíndices indican el orden correspondiente a la componente de un vector. Por ejemplo, $\vec{v}=(-2,3,5,13)$ es un vector renglón de 4 componentes, donde -2 es la primera componente, 3 es la segunda componente, y así sucesivamente. En términos generales, x_k se denomina la k-ésima componente del vector.

Observá que la notación $\vec{v}$ indica que v es un vector.

Como ya dijimos anteriormente, las componentes de los vectores son números (en este curso trabajaremos solamente con reales). Indicaremos con $\mathbb{R}^n$ al conjunto de todos los vectores que tengan n componentes reales.

Veamos un ejemplo:

$\vec{a}= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un vector columna perteneciente a $\mathbb{R}^4$, ya que tiene cuatro componenetes reales.

Otro ejemplo más:

"$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Usos y la importancia del orden

Suponga que el jefe de compras de una fábrica debe ordenar cantidades diferentes de acero, aluminio, aceite y papel.

Él puede mantener el control de las unidades a ordenar en un solo vector. El vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ indica que ordenará 10 unidades de acero, 30 unidades de aluminio, 15 de aceite y 60 de papel.

Se puede observar aquí por qué el orden en que se escriben las componentes de un vector es sumamente importante.

Es evidente que los vectores $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$ tienen significados muy distintos para el comprador.

Esto también ocurre con los vectores que armaron en el problema "Organizando las ventas".

Igualdad entre vectores

Los vectores son conjuntos ordenados de números, en consecuencia, dos vectores de $\mathbb{R}^n$ son iguales si las componentes correspondientes son iguales. Volviendo a lo anterior, podemos decir que:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Algunos vectores particulares

- **Vector nulo o vector cero:** es el vector que tiene todas sus componentes iguales a cero.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ el vector cero es $(0,0)$ o bien, $\binom{0}{0}$.

- **Vector opuesto:** dado un vector $\vec{v}$, se define como vector opuesto de $\vec{v}$ y se simboliza $- \vec{v}$, al vector cuyas componentes son los valores opuestos a las componentes de $\vec{v}$.

Por ejemplo, dado $\vec{u}=(1,-5,0,-2)$, entonces $- \vec{u} = (-1,5,0,2)$.

3. Los vectores desde la geometría

Introducción

El estudio de los vectores es uno de los desarrollos de la matemática que provienen de la física. En esta ciencia se distingue entre magnitudes escalares y magnitudes vectoriales.

Se consideran magnitudes vectoriales aquellas en las que, de alguna manera, influyen la dirección y el sentido en que se aplican. Cuando se plantea un movimiento no basta decir cuánto se ha desplazado el móvil, sino que es preciso decir también en qué dirección y sentido ha tenido lugar el movimiento. Por esto, la idea de vector surge de forma natural cuando es preciso indicar la dirección, el sentido y la intensidad de, por ejemplo, una fuerza, la velocidad de un móvil o del viento.

¿Qué sucede si representamos un vector en el plano cartesiano?

Como el plano tiene dos coordenadas, tendremos que trabajar con vectores en $\mathbb{R}^2$, es decir, con pares ordenados de la forma $\vec v=(x,y)$ o bien, $\vec v= \binom {x} {y}$.

Vamos a utilizar el software para descubrir la representación de estos vectores. Utilizaremos como ejemplo los siguientes vectores:

$\vec s=(3,4)$, $\vec t=(-2,7)$, $\vec u=(-3,-4)$

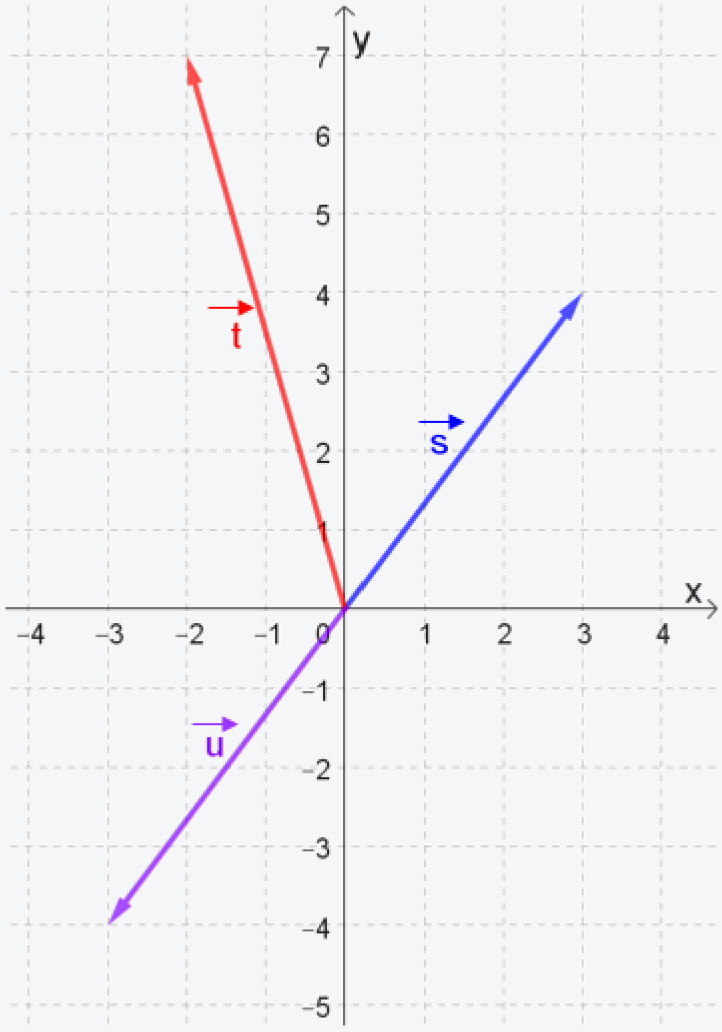
Para ello, hacemos lo siguiente:

1. Abrimos el GeoGebra haciendo clic aquí.
2. Escribimos en la parte de entrada: $a=(3,4)$ y apretamos la tecla "enter".
3. Repetimos el proceso para los dos vectores restantes.

¿Qué visualizamos en la vista gráfica?

3.1. Representación geométrica en el plano

Al representar los tres vectores en GeoGebra, visualizamos lo siguiente:

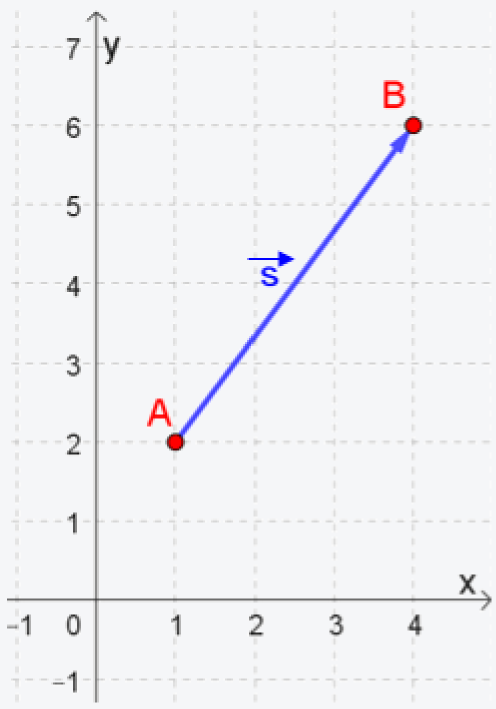


Vemos que el GeoGebra representó a los vectores mediante una flecha.

Definición

Un vector $\vec v \in \mathbb{R}^2$ se puede representar gráficamente mediante un segmento de recta orientado en el plano.

Si bien aquí los vectores parten desde el origen de coordenadas, en realidad, podrían estar en cualquier lugar del plano, son objetos libres. Podrás comprobar que si en el GeoGebra mantenés presionado un vector, lo podés mover y colocar en cualquier parte.



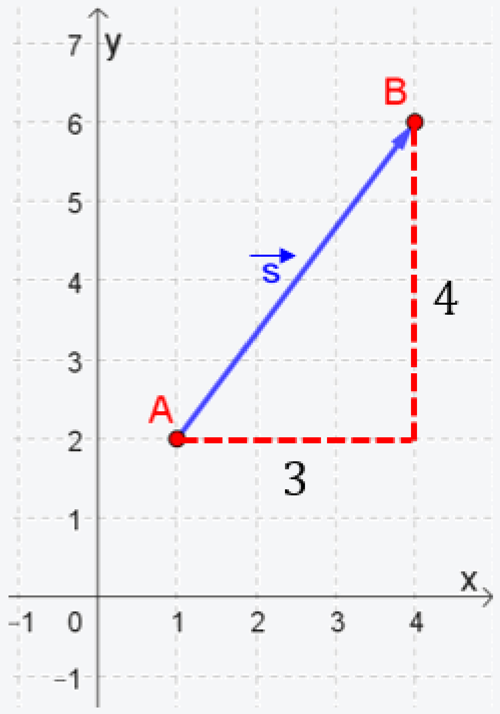
Este segmento se dice orientado porque va desde un punto cualquiera tomado como punto inicial o de aplicación $A=(a_1,a_2)$ hasta un punto final o terminal $B=(b_1,b_2)$, con la condición de que $x=b_1-a_1$ e $y=b_2-a_2$. Esto se escribe $\vec v = \vec{AB}$.

En nuestro caso, el punto de aplicación del vector $\vec s$ es $A=(1,2)$ y el punto terminal es $B=(4,6)$. Si hacemos los cálculos, vemos que:

$x=4-1=3$

$y=6-2=4$

Y las componentes de nuestro vector eran: $\vec s =(3,4)$



El punto de aplicación A del vector es arbitrario. En particular, si se elije el origen de coordenadas $O=(0,0)$ como punto inicial, se dice que el vector está en posición canónica.

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra el vector $\vec a=(6,-1)$ aplicando en el punto $A=(2,1)$ (representado en color rojo) y también aplicado en el origen de coordenadas (en color azul).

Entonces, la representación $\vec{OP}$ es la representación canónica de $\vec a$. No está de más aclarar que ambos vectores son iguales.

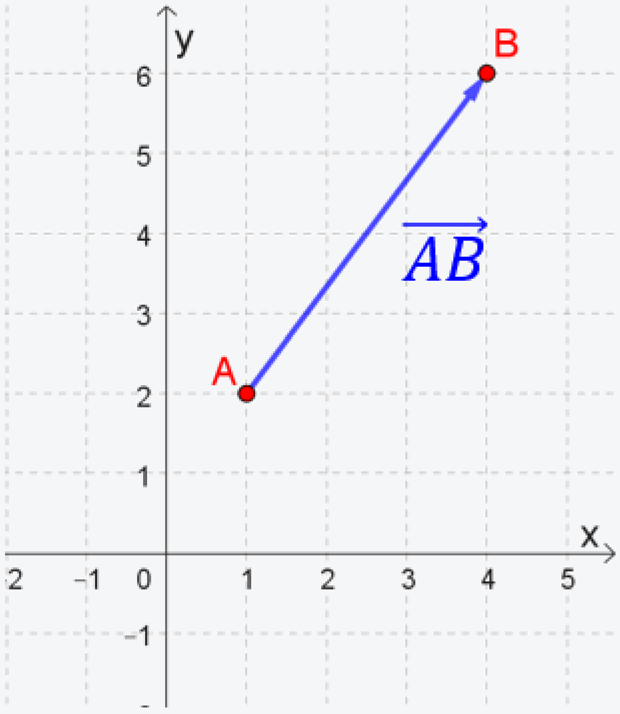
Observación: a menos que se especifique un punto de aplicación, siempre tomaremos como gráfica del vector su representación canónica.

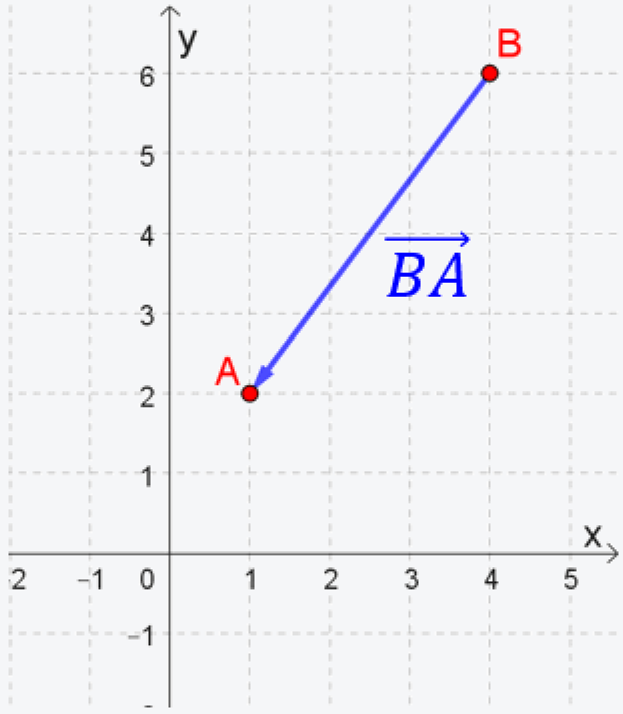
Características de los vectores

Los vectores tienen tres características importantes: sentido, dirección y módulo.

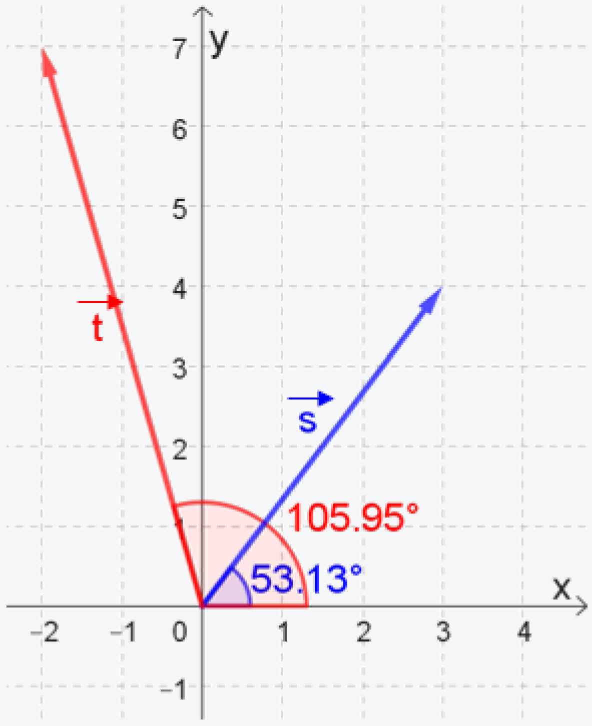
1. Sentido: lo determina hacia donde apunta la flecha del vector. Dado dos puntos cualesquiera A y B, podemos construir dos vectores:

- $\vec {AB}$, cuyo punto de aplicación es A y el punto terminal es B,
- $\vec {BA}$, cuyo punto de aplicación es B y el punto terminal es A.





2. Dirección: es el ángulo que forma el vector con el semieje positivo x.



Por lo tanto, la dirección de $\vec s$ es el ángulo $53,13°$ y de $\vec t$ es $105,95°$.

Observpa que dos vectores pueden tener la misma dirección pero distinto sentido.

3. Módulo: dado un vector $\vec v =(x, y)$ en $\mathbb {R}^2$, se denomina módulo del vector $\vec v$ y se simboliza $\left| \begin{matrix} \vec v \end{matrix} \right|$, a la longitud del segmento orientado.

Para calcularlo, se aplica la siguiente fórmula que se corresponde con el teorema de Pitágoras:

$$\left| \begin{matrix} \vec v \end{matrix} \right|= \sqrt{x^2+y^2}$$

Por ejemplo, si retomamos los tres vectores de más arriba, vemos que la longitud del vector $\vec t$ es mayor que la de los vectores $\vec s$ y $\vec u$, por lo que su módulo es mayor. Vamos a calcular los módulos de los tres, recordemos sus componentes:

$$\vec s=(3,4), \quad \vec t=(-2,7), \quad \vec u=(-3,-4)$$

Entonces, aplicamos los siguientes procedimientos:

- $\left| \begin{matrix} \vec s \end{matrix} \right|= \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} =5$
- $\left| \begin{matrix} \vec t \end{matrix} \right|= \sqrt{(-2)^2+7^2} = \sqrt{53} \approx7,28$
- $\left| \begin{matrix} \vec u \end{matrix} \right|= \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} =5$

Además, pudimos comprobar que $\left| \begin{matrix} \vec s \end{matrix} \right|=\left| \begin{matrix} \vec u \end{matrix} \right|$, aunque esto también ya se podía visualizar en el gráfico, ¿verdad?

Observá entonces que los vectores opuestos tienen el mismo módulo.

Vector unitario

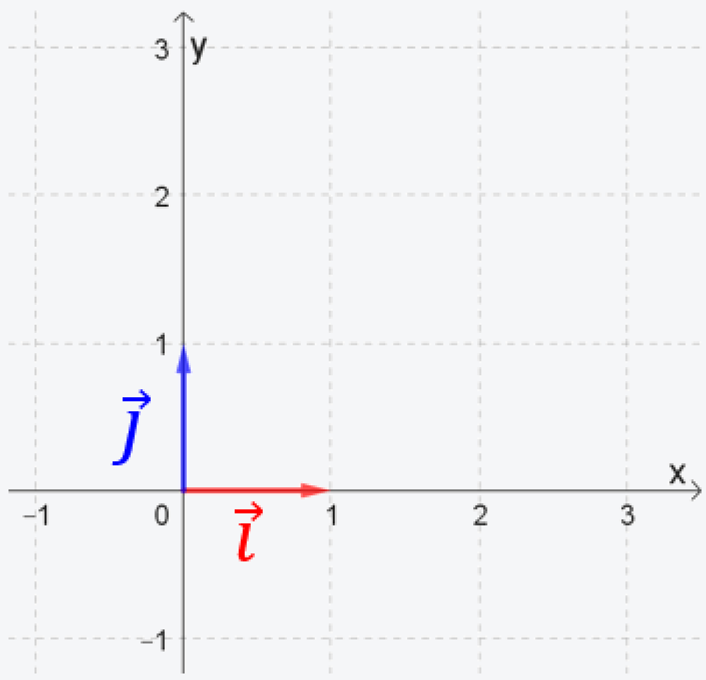
Se denomina vector unitario a cualquier vector cuyo módulo es igual a uno. Por ejemplo, $\vec u = ({ \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}})$ es unitario, ya que:

$$\left| \begin{matrix} \vec u \end{matrix} \right|= \sqrt{({ \frac{4}{5} })^2+({ -\frac{3}{5} })^2} = \sqrt{ \frac{16}{25}+\frac{9}{25}} = \sqrt{ \frac{25}{25} }=1$$

Existen un par de vectores unitarios que son muy importantes para el álgebra de vectores en $\mathbb {R}^2$ y estos son los vectores base unitarios o versores de $\mathbb {R}^2$, dados por:

$\vec i = (1,0)$ y $\vec j= (0,1)$

Se representan gráficamente por medio de segmentos orientados cuya longitud es una unidad sobre los ejes coordenados. En la siguiente figura se muestran los versores:



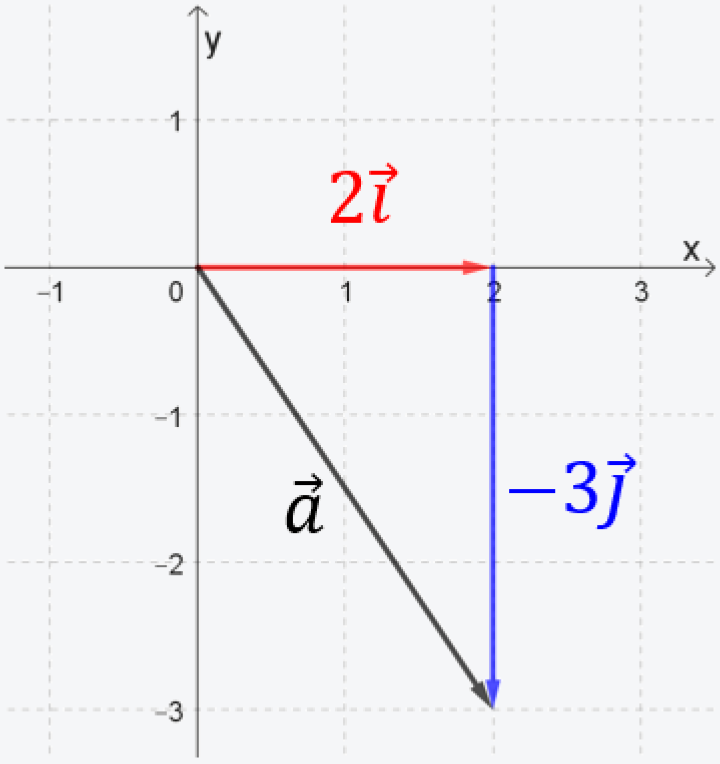
La importancia de estos vectores radica en que todo vector en el plano $\mathbb {R}^2$ puede ser expresado en términos de $\vec i$ y $\vec j$ del siguiente modo:

$$\vec v = (x,y)=x ~ \vec i+y ~ \vec j$$

Ejemplos

Si queremos expresar los vectores $\vec a = (2,-3)$ y $\vec b = (0,4)$ en términos de $\vec i$ y $\vec j$, tenemos:

$$\vec a = 2\vec i - 3\vec j \qquad y \qquad \vec b = 0\vec i + 4\vec j = 4\vec j$$



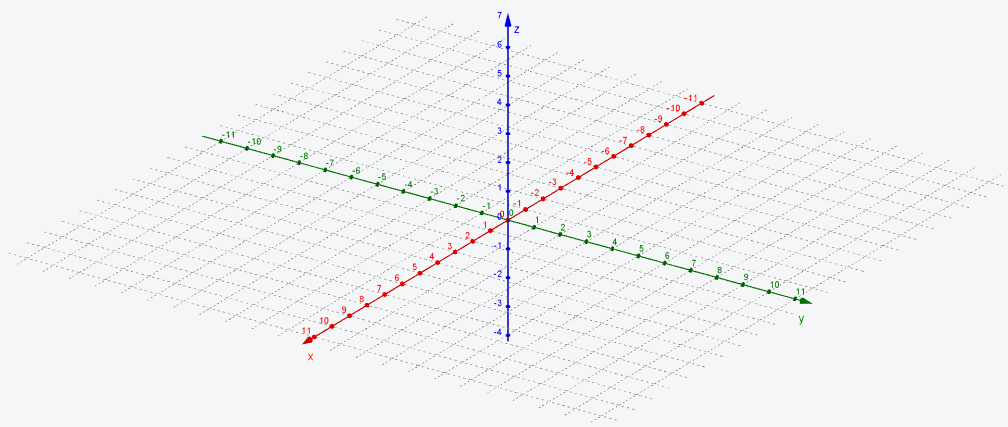
Más adelante vamos a profundizar en estas ideas.

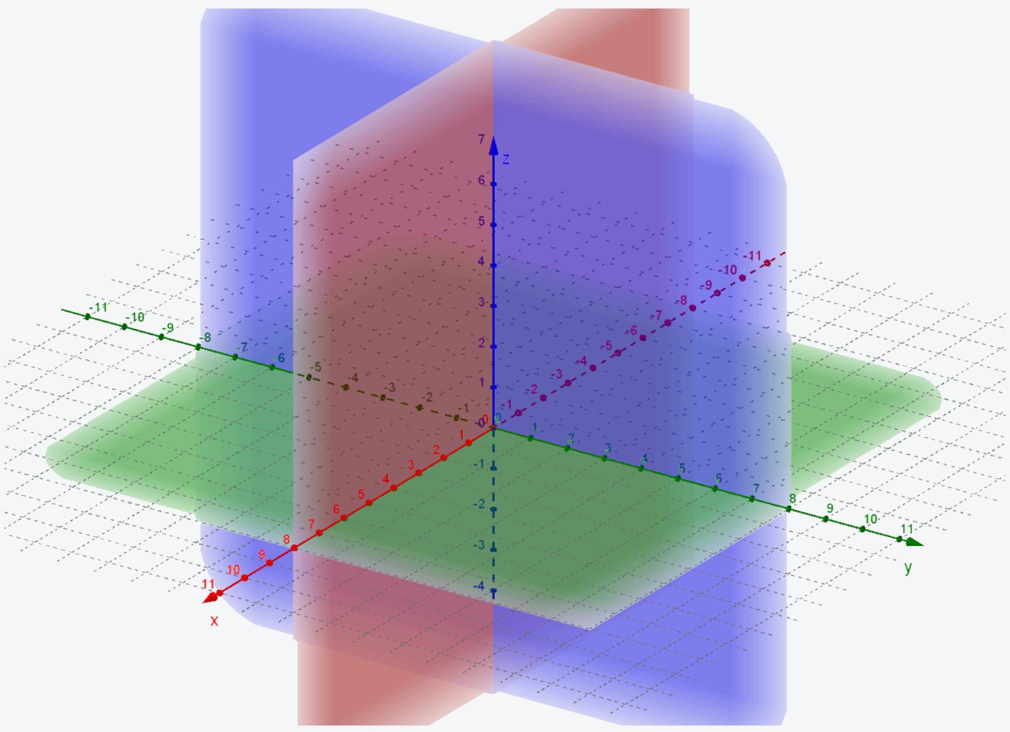
3.2. Representación geométrica en el espacio

Introducción

Si bien el razonamiento es análogo al realizado en el plano, en el espacio comenzaremos por presentar el sistema cartesiano de coordenadas, que nos sirve como referencia para ubicar la posición de un objeto.

La principal diferencia que veremos es que ahora tenemos un eje más, representado con la letra \(z \). Por lo tanto, el sistema cartesiano de coordenadas consta de un punto fijo u origen de coordenadas \(O \), y tres rectas o ejes coordenados \(x \), \(y \) y \(z \) que pasan por \(O \) y son perpendiculares entre sí. Quedan determinados tres planos coordenados: \(xy \), \(yz \) y \(xz \); y el espacio queda dividido en ocho octantes.
Al representar los tres vectores en GeoGebra, visualizamos lo siguiente:





Denotamos un punto en el espacio por la terna ordenada \(P=(x,y,z) \), donde los números reales \(x,y \) y \(z \) se llaman coordenadas cartesianas del punto \(P \). Se designa con \(\mathbb{R}^3 \) al conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales, que se corresponden con todos los puntos del espacio.

Vamos a graficar un punto en el GeoGebra (para acceder podés hacer clic aquí), pero ahora necesitamos uno 3D.

Una vez ingresado, vamos a representar el punto \(Q=(2,4,5) \). Para que GeoGebra reconozca que se trata de un punto, debemos emplear la letra mayúscula.

¿Ves el punto? Parece que está flotando, ¿verdad? ¿Cómo se representó?

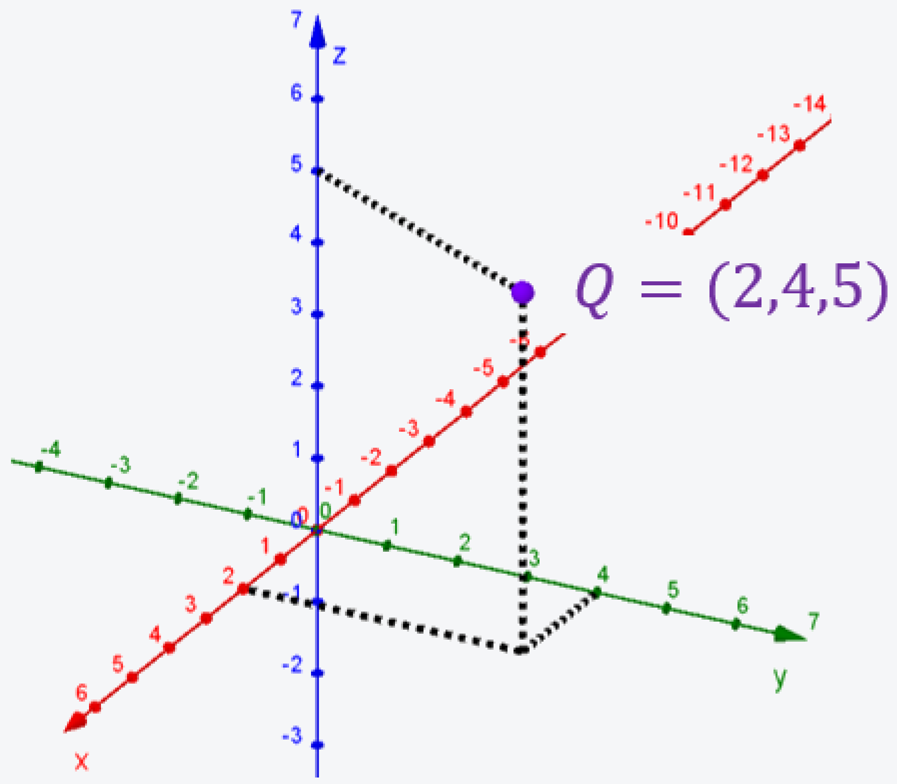
Para que comprendas, te proponemos que coloques como entradas lo siguiente:

\(x=2 \)
\(y=4 \)

$z=5$

Si mantenés apretado el mouse, podrás cambiar la perspectiva para observar con detalle lo que sucede.

Si pasamos en limpio, el punto cumple con lo siguiente:



Te proponemos que sigas practicando en GeoGebra y grafiques los siguientes puntos:

$A=(-1,4,2),~~~~~B=(0,-2,-3),~~~~~C=(5,4,0)$

Vectores en el espacio

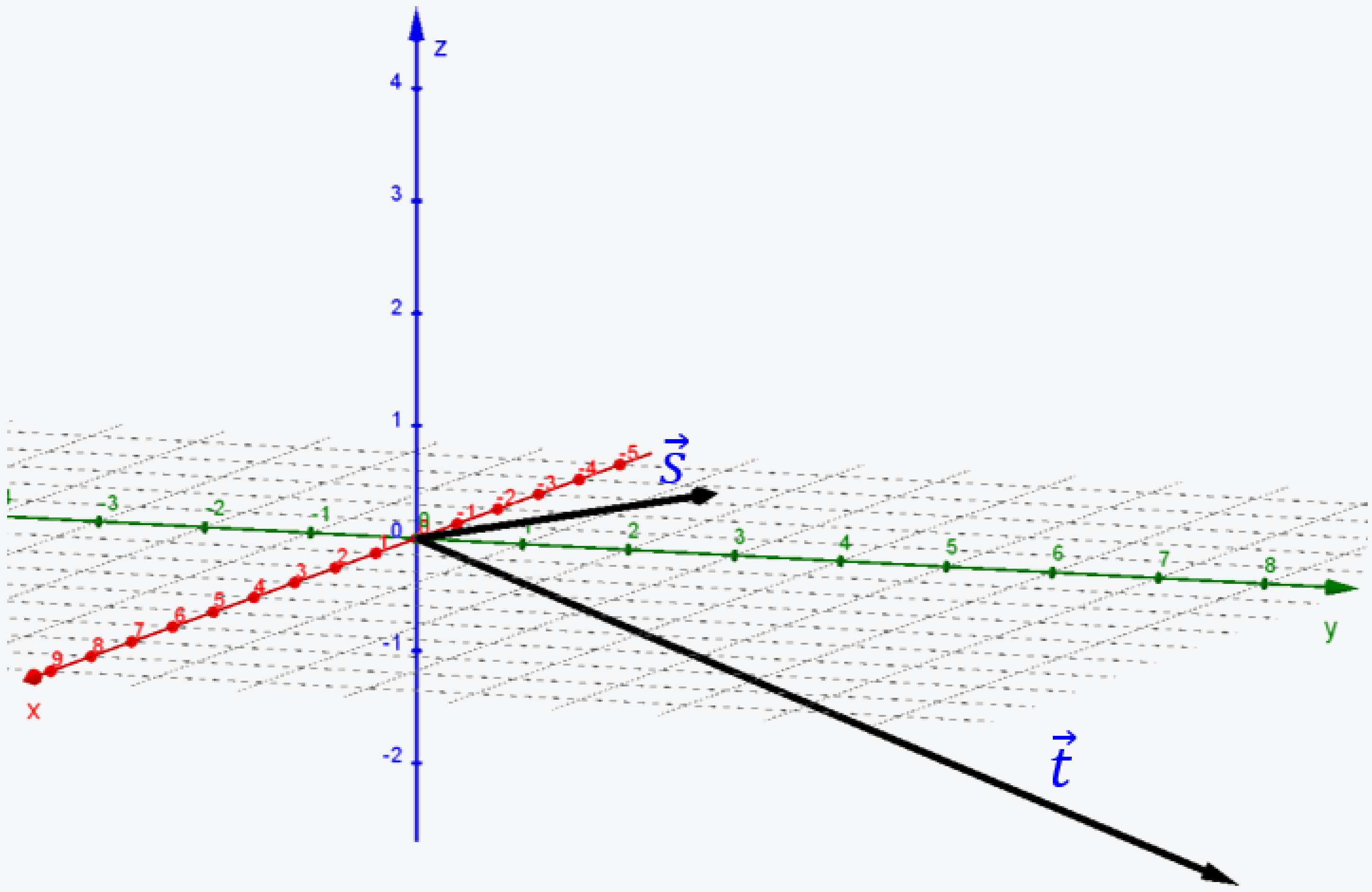
Vamos a utilizar el software para descubrir la representación de estos vectores. Representaremos los siguientes vectores en $\mathbb{R}^3$:

$\vec s=(3,4,1)$, $\vec t=(-2,7,-3)$

Para ello, hacemos lo siguiente:

1. Abrimos el GeoGebra (para acceder hacé [clic aquí)]
2. Escribimos en la parte de entrada: $s=(3,4,1)$ y apretamos la tecla "enter".
3. Repetimos el proceso para el otro vector.

¿Qué visualizamos en la vista gráfica? ¿Qué diferencias vemos con respecto a los vectores en $\mathbb{R}^2$?



Como ya dijimos anteriormente, denotamos un vector en el espacio $\mathbb{R}^3$ como $\vec v=(x,y,z)$ o bien, $\vec v=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}$, donde x,y y z son números reales y las componentes del vector. En particular, $\vec v \in \mathbb{R}^3$ se puede representar gráficamente mediante un segmento orientado o "flecha" en el espacio.

Este segmento se dice orientado porque va desde un punto cualquiera tomado como punto inicial o de aplicación $A=(a_1, a_2, a_3)$ hasta un punto final o terminal $B=(b_1, b_2, b_3)$, con la condición de que $x=b_1-a_1,~y=b_2-a_2,~z=b_3-a_3$. Esto se escribe $\vec v=\vec{AB}$

Ejemplo

Si el vector $\vec v$ tiene su punto de aplicación en $A=(3,-2,1)$ y su punto terminal en $B=(2,4,-7)$, para encontrar las componentes del vector hacemos:

$x=2-3=-1$
$y=4-(-2)=6$
$z=-7-1=-8$
Por lo tanto, $\vec v=(-1,6,-8)$.

Al igual que en $\mathbb{R}^2$, el punto de aplicación del vector puede ser cualquiera. En particular, si se elije el origen de coordenadas $O=(0,0,0)$ como punto inicial, se dice que el vector está en posición canónica y se escribe $\vec v=\vec{OP}=(x,y,z)$, donde $P=(x,y,z)$ es el punto final del vector.

¿Cómo graficamos en el GeoGebra un vector que no está en su posición canónica?

Supóngase que vamos a representar el vector $\vec v$ que utilizamos en el ejemplo de más arriba. Para ello, vamos a hacer lo siguiente:

1. Abrimos el GeoGebra 3D.
2. Colocamos en "entrada" el punto de aplicación. En nuestro caso, $A=(3,-2,1)$.
3. Colocamos en "entrada" el punto terminal. En nuestro caso, $B=(2,4,-7)$.

4. Luego, en "entrada" escribimos el siguiente comando: vector(A,B) y le damos "enter".
5. Si te fijás en la vista algebraica, GeoGebra le asigna una letra al vector y nos muestra sus componentes. Observá que coinciden con las que nosotros calculamos analíticamente.

Si bien acá se explica para el GeoGebra 3D, lo mismo se puede hacer para el GeoGebra 2D.

Al igual que antes, a menos que se especifique un punto de aplicación, siempre tomaremos como gráfica del vector a su representación canónica.

3.3. Módulo del vector en R^3

Al igual que antes, el módulo de un vector representa la longitud del segmento de recta orientado.

Como ahora estamos trabajando en $\mathbb{R}^3$, la fórmula es similar a la de $\mathbb{R}^2$, pero se agrega un término más, ya que ahora tenemos 3 en lugar de 2.

Por lo tanto, dado un vector $\vec v =(x,y,z)$ en $\mathbb{R}^3$, se denomina módulo del vector $\vec v$ y se simboliza $\left| \begin{matrix} \vec v \end{matrix} \right|$, al valor obtenido de realizar el siguiente cálculo:

$$\left| \begin{matrix} \vec v \end{matrix} \right|= \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Ejemplo

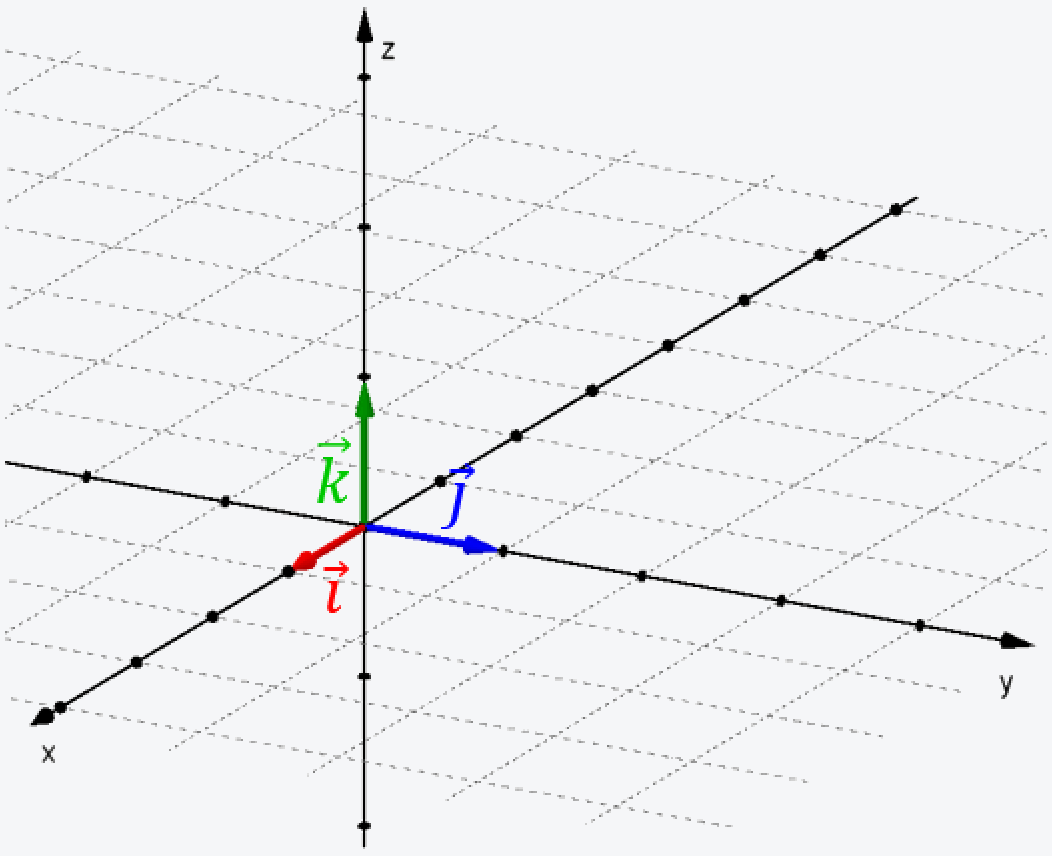
Vamos a calcular el módulo de los vectores $\vec a =(-1,2,-3)$ y $\vec b =({-\frac{3}{5},0, \frac{4}{5}})$. Para ello, procedemos de la siguiente manera:

$$\left| \begin{matrix} \vec a \end{matrix} \right|= \sqrt{(-1)^2+2^2+(-3)^2}= \sqrt{14} \approx3,74$$
$$\left| \begin{matrix} \vec b \end{matrix} \right|= \sqrt{(-\frac{3}{5})^2+0^2+({\frac{4}{5}})^2 }=1$$

A partir de lo anterior, vemos que $\vec b$ es un vector unitario, ya que su módulo es igual a uno.

Vectores base unitarios o versores en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$ los vectores base unitarios o versores están dados por $\vec i=(1,0,0)$, $\vec j=(0,1,0)$ y $\vec k=(0,0,1)$. Se representan gráficamente por medio de segmentos orientados cuya longitud es una unidad sobre los ejes coordenados. En la siguiente figura se muestran los versores:



La importancia de estos tres vectores radica en que todo vector en el espacio $\mathbb{R}^3$ como $\vec v =(x,y,z)$, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec v =(x,y,z) = x ~ \vec i+y ~ \vec j+z ~ \vec k$$

Por ejemplo, si queremos expresar el vector $\vec v =(4,-3, \frac{1}{2})$ con los versores, tenemos:

$$\vec v = 4 ~ \vec i-3 ~ \vec j+ \frac{1}{2} ~ \vec k$$

4. Operaciones algebraicas sobre vectores

Con los vectores se pueden realizar diferentes operaciones, las cuales vamos a definir a continuación. Lo haremos para vectores de $\mathbb{R}^n$.
Sean $\vec r = (a_1, a_2, a_3, ... , a_n)$ y $\vec s = (b_1, b_2, b_3, ... , b_n)$, entonces:

1. Adición entre vectores

La suma entre vectores es otro vector cuyas componentes se obtienen de sumar las componentes correspondientes entre sí de los sumandos. Simbólicamente:

$$\vec r + \vec s=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, ... , a_n+b_n)$$

Ejemplo

Sean $\vec r = (7, -3, -1, -4)$ y $\vec s = (3, -2, 3,9)$, vamos a calcular $\vec r + \vec s$. Para ello, hacemos:

- $7+3=10$
- $-3+(-2)=-5$
- $-1+3=2$
- $-4+9=5$

Por lo tanto, $\vec r + \vec s = (10, -5, 2, 5)$.

2. Sustracción entre vectores

La diferencia entre vectores es otro vector cuyas componentes se obtienen de restar las componentes correspondientes entre sí, respetando el orden.

Simbólicamente:

$$\vec r - \vec s=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, ... , a_n-b_n)$$

Ejemplo

Ahora calcularemos la resta entre los dos vectores de antes, es decir, $\vec r - \vec s$. Para ello, hacemos lo siguiente:

- $7-3=4$
- $-3-(-2)=-1$
- $-1-3=-4$
- $-4-9=-13$

Por lo tanto, $\vec r - \vec s = (4,-1,-4,-13)$.

3. Multiplicación de un escalar por un vector

El producto entre un escalar (un número real) y un vector es otro vector cuyas componentes se obtienen de multiplicar el número real por cada una de las componentes del vector. Simbólicamente:

$$c~\vec r =(c \cdot a_1,c \cdot a_2, c \cdot a_3, ... , c \cdot a_n)$$

Ejemplo

Si multiplicamos el vector $\vec r$ por el escalar 2, tenemos:

- $2 \cdot 7=14$
- $2 \cdot (-3)=-6$
- $2 \cdot (-1) = -2$
- $2 \cdot (-4)=-8$

Por lo tanto, $2 ~\vec r = (14,-6,-2,-8)$.

4. Producto escalar

El producto escalar entre los vectores $\vec r$ y $\vec s$, que se denota $\vec r \cdot \vec s$, es el número real que se obtiene sumando los productos de las componentes correspondientes. Simbólicamente:

$$\vec r \cdot \vec s = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + ... + a_n \cdot b_n$$

También se llama producto interno o producto punto. El resultado no es un vector, sino un número real, un escalar, de ahí su nombre.

Ejemplo

Vamos a calcular el producto escalar entre los vectores $\vec r$ y $\vec s$ que venimos utilizando en todos los ejemplos. Entonces, hacemos:

$\vec r \cdot \vec s=(7, -3, -1, -4) \cdot (3, -2, 3,9)$

$\vec r \cdot \vec s= 7 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + (-4) \cdot 9$

$\vec r \cdot \vec s= 21 + 6 -3-36$

$\vec r \cdot \vec s= -12$

Observación: para resolver las operaciones que involucran dos vectores, estos deben tener el mismo número de componentes, pudiendo tratarse de dos vectores renglones, dos vectores columnas o un vector renglón y un vector columna.

Volviendo al problema "Organizando las ventas"

En este problema, armaste dos vectores: el de los precios de las velas y el de las cantidades vendidas. Si llamamos $\vec p$ al primer vector y $\vec c$ al segundo, entonces podemos escribir lo siguiente:

$$\vec p = (850, 870, 900, 820, 840) \quad y \quad \vec c = (8,3,10, 7,12)$$

Cuando calculaste el ingreso total, de seguro hiciste esta cuenta:

$$850 \cdot 8+ 870\cdot 3 + 900 \cdot 10 + 820 \cdot 7 + 840 \cdot 12 = 34230$$

Este resultado no es otra cosa que el producto escalar entre ambos vectores, es decir:

$$\vec p \cdot \vec c = 34230$$

Más adelante, apareció otro vector con las cantidades de ventas acumuladas. Si lo llamamos $\vec a$, tenemos:

$$\vec a = (13, 16, 19, 25, 21)$$

Para obtener el vector con las ventas actualizadas, es decir, incluyendo las del mes anterior, resolviste la siguiente suma de vectores:

$$\vec a + \vec c = (13+8, ~16+3, ~19+10, ~25+7, ~21+12) = (21, 19, 29, 32, 33)$$

Por último, cuando el emprendedor se propone triplicar las ventas del mes anterior, se resolvió la multiplicación entre el escalar 3 y el vector $\vec c$, es decir:

$$3~\vec c = (3 \cdot 8, ~3 \cdot 3, ~3 \cdot 10, ~3 \cdot 7, ~3 \cdot 12)=(24,9,30,21,36)$$

4.1. Propiedades de las operaciones sobre vectores

A continuación, vamos a enunciar algunas de las propiedades que tienen las operaciones sobre vectores:

1. Adición de vectores

- $\vec r + \vec s = \vec s + \vec r$
- $\vec r + (\vec s + \vec t) = (\vec r + \vec s) + \vec t$
- $\vec r + \vec 0 = \vec r$, siendo $\vec 0$ el vector nulo.
- $\vec r + (-\vec r) = \vec 0$, siendo $-\vec r$ el vector opuesto a $\vec r$.
- $\left| \begin{matrix} c~ \vec u \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} c \end{matrix} \right | \left| \begin{matrix} \vec u \end{matrix} \right |$, siendo c un número real y $\vec u$ un vector unitario.

2. Multiplicación por un escalar

- $c~(\vec r + \vec s) = c ~\vec r + c ~\vec s$, siendo c un número real.
- $(c + d) ~\vec r = c ~\vec r + d ~\vec r$, siendo c y d números reales.
- $1 ~\vec r = \vec r$
- $0 ~\vec r = \vec 0$
- $c ~\vec 0 = \vec 0$

3. Propiedades del producto escalar

- $\vec r \cdot \vec s = \vec s \cdot \vec r$
- $(c ~\vec r) \cdot \vec s = c(\vec r \cdot \vec s)= \vec r \cdot (c~\vec s)$
- $(\vec r + \vec s) \cdot \vec t = \vec r \cdot \vec t + \vec s \cdot \vec t$
- $\left| \begin{matrix} \vec r \end{matrix} \right|^2 = \vec r \cdot \vec r$

Demostraremos solo la última propiedad. Las demostraciones de las otras se dejan como actividad en el foro de pensamiento matemático. Para simplificar, vamos a tomar vectores en $\mathbb{R}^2$.

Sea $\vec r = (x_1, x_2)$. Entonces:

$$\vec r \cdot \vec r = (x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2)= (x_1)^2 + (x_2)^2= \left| \begin{matrix} \vec r \end{matrix} \right|^2$$

4.2. Interpretación geométrica de las operaciones en R²

Vamos a analizar las interpretaciones geométricas de la adición, sustracción y multiplicación por un escalar, de vectores en $\mathbb{R}^2$. Para ello vamos a utilizar el GeoGebra 2D, el cual podés abrir haciendo clic aquí.
Todas las operaciones las resolveremos utilizando los siguientes vectores:

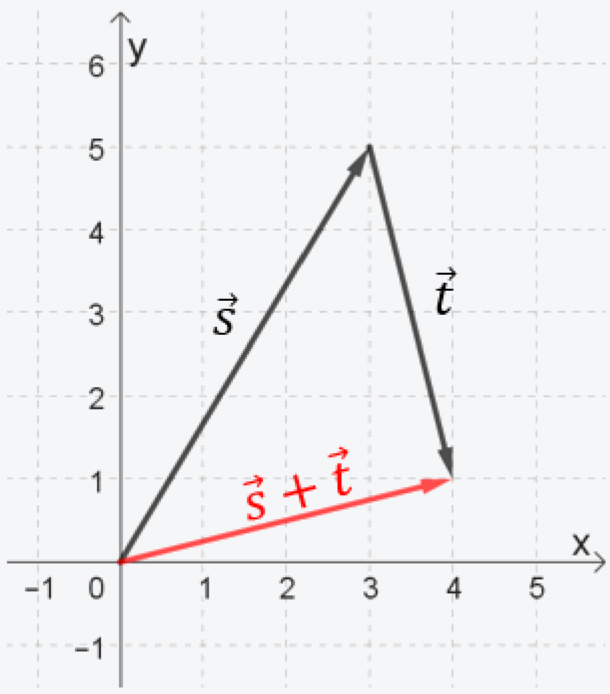
$\vec s = (3,5)$ y $\vec t = (1,-4)$

1. Adición de vectores

Vamos a calcular la siguiente suma de forma gráfica: $\vec s + \vec t$:

1. Abrimos el GeoGebra (hacé clic aquí).
2. Colocamos como entrada a los dos vectores.
3. Luego, seleccionamos el vector $\vec t$ y hacemos que su punto de aplicación coincida con el punto terminal del vector $\vec s$. Esto también podría ser al revés.
4. Nos fijamos donde queda el punto terminal del vector que movimos.
5. Escribimos en "entrada" lo siguiente: $s + t$.
6. Ese vector que nos aparece graficado es el vector suma.

Podrás observar que en la vista algebraica nos aparecen las componentes del vector suma. Podés comprobar que coinciden si resolvemos la adición de manera algebraica.

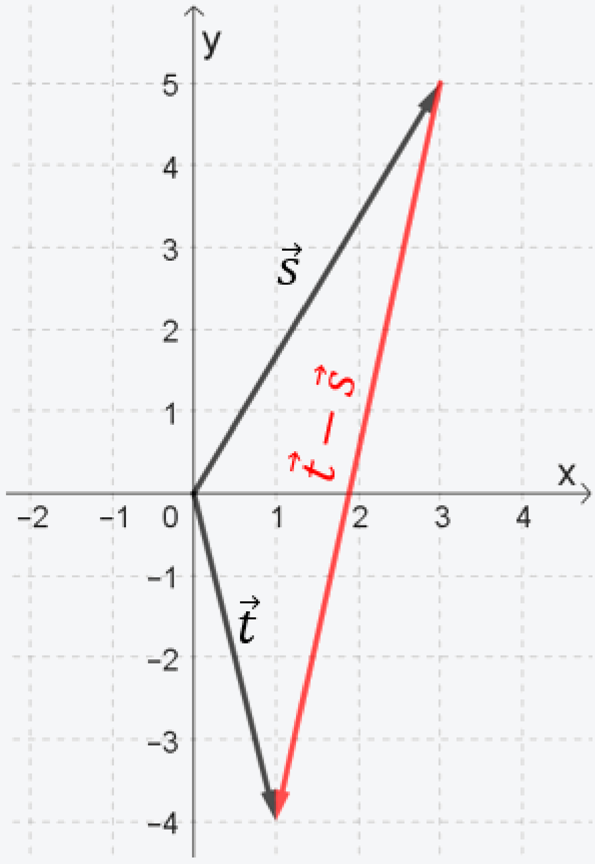


2. Sustracción de vectores

Vamos a calcular la siguiente diferencia de forma gráfica: $\vec t - \vec s$:

1. Abrimos el GeoGebra.
2. Colocamos como entrada a los dos vectores.
3. Luego, el punto de aplicación del vector resta va a ser el punto terminal del primer vector y, el punto terminal, va a ser el punto terminal del segundo vector. Acá sí es importante este orden. En nuestro caso, el punto de aplicación es $(3,5)$ y el punto terminal es $(1,-4)$.
4. Escribimos como entrada el siguiente comando: vector(<punto inicial>, <punto terminal>). En nuestro caso es: $vector((3,5), (1,-4))$.
5. Ese vector que nos aparece graficado es el vector diferencia.

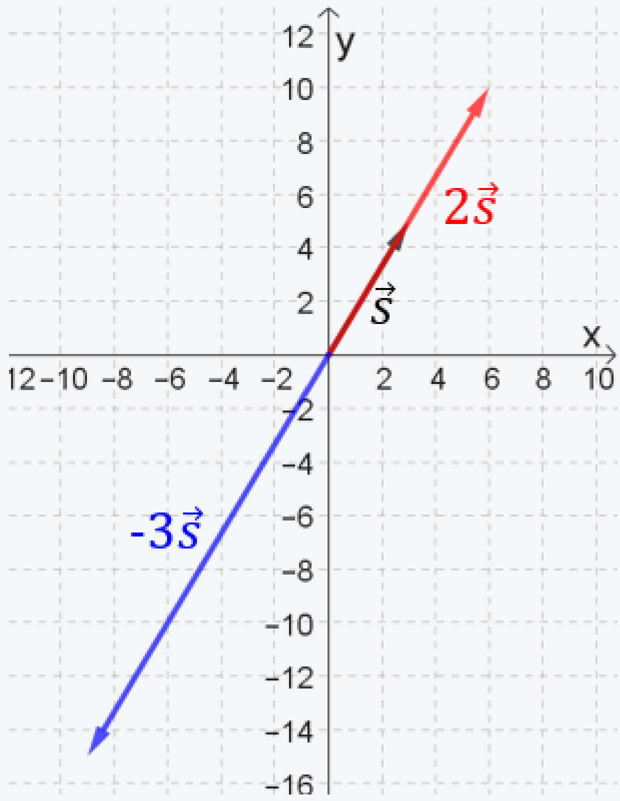
Podrás observar que en la vista algebraica nos aparece las componentes del vector diferencia. Podés comprobar que coinciden si resolvemos la sustracción de manera algebraica.
También como entrada se puede poner: $t - s$ y aparecerá el vector diferencia en su forma canónica.



3. Multiplicación entre un escalar y un vector

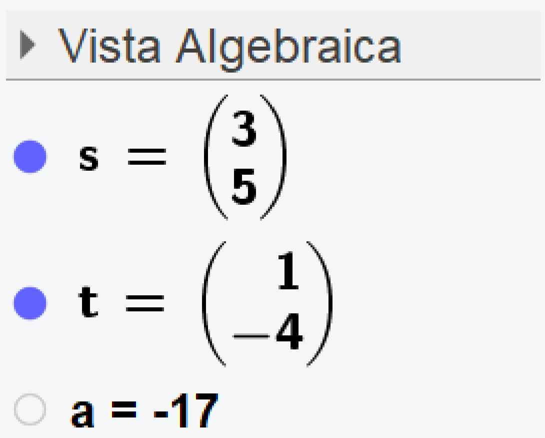
Supónganse que queremos interpretar la multiplicación entre los escalares \(2 \) y \(-3 \) por el vector \(\vec s \).

1. Abrimos el Geogebra.
2. Colocamos como entrada uno de los vectores, por ejemplo, \(\vec s \).
3. Luego, ponemos en entrada: \(2*s \).
4. Observarás que se grafica otro vector cuyo módulo es el doble del vector \(\vec s \).
5. Si probamos con \(-3*s \), veremos que el módulo del vector se triplicó, pero además se cambió el sentido, esto se debe a que el escalar es negativo.



Dato adicional

Si bien no se puede hacer una interpretación gráfica del producto escalar, ya que su resultado es un número real, se puede resolver utilizando el GeoGebra. Simplemente debemos introducir los dos vectores y luego colocar en entrada lo siguiente: \(s * t \). El número real que les aparezca en la vista algebraica es el resultado de tal operación.



4.3. Vectores en términos de i, j y k

Ahora que tenemos explicadas las operaciones entre vectores, podemos volver a los vectores unitarios y dar una interpretación más profunda de ello.

Vectores base unitarios o versores en $\mathbb{R}^2$

Habíamos dicho que los versores en $\mathbb{R}^2$ son:

$$\vec i = (1,0), \quad \vec j = (0,1)$$

Veamos este ejemplo:

Si tenemos el vector $\vec a= (2,6)$, podemos hacer lo siguiente:

- $\vec a = (2,6) = (2,0)+(0,6)$, esto es por adición de vectores.
- $\vec a = (2,6) = 2(1,0)+6(0,1)$, esto es por multiplicación de un escalar y un vector.
- $\vec a = (2,6) = 2~ \vec i +6~\vec j$, ya que $\vec i = (1,0)$ y $\vec j = (0,1)$.

De forma general, podemos hacer:

- $\vec a = (x,y) = (x,0)+(0,y)$, esto es por adición de vectores.
- $\vec a = (x,y) = x(1,0)+y(0,1)$, esto es por multiplicación de un escalar y un vector.
- $\vec v = (x,y) = x~ \vec i +y~\vec j$, ya que $\vec i = (1,0)$ y $\vec j = (0,1)$.

Esto es lo que habíamos definido anteriormente.

Habíamos dicho que los versores en $\mathbb{R}^3$ son:

$$\vec i = (1,0,0), \quad \vec j = (0,1,0), \quad \vec k = (0,0,1)$$

Veamos este ejemplo:

- Si tenemos el vector $\vec a= (2,6,4)$, podemos hacer lo siguiente:
- $\vec a = (2,6,4) = (2,0,0)+(0,6,0)+(0,0,4)$, esto es por adición de vectores.
- $\vec a = (2,6,4) = 2(1,0,0)+6(0,1,0)+4(0,0,1)$, esto es por multiplicación de un escalar y un vector.
- $\vec a = (2,6,4) = 2~ \vec i +6~\vec j + 4~\vec k$, ya que $\vec i = (1,0,0)$, $\vec j = (0,1,0)$ y $\vec k = (0,0,1)$.

De forma general, podemos hacer:

- $\vec a = (x,y,z) = (x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)$, esto es por adición de vectores.
- $\vec a = (x,y,z) = x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$, esto es por multiplicación de un escalar y un vector.
- $\vec a = (x,y,z) = x~ \vec i +y~\vec j + z~\vec k$, ya que $\vec i = (1,0,0)$, $\vec j = (0,1,0)$ y $\vec k = (0,0,1)$.

Esto es lo que habíamos definido anteriormente.