Chapitre 8. Intégrales généralisées.

Intégrales généralisées sur un intervalle borné.

<u>Déf</u> Soit $a < b$ et $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors on définit l'intégrale généralisée par la limite

$$\int_a^{b-} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt \,, \quad \text{si la limite existe}$$

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_a^{b-} f(t)\,dt$ est divergente.

Notations

Si $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, on définit l'intégrale généralisée par la limite

$$\int_{a+}^{b} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt \,, \quad \text{si la limite existe}$$

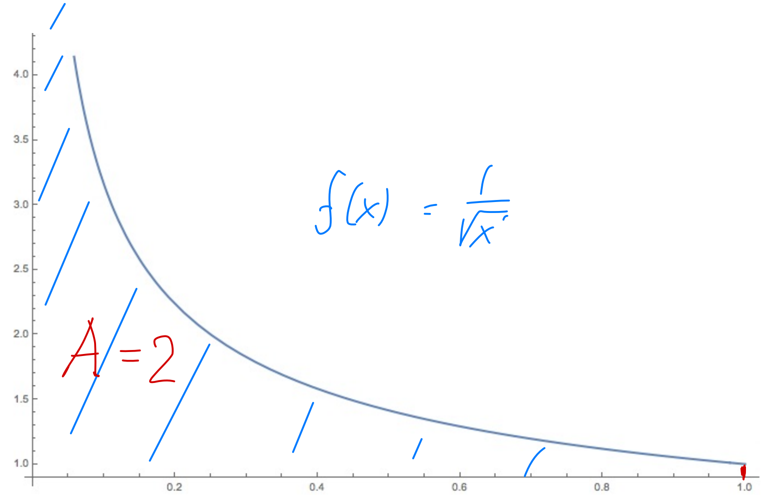
Sinon, l'intégrale généralisée $\int_{a+}^{b} f(t)\,dt$ est divergente.

Ex 1. L'aire sous la courbe $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in]0,1]$

$$\int_{0+}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0+}\int_{h}^{1} x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{h\to 0+}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\Big|_h^1\right) =$$

$h>0$

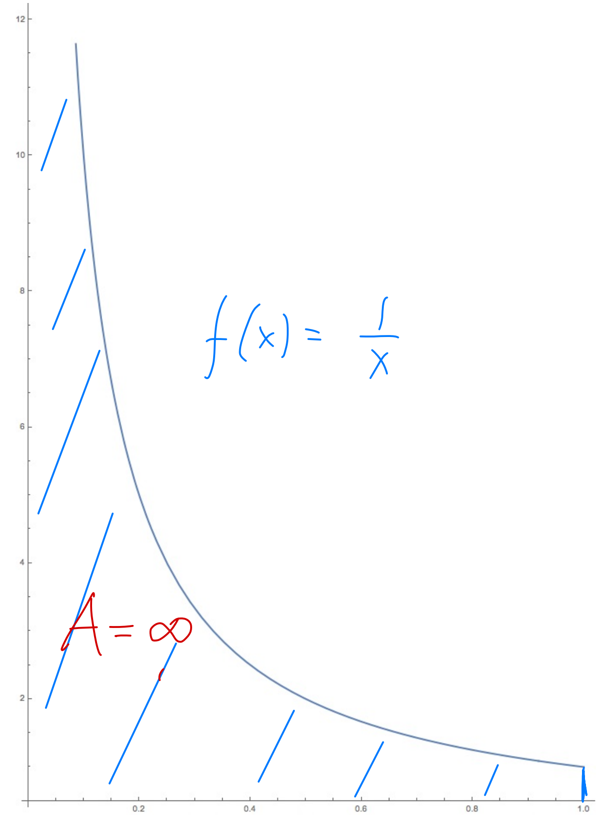
$$= \lim_{h\to 0+} 2\left(1-\sqrt{h}\right) = 2$$



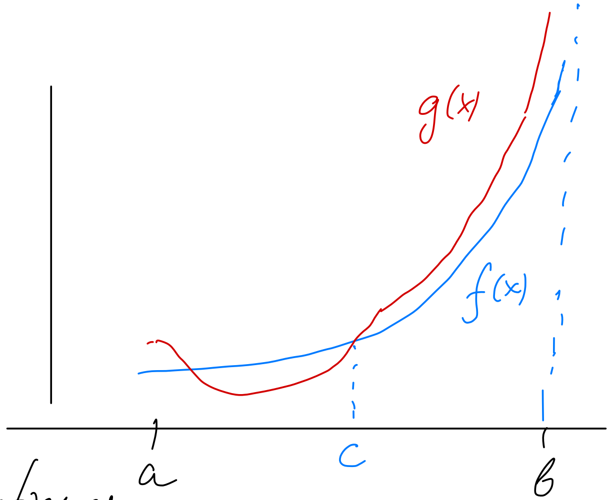
Ex 2. L'aire sous la courbe $y=\frac{1}{x}$, $x\in]0,1]$

$$\int_{0+}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{h\to 0+}\int_{h}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{h\to 0+}\left(\underbrace{\ln 1}_{=0}-\underbrace{\ln h}_{\to -\infty}\right) = +\infty$$

L'integrale généralisée $\int_{0+}^{1}\frac{dx}{x}$ est divergente.



Proposition. Critère de comparaison. Soient $f, g : [a,b[$ fonctions continues telles qu'il existe $c \in]a,b[$: $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [c,b[$



Alors si $\int_a^{b-} g(x)dx$ converge (la limite finie existe) $\Rightarrow \int_a^{b-} f(x)dx$ converge

si $\int_a^{b-} f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{b-} g(x)dx$ diverge

Il existe un critère similaire pour $f, g :]a,b] \to \mathbb{R}$ continues.

Ex. $a < b$

$$\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \overset{\alpha \neq 1}{=} -\int_{b-a}^{0+} \frac{du}{u^\alpha} = \int_{0+}^{b-a} \frac{du}{u^\alpha} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1-\alpha} u^{1-\alpha} \Big|_x^{b-a} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1-\alpha}\left((b-a)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}\right) =$$

changement de variable
$u = b-t \Rightarrow du = -dt$
$t = a \Rightarrow u = b-a$, $t = b- \Rightarrow u = 0+$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{divergente}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \int_a^{b-} \frac{dt}{b-t} = -\lim_{x \to b-} \left(\underbrace{\ln(b-x)}_{\searrow -\infty} - \ln(b-a)\right) = +\infty \text{ divergente}$$

$$\boxed{\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{divergente}, & \alpha \ge 1. \end{cases}}$$

Corollaire Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\cdot(b-x)^\alpha = \underset{\in\mathbb{R}}{\ell} \neq 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(t)dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$ et diverge $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

Dém: Soit $\ell > 0$; $\lim\limits_{x\to b^-} (x-b)^\alpha f(x) = \ell \Rightarrow \exists\, c \in [a,b[$: $\forall x \in [c,b[$ on a

$$\frac{1}{2}\ell \leq \underbrace{(b-x)^\alpha}_{\substack{b^- \\ >0}} f(x) \leq \frac{3}{2}\ell \Rightarrow \frac{\ell}{2}\frac{1}{(b-x)^\alpha} \leq f(x) \leq \frac{3\ell}{2}\frac{1}{(b-x)^\alpha} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Par le critère de comparaison $\Rightarrow \int_a^{b^-} f(t)dt$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha < 1$
divergente $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$ ▨

D'une façon similaire on obtient: Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$. tel que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)(x-a)^\alpha = \underset{\in\mathbb{R}}{\ell} \neq 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_{a^+}^{b} f(t)dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$
diverge $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

Ex. $\int_0^{1^-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ converge ou diverge? (la primitive ne s'exprime pas en fonctions élémentaires)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{1-x^3}} = \underset{\neq 0}{\overset{\text{on veut}}{\ell}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(1-x)}^{1/2}}{\cancel{\sqrt{1-x}}\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0.$$

il faut prendre $\alpha = \frac{1}{2}$

Puisque $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ par le Corollaire $\int_0^{1^-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ converge

Déf Soit $a<b$, $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continue, $c \in]a,b[$ arbitraire

Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \int_{a+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b-} f(t)\,dt$$ converge si et seulement si

les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne dépend pas du choix de $c \in]a,b[$.

Ex.

$$\int_{0+}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} \overset{\text{déf}}{=} \int_{0+}^{1/2} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} + \int_{1/2}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s}$$

(1) On cherche $\alpha_1 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0+} f(x)\cdot x^{\alpha_1} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^{\alpha_1}}{x^r(1-x)^s} = \ell \neq 0,\ \neq \infty$$

$\Rightarrow$ il faut prendre $\alpha_1 = r$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} \frac{x^r}{x^r(1-x)^s} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1/2} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} \text{ converge} \iff r<1$$

(2) On cherche $\alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 1-} f(x)(1-x)^{\alpha_2} = \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)^{\alpha_2}}{x^r(1-x)^s} = \ell \neq 0,\ \neq \infty$$

$\Rightarrow$ il faut prendre $\alpha_2 = s$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)^s}{x^r(1-x)^s} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{1/2}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} \text{ converge} \iff s<1$$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s}$$ converge $\iff$ $r<1$ et $s<1$

Intégrales généralisées sur un intervalle non borné.

Déf. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to +\infty} \int_a^{x} f(t)\,dt$$ si la limite existe. (un nombre réel)

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ est divergente.

Soit $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to -\infty} \int_x^{b} f(t)\,dt$$ si la limite existe. (un nombre réel).

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$ est divergente.

Ex 1. L'aire sous la courbe $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, $x \in [e, +\infty[$

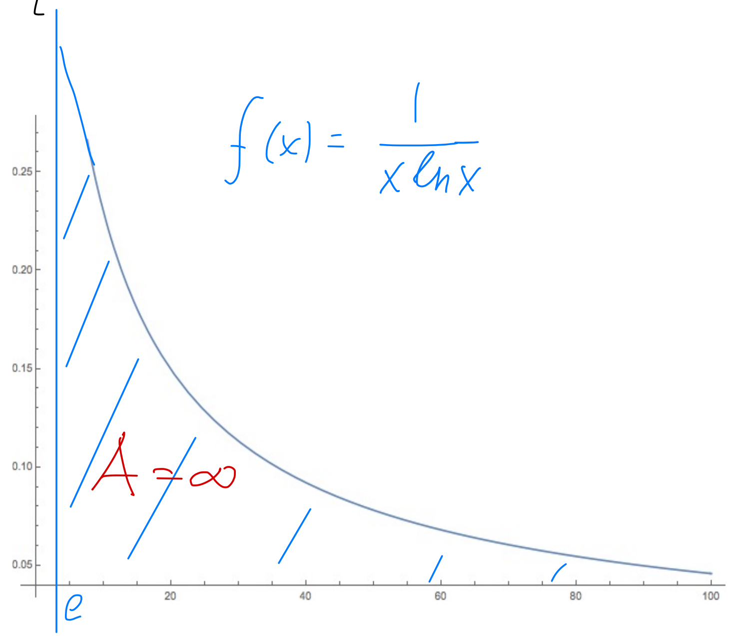
$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{x \to \infty} \int_e^{x} \frac{dt}{t \ln t} = \lim_{y \to \infty} \int_1^{y} \frac{du}{u} = \lim_{y \to \infty} \ln u \Big|_1^{y} =$$

$u = \ln t$

$du = \dfrac{dt}{t}$; $\ln e = 1$, $\underset{x \to \infty}{\ln x} = y_{\to \infty}$

$$= \lim_{y \to \infty} (\underbrace{\ln y}_{\to \infty} - \underbrace{\ln 1}_{=0}) = \infty \implies$$

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \text{ diverge.}$$



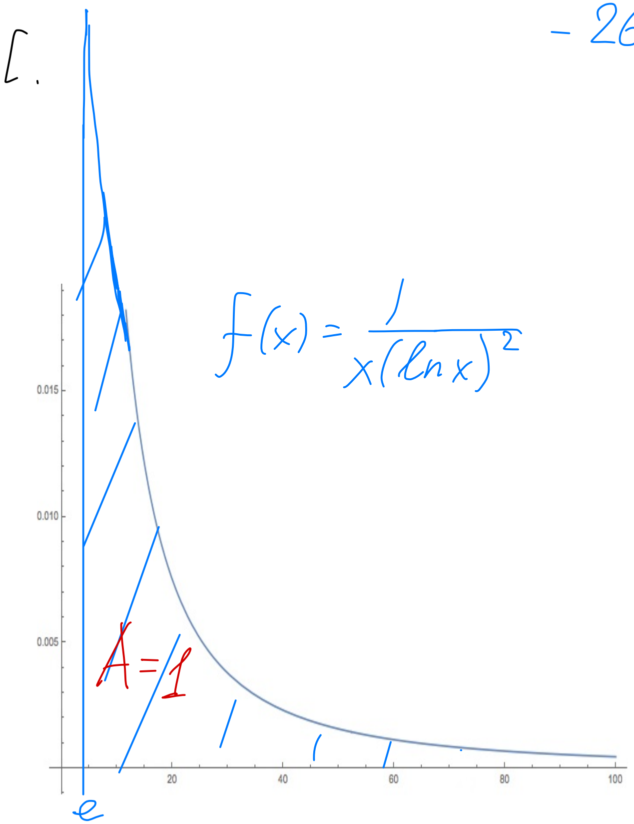
Ex2. L'aire sous la courbe $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$, $x\in[e,\infty[$.

$$\int_e^\infty \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \lim_{X\to\infty}\int_e^X \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \lim_{Y\to\infty}\int_1^Y \frac{du}{u^2} =$$

$u=\ln t \Rightarrow du=\frac{dt}{t}$

$t=e \Rightarrow \ln t = 1 \quad X\to\infty \Rightarrow \ln X = Y \to \infty$

$$= \lim_{Y\to\infty}\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^Y = \lim_{Y\to\infty}\left(-\frac{1}{Y}+1\right) = 1$$



Critère de comparaison. Si $0\le f(x)\le g(x)$ pour tout $x>c$ pour un certain $c>a$, Alors

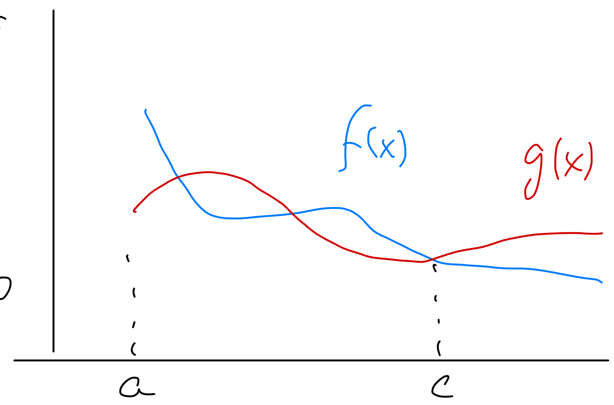
si $\int_a^\infty g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ converge ; si $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ diverge.

Ex. $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta} \overset{\beta\neq 1}{=} \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^\beta} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{1-\beta}x^{1-\beta}\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{1-\beta}\left(R^{1-\beta}-1\right) =$$

$$= \begin{cases} = -\frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{\beta-1}, & \text{si } \beta>1 \\ \text{diverge}, & \beta<1. \end{cases}$$

; Si $\beta=1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty}\ln x\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}(\underbrace{\ln R}_{\to\infty}-\underbrace{\ln 1}_{=0}) = \infty$

divergente.



$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\beta}} = \frac{1}{\beta-1},\ \text{si } \beta>1 \quad \text{divergente, si } \beta \le 1}$$

à comparer avec

$$\boxed{\int_{0+}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha},\ \alpha<1 \quad \text{divergente, } \alpha \ge 1}$$

Corollaire Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot x^{\beta} = \underset{\in \mathbb{R}}{\ell \neq 0}$

Alors $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ converge $\iff \beta > 1$

diverge $\iff \beta \le 1$

Ex. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ converge ou diverge ? (ne s'exprime pas en fonctions élémentaires)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\beta}}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\beta}}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^{3/2}}}{\cancel{x^{3/2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = 1 \underset{\neq \infty}{\neq 0} \Rightarrow \beta = \frac{3}{2} > 1$$

pour avoir une limite $\neq 0, \neq \infty$, il faut $\beta = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ converge.

Déf Soit f une fonction continue sur $]a, +\infty[$. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{\infty} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \int_{a+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{\infty} f(t)\,dt \quad \text{pour un } c \in\ ]a, \infty[$$

converge si et seulement si les deux intégrales généralisées convergent.

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_{a+}^{\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Déf Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, alors on peut aussi considérer

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{\infty} f(t)\,dt, \quad c \in \mathbb{R},$$

qui est convergente si et seulement si les deux intégrales convergent.

La définition ne dépend pas du choix de $c \in \mathbb{R}$.

Ex. $\displaystyle\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$ convergente? $\displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{x^\alpha}{\sin^2 x} \overset{\alpha=2}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$ et $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow$ par le Corollaire l'intégrale $\displaystyle\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$ diverge

Directement: $$\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{h \to 0+} \int_{h}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{h \to 0+} (-\cot x)\Big|_h^{\pi/2} = \lim_{h \to 0+} \Big(\underbrace{-\cot \tfrac{\pi}{2}}_{\to 0} + \underbrace{\cot(h)}_{\to \infty}\Big) = \infty \quad \text{diverge}$$

Exercice. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = ?$ calculer l'intégrale généralisée si elle converge.

Critère de comparaison $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^\beta}{x^2+4x+9} = \ell \begin{smallmatrix}\neq 0 \\ \neq \infty\end{smallmatrix} \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+4x+9}\ 1 \neq 0$

Puisque $\beta = 2 > 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx$ converge.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x+9} + \int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(x+2)^2+5} + \int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

Changement de variable

$$u = \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{5}}\,dx$$

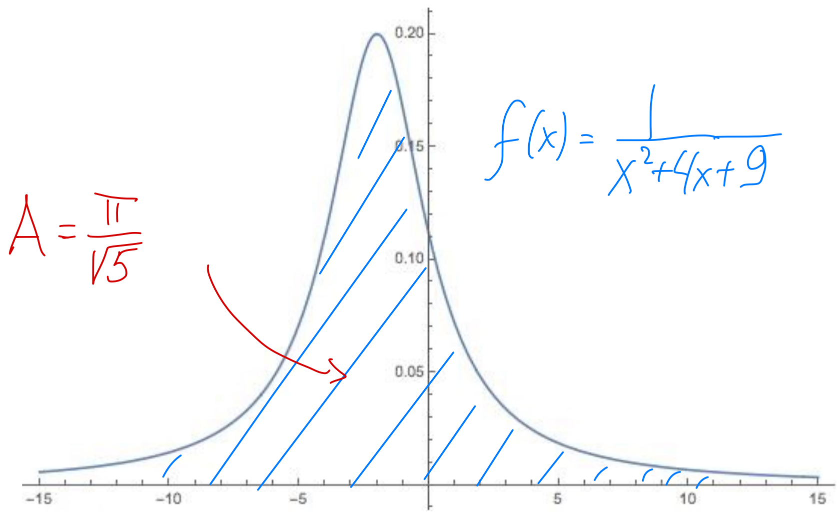
$$x \to \pm\infty \Leftrightarrow u \to \pm\infty$$

$$x = -2 \Leftrightarrow u = 0$$

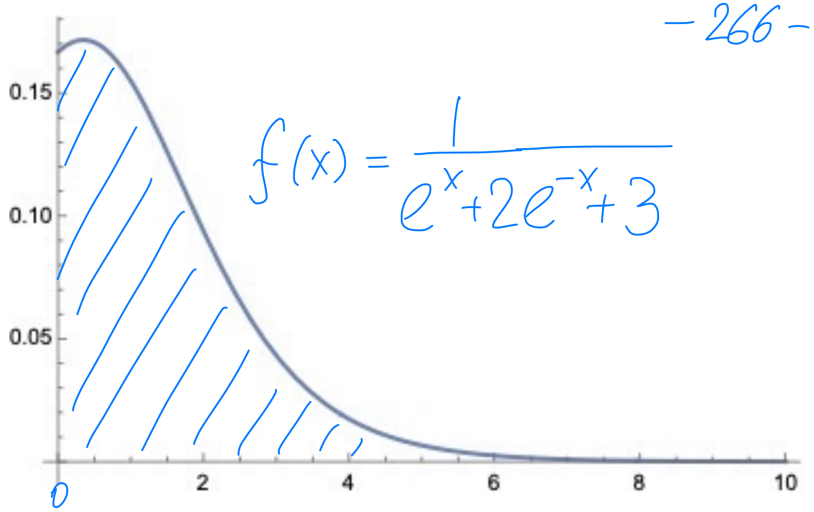
$$= \lim_{R\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_R^0 \frac{du}{u^2+1} + \lim_{S\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^S \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan u \Big|_R^0 + \lim_{S\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan u \Big|_0^S = \lim_{R\to-\infty}\Big(0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\arctan R}_{\to -\frac{\pi}{2}}\Big) + \lim_{S\to\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\arctan S}_{\to \frac{\pi}{2}} - 0\Big) =$$

$$= 0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$



Ex 1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+2e^{-x}+3} = \int_0^\infty \frac{\overbrace{e^x\,dx}^{du}}{e^{2x}+3e^x+2} =$



$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$x=0 \Rightarrow e^x = u = 1$, $x \to \infty \Rightarrow u \to \infty$

$$= \int_1^\infty \frac{du}{u^2+3u+2} = \int_1^\infty \frac{du}{(u+1)(u+2)} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right) du =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right) du = \lim_{R\to\infty} \left(\ln(u+1) - \ln(u+2)\right)\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \left(\ln\frac{u+1}{u+2}\right)\Big|_1^R =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \Big(\underbrace{\ln \underbrace{\left(\frac{R+1}{R+2}\right)}_{\to 1}}_{\to 0} - \ln\frac{2}{3}\Big) = -\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2} > 0$$