

Série 14

Cette série fait suite aux chapitres 7.4 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Revisitez l'exemple complet de SVD qu'on a calculé en cours, avec la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$: c'est un bon premier exercice de refaire tout ce raisonnement vous-mêmes, en essayant de ne pas retourner voir les notes de cours trop rapidement.

Exercice 2

Chercher une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

- i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.
- ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A , donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1} .

Exercice 4

Calculer les produits matriciels suivants :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

En déduire le théorème suivant : Si A est une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$, alors le produit AB peut être obtenu par la formule colonne-ligne suivante :

$$AB = \text{col}_1(A)\text{lig}_1(B) + \cdots + \text{col}_n(A)\text{lig}_n(B), \quad (1)$$

où $\text{col}_k(A)$ est la matrice $m \times 1$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A , et $\text{lig}_k(B)$ est la matrice $1 \times p$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice B .

Souvenez-vous de cette propriété du produit matriciel : on l'utilise(ra) en conjonction avec le théorème spectral et avec le théorème de la décomposition en valeurs singulières pour écrire une matrice A comme une somme de plusieurs matrices simples : $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i \vec{v}_i^\top$ (pour une matrice symétrique) et $A = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^\top$ (pour une matrice quelconque).

Exercice 5

Ceci est un autre exercice de base concernant les produits matriciels, pour nous assurer que la différence entre $\vec{u}^T \vec{v}$ et $\vec{u} \vec{v}^T$ est bien claire.

On peut considérer tout vecteur de \mathbb{R}^n comme une matrice de dimension $n \times 1$. Soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^3 :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On appelle $\vec{u}^T \vec{v}$ produit scalaire (ou produit intérieur) des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

- a) Ecrire \vec{u}^T et \vec{v}^T .
- b) Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u}^T \vec{v}$ et $\vec{v}^T \vec{u}$?
- c) Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Le produit $\vec{u} \vec{v}^T$ est appelé produit extérieur.

- d) Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u} \vec{v}^T$ et $\vec{v} \vec{u}^T$?
- e) Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?