THÉORÈME 3

Théorème spectral des matrices symétriques

Toute matrice symétrique A de type $n \times n$ vérifie les propriétés suivantes :

a. A admet n valeurs propres réelles, compte tenu des ordres de multiplicité.

b. Pour chaque valeur propre λ, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique.

c. Les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, ce qui signifie que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

d. A est diagonalisable en base orthonormée. ⟵ Ceci est vrai <u>si et seulement si</u> $A = A^T$.

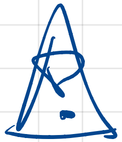
a) La preuve n'est pas difficile mais requiert quelques calculs avec des nombres complexes.

b) Ceci nous dit que A est diagonalisable : la preuve serait longue : on passe.

c) On l'a prouvé.

d) C'est-à-dire :

On peut choisir n vecteurs propres $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ orthonormés associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (avec répétitions) de sorte que :



$$\boxed{A = PDP^T, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = P^T.}$$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $P_A(\lambda) = (7-\lambda)^2(-2-\lambda)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 7, \quad \lambda_3 = -2$

$\underline{\lambda_3}$: $A - (-2)I_3 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathrm{Ker}(A-(-2)I_3) = \mathrm{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\vec{V_3}} \right\}$

$\vec{V_3} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\vec{u_3} = \frac{1}{\|\vec{V_3}\|}\vec{V_3} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 7}$: $A - 7I_3 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$; $\mathrm{Ker}(A - 7I_3) = \mathrm{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{V_1}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{V_2}} \right\}$

Observations : ① On a bien égalité des multiplicités algébriques et géométriques.

② On a bien orthogonalité pour des valeurs propres distinctes :

$$\vec{V_3} \cdot \vec{V_1} = (-2)\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 0 = 0$$

$$\vec{V_3} \cdot \vec{V_2} = (-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 = 0$$

③ <u>MAIS</u> : $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont <u>pas</u> orthogonaux :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

<u>Que faire ?</u>

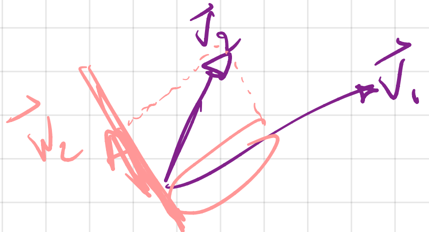
Voici notre situation : $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ forment une base pour l'espace propre $\operatorname{Ker}(A - 7I_3)$, et nous aimerions avoir une base orthonormée pour le même espace propre.

Donc, il faut qu'on applique <u>GRAM - SCHMIDT</u> à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$:

$$\overset{\vec{v}_1}{\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}}, \overset{\vec{v}_2}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}$$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$$

Calculer : $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2)\,\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4/5\\2/5\\1\end{bmatrix}$



Normaliser : $\vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{w}_2\|}\vec{w}_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{bmatrix}4/5\\2/5\\1\end{bmatrix}$.

$$\|\vec{w}_2\|^2 = (4/5)^2 + (2/5)^2 + 1 = \frac{16+4+25}{25} = \frac{45}{25} = \frac{9}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad A = PDP^T$$

avec $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & & \\ & 7 & \\ & & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & -2/3 \\ -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & -1/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & 2/3 \end{bmatrix}$$

et $P^{-1} = P^T$.

On peut écrire la factorisation $A = PDP^T$ sous une autre forme intéressante, qui décompose A en une somme.

PAUSE

Exemple (suite) :

$$A = P\,D\,P^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/\sqrt5 & 4/3\sqrt5 & -2/3 \\ -2/\sqrt5 & 2/3\sqrt5 & -1/3 \\ 0 & 5/3\sqrt5 & 2/3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \vec u & \qquad \vec v & \qquad \vec w \end{array} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \lambda_1 & \quad \lambda_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & & \\ & 7 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \\ \qquad\quad \lambda_3 \end{array}$$

$$A = PDP^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 v_1 & \lambda_3 w_1 \\ \lambda_1 u_2 & \lambda_2 v_2 & \lambda_3 w_2 \\ \lambda_1 u_3 & \lambda_2 v_3 & \lambda_3 w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1u_1 + \lambda_2 v_1v_1 + \lambda_3 w_1w_1 & \lambda_1 u_1u_2 + \lambda_2 v_1v_2 + \lambda_3 w_1w_2 & \lambda_1 u_1u_3 + \lambda_2 v_1v_3 + \lambda_3 w_1w_3 \\ \lambda_1 u_2u_1 + \lambda_2 v_2v_1 + \lambda_3 w_2w_1 & \lambda_1 u_2u_2 + \lambda_2 v_2v_2 + \lambda_3 w_2w_2 & \lambda_1 u_2u_3 + \lambda_2 v_2v_3 + \lambda_3 w_2w_3 \\ \lambda_1 u_3u_1 + \lambda_2 v_3v_1 + \lambda_3 w_3w_1 & \lambda_1 u_3u_2 + \lambda_2 v_3v_2 + \lambda_3 w_3w_2 & \lambda_1 u_3u_3 + \lambda_2 v_3v_3 + \lambda_3 w_3w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 \begin{bmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2v_3 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & v_3v_3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} w_1w_1 & w_1w_2 & w_1w_3 \\ w_2w_1 & w_2w_2 & w_2w_3 \\ w_3w_1 & w_3w_2 & w_3w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 \vec{u}\,\vec{u}^T + \lambda_2 \vec{v}\,\vec{v}^T + \lambda_3 \vec{w}\,\vec{w}^T$$

Vous pouvez vérifier cette formule avec l'exemple numérique.

Donc, une matrice symétrique A de taille 3×3 peut être décomposée en une somme de trois matrices en utilisant des valeurs et vecteurs propres :

$$\boxed{A = \lambda_1 \vec{u}\vec{u}^T + \lambda_2 \vec{v}\vec{v}^T + \lambda_3 \vec{w}\vec{w}^T,}$$

où $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ sont une base orthonormée de vecteurs propres de A.

- **Décomposition spectrale** :

Si A de taille $n \times n$ est symétrique, elle est diagonalisable en base orthonormée :

On peut trouver $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (valeurs propres réelles)

et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ (vecteurs propres orthonormés)

de sorte que $A = PDP^T$ avec $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n \end{bmatrix}$.

<u>Donc</u> : $A = PDP^T = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \lambda_1 \vec{u}_1 & \cdots & \lambda_n \vec{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix}$

$$= \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T .$$

Théorème : Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique, alors

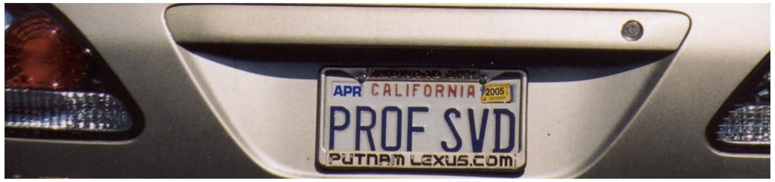
- A a n valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (multiplicités comptées)
- et elle admet une base de vecteurs propres orthonormés $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ tels que $A\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$.
- et :

$$\boxed{A = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T}$$

(Si A n'est pas symétrique ($A \neq A^T$), alors la formule ne tient pas. Pourquoi ?)

Singular Value Decomposition

§7.4 • Décomposition en valeurs singulières : S V D



Gene Golub's license plate, photographed by Professor P. M. Kroonenberg of Leiden University.

"Le couteau suisse de l'algèbre linéaire"

Où va-t-on ? Vers ce théorème d'exception :

Théorème : Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice.

Aucune condition !

Il existe : ① Une matrice orthogonale $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$,

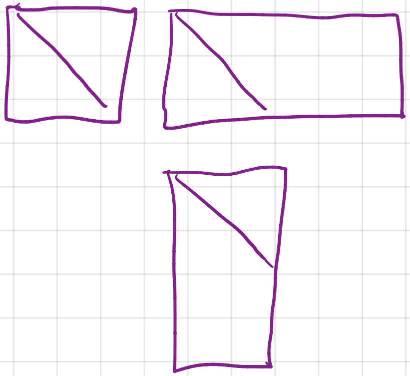
② Une matrice orthogonale $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, et

③ Une matrice "diagonale" $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$

avec des entrées diagonales positives ou nulles

telles que : $\boxed{A = U \Sigma V^T}$

Que signifie "diagonale" pour une matrice rectangulaire ?



"$a_{ij} \neq 0 \Rightarrow i = j$"

// Allons-y pas à pas.

Commençons avec un exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \overset{2\times 2}{\boxed{U}} \ \overset{2\times 3}{\boxed{\Sigma}} \ \overset{3\times 3}{\boxed{V^T}}$$

Cette matrice n'est pas carrée, donc certainement pas symétrique :
le théorème spectral ne nous dit rien à propos de A directement.

Par contre : $A^T A$ est carrée et symétrique !

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 7 \\ 14 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{bmatrix}$$

Donc, le théorème spectral nous dit que $A^T A$ a :

- trois valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et
- trois vecteurs propres associés $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ orthonormés.

On peut les calculer : $P_{A^TA}(\lambda) = \det(A^TA - \lambda I_3)$

$$= \det \begin{bmatrix} 80-\lambda & 100 & 40 \\ 100 & 170-\lambda & 140 \\ 40 & 140 & 200-\lambda \end{bmatrix} = \cdots = -\lambda(\lambda^2 - 450\lambda + 32400)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 360, \quad \lambda_2 = 90, \quad \lambda_3 = 0.$$

Avec un peu plus de travail, on trouve aussi trois vecteurs propres de A^TA :

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \vec{V}_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

(Vérifiez qu'on a bien $A^TA\vec{V}_i = \lambda_i \vec{V}_i$, et que $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ sont orthonormés.)

Ces trois vecteurs sont vecteurs propres pour A^TA.
Ont-ils aussi une signification particulière pour A ? Calculons :

$$A\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \|A\vec{V}_1\|^2 = 18^2 + 6^2 = \underset{\lambda_1}{360}$$

$$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \|A\vec{v}_2\|^2 = 3^2 + (-9)^2 = \underbrace{90}_{\lambda_2}$$

$$A\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|A\vec{v}_3\|^2 = \underbrace{0}_{\lambda_3}$$

- Comment se fait-il que $\|A\vec{v}_i\|^2 = \lambda_i$?

En particulier, les valeurs propres de A^TA sont toujours ≥ 0.

$$\|A\vec{v}_i\|^2 = (A\vec{v}_i)\cdot(A\vec{v}_i) = (A\vec{v}_i)^T(A\vec{v}_i) = \vec{v}_i^T \overbrace{A^TA\vec{v}_i}^{=\lambda_i\vec{v}_i}$$

$$= \lambda_i \vec{v}_i^T\vec{v}_i = \lambda_i(\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i) = \lambda_i\|\vec{v}_i\|^2 = \lambda_i.$$

- Observation : les vecteurs $A\vec{v}_1$, $A\vec{v}_2$ et $A\vec{v}_3$ sont orthogonaux (!) :

$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\qquad (A\vec{v}_1)\cdot(A\vec{v}_2) = \begin{bmatrix} 18 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = 0$

$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$ $\qquad (A\vec{v}_1)\cdot(A\vec{v}_3) = \begin{bmatrix} 18 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$A\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad (A\vec{v}_2)\cdot(A\vec{v}_3) = \begin{bmatrix} 3 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

Pourquoi ? Ce n'est pas un accident :

$i \neq j$: $(A\vec{v}_i)\cdot(A\vec{v}_j) = (A\vec{v}_i)^T(A\vec{v}_j)$

$$= \vec{v}_i^{\,T} \underbrace{A^T A \vec{v}_j}_{=\lambda_j \vec{v}_j} = \lambda_j \vec{v}_i^{\,T}\vec{v}_j = \lambda_j \overbrace{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j}^{=0} = 0$$

$\boxed{\text{FIN COURS 25}}$

- Donc, si on normalise les vecteurs $A\vec{v}_1$ et $A\vec{v}_2$ (les non-nuls), alors on obtiendra des vecteurs orthonormés $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Calculons :

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|A\vec{v}_1\|} A\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} A\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{360}}\begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\|A\vec{v}_2\|} A\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} A\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{90}}\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$