Anna Lachowska

Analyse I – Série 14

Exercice 1. (Intégration par parties)

Calculer les intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int x^2 \cos(x)\,dx$ *ii)* $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx \qquad (a \neq 0)$

iii) $\displaystyle\int \arctan(x)\,dx$ *iv)* $\displaystyle\int x\,2^{-x}\,dx$ *v)* $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sin^2(x)}$

vi) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)\,dx}{x^3}$ *vii)* $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ *viii)* $\displaystyle\int \sin(\ln(x))\,dx$

ix) $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\,dx$ *x)* $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{e^x}\,dx$

Exercice 2. (Intégrales récurrentes)

Déduire une formule de récurrence pour les intégrales suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

i) $\displaystyle\int x^n \sin(2x)\,dx$ *ii)* $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx$

Exercice 3. (Fonctions rationnelles)

Calculer les intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$ *ii)* $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ *iii)* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$

iv) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x}\,dx$ *v)* $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$ *vi)* $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx$ *vii)* $\displaystyle\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx$

Exercice 4. (Aire d'une surface plane)

(i) Considerer la courbe

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in [1,a], \qquad a > 1.$$

Trouver la valeur du paramètre a telle que l'aire du domaine entre la courbe et les droites $y = 0$, $x = 1$ et $x = a$, soit égale à 1.

(ii) Trouver l'aire de la région comprise entre les courbes

$$y = 2 - x^2 \quad \text{et} \quad y^3 = x^2.$$

Tourner la page svp.

Exercice 5. (Intégrales généralisées)

Calculer les intégrales généralisées suivantes, si elles convergent.

i) $I = \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{1}{x^p}\,dx\,,\quad p \in \mathbb{R}$ *ii)* $I = \displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx\,,\quad p \in \mathbb{R}$

iii) $I = \displaystyle\int_{0}^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *iv)* $I = \displaystyle\int_{0+}^{1/2} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

v) $I = \displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2}\,dx$ *vi)* $I = \displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

vii) $I = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin(x)\,e^{-x}\,dx$ *viii)* $I = \displaystyle\int_{0+}^{\infty} e^{-x}(1-x)\ln(x)\,dx$

Exercice 6. (Fonctions hyperboliques)

Soient $P = (x, y)$ et $Q = (x, -y)$ des points de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ $(x \geq 1)$ et t l'aire de la région comprise entre l'hyperbole et les rayons OP et OQ (aire grise sur la figure ci-contre). Montrer que $x = \cosh(t)$ et $y = \sinh(t)$.