Teorema de los ceros de Hilbert

23 de febrero de 2017

Definición 1. *Un cuerpo K es algebraicamente cerrado si todo polinomio de $K[x]$ tiene una raíz en K.*

Lema 1. *Si K y L son cuerpos con $K \subset L$ y L una $K-$ álgebra finitamente generada ($L = K[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$). Entonces L es una extensión algebraica de K, es decir, todo elemento de L es raíz de algún polinomio de $K[x]$.*

Teorema 1. ***(Versión débil del Nullstellensatz)*** *Si K es algebraicamente cerrado e I es un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Se tiene que $I \neq k[x_1, \ldots, x_n] \Leftrightarrow V(I) \neq \emptyset$.*

<u>*Demostración:*</u>

$\boxed{\Leftarrow}$ Trivial, si $I = K[x_1, \ldots, x_n]$ entonces $1 \in I$, lo que implica que $V(I) = \emptyset$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Como $I \neq K[x_1, \ldots, x_n]$, entonces se tiene que existe m ideal maximal que lo contiene. Consideremos la proyección canónica:

$$\pi : K[x_1, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n]/m$$

Como m es maximal, $K[x_1, \ldots, x_n]/m$ es un cuerpo, que denotamos por L. L es una $K-$álgebra finitamente generada por $(x_1 + m, \ldots, x_n + m)$. Aplicando el lema de Zariski se tiene que L es una extensión algebraica de, y como K es algebraicamente cerrado, $L = K$. Por tanto,

$$\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \to K$$

Vamos a encontrar un punto $P \in V(I)$. Concretamente, tomamos $P = (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) \in k^n$. Veamos que P anula a todos los polinomios de I.

Dado $f \in I \Rightarrow f \in m \Rightarrow \pi(f) = 0 \Rightarrow f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) = 0 \Rightarrow f(P) = 0$ $\square$

Nota 1. *Si $V_1, \ldots, V_k$ son variedades afines, entonces $V_1 \cup \cdots \cup V_k$ es una variedad afin es una variedad afin.*

- *Si $\{V_i\}_{i \in I}$ es un conjunto de variedad afines, entonces $\cap_{i \in I} V_i$ es una variedad afín.*
- *$\emptyset$ es una variedad afín ($V([k[x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$).*
- *k^n es una variedad afín ($V(\{0\}) = k^n$).*

Las variedades afines son los cerrados de una topología de k^n, que se llama topología de Zariski.

Definición 2. *Dado I, un ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$, se define el radical de I como:*

$$\sqrt{I} = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : f^n \in I \textit{ para algún } m \geq 1\}$$

Se dice que un ideal I es radical, si $I = \sqrt{I}$.

Nota 2. *$I \subset \sqrt{I}$, y $\sqrt{I}$ es un ideal.*

Teorema 2. ***(Nullstellensatz fuerte)*** *Si K es algebraicamente cerrado.*

1. *$\forall I$ ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$, $I(V(I)) = \sqrt{I}$.*
2. *Si A es un subconjunto de K^n, $V(I(A)) = \bar{A}$.*

Demostración

1. $\boxed{\supseteq}$ Si $f \in \sqrt{I}$, entonces $f^m \in I \Rightarrow f^m(P) = 0, \forall P \in V(I) \Rightarrow f(P) = 0, \forall P \in V(I) \Rightarrow f \in I(V(I))$.

   $\boxed{\subseteq}$ Sea $f \in I(V(I))$. Escribamos $I =< g_1, \ldots, g_r >$. Vamos a trabajar en el anillo $K[x_1, \ldots, x_n, y]$,y consideremos el ideal:

   $$I' =< g_1, \ldots, g_r, 1 - yf >$$

   Se oberva que $V(I') = \emptyset$, porque si un punto anula a $g_1, \ldots, g_r$, entonces está en $V(I)$, por lo tanto, también anula a f y no anula a $1 - yf$. Por el Nullstellensatz débil, $I' = k[x_1, \ldots, x_n, y] \Rightarrow 1 \in I' \Rightarrow \exists h_1, \ldots, h_r, h_{r+1} \in K[x_1, \ldots, x_n, y]$ tales que

   $$1 = h_1 g_1 + \cdots + h_r h_r + h_{r+1}(1 - yf)$$

   Sustituyendo y por $\frac{1}{f}$, y quitando denominadores, queda:

   $$f^m = f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r \in I$$

   Luego $f \in \sqrt{I}$. □

2. Como $V(I(A))$ es cerrado en la topología de Zariski, (es decir, es una variedad afín) sólo tenemos que demostrar que es el menor cerrado que contiene a A.

   Sea W un cerrado que contiene a A. $W = V(J)$ para un ideal J.

   $$\begin{gathered} V(J) \supset A \\ I(V(J)) \subset I(A) \\ J \subset \sqrt{J} \subset I(A) \\ W = V(J) \supset V(I(A)) \end{gathered} \tag{1}$$

   □

Nota 3. *El anillo cociente $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ es un cuerpo si y sólo si I es maximal.*

Nota 4. *Los puntos son los conjuntos algebraicos más pequeños, no vacíos. Por lo tanto, se corresponden con los ideales maximales.*

Demostración:

Sea $p = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$, veamos que le corresponde el ideal $< x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n >$, es decir,

$$I(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \underbrace{< x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n >}_{I}$$

El ideal I se anula en el punto p, luego se tiene la contención $\boxed{\supseteq}$. Si demostramos que I es maximal, habremos probado la igualdad. Para verlo, definimos el siguiente morfismo de anillos:

$$\begin{aligned} \varphi : K[x_1, \ldots, x_n] &\to K \\ f(x_1, \ldots, x_n) &\mapsto f(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned} \tag{2}$$

Se tiene que $Im(\varphi) = K$, pues si f es un polinomio constante, $f(\alpha) = \alpha$. Veamos que el núcleo es $I =< x_1 - a_1 >$.

$$ker(\varphi) =< x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n >$$

$\boxed{\supseteq}$ Trivial.

$\boxed{\subseteq}$ Sea $f \in ker(\varphi)$, entonces $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Podemos escribir cualquier polinomio $f(x_1, \ldots, x_n)$ de la siguiente manera:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h_1(x_1, \ldots, x_n)(x_1 - a_1) + h_2(x_2, \ldots, x_n)(x_2 - a_2) + \cdots + h_n(x_n)(x_n - a_n) + \underbrace{\alpha}_{\in K}$$

Entonces, $f(a_1, \ldots, a_n) = \alpha$, pero si $f \in ker(\varphi) \Rightarrow \alpha = 0$. Por lo tanto, $f \in I$, lo que implica que $\frac{K[x_1,\ldots,x_n]}{ker(\varphi)} \simeq Im(\varphi)$. Tomamos $\frac{K[x_1,\ldots,x_n]}{I} \simeq K$, y como K es cuerpo, I es ideal maximal. $\square$

Referencias

[1] Cox,D.,Little,J.,O'Shea,D. , *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Springer-Verlag,2007.