Ejercicios Cálculo en variedades

29 de abril de 2017

1. Ejercicio 2.2

Encontrar $\omega \in Alt^2\mathbb{R}^4$ **tal que** $\omega \wedge \omega \neq 0$.

Sea $\{e_1, \ldots, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$, se induce una base dual $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4\}$ base de $Alt^1(\mathbb{R}^4)$. Por lo tanto, $Alt^2(\mathbb{R}^4)$ tiene como base $\{\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j\}_{i,j,i<j}$. Sea $\omega \in Alt^2(\mathbb{R}^4), \omega \wedge \omega \in Alt^4(\mathbb{R}^4)$, espacio que tiene como base $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4$.

$$\begin{aligned} \omega &= \lambda_1 \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \cdots + \lambda_6 \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 \\ \omega &= \lambda_1 \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \cdots + \lambda_6 \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 \qquad (1) \\ \text{si } \lambda_1 = \lambda_6 = 1, \quad \omega \wedge \omega &= 2\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 \end{aligned}$$

2. Ejercicio 2.3

Probar que existen un isomorfismos

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{i} Alt^1(\mathbb{R}^3), \quad \mathbb{R}^3 \xrightarrow{j} Alt^2\mathbb{R}^3$$

Dados por

$$i(v)(w) = \langle v, w \rangle, \quad j(v)(w_1, w_2) = det(v, w_1, w_2),$$

donde $<,>$ **es el producto interior usual. Probar que para** $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$**, se tiene**

$$i(v_1) \wedge i(v_2) = j(v_1 \times v_2).$$

1.
   - i está bien definido, pues el producto escalar es lineal.
   - i es homomorfismo.
     Hay que ver que $i(\lambda v_1 + v_2) = \lambda i(v_1) + i(v_2)$.
     $i(\lambda v_1 + v_2) = \langle \lambda v_1 + v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \langle v_2 + w \rangle = \lambda i(v_1(w) + i(v_2)(w)$
   - Biyectividad de i. Análogo a probar que lleva bases en bases.
     $i(e_1)(w) =< e, w >= \lambda_1, i(e_j)(w) = \lambda_j, i(e_j) = \varepsilon_j$.
     $w = \sum_i \lambda_i e_i$.

2.
   - j está bien definida.

     $$v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow j(v) \in Alt^2(\mathbb{R}^3)$$

     $j(v)$ es bilineal:
     $det(v, \lambda w_1 + w_2, w_3) = j(v)(\lambda w_1 + w_2, w_3) = \lambda j(w_1, w_3) + j(w_2, w_3) = \lambda det(v, w_1, w_3) + det(v, w_2, w_3)$.
     $j(v)$ es alternado:
     $j(v)(w, w) = det(v, w, w) = 0$.
   - j es homomorfismo:
     $j(\lambda v_1 + v_2)(w_1, w_2) = det(\lambda v_1 + v_2, w_1, w_2) = \lambda det(v_1, w_1, w_2) + det(v_2, w_1, w_2) = (\lambda j(v_1) + j(v_2))(w_1, w_2)$.

- j isomorfismo:
  $\{\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2, \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3\}$ base de $Alt^2(\mathbb{R}^3)$.
  $j(e_1) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
  $(w_1, w_2) \mapsto det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{pmatrix} = w_{12}w_{23} - w_{13}w_{22} =^? \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3(w_1, w_2)$.
  $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3(w_1, w_2) = \sum_{\sigma \in S(1,1)} sign(\sigma)\varepsilon_2(w_{\sigma(1)})\varepsilon_3(w_{\sigma(2)}) = \varepsilon_2(w_1)\varepsilon_3(w_2) - \varepsilon(w_2)\varepsilon_3(w_1) = w_{12}w_{23} - w_{22}w_{13}$.
  $j(e_2) = \pm\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3(w_1, w_2)$
  $j(e_3) = \mp\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$.

3. $i(v_1) \wedge i(v_2) =^? j(v_1 \times v_2)$
   $i(v_1) \wedge i(v_2) = \sum_{\sigma \in S(2,1)} i(v_1) \wedge i(v_2)(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)})\varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \varepsilon_{\sigma(2)} = A_{03}\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + A_{02}\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 + A_{01}\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3$.
   $i(v_1) \wedge i(v_2)(e_1, e_2) = i(v_1)(e_2)i(v_1)(e_2) - i(v_1)(e_2)i(v_2)(e_1) = v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21} = A_{03}$. (De manera análoga el resto de sumandos)

3. Ejercicio 2.5

Probar la existencia de un producto interior en $Alt^p(V)$ tal que

$$\langle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p, \tau_1 \wedge \cdots \wedge \ tau_p \rangle,$$

para cualquier $\omega_i, \tau_j \in Alt^1(V)$, y

$$\langle \omega, \tau \rangle = \langle i^{-1}(\omega), i^{-1}(\tau) \rangle.$$

Sea $\{b_1, \ldots, b_n\}$ una base ortonormal de V, y sea $\beta_j = i(b_j)$. Probar que

$$\{\beta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \beta_{\sigma(p)} | \sigma \in S(p, n-p)\}$$

es una base ortonormal de $Alt^p(V)$.

- Sea $< w_i, \tau_j > = < i^{-1}(\omega_i), i^{-1}(\tau_j) >$ el producto escalar en $Alt^1(V)$ que se deduce del ejercicio 2.4. Se tiene que,

  $$< w_i, \tau_j > = < i^{-1}(\omega_i), i^{-1}(\tau_j) > = i(i^{-1}(\omega_i))(i^{-1}(\tau_j)) = \omega_i(i^{-1}(\tau_j))$$

  Por otra parte,

  $$< \tau_j, \omega_i > = < i^{-1}(\tau_j), i^{-1}(\omega_i) > = i(i^{-1}(\tau_j))(i^{-1}(\omega_i)) = \tau_j(i^{-1}(\omega_i))$$

  Finalmente, calculamos el determinante:

  $$\begin{aligned} det(< \omega_i, \tau_j >) &= det(\omega_i(i^{-1}(\tau_j)))_{i,j \in \{1,\ldots,p\}} = \\ &= det \begin{pmatrix} \omega_1(i^{-1}(\tau_1)) & \cdots & \omega_1(i^{-1}(\tau_p)) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_p(i^{-1}(\tau_1)) & \cdots & \omega_p(i^{-1}(\tau_p)) \end{pmatrix} \\ &= \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p(i^{-1}(\tau_1), \ldots, i^{-1}(\tau_p)) \\ &= (\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p)(i^{-1}(\omega_1, \ldots, i^{-1}(\omega_p)). \end{aligned} \tag{2}$$

  $$\langle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p, \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p \rangle = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p(i^{-1}(\tau_1), \ldots, i^{-1}(\tau_p)).$$

  Como todos los términos que lo componen son bilineales, $< \cdot, \cdot >$ es bilineal.

- Es conmutativo,

$$\begin{aligned}
\langle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p, \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p \rangle = & \\
&= \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p (i^{-1}(\tau_1), \ldots, i^{-1}(\tau_p)) \\
&= \langle \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \rangle \\
&= (\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p)(i^{-1}(\omega_1, \ldots, i^{-1}(\omega_p)).
\end{aligned} \tag{3}$$

- Hay que comprobar que cumple las propiedades del producto interior. Sea $\omega, \tau \in Alt^p(V)$, tales que

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} \omega(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(p)}) \varepsilon_\sigma \\
\tau &= \sum_{\bar\sigma \in S(p,n-p)} \omega(e_{\bar\sigma(1)}, \ldots, e_{\bar\sigma(p)}) \varepsilon_{\bar\sigma} \\
< \omega, \tau > &= \sum_\sigma \sum_{\bar\sigma} \omega_\sigma \tau_{\bar\sigma} < \varepsilon_\sigma, \varepsilon_{\bar\sigma} > . \\
< \omega, \omega > &= \sum_\sigma (\omega_\sigma)^2 \geq 0 \\
< \varepsilon_\sigma, \varepsilon_{\bar\sigma} > &= \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)} (e_{\bar\sigma(1)}, \ldots, e_{\bar\sigma(p)}) = I_\sigma(\bar\sigma) \\
< \omega, \omega > &= 0 \Leftrightarrow \omega_\sigma = 0 \forall \sigma \in S(p, n-p) \Rightarrow \omega = 0 \in Alt^p(V).
\end{aligned} \tag{4}$$

- Por lo tanto:
  1. $Alt^p(V)$ tiene un producto escalar.
  2. $$\begin{aligned}
\langle \omega, i(\xi_1) \wedge \cdots \wedge i(\xi_p) \rangle = & \\
&= \langle \sum_\sigma \omega_\sigma \varepsilon_\sigma, i(\xi_1 \wedge \cdots \wedge i(\xi_p) \rangle \\
&= \sum_\sigma \omega_\sigma \langle \varepsilon_\sigma, i(\xi_1) \wedge \cdots \wedge i(\xi_p) \rangle \\
&= \sum_\sigma \omega_\sigma \varepsilon_\sigma (\xi_1, \ldots, \xi_p) \\
&= \omega(\xi_1, \ldots, \xi_p).
\end{aligned} \tag{5}$$
  3. $\langle \omega, \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)} \rangle = \langle \omega, i(e_{\sigma(1)}) \wedge \cdots \wedge i(e_{\sigma(p)} \rangle = \omega(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(p)})$.
  4. $\omega = \sum_\sigma \omega(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(p)}) \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)} = \sum_\sigma \langle \omega, \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)} \rangle \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)}$.
- Bases ortonormales:
  Sea $\{b_1, \ldots, b_n\}$ una base ortonormal de V, es decir,

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

  Sea $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ la base dual de la anterior en $Alt^1(V)$, entonces tenemos $\{\beta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \beta_{\sigma(p)}\}_{\sigma \in S(p,n-p)}$ base de $Alt^p(V)$.
  Finalmente,

$$\langle \beta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \beta_{\sigma(p)}, \beta_{\bar\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \beta_{\bar\sigma(p)} \rangle = \beta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \beta_{\sigma(p)} (\beta_{\bar\sigma(1)}, \ldots, \beta_{\bar\sigma(p)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \neq \bar\sigma \\ 1 & \text{si } \sigma = \bar\sigma \end{cases}$$

4. Ejercicio 2.6

Supongamos $\omega \in Alt^p(V)$. Sean $v_1, \ldots, v_p$ vectores en V y sea $A = (a_{ij})$ una matriz $p \times p$. Probar que para $\omega_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} b_j$ $(1 \leq i \leq p)$ se tiene

$$\omega(\omega_1, \ldots, \omega_p) = detA \cdot \omega(v_1, \ldots, v_p)$$

Sea $\omega \in Alt^p(V)$, $v_1, \ldots, v_p \in V$ y $A = (a_{ij}) \in M_{p \times p}$. Podemos expresar $\omega_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} v_j, i = 1, \ldots, p$.
Hay que probar que $\omega(\omega_1, \ldots, \omega_p) = det(A) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_p)$.
Si $p = 2$, tenemos $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}}$. Por lo tanto, $\omega_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2$ y $\omega_2 = a_{21}v_2 + a_{22}v_2$.

$$\begin{aligned} \omega(\omega_1, \omega_2) &= \omega(a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_2 + a_{22}v_2) = \\ &= a_{11}a_{22}\omega(v_1, v_2) + a_{12}a_{21}\omega(v_2, v_1) = \\ &= a_{11}a_{22}\omega(v_1, v_2) - a_{12}a_{21}\omega(v_1, v_2) = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\omega(v_1, v_2) = det(A) \cdot \omega(v_1, v_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Y para un p cualquiera:

$$\begin{aligned} \omega(\omega_1, \ldots, \omega_p) &= \omega(\sum_{j=1}^p a_{ij}v_j, \ldots, \sum_{j=1}^p a_{pj}v_j) = \\ &= \sum_{\tau \in S(p)} \prod_{k=1}^p a_{k\tau(k)} \omega(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(p)}) = \\ &= \underbrace{\sum_{\tau \in S(p)} sgn(\tau) \prod_{k=1}^p a_{k\tau(k)}}_{det(A)} \cdot \omega(v_1, \ldots, v_p). \end{aligned} \tag{7}$$

5. Ejercicio 2.7

Probar para $f : V \to W$ que

$$Alt^{p+q}(f)(\omega_1 \wedge \omega_2) = Alt^p(f)(\omega_1) \wedge Alt^q(f)(\omega_2),$$

donde $\omega_1 \in Alt^p(W), \omega_2 \in Alt^q(W)$.

$$\begin{aligned} &Alt^{p+q}(f)(\omega_1 \wedge \omega_2) = \\ &\quad = \omega_1 \wedge \omega_2(f(\xi_1), \ldots, f(\xi_{p+q})) \\ &\quad = \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} sgn(\sigma)\omega_1(f(\xi_{\sigma(1)}), \ldots, f(\xi_{\sigma(p)}))\omega_2(f(\xi_{\sigma(p+1)}), \ldots, f(\xi_{\sigma(p+q)})) \\ &\quad = \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} sgn(\sigma) Alt^p(f)\omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) Alt^q(f)\omega_2(\xi_{\sigma(p+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}) \\ &\quad = Alt^p(f)(\omega_1) \wedge Alt^q(f)(\omega_2)(\xi_1, \ldots, xi_{p+q}). \end{aligned} \tag{8}$$