

Teorema de los ceros de Hilbert

19 de febrero de 2017

Definición 1. Un cuerpo K es algebraicamente cerrado si todo polinomio de $K[x]$ tiene una raíz en K .

Lema 1. Si K y L son cuerpos con $K \subset L$ y L una K -álgebra finitamente generada ($L = K[\alpha_1, \dots, \alpha_r]$). Entonces L es una extensión algebraica de K , es decir, todo elemento de L es raíz de algún polinomio de $K[x]$.

Teorema 1. (Versión débil del Nullstellensatz) Si K es algebraicamente cerrado e I es un ideal de $K[x_1, \dots, x_n]$. Se tiene que $I \neq k[x_1, \dots, x_n] \Leftrightarrow V(I) \neq \emptyset$.

Demostración:

\Leftarrow Trivial, si $I = K[x_1, \dots, x_n]$ entonces $1 \in I$, lo que implica que $V(I) = \emptyset$.

\Rightarrow Como $I \neq K[x_1, \dots, x_n]$, entonces se tiene que existe m ideal maximal que lo contiene. Consideremos la proyección canónica:

$$\pi : K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]/m$$

Como m es maximal, $K[x_1, \dots, x_n]/m$ es un cuerpo, que denotamos por L . L es una K -álgebra finitamente generada por $(x_1 + m, \dots, x_n + m)$. Aplicando el lema de Zariski se tiene que L es una extensión algebraica de K , y como K es algebraicamente cerrado, $L = K$. Por tanto,

$$\pi : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K$$

Vamos a encontrar un punto $P \in V(I)$. Concretamente, tomamos $P = (\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) \in k^n$. Veamos que P anula a todos los polinomios de I .

$$\text{Dado } f \in I \Rightarrow f \in m \Rightarrow \pi(f) = 0 \Rightarrow f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = 0 \Rightarrow f(P) = 0 \quad \square$$

Nota 1. Si V_1, \dots, V_k son variedades afines, entonces $V_1 \cup \dots \cup V_k$ es una variedad afín es una variedad afín.

- Si $\{V_i\}_{i \in I}$ es un conjunto de variedades afines, entonces $\bigcap_{i \in I} V_i$ es una variedad afín.
- \emptyset es una variedad afín ($V([k[x_1, \dots, x_n]] = \emptyset)$).
- k^n es una variedad afín ($V(\{0\}) = k^n$).

Las variedades afines son los cerrados de una topología de k^n , que se llama topología de Zariski.

Definición 2. Dado I , un ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$, se define el radical de I como:

$$\sqrt{I} = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f^n \in I \text{ para algún } n \geq 1\}$$

Se dice que un ideal I es radical, si $I = \sqrt{I}$.

Nota 2. $I \subset \sqrt{I}$, y \sqrt{I} es un ideal.

Teorema 2. (Nullstellensatz fuerte) Si K es algebraicamente cerrado.

1. $\forall I$ ideal de $K[x_1, \dots, x_n]$, $I(V(I)) = \sqrt{I}$.
2. Si A es un subconjunto de K^n , $V(I(A)) = \bar{A}$.

Demostración

1. $\boxed{\supseteq}$ Si $f \in \sqrt{I}$, entonces $f^m \in I \Rightarrow f^m(P) = 0, \forall P \in V(I) \Rightarrow f(P) = 0, \forall P \in V(I) \Rightarrow f \in I(V(I))$.

$\boxed{\subseteq}$ Sea $f \in I(V(I))$. Escribamos $I = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$. Vamos a trabajar en el anillo $K[x_1, \dots, x_n, y]$, y consideremos el ideal:

$$I' = \langle g_1, \dots, g_r, 1 - yf \rangle$$

Se observa que $V(I') = \emptyset$, porque si un punto anula a g_1, \dots, g_r , entonces está en $V(I)$, por lo tanto, también anula a f y no anula a $1 - yf$. Por el Nullstellensatz débil, $I' = K[x_1, \dots, x_n, y] \Rightarrow 1 \in I' \Rightarrow \exists h_1, \dots, h_r, h_{r+1} \in K[x_1, \dots, x_n, y]$ tales que

$$1 = h_1 g_1 + \dots + h_r g_r + h_{r+1}(1 - yf)$$

Sustituyendo y por $\frac{1}{f}$, y quitando denominadores, queda:

$$f^m = f_1 g_1 + \dots + f_r g_r \in I$$

Luego $f \in \sqrt{I}$.