Cálculo en variedades

Eduardo Paluzo

Universidad de Sevilla
Versión de 4 de abril de 2017

Índice general

Introducción

Se pretende hacer un compendio de la teoría dada en la asignatura de **Cálculo en variedades**.

Horarios de tutorías en programa de la asignatura.

Parte I

Cálculo en variedades

Capítulo 1

Nociones básicas de funciones sobre espacios euclídeos

- El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ espacio topológico sii $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
- Dotada de distancia euclídea, compatible, producto escalar, etc.
- Topología euclídea: abiertos, cerrados (por sucesiones convergentes), compactos.
- Noción de continuidad. $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$, U abierto euclídeo. (Manda sucesiones convergentes en sucesiones convergentes)
- La imagen continua de un compacto es compacto, $f(K)$ es compacto si K es compacto. Análogo por un conexo o arco-conexo.

1.1. Diferenciabilidad

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}$ si $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Es decir, existe una transformación lineal $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(h) - \lambda(h)}{h} = 0$$

Y se puede generalizar a espacios euclídeos cualesquiera:

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ si $\exists \lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ homomorfismo de espacios vectoriales, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{h}$$

$$\lambda = Df(a), \lambda \text{ es único}$$

1.1.1. Regla de la cadena

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$, entonces

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

1. f es constante, entonces $Df(a) = 0$.
2. f es lineal, $Df = f$.
3. $f = \pi_i \circ f_i \Rightarrow \exists Df(a) \Leftrightarrow \forall i Df_i(a)$.

Corolario 1.1.1. *1. $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$*

2. $D(fg) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$

1.1.2. Derivadas parciales

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$.

$$\exists D_i f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a^1, \dots a^i + h, \dots, a^n) - f(a^1, \dots, a^n)}{h}$$

es la i-ésima derivada parcial para todo $a \in \mathbb{R}^n$.

Si f es continua y $\exists$ todas las derivadas parciales de todos los órdenes, entonces diremos que f es C^∞.

Teorema 1.1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$, entonces existe $\forall i \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $D_j f^i(a)$ y $f'(a) = (D_j f^i(a)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ homomorfismo de espacios vectoriales.*

Teorema 1.1.2. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\exists (D_j f^i(a))$, entonces f es diferenciable en a si $D_j f^i$ son continuas en a, $\forall i, j$. (Se dice que f es continuamente diferenciable).*

1.1.3. Regla de la cadena extendida

Sea $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciables en $a \in \mathbb{R}^n$. Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x) = f(g_1(x), \dots, g_m(x))$. $\mathbb{R}^n \xrightarrow{G} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Entonces, $D_i F(a) = \sum_{j=1}^m D_j f(g_1(a), \dots, g_m(a)) \cdot D_i g_j(a)$.

Esto quiere decir que

$$D(f \circ G)(a) = Df(G(a)) \circ DG(a) = (D_1 f(G(a)), \dots, D_m f(G(a)))(DG'(a) \dots DG^m(a))^t$$

Capítulo 2

Álgebra alternada

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación

$$f : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$$

se llama $k-$ lineal (o multilineal) si f es lineal en cada factor.

Definición 2.0.1. Una aplicación $k-$lineal $\omega : V^k \to \mathbb{R}$ se dice <u>alternada</u> si $\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k) = 0$ si $\xi_i = \xi_j$ para algún par $i \neq j$. El espacio vectorial de las alternadas, $k-$ lineales se denota por $Alt^k(V)$.

Nota 2.0.1. *$Alt^k(V) = 0$ si $k > dimV$.*

<u>Demostración:</u>

Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base de V, y sea $\omega \in Alt^k(V)$.

$$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \omega(\sum_i \lambda_{i,1} e_i, \ldots, \sum_i \lambda_{i,k} e_i) = \sum_j \lambda_J \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$$

donde $\lambda_J = \lambda_{j_1,1} \cdots \lambda_{j_k,k}$. Como $k > n$, se tiene que hay al menos una repetición en alguno de los elementos $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$ y, por lo tanto, como ω es una forma, $\omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = 0$. □

Nota 2.0.2.

- *$Alt^1(V)$ son las funciones alternadas y multilineales que van de V a $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $Alt^1(V) = V^*$.*
- *$Alt^0(V) = \mathbb{R}$.*

El grupo de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, k\}$ se denota $S(k)$. Toda permutación puede ser escrita como composición de transposiciones. La transposición que intercambia i y j se denota por (i, j).

El signo de una permutación:

$$sign : S(k) \to \{\pm 1\}$$

es un homomorfismo, $sign(\sigma \circ \tau) = sign(\sigma) \circ sign(\tau)$.

Lema 2.0.1. *Si $\omega \in Alt^k(V)$ y $\sigma \in S(k)$, entonces*

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(k)}) = sign(\sigma)\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Demostración:

Basta probarlo cuando $\sigma = (i, j)$, pues toda permutación se puede descomponer en transposiciones. Sea

$$\omega_{i,j}(\xi, \xi') = \omega(\xi_1, \ldots, \xi, \ldots, \xi', \ldots, \xi_k),$$

con ξy ξ' en las posiciones i y j, respectivamente. Por definición, $\omega_{i,j} \in Alt^2(V)$. Por lo tanto, $0 = \omega_{i,j}(\xi_i + \xi_j, \xi_i + \xi_j) = \omega_{i,j}(\xi_i, \xi_j) + \omega_{i,j}(\xi_j, \xi_i)$. Y finalmente, $\omega_{i,j}(\xi_i, \xi_j) = -\omega_{i,j}(\xi_j, \xi_i)$. □

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{R}^k$ y $\xi_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{ik})$. La función $\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k) = det((\xi_{ij}))$ es alternada.

Definición 2.0.2. Una $(p, q)-$baraja σ es una permutación de $\{1, \ldots, p + q\}$ que satisface:

$$\sigma(1) < \ldots < \sigma(p) \text{ y } \sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q).$$

El conjunto de estas permutaciones se denota por $S(p, q)$. Como una $(p, q)-$baraja está determinada por el conjunto $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(p)\}$, el cardinal de $S(p, q)$ es $\binom{p+q}{p}$

Definición 2.0.3. (Producto exterior) Para $\omega_1 \in Alt^p(V)$ y $\omega_2 \in Alt^q(V)$, se define

$$\wedge : Alt^p(V) \times Alt^q(V) \to Alt^{p+q}$$

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S(p,q)} sign(\sigma)\omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(\xi_{\sigma(p+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}).$$

Se tiene que $\omega_1 \wedge \omega_2$ es una aplicación $(p + q)-$lineal.

Lema 2.0.2. *Si $\omega_1 \in Alt^p(V)$ y $\omega_2 \in Alt^q(V)$ entonces $\omega_1 \wedge \omega_2 \in Alt^{p+q}(V)$.*

Demostración:

Primero se prueba que $(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = 0$ cuando $\xi_1 = \xi_2$. Sean

1. $S_{12} = \{\sigma \in S(p, q) | \sigma(1) = 1, \sigma(p+1) = 2\}$
2. $S_{21} = \{\sigma \in S(p, q) | \sigma(1) = 2, \sigma(p+1) = 1\}$
3. $S_0 = S(p, q) - (S_{12} \cup S_{21})$.

Si $\sigma \in S_0$ entonces $\omega_1(\xi_{\sigma(1)},\ldots,\xi_{\sigma(p)})$ o $\omega_2(\xi_{\sigma(p+1)},\ldots,\xi_{\sigma(p+q)})$ es cero, ya que $\xi_{\sigma(1)} = \xi_{\sigma(2)}$ o $\xi_{\sigma(p+1)} = \xi_{\sigma(p+2)}$ al ser $(p,q)-$barajas. La composición por la izquierda de $\tau = (1,2)$ es una biyección $S_{12} \to S_{21}$. Se tiene

$$\begin{aligned}&(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1,\ldots,\xi_{p+q}) = \\ &\sum_{\sigma\in S_{12}} sign(\sigma)\omega_1(\xi_{\sigma(1)},\ldots,\xi_{\sigma(p)})\omega_2(\xi_{\sigma(p+1)},\ldots,\xi_{\sigma(p+q)})- \\ &\sum_{\sigma\in S_{12}} sign(\tau\sigma)\omega_1(\xi_{\tau\sigma(1)},\ldots,\xi_{\tau\sigma(p)})\omega_2(\xi_{\tau\sigma(p+1)},\ldots,\xi_{\tau\sigma(p+q)})\end{aligned} \tag{2.1}$$

Se tiene que $\tau\sigma(i) = \sigma(i)$ si $i \neq 1, p+1$. Pero $\xi_1 = \xi_2$, así que se cancelan los términos de los sumanos. El caso en el que $\xi_i = \xi_{i+1}$ es similar. Por lo tanto, $\omega_1 \wedge \omega_2$ es alternada, de acuerdo con el lema siguiente. □

Lema 2.0.3. *Una aplicación $k-$ lineal ω es alternada si $\omega(\xi_1,\ldots,\xi_k) = 0$ para toda $k-$tupla con $\xi_i = \xi_{i+1}$ para algún $1 \leq i \leq k-1$.*

Demostración:
$S(k)$ está generado por transposiciones del tipo $(i, j+1)$, y por el lema 2.0.1,

$$\omega(\xi_1,\ldots,\xi_i,\xi_{i+1},\ldots,\xi_k) = -\omega(\xi_1,\ldots,\xi_{i+1},\xi_i,\ldots,\xi_k).$$

Por lo tanto, como $\forall\sigma \in S(k), \omega(\xi_1,\ldots,\xi_k) = sign(\sigma)\omega(\xi_{\sigma(1)},\ldots,\xi_{\sigma(k)}) \Rightarrow$ si $\exists(\xi_1,\ldots,\xi_k)$ tal que $\xi_i = \xi_j$ con $i \neq j$, existe $\sigma \in S(k)$ tal que $\sigma(i) = i, \sigma(j) = i+1 \Rightarrow \omega(\xi_1,\ldots,\xi_k) = sign(\sigma)\cdot\omega(\xi_{\sigma(1)},\ldots,\xi_{\sigma(k)}) = 0$. □

De la definición de producto exterior se deduce:

1. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 + \omega_3$.
2. $(\lambda\omega_1) \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge (\lambda\omega_2) = \lambda(\omega_1 \wedge \omega_2), \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) + (\omega_1 \wedge \omega_3)$.

Lema 2.0.4. *Si $\omega_1 \in Alt^p(V)$ y $\omega_2 \in Alt^q(V)$ entonces $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\omega_2 \wedge \omega_1$.*

Demostración:
Sea $\tau \in S(p+q)$ tal que

$$\begin{aligned}\tau(1) = p+1, \tau(2) = p+2, \ldots, \tau(q) = p+q \\ \tau(q+1) = 1, \tau(q+2) = 2, \ldots, \tau(p+q) = p.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Tenemos que $sign(\tau) = (-1)^{pq}$. Componer con τ define una biyección

$$\begin{aligned}S(p,q) &\xrightarrow{\simeq} S(p,q) \\ \sigma &\mapsto \sigma \circ \tau\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \omega_2(\xi_{\sigma\tau(1)}, \ldots, \xi_{\sigma\tau(q)}) &= \omega_2(\xi_{\sigma(p+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}) \\ \omega_1(\xi_{\sigma\tau(q+1)}, \ldots, \xi_{\sigma\tau(p+q)}) &= \omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\omega_2 \wedge \omega_1(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(p,q)} sign(\sigma)\omega_2(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(q)})\omega_1(\xi_{\sigma(q+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(p,q)} sign(\sigma\tau)\omega_2(\xi_{\sigma\tau(1)}, \ldots, \xi_{\sigma\tau(q)})\omega_1(\xi_{\sigma\tau(q+1)}, \ldots, \xi_{\sigma\tau(p+q)}) \\ &= (-1)^{pq} \sum_{\sigma \in S(p,q)} sign(\sigma)\omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(q)})\omega_2(\xi_{\sigma(q+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}) \\ &= (-1)^{pq}\omega_1 \wedge \omega_2(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

□

Lema 2.0.5. *Si* $\omega_1 \in Alt^p(V), \omega_2 \in Alt^q(V)$ *y* $\omega_3 \in Alt^r(V)$ *entonces*

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3.$$

Demostración:
Sea $S(p,q,r) \subseteq S(p+q+r)$ el conjunto de las permutaciones tal que

$$\begin{aligned} \sigma(1) &< \ldots < \sigma(p), \\ \sigma(p+1) &< \ldots < \sigma(p+q), \\ \sigma(p+q+1) &< \ldots < \sigma(p+q+r). \end{aligned} \tag{2.6}$$

También consideramos los subconjuntos $S(\bar{p},q,r)$ y $S(p,q,\bar{r})$ de $S(p,q,r)$, tales que dejan fijo los elementos con la barra encima.

Existen biyecciones

$$\begin{aligned} S(p,q+r) \times S(\bar{p},q,r) &\xrightarrow{\simeq} S(p,q,r); (\sigma,\tau) \to \sigma \circ \tau \\ S(p+q,r) \times S(p,q,\bar{r}) &\xrightarrow{\simeq} S(p,q,r); (\sigma,\tau) \to \sigma \circ \tau. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Con esta notación, se tiene

$$
\begin{aligned}
&[\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)](\xi_1, \dots, \xi_{p+q+r}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(p,q+r)} sign(\sigma) \omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)})(\omega_2 \wedge \omega_3)(\xi_{\sigma(p+q)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q+r)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(p,q+r)} sign(\sigma) \sum_{\tau \in S(\bar{p},q,r)} sign(\tau)[\omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) \omega_2(\xi_{\sigma\tau(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma\tau(p+q)}) \\
&\omega_3(\xi_{\sigma\tau(p+q+1)}, \dots, \xi_{\sigma\tau(p+q+r)})] \\
&= \sum_{u \in S(p,q,r)} [sign(u) \omega_1(\xi_{u(1)}, \dots, \xi_{u(p)}) \omega_2(\xi_{u(p+1)}, \dots, \xi_{u(p+q)}) \omega_3(\xi_{u(p+q+1)}, \dots, \xi_{u(p+q+r)})]
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

De manera análoga se calcularía $[(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3](\xi_1, \dots, \xi_{p+q+r})$. $\square$

Definición 2.0.4. Una $\mathbb{R}-$álgebra, A, es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial con una aplicación bilineal

$$\mu : A \times A \to A$$

que es asociativa, $\mu(a, \mu(b,c)) = \mu(\mu(a,b),c), \forall a,b,c \in A$. Si además exists $1 \in A$ tal que $\mu(1,a) = \mu(a,1) = a, \forall a \in A$, diremos que A es un álgebra unitaria.

- Un $\mathbb{R}-$álgebra $A_* = \{A_i\} = A^*$ es una colección de $\mathbb{R}-$espacios vectoriales y aplicaciones bilineales $\mu : A_k \times A_l \to A_{k+l}$ que son asociativas. Decimos que es un álgebra graduada.
- El álgebra se dirá conectiva si existe un elemento unidad $1 \in A_0$ y si $\varepsilon : \mathbb{R} \to A_0$, dado por $\varepsilon(r) = r \cdot 1$, es un isomorfismo.
- El álgebra se dirá conmutativa o anti-conmutativa, si $\mu(a,b) = (-1)^{kl}\mu(b,a)$ para $a \in A_k$ y $b \in A_l$.

Teorema 2.0.1. *$Alt^*(V)$ es un $\mathbb{R}-$álgebra graduada, conectiva y conmutativa.*

Nota 2.0.3. *$(\{Alt^k(V)\}_{k\geq 0}, \wedge)$ se llama álgebra exterior asociada a V.*

Lema 2.0.6. *Para 1−formas, $\omega_1, \ldots, \omega_p \in Alt^1(V)$,*
$(\omega_1 \wedge, \ldots, \wedge\omega_p)(\xi_1, \ldots, \xi_p) = det$

$$(\omega_1 \wedge, \ldots, \wedge\omega_p)(\xi_1, \ldots, \xi_p) = det \begin{bmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_1(\xi_2) & \cdots & \omega_1(\xi_p) \\ \omega_2(\xi_1) & \omega_2(\xi_2) & \cdots & \omega_2(\xi_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_p(\xi_1) & \omega_p(\xi_2) & \cdots & \omega_p(\xi_p) \end{bmatrix}$$

Demostración:
Se demuestra por inducción en p. Si $p = 2$, se tiene

$$\omega_1 \wedge \omega_2(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1)\omega(\xi_2) - \omega_1(\xi_2)\omega_2(\xi_1)$$

Suponemos cierto para $p - 1$, y lo vemos para p.

$$\begin{aligned} &\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p(\xi_1, \ldots, \xi_p) \\ &= \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(\xi_1, \ldots, \xi_p) \\ &= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \omega_1(\xi_j) \cdot (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_p) \\ &= det(\omega_i(\xi_j)). \end{aligned} \tag{2.9}$$

□

Nota 2.0.4. *Si $\omega_1, \ldots, \omega_p \in Alt^1(V) = V^*$ son linealmente independientes, entonces $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0$. Sea $\{\omega_1, \ldots, \omega_p, a_1, \ldots, a_r\}$ base de V^*, entonces $\omega_i = (v_i)^*, a_i = (b_i)^*$, con $v_i, b_i \in V$, y se tiene que*

$$(v_i)^*(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{2.10}$$

Por lo tanto, $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p(v_1, \ldots, v_p) = det(I_{p \times p}) = 1 \neq 0$.

Nota 2.0.5. *Si $\{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$ fuera linealmente independiente, entonces $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$.*
Supongamos que $\omega_p = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \omega_i$, entonces $\omega_1 \wedge \ldots \omega_{p-1} \wedge \omega_p = (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1}) \wedge \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \omega_i = \sum_i \lambda_i \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \wedge \omega_i = 0$.

Lema 2.0.7. *Para 1−formas, $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0$ si y sólo si son linealmente independientes.*

Teorema 2.0.2. *Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base de V y la base dual $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ de $Alt^1(V)$. Entonces,*

$$\{\varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)}\}_{\sigma \in S(p, n-p)}$$

es una base de $Alt^p(V)$. En particular,

$$dim(Alt^P(V)) = \binom{dim(V)}{p}$$

Demostración: Se puede probar que $\omega \in Alt^n(V)$, por lo que

$$\omega = \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} \omega(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)}) \cdot \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)}$$

Debemos probar que $\{\varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)}\}$ es una base, es decir, que son linealmente independientes y sistema generador.

- Linealmente independientes: Si no lo fueran, $\exists \lambda_\sigma$ tal que $\sum \lambda_\sigma \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)} = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} (\sum_{\bar\sigma} \lambda_{\bar\sigma} \varepsilon_{\bar\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\bar\sigma(p)})(e_{\bar\sigma(1)} \wedge \dots e_{\bar\sigma(p)} &= 0 \\ \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)}(e_{\sigma(1)} \wedge \dots e_{\sigma(p)} &= \lambda_\sigma \cdot 1 \\ \Rightarrow \lambda_\sigma &= 0, \forall \sigma. \end{aligned} \tag{2.11}$$

- Sistema generador: Como $\varepsilon_i(e_j) = 0$ cuando $i \neq j$, y $\varepsilon_i(e_i) = 1$, del lema 2.0.6 se tiene:

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \{i_1, \dots, i_p\} \neq \{j_1, \dots, j_p\} \\ sign(\sigma) & \text{si } \{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, j_p\} \end{cases} \tag{2.12}$$

Donde σ es la permutación $\sigma(i_k) = j_k$. Si unimos 3.1 al lema 2.0.1:

Sea $V \ni \xi_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} e_j$,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} \omega(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)}) \cdot \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)}(\xi_1, \dots, xi_p) = \\ \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} \omega(e_{\sigma(1)}), \dots, e_{\sigma(p)}) \sum_{\tau \in S(p)} \prod_{k=1}^n \lambda_{k_{1\tau(\sigma(k))}} \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)}(e_{\tau\sigma(1)}, \dots, e_{\tau\sigma(p)}) \underbrace{=}_{*} \\ \omega(\sum_j \lambda_{1,j} e_j, \dots, \sum_j \lambda_{p,j} e_j) = \\ \omega(\xi_1, \dots, \xi_p). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\omega = \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} \omega(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)}) \cdot \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)}$$

□

2.0.1. Ejercicios:

Ejercicio 2.2

Encontrar $\omega \in Alt^2\mathbb{R}^4$ tal que $\omega \wedge \omega \neq 0$.

Sea $\{e_1, \ldots, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$, se induce una base dual $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4\}$ base de $Alt^1(\mathbb{R}^4)$. Por lo tanto, $Alt^2(\mathbb{R}^4)$ tiene como base $\{\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j\}_{i,j,i<j}$. Sea $\omega \in Alt^2(\mathbb{R}^4), \omega \wedge \omega \in Alt^4(\mathbb{R}^4)$, espacio que tiene como base $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4$.

$$\begin{aligned} \omega &= \lambda_1 \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \cdots + \lambda_6 \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 \\ \omega &= \lambda_1 \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \cdots + \lambda_6 \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 \\ \text{si } \lambda_1 = \lambda_6 = 1, \quad \omega \wedge \omega &= 2\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ejercicio 2.3

Probar que existen un isomorfismos

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{i} Alt^1(\mathbb{R}^3), \quad \mathbb{R}^3 \xrightarrow{j} Alt^2\mathbb{R}^3$$

Dados por

$$i(v)(w) = \langle v, w \rangle, \quad j(v)(w_1, w_2) = det(v, w_1, w_2),$$

donde $<,>$ es el producto interior usual. Probar que para $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, se tiene

$$i(v_1) \wedge i(v_2) = j(v_1 \times v_2).$$

1.
   - i está bien definido, pues el producto escalar es lineal.
   - i es homomorfismo.
     Hay que ver que $i(\lambda v_1 + v_2) = \lambda i(v_1) + i(v_2)$.
     $i(\lambda v_1 + v_2) = \langle \lambda v_1 + v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \langle v_2 + w \rangle = \lambda i(v_1(w) + i(v_2)(w)$
   - Biyectividad de i. Análogo a probar que lleva bases en bases.
     $i(e_1)(w) =< e, w >= \lambda_1, i(e_j)(w) = \lambda_j, i(e_j) = \varepsilon_j$.
     $w = \sum_i \lambda_i e_i$.

2.
   - j está bien definida.

     $$v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow j(v) \in Alt^2(\mathbb{R}^3)$$

     $j(v)$ es bilineal:
     $det(v, \lambda w_1 + w_2, w_3) = j(v)(\lambda w_1 + w_2, w_3) = \lambda j(w_1, w_3) + j(w_2, w_3) = \lambda det(v, w_1, w_3) + det(v, w_2, w_3)$.
     $j(v)$ es alternado:
     $j(v)(w, w) = det(v, w, w) = 0$.

- j es homomorfismo:
  $j(\lambda v_1 + v_2)(w_1, w_2) = det(\lambda v_1 + v_2, w_1, w_2) = \lambda det(v_1, w_1, w_2) + det(v_2, w_1, w_2) = (\lambda j(v_1) + j(v_2))(w_1, w_2)$.
- j isomorfismo:
  $\{\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2, \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3, \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3\}$ base de $Alt^2(\mathbb{R}^3)$.
  $j(e_1) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
  $(w_1, w_2) \mapsto det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{pmatrix} = w_{12}w_{23} - w_{13}w_{22} =^{?} \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3(w_1, w_2)$.
  $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3(w_1, w_2) = \sum_{\sigma \in S(1,1)} sign(\sigma)\varepsilon_2(w_{\sigma(1)})\varepsilon_3(w_{\sigma(2)}) = \varepsilon_2(w_1)\varepsilon_3(w_2) - \varepsilon(w_2)\varepsilon_3(w_1) = w_{12}w_{23} - w_{22}w_{13}$.
  $j(e_2) = \pm\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3(w_1, w_2)$
  $j(e_3) = \mp\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$.

3. $i(v_1) \wedge i(v_2) =^{?} j(v_1 \times v_2)$

   $i(v_1) \wedge i(v_2) = \sum_{\sigma \in S(2,1)} i(v_1) \wedge i(v_2)(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)})\varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \varepsilon_{\sigma(2)} = A_{03}\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + A_{02}\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 + A_{01}\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3$.

   $i(v_1) \wedge i(v_2)(e_1, e_2) = i(v_1)(e_2)i(v_1)(e_2) - i(v_1)(e_2)i(v_2)(e_1) = v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21} = A_{03}$. (De manera análoga el resto de sumandos)

Ejercicio 2.5

- Sea $< w_i, \tau_j >=< i^{-1}(\omega_i), i^{-1}(\tau_j) >$ el producto escalar en $Alt^1(V)$ que se deduce del ejercicio 2.4. Se tiene que,

  $$< w_i, \tau_j >=< i^{-1}(\omega_i), i^{-1}(\tau_j) >= i(i^{-1}(\omega_i))(i^{-1}(\tau_j)) = \omega_i(i^{-1}(\tau_j))$$

  Por otra parte,

  $$< \tau_j, \omega_i >=< i^{-1}(\tau_j), i^{-1}(\omega_i) >= i(i^{-1}(\tau_j))(i^{-1}(\omega_i)) = \tau_j(i^{-1}(\omega_i))$$

  Finalmente, calculamos el determinante:

  $$\begin{aligned} det(< \omega_i, \tau_j >) &= det(\omega_i(i^{-1}(\tau_j)))_{i,j \in \{1,\ldots,p\}} = \\ &= det \begin{pmatrix} \omega_1(i^{-1}(\tau_1)) & \cdots & \omega_1(i^{-1}(\tau_p)) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_p(i^{-1}(\tau_1)) & \cdots & \omega_p(i^{-1}(\tau_p)) \end{pmatrix} \\ &= \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p(i^{-1}(\tau_1), \ldots, i^{-1}(\tau_p)) \\ &= (\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p)(i^{-1}(\omega_1, \ldots, i^{-1}(\omega_p)). \end{aligned} \tag{2.15}$$

  $$\langle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p, \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p \rangle = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p(i^{-1}(\tau_1), \ldots, i^{-1}(\tau_p)).$$

Como todos los términos que lo componen son bilineales, $< \cdot, \cdot >$ es bilineal.

- Es conmutativo,

$$
\begin{aligned}
\langle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p, \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p \rangle = & \\
&= \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p (i^{-1}(\tau_1), \ldots, i^{-1}(\tau_p)) \\
&= \langle \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \rangle \\
&= (\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p)(i^{-1}(\omega_1, \ldots, i^{-1}(\omega_p)).
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

- Hay que comprobar que cumple las propiedades del producto interior. Sea $\omega, \tau \in Alt^p(V)$, tales que

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} \omega(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(p)}) \varepsilon_\sigma \\
\tau &= \sum_{\bar{\sigma} \in S(p,n-p)} \omega(e_{\bar{\sigma}(1)}, \ldots, e_{\bar{\sigma}(p)}) \varepsilon_{\bar{\sigma}} \\
< \omega, \tau > &= \sum_\sigma \sum_{\bar{\sigma}} \omega_\sigma \tau_{\bar{\sigma}} < \varepsilon_\sigma, \varepsilon_{\bar{\sigma}} > . \\
< \omega, \omega > &= \sum_\sigma (\omega_\sigma)^2 \geq 0 \\
< \varepsilon_\sigma, \varepsilon_{\bar{\sigma}} > &= \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)} (e_{\bar{\sigma}(1)}, \ldots, e_{\bar{\sigma}(p)}) = I_\sigma(\bar{\sigma}) \\
< \omega, \omega > &= 0 \Leftrightarrow \omega_\sigma = 0 \forall \sigma \in S(p, n-p) \Rightarrow \omega = 0 \in Alt^p(V).
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

- Por lo tanto:
    1. $Alt^p(V)$ tiene un producto escalar.
    2. $$
\begin{aligned}
\langle \omega, i(\xi_1) \wedge \cdots \wedge i(\xi_p) \rangle = & \\
&= \langle \sum_\sigma \omega_\sigma \varepsilon_\sigma, i(\xi_1 \wedge \cdots \wedge i(\xi_p) \rangle \\
&= \sum_\sigma \omega_\sigma \langle \varepsilon_\sigma, i(\xi_1) \wedge \cdots \wedge i(\xi_p) \rangle \\
&= \sum_\sigma \omega_\sigma \varepsilon_\sigma (\xi_1, \ldots, \xi_p) \\
&= \omega(\xi_1, \ldots, \xi_p).
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$
    3. $\langle \omega, \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)} \rangle = \langle \omega, i(e_{\sigma(1)}) \wedge \cdots \wedge i(e_{\sigma(p)} \rangle = \omega(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(p)})$.
    4. $\omega = \sum_\sigma \omega(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(p)}) \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)} = \sum_\sigma \langle \omega, \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)} \rangle \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)}$.
- Bases ortonormales:

Sea $\{b_1, \ldots, b_n\}$ una base ortonormal de V, es decir,

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Sea $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ la base dual de la anterior en $Alt^1(V)$, entonces tenemos $\{\beta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \beta_{\sigma(p)}\}_{\sigma \in S(p,n-p)}$ base de $Alt^p(V)$.
Finalmente,

$$\langle \beta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \beta_{\sigma(p)}, \beta_{\bar{\sigma}(1)} \wedge \cdots \wedge \beta_{\bar{\sigma}(p)} \rangle = \beta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \beta_{\sigma(p)}(\beta_{\bar{\sigma}(1)}, \ldots, \beta_{\bar{\sigma}(p)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \neq \bar{\sigma} \\ 1 & \text{si } \sigma = \bar{\sigma} \end{cases}$$

Ejercicio 2.7

$$\begin{aligned}
Alt^{p+q}(f)(\omega_1 \wedge \omega_2) = & \\
&= \omega_1 \wedge \omega_2(f(\xi_1), \ldots, f(\xi_{p+q})) \\
&= \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} sgn(\sigma)\omega_1(f(\xi_{\sigma(1)}), \ldots, f(\xi_{\sigma(p)}))\omega_2(f(\xi_{\sigma(p+1)}), \ldots, f(\xi_{\sigma(p+q)})) \\
&= \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} sgn(\sigma) Alt^p(f)\omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) Alt^q(f)\omega_2(\xi_{\sigma(p+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}) \\
&= Alt^p(f)(\omega_1) \wedge Alt^q(f)(\omega_2)(\xi_1, \ldots, xi_{p+q}).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Ejercicio 2.12

Sea $f : V \to V$ un $k-$homomorfismo entre espacios vectoriales de dimensión n. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de V, y $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ la base inducida de $Alt^1(V)$.

Como $\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n$ es base de $Alt^n(f)$, entonces $Alt^n(f)(\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n) = d \cdot \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n$.

$$\begin{aligned}
Alt^n(f)\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n(f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)) = & \\
= det \begin{pmatrix} \varepsilon_1(f(\xi_1)) & \cdots & \varepsilon_1(f(\xi_n)) \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_n(f(\xi_1)) & & \varepsilon_n(f(\xi_n)) \end{pmatrix} &
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Dicho determinante es el producto $det(A(f)) \cdot det((\xi_i)_{i \in I}) = det(A(f)) \cdot (\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n)(\xi_1, \ldots, \xi_n)$

Ejercicio 2.9

Sea V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión n. Consideramos el producto $<,>$ inducido en los problemas 2.4 y 2.5. Supongamos que existe $vol \in Alt^p(V)$, volumen de V tal que $< vol, vol >= 1 \Leftrightarrow vol(e_1,\dots,e_n) = 1$.

Sea el operador estrella de Hodge.

$$\begin{aligned} * : Alt^p(V) &\to Alt^{n-p}(V) \\ \omega &\mapsto *(\omega) \end{aligned} \tag{2.21}$$

de tal forma que

$$< *\omega, \tau > vol = \omega \wedge \tau$$

- $*$ está bien definida, es lineal y cumple la expresión anterior.
  $*\omega \in Alt^{n-p}(V) \Rightarrow *\omega = \sum_{\sigma\in S(n-p,p)} *\omega(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n-p)}) \cdot \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(n-p)}$
  $*\omega(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n-p)}) =< *\omega, \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(n-p)} >$
  $< *\omega, \tau > vol = \omega \wedge \tau \Rightarrow < *\omega, \tau > vol(e_1,\dots,e_n) = \omega \wedge \tau(e_1,\dots,e_n)$.
- Comprobemos que $*(\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_p) = \varepsilon_{p+1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n$.
  PENDIENTE

Ejercicio 2.6

Sea $\omega \in Alt^p(V)$, $v_1,\dots,v_p \in V$ y $A = (a_{ij}) \in M_{p\times p}$. Podemos expresar $\omega_i = \sum_{j=1}^p a_{ij}v_j, i = 1,\dots,p$.

Hay que probar que $\omega(\omega_1,\dots,\omega_p) = det(A)\cdot\omega(v_1,\dots,v_p)$.

Si $p = 2$, tenemos $A = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,2\}}$. Por lo tanto, $\omega_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2$ y $\omega_2 = a_{21}v_2 + a_{22}v_2$.

$$\begin{aligned} \omega(\omega_1,\omega_2) &= \omega(a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_2 + a_{22}v_2) = \\ &= a_{11}a_{22}\omega(v_1,v_2) + a_{12}a_{21}\omega(v_2,v_1) = \\ &= a_{11}a_{22}\omega(v_1,v_2) - a_{12}a_{21}\omega(v_1,v_2) = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\omega(v_1,v_2) = det(A)\cdot\omega(v_1,v_2). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Y para un p cualquiera:

$$\begin{aligned} \omega(\omega_1,\ldots,\omega_p) &= \omega(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}v_j,\ldots,\sum_{j=1}^{p} a_{pj}v_j) = \\ &= \sum_{\tau\in S(p)} \prod_{k=1}^{p} a_{k\tau(k)}\omega(v_{\tau(1)},\ldots,v_{\tau(p)}) = \\ &= \underbrace{\sum_{\tau\in S(p)} sgn(\tau) \prod_{k=1}^{p} a_{k\tau(k)}}_{det(A)} \cdot\omega(v_1,\ldots,v_p). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Capítulo 3

Cohomología de Rham

Sea U un abierto en $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base estandar y $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ la base dual de $Alt^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 3.0.1. Una $p-$forma diferencial en U es una aplicación diferenciable $\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$. El espacio vectorial de dichas aplicaciones se denota $\Omega^p(U)$.

Si $p = 0$ entonces $Alt^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ y $\Omega^0(U)$ es el espacio vectorial de las funciones diferenciables en U, $\Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$.

La <u>derivada usual</u> de una aplicación diferenciable $\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$ se denota $D\omega$ y su valor en x es $D_x\omega$. Es una aplicación lineal

$$\underbrace{D_x\omega}_{(\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_i}(x))_{\sigma \in S(p,n-p), 1 \leq i \leq n}} : \mathbb{R}^n \to Alt^p(\mathbb{R}^n),$$

con

$$(D_x\omega)(e_i) = \frac{d}{dt}\omega(x + te_i)_{i=0} = \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x).$$

En $Alt^p(\mathbb{R}^n)$ se tiene la base $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)}$. Como cada $\omega \in \Omega^p(U)$ se puede escribir como combinación lineal de la base de la forma $\omega(x) = \sum \omega_l(x) e_\sigma$, con $\omega_l(x)$ función real diferenciable en $x \in U$. Se tiene que la diferencial $D_x\omega$ es la aplicación lineal:

$$D_x\omega(e_j) = \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j}(x) e_\sigma, j = 1, \ldots, n.$$

La función $x \mapsto D_x\omega$ es una aplicación diferenciable de U al espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $Alt^p(\mathbb{R}^n)(\simeq \mathbb{R}^{\binom{n}{p}})$.

Definición 3.0.2. La diferencial exterior $d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$ es el operador lineal

$$d_x\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{l-1} D_x\omega(\xi_l)(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_{p+1}) \tag{3.1}$$

Del lema 2.0.3 se tiene que $d_x\omega \in Alt^{p+1}(\mathbb{R}^n)$. Veámoslo:
Si $\xi_i = \xi_{i+1}$, entonces:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{p+1} (-1)^{l-1} D_x\omega(\xi_l)(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_l, \ldots, \xi_{p+1}) \\ &= (-1)^{i-1} D_x\omega(\xi_i)(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_{p+1}) + (-1)^i D_x\omega(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_{i+1}, \ldots, \xi_{p+1}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Porque $(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_{p+1}) = (\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_{i+1}, \ldots, \xi_{p+1})$.

Ejemplo: Sea $x_i : U \to \mathbb{R}$ la proyección i-ésima. Entonces $dx_i \in \Omega^1(U)$ es la aplicación constante, $dx_i : x \to \varepsilon_i$, ya que por 3.1 se tiene que $d_x x_i \in Alt^1(\mathbb{R}^n)$ y sea $\xi \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d_x x_i(\xi) &= \sum_{l=1} (-1)^{l-1} D_x x_i(\xi) \\ &= D_x x_i(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(x)\xi_j \\ &= \xi_i = \varepsilon_i(\xi) \\ &\Rightarrow d_x x_i = \varepsilon_i, \forall x \in U. \end{aligned} \tag{3.3}$$

En general,sea $f \in \Omega^0(U)$, se tiene que

$$d_x f(\zeta^1, \ldots, \zeta^n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\zeta^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\zeta^n$$

En otras palabras, $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\varepsilon_i = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Nota 3.0.1. $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(p)}$.

Lema 3.0.1. *Si $\omega(x) = f(x)\varepsilon_\sigma$ entonces $d_x\omega = d_x f \wedge \varepsilon_\sigma$.*

Demostración:

Sea $\xi \in \mathbb{R}^n$, entonces $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$.

$$\begin{aligned} D_x\omega(\xi) &= \\ &= \sum_i \xi_i D_x\omega(e_i) \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi_i\varepsilon_\sigma \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varepsilon_i(\xi)\varepsilon_\sigma \\ &= dxf(\xi)\varepsilon_\sigma \end{aligned} \tag{3.4}$$

Donde la primera igualdad se tiene gracias a:

$$\begin{aligned} D_x\omega(e_i) &= \\ &= \sum_{\bar{\sigma}\in S(p,n-p)} \frac{\partial\omega_{\bar{\sigma}}}{\partial x_i}(x)\varepsilon_{\bar{\sigma}(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\bar{\sigma}(p)} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varepsilon_\sigma \end{aligned} \tag{3.5}$$

Entonces por 3.4 se tiene,

$$\begin{aligned} d_x\omega(\xi_1, \ldots, xi_{p+1}) &= \\ &= \sum(-1)^{j-1}D_x\omega(\xi_j)(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_{p+1}) \\ &= \sum_j(-1)^{j-1}d_xf(\xi_j)\varepsilon_\sigma(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_{j-1}, \ldots, \xi_{p+1}) \\ &= d_xf \wedge \varepsilon_\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Y finalmente, tenemos que $d\omega = df \wedge \varepsilon_\sigma$. □

Nota 3.0.2. *Para $\varepsilon_\sigma \in Alt^p(\mathbb{R}^n)$ se tiene que:*

$$\varepsilon_k \wedge \varepsilon_\sigma = \begin{cases} 0 & si\ k \in \sigma \\ (-1)^r\varepsilon_J & si\ k \notin \sigma \end{cases}$$

donde, $J = (i_1, \ldots, i_r, k, \ldots, i_p)$.

Lema 3.0.2. *Para $p \geq 0$ la composición $\omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U) \to \Omega^{p+2}(U)$ es idénticamente cero.*

Demostración:
Sea $\omega = f\varepsilon_\sigma$. Entonces

$$d\omega = df \wedge \varepsilon_\sigma \underbrace{=}_{\text{Bilinealidad}} \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_\sigma + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\varepsilon_n \wedge \varepsilon_\sigma.$$

Ahora, como $\varepsilon_i \wedge \varepsilon_i = 0$ y $\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j = -\varepsilon_j \wedge \varepsilon_i$, se tiene que

$$\begin{aligned} d^2\omega &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\varepsilon_i \wedge (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_\sigma) \\ &= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \wedge \varepsilon_\sigma = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

□

Nota 3.0.3. *$\Omega^{p-1} \xrightarrow{d} \Omega^p(U) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(U)$ es el morfismo nulo, y cumple que $Im\{d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U)\} \subseteq ker\{d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)\}$. Y en general no se da la igualdad.*

El producto exterior en $Alt^*(\mathbb{R}^n)$ induce un **producto exterior** en $\Omega^*(U)$ definiéndolo de la siguiente forma,

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x).$$

El producto exterior de una $p-$forma diferencial y una $q-$forma diferencial es una $(p+q)-$forma diferencial, así que se obtiene la aplicación diferencial,

$$\wedge : \Omega^p(U) \times \Omega^q(U) \to \Omega^{p+q}(U).$$

Veamos una serie de propiedades:

1. $(\omega_1 \wedge \omega_2)_x(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = (\omega_1)_x \wedge (\omega_2)_x(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})$.
2. $\omega_1 \wedge \omega_2$ es bilineal.
3. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$.
4. Si $f \in C^\infty(U;\mathbb{R}) = \Omega^0(U)$ y $\omega \in \Omega^p(U)$, entonces $f \wedge \omega = f \cdot \omega$.
5. $f(\omega_1) \wedge \omega_2 = f(\omega_1 \wedge \omega_2) = \omega_1 \wedge (f\omega_2)$.

Esta última expresa la bilinealidad del producto en $Alt^*(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.0.3. *Para* $\omega_1 \in \Omega^p(U)$ *y* $\omega_2 \in \Omega^q(U)$,

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Demostración:
Basta probarlo cuando $\omega_1 = f\varepsilon_\sigma$ y $\omega_2 = g\varepsilon_\tau$. Entonces, $\omega_1 \wedge \omega_2 = fg\varepsilon_\sigma \wedge \varepsilon_\tau$, y

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(fg \cdot \varepsilon_\sigma \wedge \varepsilon_\tau) = \\ &= d(fg)(\varepsilon_\sigma \wedge \varepsilon_\tau) \\ &= d(fg) \wedge \varepsilon_\sigma \wedge \varepsilon_\tau \\ &= ((df)g + fdg) \wedge \varepsilon_\sigma \wedge \varepsilon_\tau \\ &= dfg \wedge \varepsilon_\sigma \wedge \varepsilon_\tau + fdg \wedge \varepsilon_\sigma \wedge \varepsilon_\tau \\ &= df \wedge \varepsilon_\sigma \wedge g\varepsilon_\tau + (-1)^p f\varepsilon_\sigma \wedge dg \wedge \varepsilon_\tau \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

□

Con lo que llevamos, hemos introducido $\Omega^*(U)$ que es un álgebra anti-conmutativa con una diferencial,

$$d : \Omega^*(U) \to \Omega^{*+1}(U), \quad d \circ d = 0$$

y d es una derivada que satisface el lema anterior. $(\Omega^*(U), d)$ es un álgebra diferencial graduada conmutativa, llamada el **complejo de deRham** de U.

Teorema 3.0.1. *Existe un único operador lineal* $d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U), p = 0, 1, \ldots,$ *tal que*

1. $f \in \Omega^0(U), df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\varepsilon_n$.
2. $d \circ d = 0$.
3. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$ *si* $\omega_1 \in \Omega^p(U)$.

Demostración:
Por como hemos definido d, cumple todas las propiedades. Supongamos d' un operador lineal que satisface las tres propiedades, y veamos que $d' = d$.

Por la propiedad (1) tenemos que $d'f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\varepsilon_n = df \Rightarrow d = d'$ en $\Omega^0(U)$. En particular, podemos aplicar que $d'x_i = dx_i$ para la i-ésima proyección $x_i : U \to \mathbb{R}$. Hemos probado con anterioridad que $d'x_i = \varepsilon_i$, la función constante. Como por la propiedad (2), tenemos que $d' \circ d' = 0$, tenemos que $0 = d'(d'(\varepsilon_i) = d'(\varepsilon_i)$. Entonces, aplicando la propiedad (3), $d'\varepsilon_\sigma = 0$. Sea $\omega = f\varepsilon_\sigma = f \wedge \varepsilon_\sigma, f \in C^\infty(U; \mathbb{R})$. Empleando de nuevo (3),

$$d'\omega = d'f \wedge \varepsilon_\sigma + f \wedge d'\varepsilon_\sigma = d'f \wedge \varepsilon_\sigma = df \wedge \varepsilon_\sigma = d\omega.$$

Y cada $p-$ forma es combinación lineal de ω así definida, por lo tanto, $d = d'$ en $\Omega^p(U)$.

□

Nota 3.0.4. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^3$, $d : \Omega^1(U) \to \Omega^2(U)$ viene dado por*

$$d(f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + f_3\varepsilon_3) = df_1 \wedge \varepsilon_1 + df_2 \wedge \varepsilon_2 + df_3 \wedge \varepsilon_3 = \\ (\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2})\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + (\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3})\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 + (\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1})\varepsilon_3 \wedge \varepsilon_1. \tag{3.9}$$

Un buen ejercicio es demostrar la igualdad. Así como hacerlo para tres funciones.

Definición 3.0.3. El $p-$ésimo grupo cohomológico de deRham es el espacio vectorial cociente

$$H^p(U) = \frac{ker(d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)}{Im(d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U))}$$

En particular, $H^p(U) = 0$ para $p < 0$, y $H^0(U)$ es el kernel de $d : C^\infty(U;\mathbb{R}) \to \Omega^1(U)$, que es el espacio vectorial de aplicaciones diferenciables en $\mathbb{R}$ cuyas derivadas se anulan. Es decir, el espacio vectorial de las aplicaciones constantes.

$$H^0(U) = ker\{d : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)\} = f : U \to \mathbb{R} : df = 0\}$$

donde $df = 0 \Leftrightarrow \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \forall i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow H^0(U) = \{f : U \to \mathbb{R} : f \text{ es la constante}\}$.

Lema 3.0.4. *$H^0(U)$ es el espacio vectorial de aplicaciones $U \to \mathbb{R}$ que son constantes en cada componente conexa de U.*

Se tiene que $dim_{\mathbb{R}} H^0(U)$ es el número de componentes conexas de U.

Definición 3.0.4. Los elementos en $\Omega^p(U)$ con $d\omega = 0$ se llaman $p-$formas cerradas. Y aquellos elementos de la imagen $d(\Omega^{p-1}(U) \subset \Omega^p(U)$ son $p-$formas exactas.

Nota 3.0.5. *El $p-$ésimo grupo homológico mide si cada $p-$forma cerrada es exacta. Esta condición se satisface precisamente cuando $H^p(U) = 0$.*

Definición 3.0.5. Una $p-$forma cerrada $\omega \in \Omega^p(U)$ induce una clase de homología, denotada

$$[\omega] = \omega + d\Omega^{p-1}(U) \in H^p(U),$$

y $[\omega] = [\omega']$ si y sólo si $\omega - \omega'$ es exacta.

Nota 3.0.6. *En general, el espacio vectorial de las $p-$formas cerradas y el espacio vectorial de las $p-$formas exactas son de dimensión infinita. Sin embargo, $H^p(U)$ es, usualmente, de dimensión finita.*

Definición 3.0.6. Se define el producto bilineal, asociativo y anti-conmutativo como

$$H^p(U) \times H^q(U) \to H^{p+q}(U)$$

mediante $[\omega_1][\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2]$.

El producto está bien definido, pues:

$$\begin{aligned}(\omega_1 + d\eta_1) \wedge (\omega_2 + d\eta_2) &= \omega_1 \wedge \omega_2 + d\eta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\eta_2 + d\eta_1 \wedge d\eta_2 \\ &= \omega_1 \wedge \omega_2 + d(\eta_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge \eta_2 + \eta_1 \wedge d\eta_2).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Queremos que $U \to H^p(U)$ sea un funtor contravariante. Por lo tanto, sea $\phi : U_1 \to U_2$ una aplicación diferenciable entre abiertos $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^m$, se define la aplicación lineal:

$$H^p(\phi) : H^p(U_2) \to H^p(U_1),$$

tal que:

$$\begin{aligned}&H^p(\phi_2 \circ \phi_1) = H^p(\phi_1) \circ H^p(\phi_2) \\ &H^p(id) = id.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Definición 3.0.7. Sea $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $\phi : U_1 \to U_2$ una aplicación diferenciable. El morfismo inducido $\Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1)$ se define

$$\Omega^p(\phi)(\omega)_x = Alt^p(D_x\phi) \circ \omega(\phi(x)), \quad \Omega^0(\phi)(\omega)_x = \omega_{\phi(x)} = \omega \circ \phi.$$

$\Omega^P(\phi)$ es equivalente a escribir ϕ^*.

Se cumple que:

$$\begin{aligned}&\Omega^p(\phi_2 \circ \phi_1) = \Omega^p(\phi_1) \circ \Omega^p(\phi_2) \\ &\Omega^p(id) = id.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Es fácil de ver por,

$$\phi^*(\omega)_x(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \omega_{\phi(x)}(D_x\phi(\xi_1), \ldots, D_x\phi(\xi_p)),$$

y usando la regla de la cadena $D_x(\psi \circ \phi) = D_{\phi(x)}(\psi) \circ D_x(\phi)$, para $\phi : U_1 \to U_2$ y $\psi : U_2 \to U_3$.

Nota 3.0.7. $\Omega^p(i)(\omega = i^*(\omega)_x(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \omega_{i(x)}(D_x i(\xi_1), \ldots, D_x i(\xi_p)) = \omega_x(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \omega \circ i$*, pues* $D_x i = id$.

Nota 3.0.8. $\varepsilon_i = dy_i$

Ejemplo: Para la $1-$forma $\varepsilon_i \in \Omega^1(U_2)$ se tiene que

$$\phi^*(\varepsilon_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \varepsilon_k = d\phi_i$$

con ϕ_i la i-ésima función coordenada. Veamoslo:

$$\begin{aligned}
\phi^*(dy_i)_x(\xi) = (dy_i)_{\phi(x)}(D_x\phi(\xi)) &= (dy_i)_{\phi(x)}(\sum_k(\sum_j \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}(x)\xi_j)e_k) = \\
&= \sum_k^n (dy_i)_{\phi(x)}((\sum_j^m \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}(x)\xi_j)e_k) = \\
&= \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x)\xi_j \cdot 1 = \\
&= \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x) \cdot (dx_j)_x(\xi) = d(\phi_i)_k(\xi)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde se ha aplicado que:

$$D_x\phi(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots \\ \vdots & \\ & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \sum_k (\sum_j \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}(x)\xi_j)e_k \tag{3.14}$$

Teorema 3.0.2. *Se tiene:*

1. $\phi^*(\omega \wedge \tau) = \phi^*(\omega \wedge \phi^*(\tau)$.
2. $\phi^*(f) = f \circ \phi$ *si* $f \in \Omega^0(U_2)$.
3. $d\phi^*(\omega) = \phi^*(d\omega)$.

Además, si $\phi' : \Omega^*(U_2) \to \Omega^*(U_1)$ *es un operador lineal que satisface las tres condiciones, entonces* $\phi' = \phi^*$

Demostración: En libro.

Corolario 3.0.1. $d(\phi^*(dy_i)) = d(d\phi_i) = 0$.

Nota 3.0.9. *El corolario se obtiene del ejemplo anterior, y de que una* $p-$*forma arbitraria es de la forma* $\omega(x) = \sum \omega_\sigma(x) dx_\sigma$, *con* $y_i : U_2 \to \mathbb{R}$, *de forma que* $\phi_i = y_i \circ \phi$.

Ejemplo:
Sea $\gamma : (a, b) \to U$ una curva diferenciable en U, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, y sea

$$\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

una $1-$forma en U. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\gamma^*(\omega) &= \gamma^*(f_1) \wedge \gamma^*(dx_1) + \cdots + \gamma^*(f_n) \wedge \gamma^*(dx_n) \\ &= \gamma^*(f_1)d(\gamma^*(x_1)) + \cdots + \gamma^*(f_n)d(\gamma^*(x_n)) \\ &= (f_1 \circ \gamma)d\gamma_1 + \cdots + (f_n \circ \gamma)d\gamma_n \\ &= [(f_1 \circ \gamma)\gamma_1' + \cdots + (f_n \circ \gamma)\gamma_n']dt = \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Donde $\partial\gamma_i = \frac{\partial\gamma_i}{\partial t} = \gamma_i'$, y $<,>$ es el producto interior usual.

Ejemplo:

Sea $\phi : U_1 \to U_2$ una aplicación diferenciable entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\phi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = det(D_x\phi)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Por el teorema 3.0.2 se tiene:

$$\begin{aligned}\phi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \phi^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge \phi^*(dx_n) &= d\phi^*(x_1) \wedge \cdots \wedge d\phi^*(x_n) \\ = d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_n \underbrace{=}_{(*)} & det(D_x\phi)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Siendo la última igualdad consecuencia del lema 2.0.6

$$\begin{aligned}(*) &= (\sum_j \frac{\partial\phi_1}{\partial x_j}(x)(dx_j)_x) \wedge \cdots \wedge (\sum_j \frac{\partial\phi_n}{\partial x_j}(x)(dx_j)_x) \\ &= \sum_{\tau \in S(n)} \prod_j \frac{\partial\phi_j}{\partial x_{\tau(j)}}(x)(dx_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\tau(n)})_x(\xi_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_\tau sgn(\tau) \prod \frac{\partial\phi_j}{\partial x_{\tau(j)}}(x)(dx_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\tau(n)})_x(\xi_1, \ldots, x_n)\end{aligned} \tag{3.17}$$

Ejemplo:

Si $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ viene dada por $\phi(x,t) = \psi(t)x$, donde $\psi(t)$ es una función real diferenciable. Entonces,

$$\begin{aligned}\phi^*(dx_i) = d(\phi^*(x_i)) &= d(x_i \circ \phi) = d(\psi(t)x_i) \\ &= \sum_j \frac{\partial(\psi(t)x_i)}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial(\psi(t)x_i)}{\partial t}dt \\ &= x_i\psi'(t)dt + \psi(t)dx_i.\end{aligned} \tag{3.18}$$

3.0.1. Ejercicios

Ejercicio 3.1

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto.

Vamos a ir determinando las funciones α, β y γ.
Tenemos que $\alpha = id$, pues $\Omega^0(U) = C^\infty(U;\mathbb{R})$, y es claro que es isomorfismo.
Ahora determinemos β, para ello imponemos que

$$grad \circ \alpha = \beta \circ d$$

Sea $\omega = f \in \Omega^0(U)$, entonces:

$$graf(\alpha(f)) = grad(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}) = \beta(d(f)) = \beta(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2)$$

Como $\omega \in \Omega^1(U) = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2, \omega_i \in C^\infty(U;\mathbb{R}$, establecemos:

$$\begin{aligned} \beta : \Omega^1(U) &\to C^\infty(U;\mathbb{R}) \\ \omega &\mapsto \beta(\omega) := (\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \tag{3.19}$$

β es isomorfismo, pues es homomorfismo y biyectivo.
Una vez que conocemos β podemos determinar γ, imponiendo:

$$rot \circ \beta = \gamma \circ d$$

Por lo tanto, siendo $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2$, con $\omega_i \in C^\infty(U;\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} & rot(\beta(\omega)) = rot(\omega_1, \omega_2) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \\ & \gamma(d(\omega)) = \gamma(d\omega_1 \wedge dx_1 + d\omega_2 \wedge dx_2) = \\ & \gamma((\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}dx_2) \wedge dx_1 + (\frac{\omega_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}dx_2) \wedge dx_2) = \\ & = \gamma((\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2})dx_1 \wedge dx_2) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Por lo tanto definimos γ:

$$
\begin{aligned}
\gamma : \Omega^2(U) &\to C^\infty(U;\mathbb{R}) \\
\omega = \omega_1 dx_1 \wedge dx_2 &\mapsto \gamma(\omega) = -\omega_1 \\
&\text{donde } \omega_1 \in C^\infty(U;\mathbb{R})
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Ahora realizamos de manera análoga el apartado siguiente del ejercicio:

Necesitamos obtener las funciones α, β, γ y ρ.

$\alpha = id$ debido a que $\omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$, que es un isomorfismo. Ahora determinamos β, imponiendo que se de la siguiente igualdad:

$$grad \circ \alpha = d \circ \beta$$

Y como en el apartado anterior, obtenemos $\beta(\omega) := (\omega_1, \omega_2)$. Que es un isomorfismo.

Como en el apartado anterior determinamos γ, imponiendo:

$$\beta \circ rot = d \circ \gamma$$

Y se obtiene que $\gamma(\omega) := -\omega_1$.

Finalmente, la parte nueva viene de imponer:

$$\gamma \circ div = d \circ \rho$$

Sea $\omega \in \Omega^2(U), \omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$:

$$
\begin{aligned}
\gamma(div(\omega)) &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \\
\rho(d(\omega)) &= \rho((\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Así que definimo ρ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\rho : \Omega^3(U) &\to C^\infty(U, \mathbb{R}) \\
\omega = \omega_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 &= \omega_1
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Y finalmente tenemos que los dos complejos de cadenas son isomorfos.

Ejercicio 3.2

Tenemos que definir un operador $(*) : \Omega^p(U) \to \Omega^{n-p}(U)$ basado en la operación $* : Alt^p(\mathbb{R}^n) \to Alt^{n-p}(\mathbb{R}^n)$ del ejercicio 2.9.

$$\begin{aligned}(*) : \Omega^p(U) &\to \Omega^{n-p}(U)\\ \omega \mapsto (*)\omega : U &\to Alt^{n-p}(\mathbb{R}^n) \text{ dif.}\\ x \mapsto ((*)\omega)_x : (\mathbb{R}^n)^{n-p} &\to \mathbb{R}\\ (\xi_1, \ldots, \xi_{n-p}) &\mapsto ((*)\omega)_x(\xi_1, \ldots, x_{n-p})\end{aligned} \tag{3.24}$$

- Hay que probar que $*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) = dx_{p+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$.

  Fijado $x \in U$, $*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p)_x = *((dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p)_x) = *((dx_1)_x \wedge \cdots \wedge (dx_p)_x) = *(\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_p) = \varepsilon_{p+1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n = dx_p \wedge \cdots \wedge dx_n$.

- Hay que probar que $* \circ * = (-1)^{n(n-p)}$.

  $\omega \in \Omega^p(U) \Rightarrow x \in U, *(*(\omega)) \Rightarrow *(*(\omega))_x = **(\omega_x) = (-1)^{p(n-p)}\omega_x$.

- Hay que probar que $d^* \circ d^* = 0$.

Nota 3.0.10. *Se puede definir:*

$$H_p(U) = \frac{ker(d^*(\Omega^p \to \Omega^{p-1}(U)))}{Im(d^*(\Omega^{p+1}(U) \to \Omega^p(U)))}$$

$\omega \in \Omega^p(U), d^*d^*(\omega) = d^*((-1)^{np+n-1} * d * (\omega)) = (-1)^{n(p-1)+n-1}(-1)^{np+n-1} * d * (*d * (\omega)) = (-1)^{n(p-1)+n-1}(-1)^{np+n-1}(-1)^{p(n-p)} * \underbrace{dd}_{=0} *(\omega) = 0$.

Ejercicio 3.4

Sea $Alt^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}) = \{\omega : \mathbb{R}^m \times \underbrace{\cdots}_{p} \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ multilineales y alternadas$\}$ un $\mathbb{C}-$espacio vectorial.

$$\omega \in Alt^p(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) \Rightarrow \omega = Re(\omega) + iIm(\omega).$$

- $Re(\omega), Im(\omega) \in Alt^p(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ (Es simple comprobación).
- Se puede definirel producto exterior

$$\begin{aligned} Alt^P(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \times Alt^q(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) &\xrightarrow{\wedge} Alt^{p+q}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \\ (\omega,\tau) &\mapsto \omega \wedge \tau \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} Re(\omega \wedge \tau) &= Re(\omega) \wedge Re(\tau) - Im(\omega) \wedge Im(\tau) \\ Im(\omega \wedge \tau) &= Re(\tau) \wedge Im(\tau) + Im(\omega) \wedge Re(\tau) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \omega \wedge \tau &= (Re(\omega) \wedge Re(\tau) - Im(\omega) \wedge Im(\tau) + i(Re(\omega) \wedge Im(\tau) + Im(\omega) \wedge Re(\tau)) \\ \tau \wedge \omega &= (Re(\tau) \wedge Re(\omega) - Im(\tau) \wedge Im(\omega)) + i(Re(\tau) \wedge Im(\omega) + Im(\tau) \wedge Re(\omega)) \\ &= (-1)^{pq}\omega \wedge \tau (\text{anti-conmutativo}) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Problema 3.5

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$. $\Omega^p(U;\mathbb{C}) = \{\omega : U \to Alt^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \text{ dif.}\} = C^\infty(U; Alt^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}))$.
Se tiene:

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{\omega} Alt^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \\ x &\mapsto \omega_x = Re(\omega_x) + iIm(\omega_x) \end{aligned} \tag{3.28}$$

que es diferenciable. Entonces,

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{Re(\omega)} Alt^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \\ x &\mapsto Re(\omega_x) \\ U &\xrightarrow{Im(\omega)} Alt^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \\ x &\mapsto Im(\omega_x) \end{aligned} \tag{3.29}$$

son diferenciables.
PENDIENTE

Capítulo 4

Secuencia de Mayer-Vietoris

Teorema 4.0.1. *Sean* U_1 *y* U_2 *conjuntos abiertos de* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $U = U_1 \cup U_2$. *para* $\nu = 1, 2$, *sean las inclusiones* $i_\nu : U_\nu \to U$ *y* $j_\nu : U_1 \cap U_2 \to U_\nu$. *Entonces la siguiente secuencia es exacta*

$$0 \to \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

donde $I^p(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega))$, $J^p(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$.

Demostración: En el libro.

Teorema 4.0.2. *(Mayer-Vietoris) Sean* U_1 *y* U_2 *conjuntos abiertos en* $\mathbb{R}^n$ *y* $U = U_1 \cup U_2$. *Existe una secuencia exacta de cohomología de espacios vectoriales.*

$$\cdots \to H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \to \cdots$$

, donde $I^*([\omega]) = (i_1^*[\omega], i_2^*[\omega])$, $J^*([\omega_1], [\omega_2]) = j_1^*[\omega_1] - j_2^*[\omega_2]$.

Corolario 4.0.1. *Si* U_1 *y* U_2 *son abiertos disjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *entonces*

$$I^* : H^p(U_1 \cup U_2) \to H^p(U_1) \oplus H^p(U_2)$$

es un isomorfismo.