Modelos variables aleatorias

Eduardo Paluzo

Sevilla, 26 de agosto de 2016

Índice general

Introducción

Se pretende resumir y añadir aquellos conceptos de las variables aleatorias relativas a su distribución. Tomando como ejemplo los apuntes proporcionados en la asignatura de Teoría de la probabilidad impartida en el curso de segundo del grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

Parte I

Conceptos previos importantes

Capítulo 1

Resumen de fórmulas

1.1. Esperanza matemática

Viene dada por la expresión:

$$\text{Caso discreto:} \quad E(X) = \sum_{I=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

$$\text{Caso abs. Continuo:} \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

1.2. Varianza

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

1.3. Función generatriz

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

Parte II

Modelos variables aleatorias discretas

Capítulo 2

Variables aleatorias discretas

2.1. Variable aleatoria degenerada

Una variable aleatoria X es degenerada cuando toda la masa de la probabilidad se concentra en un único punto. $P(X = b) = 1$.

- $F_X(x) = I_{[b,+\infty)}$
- $E(X^r) = b^r$
- $Var(X) = 0$
- $M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{tb}$

2.2. Distribución de Bernoulli, Be(p)

Se trata de un experimento con dos posibles casos (cara o cruz, positivo o negativo,...) donde uno de los casos tiene probabilidad p y el otro q, donde $q = 1 - p$, es decir, la masa de la probabilidad se distribuye en dos puntos.

$$P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = q$$

$$P(X = x_i) = p^{x_i} q^{1-x_i}$$

- $E(X^r) = p, \forall r > 0$
- $E(X) = p$
- $Var(X) = pq$
- $M_X(t) = q + pe^t$

Tiene como función de probabilidad del producto de distribuciones Bernoulli's la expresión

$$\prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} q^{n - \sum x_i}$$

2.3. Distribución binomial

Se trata de la repetición de n experimentos Bernoulli. Es decir, la probabilidad de que se cumpla un suceso k veces **con reposición**.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

- $E(X) = np$
- $Var(X) = npq$
- $M_X(t) = (q + pe^t)^n$
- Es reproductiva

2.4. Distribución geométrica

Mide el número de fracasos hasta que se llega al éxito.

$$P(X = k) = q^k p$$

- $E(X) = \frac{q}{p}$
- $Var(X) = \frac{q}{p^2}$
- $M_X(t) = \frac{p}{1-qe^t}$
- No es reproductiva

2.5. Distribución binomial negativa

Se trata de la suma de distribuciones geométricas. **número de experimentos realizados hasta que se obtiene el r-ésimo éxito**

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} q^k p^r$$

- $E(X) = r\frac{q}{p}$
- $Var(X) = r\frac{q}{p^2}$
- $M_X(t) = \frac{p^r}{(1-qe^t)^r}$
- Es reproductiva

2.6. Distribución de Poisson

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

Cuando el número de ensayos de una Binomial tiende a infinito se trata de una distribución de Poisson.

- $E(X) = Var(X) = \lambda$
- $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}, \forall t \in \mathcal{R}$
- Es reproductiva

2.7. Distribución hipergeométrica

Se trata de un experimento en el que tenemos N elementos, de los cuales N_1 son de un tipo y el resto de otro tipo. En la variable aleatoria X se cuenta **el número de elementos del primer tipo que hay en la muestra extraida**

$$P(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

- $E(X) = np$
- $Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$

  Nota 2.7.1. $p = \frac{N_1}{N} \quad q = 1 - p$

2.8. Distribución uniforme discreta en N puntos

La masa de la probabilidad se distribuye de igual forma sobre N puntos.

$$P(X = x_k) = \frac{1}{N}, k = 1, \ldots, N$$

- $E(X) = \frac{N+1}{2}$
- $Var(X) = \frac{N^2-1}{12}$

Parte III

Modelos variables aleatorias continuas

Capítulo 3

Variables continuas

3.1. Distribución uniforme

Una distribución uniforme en el intervalo (a, b) tiene como **función de densidad**

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x), x \in \mathbb{R}$$

Se trata de la selección al azar de un punto del intervalo. Tiene como **función de distribución**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $E(X^k) = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(b-a)(k+1)}$

3.2. Distribución exponencial

Una distribución exponencial de parámetro λ tiene como **función de densidad**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)$$

y como **función de distribución**

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) I_{(0,+\infty)}(x)$$

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k}$
- No es reproductiva

3.3. Distribución Gamma

$$f(X) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-ax} x^{p-1} I_{(0,+\infty)}$$

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$

3.4. Distribución normal univariante

Sea X una variable aleatoria que se distribuye según una $N(\mu, \sigma^2)$, su función de densidad es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Parte IV

Distribuciones Especiales

Capítulo 4

Distribuciones especiales

4.1. Distribución chi cuadrado (χ)

Una χ^2_n con n grados de libertad es la suma de n distribuciones $N(0,1)$ al cuadrado. Es decir,

$$\chi^2_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \quad X_i \text{ con } F \in N(0,1), \forall i \in \mathbb{N}$$

- $\chi^2_{n_1} + \chi^2_{n_2} = \chi^2_{n_1+n_2}$
- $E\chi^2_n = n$
- $\frac{\chi^2_n}{n} \xrightarrow{P} 1$
- $\frac{1}{\sigma^2} \sum (Y_k - \bar{Y})^2$ se distribuye según una chi cuadrado con $n-1$ grados de libertad. Con cada Y_i con distribución $N(\mu, \sigma^2)$

4.2. Distribución t de student

Si tenemos

$$X \text{ una } N(0,1)$$

y

$$Y \text{ una } \chi^2_n$$

entonces

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \text{ se distribuye según una } t_n$$

- la función de densidad es simétrica.
- Tiende en ley a una $N(0,1)$
- $\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{S_c}$ se distribuye según una t_{n-1}

4.3. Distribución F de Snedecor

Sean

$$X, Y \text{ con distribuciónes } \chi^2_n \text{ y } \chi^2_m, \text{ independientes.}$$

Entonces se tiene,

$$\frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \text{ se distribuye según una } F_{n,m}$$