Completitud en la lógica proposicional

23 de febrero de 2017

Primero definamos una serie de conceptos previos:

Definición 1. *Dado un conjunto de fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ que llamaremos* ***premisas****, a través de las distintas reglas de la deducción natural se obtienen más fórmulas, hasta finalmente obtener la conclusión. Se denota por:*

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \varphi$$

Se llama ***secuencia***

Definición 2. *Se dirá que una secuencia es* ***válida*** *si se puede encontrar una prueba o demostración para ella.*

Definición 3. *Las fórmulas lógicas ϕ con una secuencia válida $\vdash \phi$ son* ***teoremas***

Nota 1. *Cualquier prueba de $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \varphi$ se puede transformar en una prueba del teorema $\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to (\cdots \to (\phi_n \to \varphi) \cdots)))$*

Definición 4. *Las contradicciones son expresiones del tipo $\phi \land \neg\phi$ o $\neg\phi \land \phi$, donde ϕ es cualquier fórmula.*

Nota 2.

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$$

Se basa en los valores de verdad de las fórmulas atómicas de las premisas y la conclusión, y como las conectivas lógicas manipulan esos valores de verdad.

Definición 5.
1. *El conjunto de los valores de verdad contiene dos elementos T y F.*
2. *Un modelo de una fórmula ϕ es una asignación a cada átomo proposicional en ϕ de un valor de verdad.*

Nota 3. *Dada una prueba de $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \varphi$, no es posible que φ sea falsa cuando todas las fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son verdaderas.*

Definición 6. *Si para todas las evaluaciones en las que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ evalúa en T, ψ evalua a T también, decimos que*

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \models \varphi$$

es ***consistente*** *(es decir, φ es consecuencia de las premisas $\phi_1, \ldots, \phi_n$) y $\models$ es la relación* ***vinculación semántica****.*

Teorema 1. *Sean $\phi_1, \ldots, \phi_n$ y φ una fórmula de la lógica proposicional. Si $\phi_1, \ldots, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \varphi$ es válida, entonces $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \varphi$ es consistente.*

Hasta aquí la base necesaria para entender el teorema de completitud de la lógica proposicional. A partir de ahora, se pretende demostrar dicho teorema, el cual establece que las reglas de la lógica proposicional son completas, es decir, para cualquier $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \varphi$ consistente, se tiene que existe una prueba vía deducción natural para la secuencia $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \varphi$. Si lo combinamos al teorema 1 dado previamente, se obtiene que

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \varphi \text{ es válida sii } \phi_1, \ldots, \phi_2, \ldots, \ldots, \phi_n \models \varphi \text{ es consistente.}$$

Si asumimos que $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \varphi$ es consistente, el argumento para la prueba tendrá tres pasos:

1. Probar que $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to (\ldots(\phi_n \to \varphi)\ldots)))$ es consistente.
2. Probar que $\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to (\ldots(\phi_n \to \varphi)\ldots)))$ es válida.
3. Probar que $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \varphi$ es válida.

Primer paso:

Definición 7. *Una fórmula lógica ϕ se llama tautología si y sólo si evalúa en T bajo todas las posibles evaluaciones, es decir, $\models \phi$.*

Supongamos que $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \varphi$ es consistente, comprobemos que $\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to (\ldots(\phi_n \to \varphi)\ldots)))$ es una tautología. Si estudiamos con detenimiento la última fórmula, vemos que se trata de una fórmula construida por anidación de implicaciones, y que sólo evalúa a F si todas las $\phi_i, i = 1, \ldots, n$ evalúan a T y φ evalúa a F. Pero eso contradice el hecho de que $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \varphi$ sea consistente. Por lo tanto, $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to (\ldots(\phi_n \to \varphi)\ldots)))$ es consistente.

Segundo 2:

Teorema 2. *Si $\models \eta$ es consistente, entonces $\vdash \eta$ es válida. En otras palabras, si η es una tautología, entonces η es un teorema.*

Supongamos que $\models \eta$ es consistente, y que contiene n átomos proposicionales distintos $p_1, \ldots, p_n$. Al ser η una tautología, sabemos que evalúa a T para las 2^n líneas de su tabla de verdad. Pretendemos encontrar una forma uniforme de construir una prueba, para ellos "codificaremos" cada línea de la tabla de verdad de η como una secuencia. Entonces, construimos pruebas para las 2^n secuencias y las "unimos" en una prueba de η.

Proposición 1. *Sea ϕ una fórmula tal que $p_1, \ldots, p_n$ son sus únicos átomos proposicionales. Sea l cualquier línea de la tabla de verdad de ϕ. Para todo $1 \leq i \leq n$ sea $\hat{p}_i$ igual a p_i si la entrada en la línea l de p_i es T, e igual a $\neg p_i$ en caso contrario. Entonces se tiene:*

1. *$\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \phi$ se puede probar si la entrada para ϕ en la línea l es T.*
2. *$\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \neg\phi$ se puede probar si la entrada para ϕ en la línea l es F.*

Demostración:

1. Si ϕ es un átomo proposicional p, necesitamos probar que $p \vdash p$ y $\neg p \vdash\neq p$. Trivial.
2. Si ϕ es de la forma $\neg\phi_1$, se consideran dos casos. Supongamos que ϕ evalúa a T. En este caso ϕ_1 evalúa a F. Aplicamos la hipótesis de inducción en ϕ_1 para concluir que $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \neg\phi_1$, pero $\neg\phi_1$ es ϕ. Por otro lado, si ϕ evalúa a F, entonces ϕ_1 evalúa a T y se tiene por inducción que $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \phi_1$. Usando la regla de la doble negación, podemos extender la prueba de $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \phi_1$ a $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash\neq \neg\phi_1$, pero $\neg\neg\phi_1$ es $\neg\phi$.

Nota 4. *En el resto de casos, ϕ será la "composición de dos fórmulas, $\phi_1 \circ \phi_2$, donde $\circ$ podrá ser $\rightarrow, \wedge$ o $\vee$. En todos estos casos, sea $q_1, \ldots, q_l$ los átomos proposicionales de ϕ_1 y $r_1, \ldots, r_k$ los de ϕ_2. Entonces, se tiene que $\{q_1, \ldots, q_l\} \cup \{r_1, \ldots, r_k\} = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Entonces, cuando $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_l \vdash \varphi_1$ y $\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_k \vdash \varphi_2$ son válidas, lo será $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ usando la regla de introducción de la conjunción. De esta forma, podemos usar la hipótesis de inducción y sólo hay que probar que las conjunciones nos permiten probar los casos ϕ o $\neg\phi$.*

3. Sea ϕ igual a $\phi_1 \rightarrow \phi_2$. Si ϕ evalúa a F, entonce sabemos que ϕ_1 evalúa a T y ϕ_2 evalúa a F. Usando la hipótesis de inducción, tenemos $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_l \vdash \phi_1$ y $\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_k \vdash \neg\phi_2$, así que tenemos $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \phi_1 \wedge \neg\phi_2$. Necesitamos probar que $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$, pero usando $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \phi_1 \wedge \neg\phi_2$, basta probar la secuencia $\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$.

   Si ϕ evalúa a T, entonces se tendrán tres casos.

4. Si ϕ es de la forma $\phi_1 \wedge \phi_2$, también tratamos con cuatro casos.

5. Finalmente, si ϕ es una disyunción, también se tienen cuatro casos.

□

Se aplica esta técnica a la fórmula $\models \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow (\cdots(\phi_n \rightarrow \varphi)\cdots)))$. Como es una tautología, evalúa a T en todas las 2^n lineas de su tabla de verdad. La proposición anterior nos da pruebas para $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \eta$, una para cada caso en el que $\hat{p}_i$ es p_i o $\neq p_i$. Ahora el objetivo será unir todas estas pruebas ,que nos facilita la proposición, en una única prueba para η que no usa premisas.

Tercer paso:

Se necesita encontrar una prueba para $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \varphi$. Se toma la prueba para $\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow (\cdots(\phi_n \rightarrow \varphi)\cdots)))$ dada por el paso 2 e introduciendo las premisas $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Entonces se aplica eliminación de la implicación n veces, de manera ordenada, en cada una de las premisas.Así, se llega a φ como conclusión, lo que nos da una prueba para la secuencia $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \varphi$.

Corolario 1. *Sean $\phi_1, \ldots, \phi_n, \varphi$ formulas de la lógica proposicional. Entonces $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \varphi$ es consistente si y sólo si la secuencia $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \varphi$ es válida.*

Referencias

[1] MICHAEL HUTH, MARK RYAN , *Logic in computer science*, Cambridge University Press,2004.