Kalman filter

Dr. Ing. Rodrigo Gonzalez

rodrigo.gonzalez@ingenieria.uncuyo.edu.ar

Control y Sistemas

Ingeniería Mecatrónica,
Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de Cuyo

June 2021

Es un algoritmo, más que un filtro

Es de los mayores desarrollos de ingenieria del siglo 20

State estimation

El filtro de Kalman es un estimador de estados (observador) que considera al sistema afectado por ruido

De distribucion gaussiana de media 0

Consider a linear time-invariant state-space model given by:

v: ruido de proceso. Afecta el modelado

$$\dot{x} = Ax + Bu + v$$

w:ruido de medicion(sensores)

$$y = Cx + w$$

where x is the state (vector), u is the input or control signal and y is the output signal, v is the process disturbance and w is measurement noise. The disturbance v and the noise w are zero mean and Gaussian.

E: valor esperado

$$\mathbb{E}(v(s)v^T(t)) = R_v\delta(t-s)$$
$$\mathbb{E}(w(s)w^T(t)) = R_w\delta(t-s)$$

Rv y Rw son muy importantes en el desarrollo del filtro

where δ is the unit impulse function (dirac function).

Al considerar el ruido, x e y pasan de ser variables algebraicas a variables estocásticas

Esto se propaga entre las ecuaciones

State estimation

The state estimator (observer) is given as:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

Expresión típica de observador en espacio de estado

The estimation error $\tilde{x} = x - \hat{x}$ can be computed as

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu + v - A\hat{x} - Bu - L(Cx + w - C\hat{x})$$
$$= (A - LC)\tilde{x} + v - Lw$$

Propiedades estocásticas del error no van a cambiar

A-LC es sistema a Lazo cerrado

If $A - LC$ is stable, then the estimation error $\tilde{x}$ is a stationary stochastic process. tb es gaussiano

The covariance of the estimation error, $P_{\tilde{x}} = \mathbb{E}\left(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\right)$, is given by the following equation:

NxN Nx1 1xN

$$0 = (A - LC)P_{\tilde{x}} + P_{\tilde{x}}(A - LC)^T + R_v + LR_wL^T$$

The optimal observer minimizes $P_{\tilde{x}}$.

Solo podemos modificar L. Lo demás viene por el sistema o la característica de sus ruidos

Px es valor esperado de errores del vector de estado. En su diagonal estarán las varianzas de los estados del sistema. Fuera de esta son las var cruzadas(estado respecto al resto de los estados)

State estimation

The optimal observer gain, if the system is *observable*, is:

$$L = P_{\tilde{x}} C^T R_w^{-1}$$

Observador óptimo

where $P_{\tilde{x}} = P_{\tilde{x}}^T \geq 0$ is the solution to the Riccati equation:

$$0 = AP_{\tilde{x}} + P_{\tilde{x}} A^T + R_v - P_{\tilde{x}} C^T R_w^{-1} C P_{\tilde{x}}$$

The observer is called the ***Kalman-Bucy filter.***

Similarities with LQR:

LQR $\leftrightarrow$ Kalman

$A \leftrightarrow A^T$	$B \leftrightarrow C^T$
$S \leftrightarrow P$	$K \leftrightarrow L^T$
$Q_x \leftrightarrow R_v$	$Q_u \leftrightarrow R_w$

Ambos algoritmos tratan de optimizar una f de costo. LQR optimiza acciones de control o estados de un sist, y Kalman optimiza error etre estados verdaderos y estimados del sist.

The Kalman-Bucy filter is:

- always stable. para sist observable
- *the optimal linear filter* for state estimation. (Para sistema lineal de ruido gaussiano)
- R_v and R_w are regarded as the design parameters.

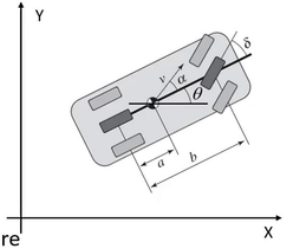
Rv y Rw son matrices con las que vamos a ajustar el diseño del filtro de Kalman
Si Rv tiene valor alto, el diseñador no tiene confianza en su modelo(ruido)
Si Rw ltiene valor alto, los sensores son ruidosos(el diseñador no confia en las mediciones)

Revisit Example - Vehicle steering (Ex 7.4)

Consider the following system:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 12\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\ 3\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + w$$



where x_1 is the lateral position Y , x_2 is the heading orientation θ and u is the steering angle δ.

The process disturbance and the measurement noise are zero mean with covariance

$$R_v = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad R_w = \rho$$

Design a Kalman filter to estimate the vehicle's states, from measurement of the lateral position.

Vehicle data: $v_0 = 12\ m/s$

$a = 2\ m$

$b = 4\ m$

Revisit Example - Vehicle steering (Ex 7.4)

State estimator:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

The optimal observer gain, if the system is *observable*, is:

$$L = P_{\tilde{x}} C^T R_w^{-1}$$

Buscamos P a partir del valor de ganancia óptima

where $P_{\tilde{x}} = P_{\tilde{x}}^T \geq 0$ is the solution to the Riccati equation:

$$0 = AP_{\tilde{x}} + P_{\tilde{x}}A^T + R_v - P_{\tilde{x}}C^T R_w^{-1} C P_{\tilde{x}} \qquad P_{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

The Riccati equation:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \rho^{-1} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

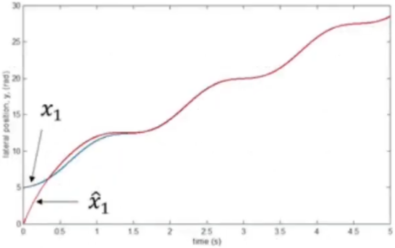
$$\rho = 1 \quad \Rightarrow \quad P_{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 5.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.4167 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 5.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

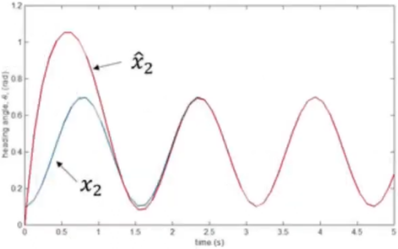
MATLAB:
[P,E,L]=care(A',C',[[1 0];[0 1]],1)

Con care resuelvo para sistema continuo la ec de riccati

Revisit Example - Vehicle steering (Ex 7.4)

Simulations using a sinusiodal input, with $x(0) = (5, 0.1)$ and $\hat{x}(0) = (0, 0)$:

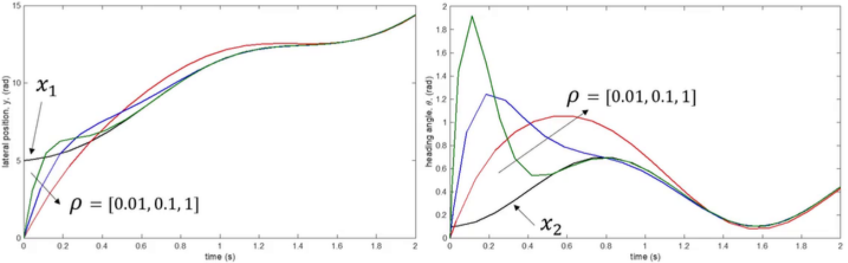




Rápidamente sigue el valor del sistema

Revisit Example - Vehicle steering (Ex 7.4)

Simulations using a sinusiodal input, with $x(0)$ = (5, 0.1) and $\hat{x}(0)$ = (0, 0):



Al aumentar rho(ruido) el filtro tarda más en estimar valor de x1 y x2

State estimation – discrete time case

Consider a linear time-invariant state-space model in discrete time given by:

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + v[k]$$
$$y[k] = Cx[k] + w[k]$$

where x is the state (vector), u is the input or control signal and y is the output signal, v is the process disturbance and w is measurement noise. The disturbance v and the noise w are zero mean and Gaussian.

La derivada de x pasa a ser x[k+1] porque predecimos en tiempo discreto el valor de x

The state estimator (observer) is given as:

$$\hat{x}[k+1] = A\hat{x}[k] + Bu[k] + L[k](y[k] - C\hat{x}[k])$$

and the estimation error $\tilde{x}[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ can be computed as:

$$\tilde{x}[k+1] = (A - L[k]C)\tilde{x}[k] + v[k] - Lw[k]$$

Buscamos valor de L nuevamente

Ganancia del observador

State estimation – discrete time case

The covariance of the estimation error, $P_{\tilde{x}}[k] = \mathbb{E}\left(\tilde{x}[k]\tilde{x}^T[k]\right)$, is given by:

$$P_{\tilde{x}}[k+1] = (A - L[k]C)P_{\tilde{x}}[k](A - L[k]C)^T + R_v + L[k]R_w L^T[k]$$

The observer gain that minimizes $P_{\tilde{x}}[k]$ is given by

$$L[k] = AP_{\tilde{x}}[k]\, C^T\left(R_w + CP_{\tilde{x}}[k]\, C^T\right)^{-1}$$

No podemos garantizar que la matriz a invertir sea diagonal.

This is the ***discrete time Kalman filter***.

El parentesis puede causar problemas de estabilidad en el filtro de Kalman discreto

Para hallar Pk+1 necesitas Pk

Note, that the Kalman filter is a recursive filter.

If $P_{\tilde{x}}[k]$ converges, then L is constant.

La convergencia depende de la estabilidad de la matriz entre paréntesis de más arriba

Discrete Kalman Filter Algorithm

2 partes

F es la versión digitalizada de la matriz A

Predict

Predicted (*a priori*) state estimate

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k$$

Predicted (*a priori*) estimate covariance

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{Q}_k$$

Q anteriormente era la matriz de covarianza Rv

Update

z contiene valores de sensores de salida

Innovation or measurement pre-fit residual

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

x predicho

H antes era la matriz C

Innovation (or pre-fit residual) covariance

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k$$

R era Rw

Optimal Kalman gain

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top \mathbf{S}_k^{-1}$$

Updated (*a posteriori*) state estimate

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k$$

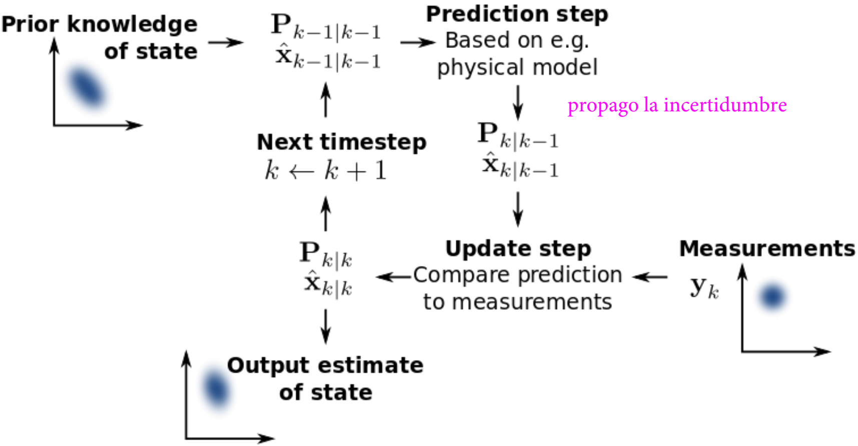
Este termino corrije el valor predicho del vector x

Updated (*a posteriori*) estimate covariance

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

Discrete Kalman Filter Algorithm

Distribuciones de probabilidad al ejecutar etapas de prediccion y update



propago la incertidumbre

La nueva distribución tiene reducida la incertidumbre al usar la técnica del filtro de Kalman

- Karl J. Astrom and Richard M. Murray *Feedback Systems*. Version v3.0i. Princeton University Press. September 2018. Chapter 8.
- Wikipedia. Kalman filter. https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter.