

Proyecto de fin de cátedra
Control y Sistemas
Franco Bizzotto/Agosto 2020

/Modelado y diseño de controlador
para robot serie redundante/



Modelado y diseño de controlador para robot serie redundante

Franco Bizzotto
(fmbizzotto@gmail.com)

Proyecto de fin de cátedra, Control y Sistemas
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo
Mendoza - Argentina

Agosto de 2020, versión 3

Resumen

En este proyecto se implementa el análisis, modelado y simulación de un sistema de control conformado por una planta electromecánica, un controlador, un sensor de posición angular y un filtro. El controlador estará compuesto por un observador de estados y un bloque de control PID de 2 grados de libertad, mientras que se modelará el sensor adicionando ruido blanco gaussiano e incorporando el filtro de tipo FIR en el lazo de realimentación para evitar la propagación del ruido dentro del controlador. El objetivo del controlador es brindar estabilidad y correcto seguimiento de consigna.

1. Introducción

El proyecto se encuentra ligado a las temáticas desarrolladas por la cátedra, de las cuales se pondrá especial énfasis en las unidades correspondientes a control realimentado, modelado de sistemas mecatrónicos y procesamiento de señales digitales, pero con la intención de ser integrador, es decir, que involucre la mayor cantidad de unidades temáticas del programa de estudios.

En cuanto al robot, ha sido previamente analizado y ajustado teóricamente para adaptarse a una tarea específica: Pintura por aire comprimido de piezas industriales. Esta aplicación requiere de la herramienta apropiada (Pistola aerográfica) que ha sido seleccionada acorde a las necesidades industriales.

1.1. Planteo del problema

La articulación a controlar debe poder aceptar consignas de posición angular para llevar al robot a la posición del efector final deseada. Más allá de las funciones cinemáticas que se utilizan para pasar del espacio articular al espacio cartesiano, se debe incorporar un controlador que acepte estas consignas y lleve al sistema a la posición deseada a través del actuador.

Dentro de los problemas principales a resolver en este proyecto se encuentran: la incorporación de estas consignas, el acceso a variables de la planta y la presencia de ruido en la señal de entrada al controlador.

1.2. Objetivos

El criterio de realización y éxito del proyecto estará sujeto a ciertos objetivos específicos, los cuales se listan a continuación.

1. Crear un modelo matemático del sistema físico con vista en la última articulación (aquella que contiene la carga).
2. Seleccionar el tipo de control realimentado que mejor se ajuste al tipo de robot y aplicación particular.
3. Analizar observabilidad y controlabilidad para asegurar la factibilidad del controlador con la formulación propuesta.
4. Representar gráficamente el modelo matemático y simular su comportamiento con las herramientas informáticas disponibles.
5. Simular situaciones de perturbaciones al sistema para comprobar la fiabilidad y rendimiento del controlador.
6. Crear un observador de estados para poder estimar las variables que sean convenientes y evitar la incorporación de sensores adicionales.
7. Diseñar un filtro del tipo conveniente para un mejor control sobre las señales comprometidas o poco fiables.
8. Verificar el correcto seguimiento de consignas.

2. Planta o sistema físico

Se utiliza el término planta para denotar cualquier objeto físico a ser controlado [1]. En los términos de este proyecto, se refiere al conjunto: articulación-reductor-motor con el cual se pretende dar movimiento controlado al robot para lograr los objetivos para los que fue diseñado.

Por supuesto que un sistema físico funciona como un conjunto, pero puede ser analizado física y matemáticamente por separado a través de relaciones constitutivas y leyes de conservación. Dos subsistemas principales transforman la energía para lograr funcionar adecuadamente, un subsistema mecánico y uno electromagnético.

Un tercer subsistema puede tener repercusiones importantes en el desempeño y seguridad de la planta, el térmico, pero ha sido despreciado por las bajas corrientes que requiere la aplicación, por lo que no será considerado en este proyecto.

2.1. Subsistema mecánico

En este subsistema entran en juego variables cinemáticas y dinámicas relacionadas por la segunda ley de Newton para sistemas rotacionales:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = T_m - T_l \quad (1)$$

Donde el primer término representa la inercia rotacional ($J\ddot{\theta}$), el segundo la fricción ($b\dot{\theta}$). El segundo miembro está compuesto por los momentos externos: El torque electromagnético (T_m) que hace girar al rotor y el torque de carga (T_l) el cual se debe vencer para poder girar, esta magnitud representa una perturbación en el sistema.

Se debe tener en cuenta que las variables cinemáticas de la ecuación 1 están referidas al motor, por lo que los parámetros dinámicos como la inercia rotacional, el coeficiente de fricción viscosa y el torque de carga son los equivalentes, calculados para el conjunto con la relación de transmisión (r)

$$J = J_m + \frac{J_l}{r^2} \quad (2a)$$

$$b = b_m + \frac{b_l}{r^2} \quad (2b)$$

$$T_l = \frac{T'_l}{r} \quad (2c)$$

De las ecuaciones anteriores se puede concluir que las magnitudes equivalentes son prácticamente idénticas a las del motor, puesto que el término adicional está reducido por el cuadrado de la relación de transmisión, a excepción del torque de carga.

Consecuentemente, según los datos técnicos de la última articulación del robot, se procede a realizar la selección de un motor de corriente continua en base al torque máximo que el robot promete brindar. Del cual es posible obtener las magnitudes de las variables del modelo matemático para cálculos y simulaciones subsecuentes.

Este subsistema convierte torques externos en cambios sobre la posición angular del rotor.

2.2. Subsistema electromagnético

Al tratarse de un motor de corriente continua cuyo campo magnético se genera por imanes permanentes, solo se consideran en el modelo las variables eléctricas en el estator, las cuales se representan a través de la Ley de Kirchhoff de las espiras o balance en la diferencia de potencial eléctrico.

$$iR + L \frac{di}{dt} + v_a = v \quad (3)$$

El primer miembro de la ecuación 3 contiene los términos que representan voltajes internos del sistema, mientras que el segundo, el externo. Respectivamente: diferencia de potencial eléctrico sobre un resistor, diferencia de potencial eléctrico sobre un inductor y fuerza contraelectromotriz debida al movimiento del rotor.

Cabe destacar que esta representación matemática es útil para tener una entrada de voltaje, y posteriormente hacer un control a través de esta magnitud. Pero también se debe tener en cuenta que se puede controlar a través de la corriente, aunque dicho método de control no será utilizado en este proyecto.

2.3. Sistema electromecánico

Los subsistemas están relacionados entre sí por dos relaciones matemáticas, las cuales representan la conversión de energía electromecánica en ambos sentidos.

$$v_a = K_E \cdot \omega \quad (4a)$$

$$T_m = K_T \cdot i \quad (4b)$$

Estas expresiones permiten incluir parámetros mecánicos en ecuaciones eléctricas (ecuación 4a) y

parámetros eléctricos en ecuaciones mecánicas (ecuación 4b) Cabe destacar, que las variables magnéticas se encuentran incluidas en la constante de proporcionalidad K_T

2.4. Sistema vectorial lineal

Una vez descritas las leyes de conservación y expresiones de conversión para este sistema físico, es posible reorganizar los parámetros en forma de sistema de entrada, salida y estado interno. Esto se puede lograr con ecuaciones de estado, donde se despeja la razón de cambio que representa el estado interno del sistema, el cual evolucionará para dar las respuesta deseada.

Se parte de las siguientes ecuaciones de estado y la ecuación de salida:

$$\dot{\theta} = \omega \quad (5a)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}(K_T \cdot i - T_l - b\omega) \quad (5b)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(v - iR - K_E \cdot \omega) \quad (5c)$$

$$y = \theta \quad (5d)$$

Para reorganizarlas en dos ecuaciones matriciales:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K_T}{J} \\ 0 & \frac{K_E}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ T_l \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + [0 \ 0] \begin{bmatrix} v \\ T_L \end{bmatrix} \quad (7)$$

De esta forma, quedan definidas las matrices A,B,C y D (respectivamente en las ecuaciones 6 y 7) del sistema. El cual se da en concordancia con un sistema matricial lineal (de primer orden) de parámetros invariantes. Se observa en las ecuaciones escalares, que se trata de un sistema de tercer orden, ya que se tienen tres variables de estado. Tiene una entrada que se puede manipular (v) y otra que representa las perturbaciones (torque de carga T_L) que puede recibir el sistema, por lo que se deberá diseñar un controlador que sea estable ante perturbaciones.

Como se describió en las ecuaciones 6 y 7 el sistema responde al principio de superposición, por lo que resulta lineal, pero esta linealidad ha sido obtenida considerando que el modelo del subsistema mecánico responde a una configuración articular del robot fija, para la cual los parámetros se mantienen constantes, pero en la aplicación práctica varían levemente.

2.5. Representación gráfica escalar

A continuación se describirán las relaciones entre los subsistemas en forma de bloques para poner en evidencia las entradas y salidas. Cada bloque representa una ley de conservación o de conversión de magnitudes, utilizando las mismas denominaciones que en las ecuaciones del modelo matemático.

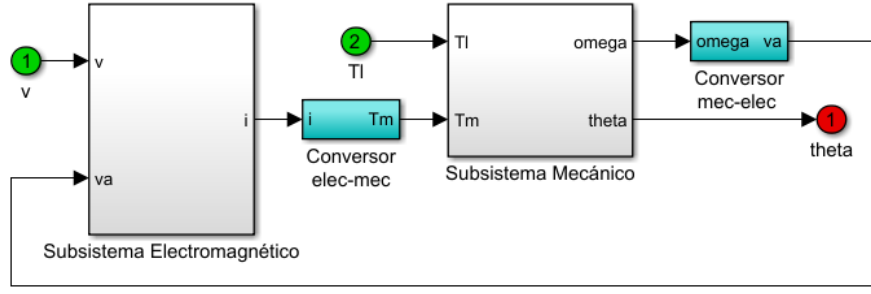


Figura 1: Sistema físico en forma de bloques de entradas/salidas. Cada bloque en gris representa una ley de conservación, los bloques en cian conversión de energía. En el caso de los nodos, los verdes representan entradas y los rojos salidas.

3. Análisis del modelo

En esta sección se pretende analizar y verificar el modelo matemático descrito en la sección 2 antes de proceder al diseño del controlador. La planta se puede analizar en cuanto a estabilidad, controlabilidad y observabilidad.

3.1. Estabilidad y amortiguamiento

La estabilidad de la planta puede ser medida a través de sus polos. Estos son los autovalores de la matriz de transferencia (Matriz A definida en la ecuación 6) En cuyo caso, el criterio de estabilidad dice que el sistema es estable si no tiene ningún polo con parte real positiva, ya que daría lugar a una realimentación positiva con resultado en una divergencia en la salida.

Otra forma de obtenerlos es a través de las funciones de transferencia para cada entrada, donde las raíces del polinomio en el dominio complejo del denominador son los polos del sistema.

$$G_v(s) = \frac{K_T}{s((JL)s^2 + (JR + bL)s + (bR + K_T K_E))} \quad (8a)$$

$$G_T(s) = \frac{-Ls - R}{s((JL)s^2 + (JR + bL)s + (bR + K_T K_E))} \quad (8b)$$

Existe un criterio que nos permitirá analizar la estabilidad del sistema sin siquiera tener que encontrar las raíces del polinomio característico, el cual dice como se cita a continuación:

Criterio de estabilidad de Routh: Para un polinomio en s con coeficientes a_n reales, si cualquiera de los coeficientes es negativo o nulo (luego de haber removido las raíces nulas) en presencia de al menos un coeficiente positivo, entonces existen raíces con parte real positiva, lo que implica inestabilidad en el sistema[2].

De forma rápida, puede observarse que todos los coeficientes son positivos ya que están conformados por variables escalares todas positivas, por lo que el sistema resulta estable. Aunque esta estabilidad se encuentra al límite por tener un polo en cero. De esta forma, el controlador podrá cambiar el comportamiento del sistema, ubicando polos que se alejen aún más del límite de inestabilidad, creando un sistema controlador-planta más robusto.

Es posible a partir del polinomio característico, encontrar los parámetros de segundo orden del sistema con amortiguamiento.

$$P(s) = s \left(s^2 + \left(\frac{JR + bL}{JL} \right) s + \left(\frac{bR + K_T K_E}{JL} \right) \right) \quad (9a)$$

$$P(s) = s (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (9b)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{bR + K_T K_E}{JL}} \quad (9c)$$

$$\zeta = \left(\frac{JR + bL}{JL} \right) \left(\frac{1}{2\omega_n} \right) \quad (9d)$$

De la expresión conocida para el polinomio de segundo grado en la ecuación 9b se despejan los parámetros del sistema con amortiguamiento, como la relación de amortiguamiento y la frecuencia angular natural a la que vibra este sistema. Información relevante para la convergencia y la estabilidad de la respuesta.

Los valores encontrados son:

$$\omega_n = 241,0314 \frac{rad}{s}$$

$$\zeta = 0,3261$$

Teniendo en cuenta que la relación de amortiguamiento es menor a la unidad, el sistema es subamortiguado.

Los polos entonces resultan:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = -78,6 + 227,8i \frac{rad}{s}$$

$$s_3 = -78,6 - 227,8i \frac{rad}{s}$$

Corroborando que se trata de un sistema estable.

Los polos del sistema se pueden graficar en el plano complejo como se muestra a continuación:

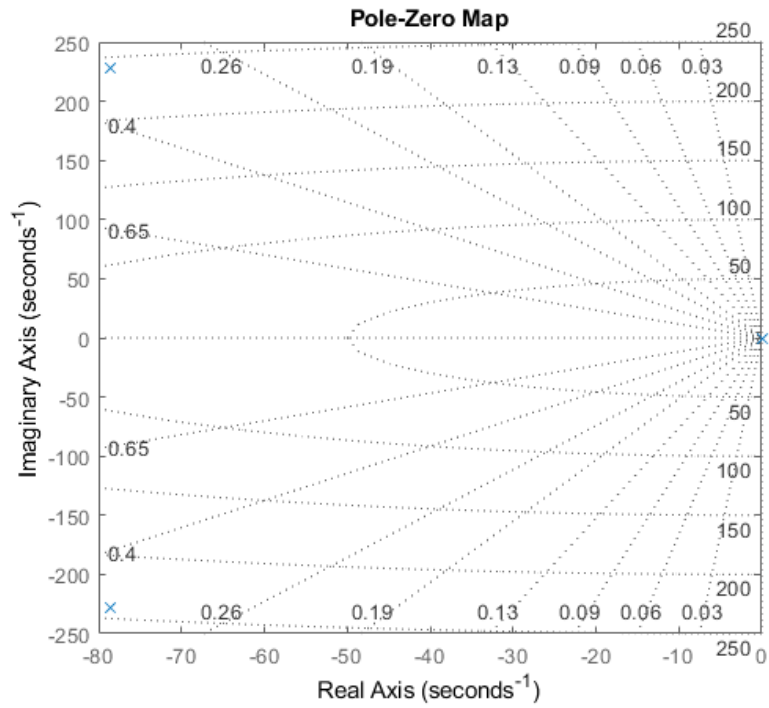


Figura 2: Mapa de polos y ceros del sistema a lazo abierto para la función de transferencia de la entrada a manipular. Se observa la ausencia de ceros del sistema al tratarse de un polinomio de grado cero en el numerador, mientras que los polos (marcados con el símbolo x en el gráfico) no están en el semiplano de números reales positivos, por lo que resulta un sistema estable.

3.2. Respuesta

Para comprobar la respuesta del sistema, tanto de la salida como de las variables de estado, se debe excitar al sistema con un vector de entrada correspondiente para obtener las siguientes gráficas temporales.

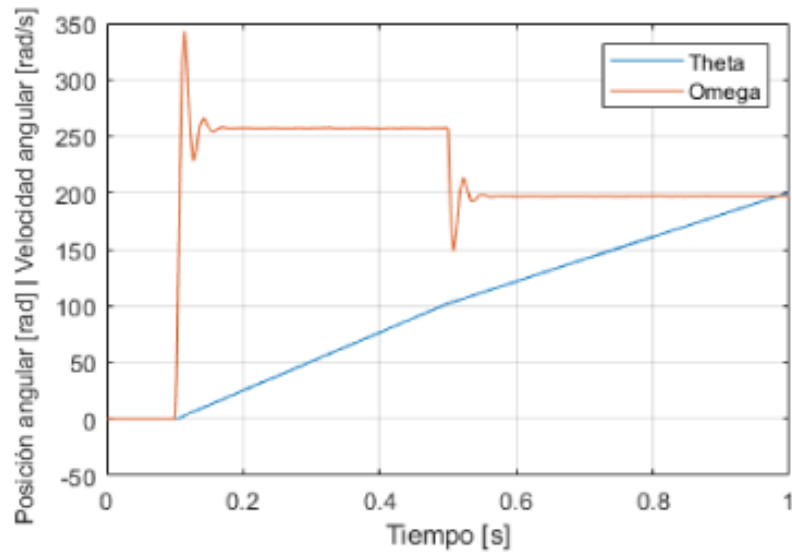


Figura 3: Gráficas de la posición angular y la velocidad angular del rotor en el tiempo donde se evidencia la respuesta del sistema a los impulsos de entrada. Estos impulsos están aplicados desde los 0.1 segundos para la entrada a manipular (diferencia de potencial eléctrico) y desde los 0.5 segundos para la perturbación externa (torque de carga)

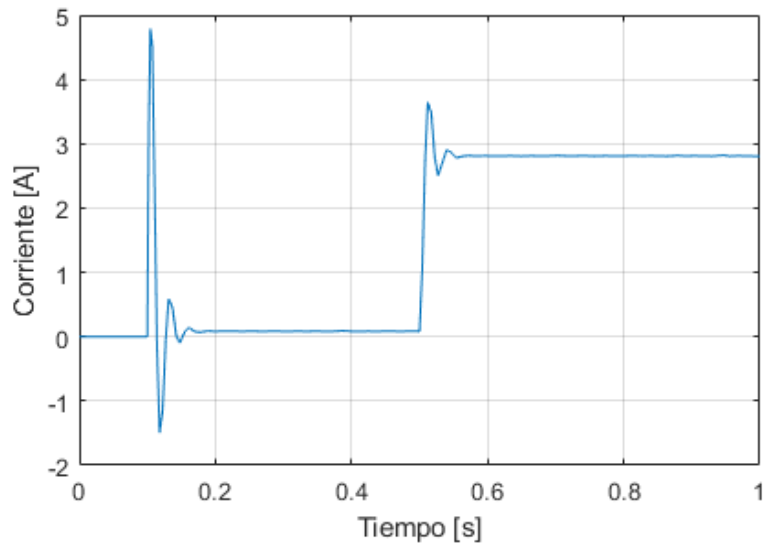


Figura 4: Gráfica de la variación de corriente en el estator a través del tiempo. En esta figura se evidencia la respuesta oscilatoria del sistema a los impulsos de entrada.

Las gráficas 3 y 4 dejan en evidencia que el sistema tiende a oscilar con grandes picos para poder responder a las variaciones repentinas en la entrada. En el caso de la corriente, resulta necesario controlar el alcance de los picos porque pueden dañar el dispositivo (se observa en la gráfica que ha alcanzado aproximadamente los 5A)

De esta forma se puede concluir que el sistema a lazo abierto requiere una metodología de control, no solo para la consigna de salida, sino también para mantener los valores de las variables internas dentro de los rangos de seguridad del dispositivo.

3.3. Criterios de Kalman

Kalman brinda un criterio matemático para conocer de antemano la factibilidad del sistema lineal de ser controlado y observado, a través de los cálculos de “controlabilidad” y “observabilidad”.

Se dice que un sistema es controlable en un instante si es posible mediante un vector de control sin restricciones, transferir el sistema desde cualquier estado inicial a cualquier otro estado en un intervalo de tiempo finito. De forma análoga, se dice que un sistema es observable en un instante, si es posible determinar el estado del sistema al observar la salida sobre un intervalo de tiempo finito[3].

Matemáticamente, para un sistema de tercer orden:

$$Cont = [B, AB, AAB] \quad (10a)$$

$$Obs = [C, CA, CAA]^T \quad (10b)$$

$$\rho(Cont) = \rho(Obs) = 3 \quad (10c)$$

La ecuación 10c muestra el criterio que debe cumplirse para que el sistema sea controlable y observable, y es que las matrices de controlabilidad y observabilidad tengan rango completo. Un cálculo rápido en software Matlab determinó que este criterio se cumple para la formulación del modelo dada hasta el momento, aunque cabe destacar que para el cálculo de la controlabilidad, solo se ha incluido la columna de la matriz B que corresponde a la variable manipulada v puesto que no se puede controlar el sistema a través de la entrada de perturbación externa T_l .

Es posible probar otras formulaciones, donde por ejemplo, la salida del sistema es la velocidad angular (para utilizar un sensor acorde disponible) La matriz C sería entonces: $[0, 1, 0]$ resultando en rango 2 y por consiguiente, no observable. El mismo resultado se obtiene si se intenta observar el sistema desde la corriente.

4. Controlador

El controlador utiliza la entrada al sistema físico para provocar cambios en el sistema que sean deseados. En otras palabras, permite la incorporación de consignas, en este caso de posiciones angulares del motor, que se traducen en posiciones angulares de la articulación del robot. Este elemento es el que permite dirigirlo para ubicarlo en los puntos y orientaciones del espacio que la aplicación requiera.

Existen dos técnicas de control bien diferenciadas, el control a lazo abierto y a lazo cerrado. En el primero basta con conocer el modelo matemático, para dar una consigna basada en la capacidad de predicción que otorga el mismo modelo. Pero este método no es robusto frente a perturbaciones, puesto que no se tiene información de lo que sucedería dentro del sistema ante una entrada no controlable.

Para superar este problema, se utiliza el control a lazo cerrado o control realimentado. Para el cual, se debe conocer lo que sucede en la salida del sistema y así incorporarlo en modo de retroalimentación. Esto se logra a través de sensores.

Para lograr un control robusto, es necesario controlar la posición angular, por lo que se debe demostrar la idoneidad del sistema matricial lineal planteado en las ecuaciones 6 y 7. Y para que se pueda controlar adecuadamente, se ubican sensores, los cuales deben medir variables que sean correctamente observables.

Una vez verificada la observabilidad, y al disponer de un modelo matemático de la planta, es posible recrear las variables internas del sistema, lo cual permite un ahorro en sensores. Esto se logra con un observador de estados.

Para diseñar este controlador, se utilizará una combinación de los elementos descritos en las siguientes subsecciones:

4.1. Controlador PID

El control se basa en proveer una entrada manipulada, tal que la salida sea igual que la deseada, en otras palabras, que el error entre la consigna y la salida sea cero. Para lograrlo se debe incorporar un elemento que procese este error en tres partes:

- **Control proporcional:** la entrada a la planta tendrá una componente proporcional al error. Esta parte puede interpretarse como el control debido al error en el instante actual.
- **Control integral:** La entrada a la planta tendrá una componente integral del error. Se interpreta como el error debido al historial de errores o errores en instantes pasados.
- **Control derivativo:** La entrada a la planta tendrá una componente derivativa del error, la cual se interpreta como el control debido a la predicción de los errores futuros.

Existen ciertos problemas asociados a los controles de tipo proporcional y derivativo para cierto tipo de entradas. Por ejemplo, si la entrada de referencia es un escalón, el control PD lo amplificará en la salida (la derivada de la función escalón es la función impulso), por lo que existen algunas variaciones que permiten evitar este tipo de entradas en los bloques mencionados.

En este proyecto se implementa un control PID de dos grados de libertad, donde el controlador está formado por dos tipos separados de control. Por un lado el control integral deshace el error de estado estable, por lo que tiene como entrada el error entre la referencia y la salida del sistema. Por otro lado, el control proporcional-derivativo tiene como entrada la salida del sistema, lo que evita que la referencia se amplifique (*Set-Point Kick*)

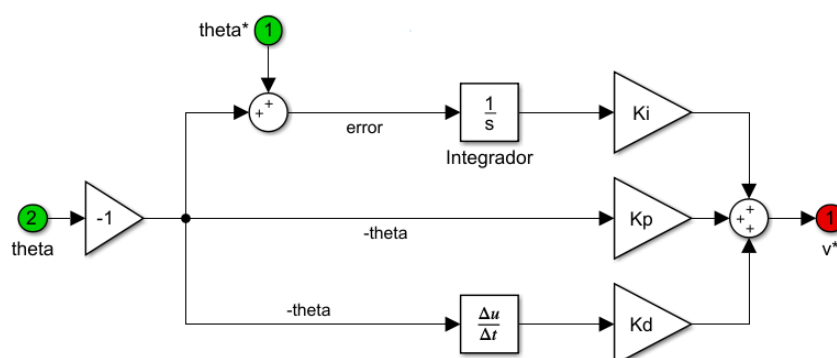


Figura 5: Controlador PID de 2 grados de libertad, a partir del error de posición angular y de la salida del sistema, se genera una consigna de diferencia de potencial eléctrico (v^*), que será luego utilizada como entrada a la planta. El diagrama de bloques escalar sigue las mismas convenciones que las presentadas en la figura 1. Es importante aclarar, que el controlador calcularía un valor meramente numérico de consigna para el potencial eléctrico que requiere la planta, pero en la práctica se requiere físicamente un modulador de tensión para generar efectivamente estas consignas.

El controlador PID estará completamente diseñado una vez que se hayan determinado sus parámetros K_p , K_d , K_i . Para calcularlos, se ha utilizado un método aproximado y experimental de Ziegler y Nichols, en el que se encuentra un valor crítico donde el sistema oscila armónicamente ya que se

cuenta con las herramientas de simulación que lo permite (Matlab con Simulink)

$$V^*(s) = \frac{K_i}{s} E(s) - K_p \theta(s) - K_d s \theta(s) \quad (11a)$$

$$E(s) = \theta^*(s) - \theta(s) \quad (11b)$$

$$V^*(s) = \frac{K_i}{s} \theta^*(s) - \frac{K_i}{s} \theta(s) - K_p \theta(s) - K_d s \theta(s) \quad (11c)$$

$$V^*(s) = \frac{K_i}{s} \theta^*(s) - \left(\frac{K_i}{s} + K_p + K_d s \right) \theta(s) \quad (11d)$$

$$V^*(s) = G_1(s) \cdot \theta^*(s) + G_2(s) \cdot \theta(s) \quad (11e)$$

$$K_p = 0,6K_c; \quad K_i = \frac{K_p}{0,5T_c}; \quad K_d = 0,125K_pT_c \quad (11f)$$

La ecuación 11e demuestra el concepto de dos grados de libertad del controlador PID diseñado, mientras que la expresión 11f indica el método con el que fueron calculados en primera instancia las ganancias del controlador, donde (K_c) es la ganancia proporcional crítica, es decir, la ganancia que hace al sistema oscilar en forma armónica, en cuya situación, el período de oscilación es el período crítico (T_c). Ambos parámetros fueron obtenidos experimentalmente.

4.2. Observador de estados

Esta funcionalidad que forma parte del controlador, puede realizarse porque ya se ha demostrado la observabilidad de la formulación del sistema lineal con sus matrices del sistema (sección 3.3). Y se justifica por lo mencionado en la sección 4.1 donde existen ciertos problemas asociados al uso de bloques derivadores, por lo que en el diseño de un controlador robusto es importante evitarlos.

Del bloque derivador en el controlador PID (Ver figura 5) sale una señal que se trata de una velocidad angular, por ser la derivada de la posición angular, por lo tanto, se puede reemplazar por la variable estimada en un sistema espejo. Como puede visualizarse en la figura siguiente.

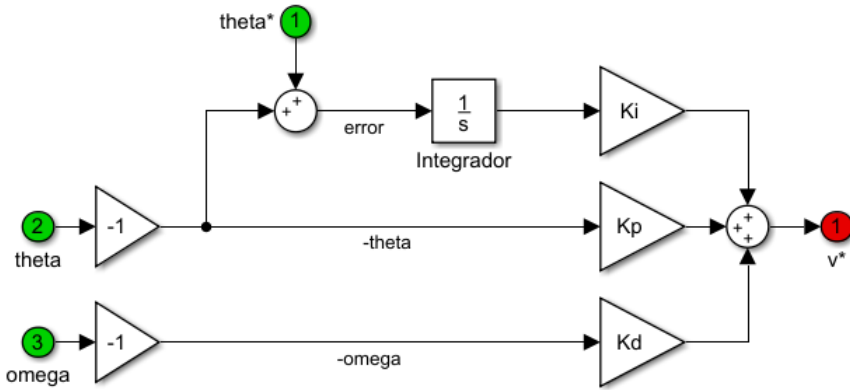


Figura 6: Controlador PID de 2 grados de libertad sin derivador, la señal con derivación ha sido reemplazada por la correspondiente velocidad angular.

Un sistema espejo es una copia de la planta, tan precisa como el modelo matemático lo permita. Este sistema es capaz de estimar las variables de estado del sistema físico real, puesto que, en principio, no se tiene acceso a estas variables, solo a aquella que es parte de la salida del sistema (posición angular del rotor)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \quad (12a)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + Du \quad (12b)$$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x}) \quad (12c)$$

$$\tilde{y} = y - \hat{y} = C\tilde{x} \quad (12d)$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\hat{x} + Bu + L_k\tilde{y} = A\hat{x} + Bu + L_kC\tilde{x} \quad (12e)$$

El conjunto de ecuaciones 12 muestra el diseño de un observador de estados a lazo cerrado para la planta. La denominación circunfleja (por ejemplo: \hat{x}) se utiliza para denotar variables del sistema espejo, mientras que la denominación tilde (por ejemplo: \tilde{x}) se utiliza para denotar variables del sistema error.

La diferencia entre las ecuaciones 12a y 12e es que se ha agregado un término proporcional al error del vector de estado, para lograr que el error en la salida sea nulo, es decir que el estado del observador converja al estado de la planta.

$$L_k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (13a)$$

$$L_kC = \begin{bmatrix} k_1, 0 \\ k_2, 0 \end{bmatrix} \quad (13b)$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - L_kC)\hat{x} + Bu + L_kCx \quad (13c)$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - L_kC)\tilde{x} \quad (13d)$$

Las ecuaciones 13c y 13d representa un sistema observador realimentado y un sistema error respectivamente, en ambos casos con una nueva matriz de transferencia $(A - L_kC)$. Esto implica que se puede elegir la matriz L_k a través de las ganancias (k_1, k_2) para obtener las propiedades deseadas. Estas propiedades, lograrán que las variables del sistema error tiendan a cero en estado estable (cuando el tiempo tienda a infinito o la variable de laplace a cero)

La ecuación 13b muestra que se trata de ganancias únicamente de la variable θ . Nótese además que hay dos ganancias en vez de tres, esto se trata de una simplificación por lo que el observador será de orden reducido (2) por lo que la corriente no tendrá un componente de realimentación. De esta forma, el diseño del observador se limitará a la precisión en las variables mecánicas únicamente.

El siguiente paso consiste en seleccionar los valores escalares de la matriz L_k a través del método de asignación de polos, el cual permitirá obtener las propiedades deseadas, en tal caso, mientras más a la izquierda del plano complejo se encuentren estos, más estable será el sistema completo, aunque se debe alcanzar un equilibrio ya que también aumentan los esfuerzos de control.

$$A_n = (A - L_kC) \quad (14a)$$

$$P(s) = |sI - A_n| \quad (14b)$$

$$P(s) = (s + s_1)^2 = (s - 41P_p) \quad (14c)$$

$$(k_1, k_2) = f(s_1) \quad (14d)$$

La ecuación 14c muestra la asignación de un polo doble, el cual se trata de la parte real de los polos de la planta, pero 41 veces más a la izquierda para estabilidad y convergencia de la salida observada con la salida del sistema. Esta escala se ha seleccionado observando el equilibrio entre los esfuerzos de control y la estabilidad del sistema.

En la ecuación 14d se manifiesta la dependencia funcional de las ganancias de realimentación con el polo doble asignado arbitrariamente, el cálculo formalmente implica la resolución de un sistema de ecuaciones.

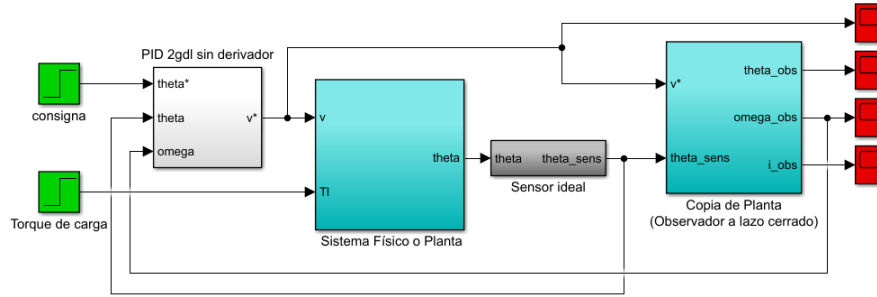


Figura 7: Sistema Planta-Controlador completo, representación escalar de los distintos componentes del sistema. El observador de estados y el controlador PID son ambas partes del controlador general de esta articulación, aunque se muestran por separado para una vista simplificada.

De esta forma queda diseñado completamente el controlador, ya que hay convergencia tanto entre la salida y la consigna, como de la salida observada y la del sistema.

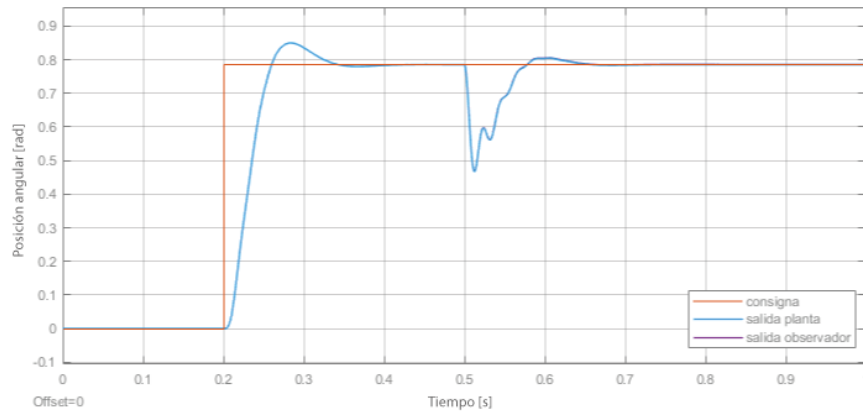


Figura 8: Representación temporal para comparación de las señales de salida del sistema, salida del sistema observador y consigna. Puede apreciarse la convergencia de ambos sistemas con la consigna, lo que resulta en un control exitoso. También se observa los efectos de las entradas sobre el sistema físico, principalmente a tener en cuenta el del torque de carga (en $t = 0,5s$) ya que se observan oscilaciones más erráticas. Además, la diferencia entre la variable estimada con su homónima de la planta es casi indistinguible.

5. Procesamiento de señales digitales

Hasta el momento se ha modelado el sistema físico y diseñado un controlador que es capaz de generar consignas de diferencia de potencial eléctrico para alcanzar la posición angular deseada, junto con un observador de estados que permite tener acceso a todas las variables internas del sistema, pero se ha asumido que se puede acceder libremente y sin ningún tipo de conflicto a la salida del sistema, cuando en la práctica, se requiere de sensores que introducen otros conflictos.

Como la salida del sistema físico está compuesta únicamente por la posición angular, se requiere solamente un sensor para realimentar apropiadamente el sistema y cerrar el lazo de control, aunque en la práctica se requiere monitorear otras magnitudes como la corriente y la temperatura por cuestiones

de seguridad.

Si el comportamiento del sistema es correcto, la señal de salida de la planta será lo más parecida posible a la consigna dada, siendo esta de un perfil trapezoidal periódica con período de 5s.

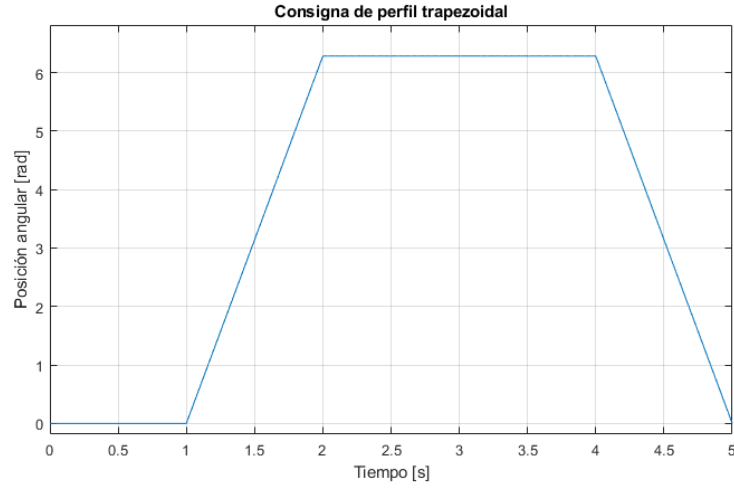


Figura 9: Consigna de posición angular a través del tiempo con perfil trapezoidal.

Cuando se mide un parámetro del mundo físico, se obtiene cada vez un valor ligeramente diferente. Estas fluctuaciones se denominan ruido[4], donde el objetivo es reducirlo. Uno de los problemas a confrontar cuando se utilizan sensores es el nivel de ruido y esto puede solucionarse utilizando filtros.

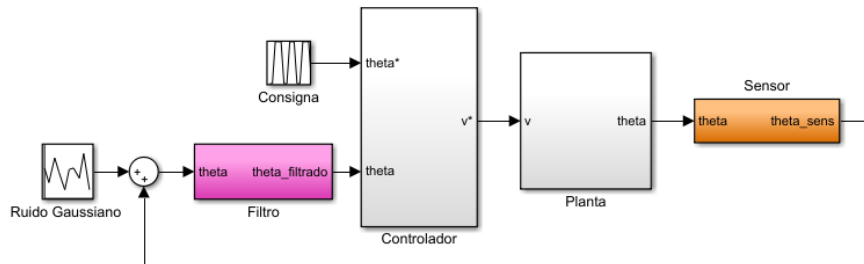


Figura 10: Representación de los bloques principales del sistema completo cuando se le agrega el sensor a la salida. Puede observarse la presencia de ruido que afecta la señal de entrada al controlador, lo que hace necesario la incorporación de un filtro.

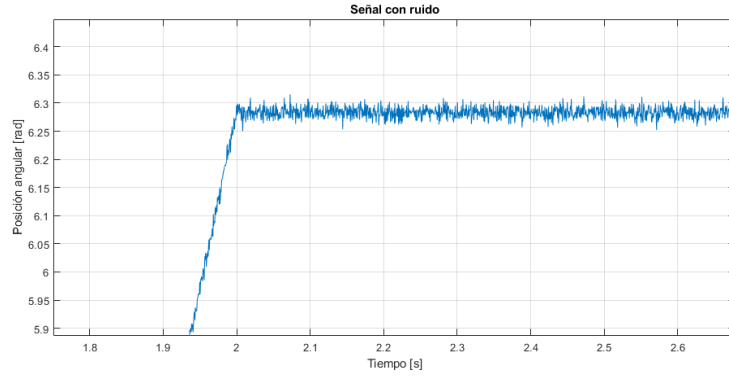


Figura 11: Gráfica de la señal con ruido blanco gaussiano que se obtiene al medir la salida de la planta. Esta señal pasará por un filtro que se debe diseñar con las características propicias.

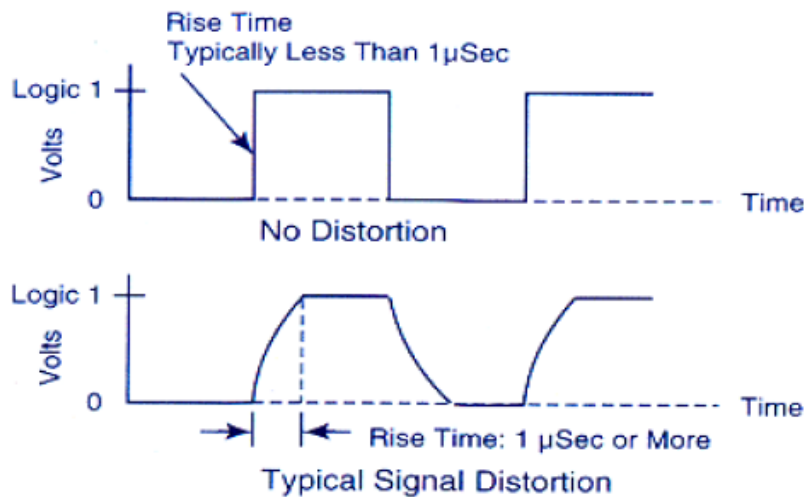


Figura 12: Distorsión en la onda de salida representada por el tiempo de subida[5].

Este nivel de ruido mostrado en la figura 11, dado por un valor de SNR de 53.979 dB, ha sido obtenido a través del retraso que introduce el ruido en la onda cuadrada de la salida de un codificador rotatorio (*encoder*), el cual es menor a $4 \mu s$ según hoja de datos[6]. Ver anexos para detalles de cálculo.

5.1. Modelado del Sensor

Se modelará el comportamiento interno del sensor, el cual entrega un valor digital, por lo que se incluirá en el modelo un conversor analógico/digital. La conversión se realiza en dos etapas, de muestreo y la conversión propiamente dicha. La toma de muestras de la señal continua se puede realizar con un bloque de retención de orden cero, es decir, que la muestra se mantiene en valor constante hasta la obtención de la próxima muestra. Si bien existen otros métodos más convenientes (menos escalonados) cuando la frecuencia de muestreo tiende a infinito (o el período de muestreo tiende a cero) los métodos otorgan el mismo resultado.

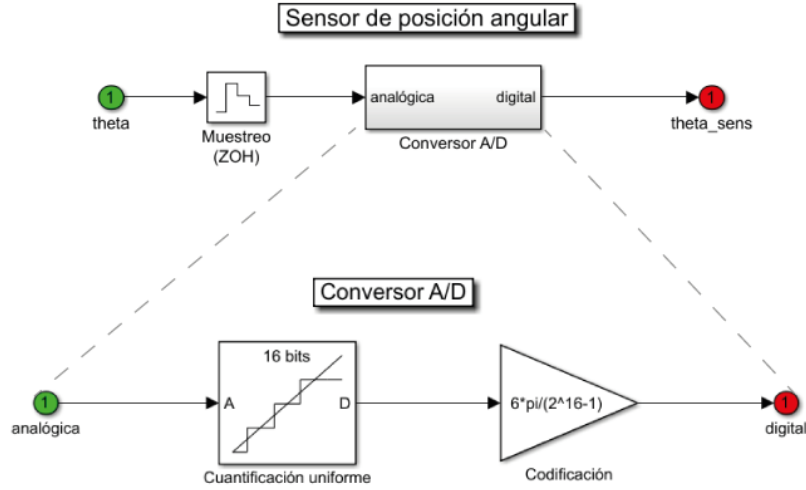


Figura 13: Representación gráfica del funcionamiento interno del sensor en bloques.

El muestreo debe hacerse a la frecuencia adecuada para evitar el efecto de solapamiento (*aliasing*). Según el teorema de Nyquist-Shannon, la frecuencia de muestreo debe ser mayor al doble de la frecuencia máxima. Se ha seleccionado una frecuencia de muestreo de 50 KHz para cubrir un rango de frecuencias de hasta 25 kHz.

Una vez obtenidas las muestras se cuantifican de forma uniforme con n bits de resolución, por lo que los valores muestreados de la señal variarán entre 0 y $(2^n - 1)$ y deben ser cambiados de escala para representar el valor correcto. Sin embargo, aunque la escala sea la correcta, los valores digitales no son precisamente los valores muestreados porque existe un error de cuantización que se define como la diferencia entre estos valores.

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n] \quad (15a)$$

$$\hat{x}[n] = x[n] + e[n] \quad (15b)$$

Como se observa en la ecuación 15b el error puede ser modelado como ruido aditivo en la señal muestreada[7]

La cantidad de bits del cuantizador (resolución) debe ser seleccionada adecuadamente para evitar utilizar una gran parte de estos para medir ruido, aunque esta magnitud también se encuentra limitada por la precisión que se debe cumplir para la aplicación en cuestión, dado que el robot debe cumplir con una precisión de orden milimétrica, se requieren al menos 14 bits, aunque por conveniencia se utilizan 16.

$$q = \frac{2V_p}{2^b} \quad (16a)$$

$$q \leq p \quad (16b)$$

$$b \geq \frac{\log(\frac{2V_p}{p})}{\log(2)} \approx 14 \quad (16c)$$

Como el error de cuantización puede modelarse como ruido, es posible calcular la relación señal a ruido del convertor A/D, la cual procede de las siguientes formas:

$$SNR_{ADC} = 10 \cdot \log \left(\frac{\sigma_{signal}^2}{\sigma_{ADC}^2} \right) \quad (17a)$$

$$SNR_{ADC} = 20 \cdot \log(LF) + 4,77 + 6,02B \quad (17b)$$

En las ecuaciones 17 las magnitudes: σ^2 representa la varianza, LF representa el factor de carga y b representa la cantidad de bits del cuantizador. El valor para esta relación entre señal y ruido es de 94.8029 dB. Este valor de SNR es mayor que el valor para el ruido gaussiano (53.979 dB), lo que implica que el ruido debido al error de cuantización es menor, por lo tanto el conversor A/D es apropiado para el nivel de ruido en las mediciones del sensor.

5.2. Diseño del Filtro

Entre los filtros discretos se encuentran filtros en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, y su diferencia en uso se basa en la naturaleza de la información contenida en la señal. Para el caso de un sensor de posición angular, donde la información de cada muestra es independiente de las demás, se utilizará un filtro en el dominio del tiempo, aunque se debe tener en cuenta que al no ser posible la optimización en ambos dominios, los filtros en el dominio del tiempo tienen un bajo rendimiento en el dominio de la frecuencia.

La ventaja de utilizar filtros FIR (Respuesta finita al impulso) es su estabilidad, ya que siempre son estables. De estos se ha seleccionado el filtro de medias móviles, el cual consiste en la convolución de la señal de entrada con un pulso rectangular de área unitaria como se describe en el grupo de ecuaciones 18.

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (18a)$$

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k] \quad (18b)$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) \quad (18c)$$

Este reduce el ruido blanco aleatorio considerablemente mientras suaviza las curvas, lo que en principio es una desventaja. Pero su efectividad no se verá limitada puesto que es parte de los requisitos disponer de curvas mecánicas continuas y suaves para proteger la integridad de los actuadores. Aunque tiene asociado dos problemas que se deben tener en cuenta, el retraso que sufre la señal filtrada con respecto a la señal con ruido, y la caída de ganancia, factores que se vuelven considerables al aumentar la cantidad de muestras a promediar (N).

En este sentido, debido a la caída de ganancia, el valor de N se encuentra limitado (caída de 3 dB) según la ecuación 19, donde se espera que el robot funcione como máximo a 10 Hz, mientras que las muestras se obtienen a 50 kHz.

$$N_{max} = \text{round} \left(0,443 \cdot \frac{f_s}{f_{co}} \right) = 2215 \quad (19)$$

En todo caso, el valor utilizado está por debajo de este valor máximo, evitando la caída de ganancia mencionada, y manteniendo la señal filtrada en un valor aceptable. Para esto se ha utilizado un valor de N de 700.

6. Resultados

En esta sección se integran todas las partes involucradas para observar el desempeño del sistema completo. Se le dará al sistema la consigna trapezoidal indicada en la figura 9 y se compararán los resultados con valores de referencia para hacer conjeturas sobre el rendimiento de los subsistemas más relevantes.

Cabe destacar que los bloques integradores continuos presentes en el controlador, han sido reemplazados por integradores discretos para una mejor correspondencia de la naturaleza de las señales en el modelo en Simulink.

En primera instancia se evalúa el rendimiento del sensor. Si bien las señales son de naturaleza diferente (analógica y digital) la segunda debe seguir correctamente la primera, con un error mínimo y tolerable.

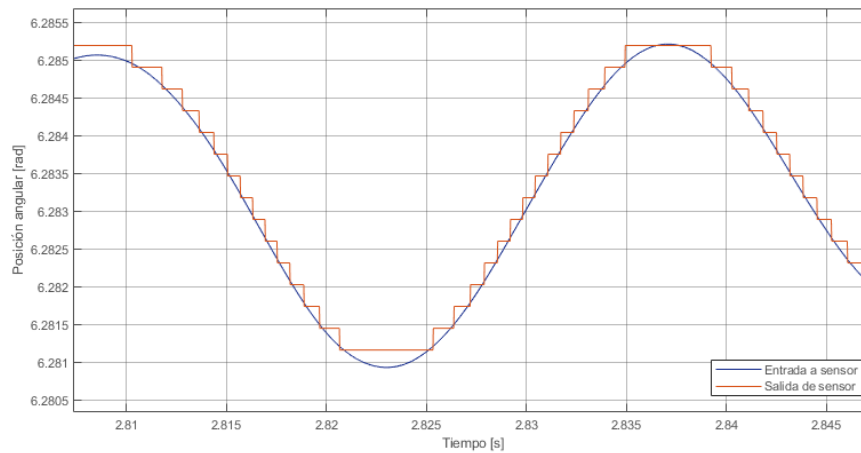


Figura 14: Comparación entre la entrada al sensor (en azul, una señal analógica) con la salida del sensor (en anaranjado, una señal digital cuantizada y codificada).

Puede observarse en la figura 14 el correcto funcionamiento del sensor, aunque la validación se da al analizar el error de cuantización.

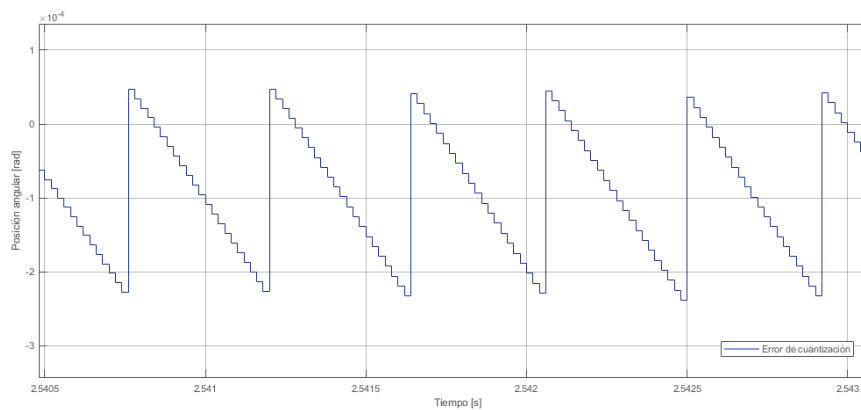


Figura 15: Error de cuantización para el convertor A/D del sensor de posición angular.

Puede observarse en la figura 15 que el error de cuantización está en el orden de 10^{-4} siendo menor que la precisión prometida.

En segunda instancia, se evalúa el rendimiento del filtro. El ruido debe reducirse y obtener una señal

lo más similar posible a aquella previa a la adición del ruido gaussiano. El criterio de éxito se establece a continuación: El filtro habrá reducido correctamente el ruido cuando el valor pico a pico de la señal filtrada correspondiente a la parte constante de la consigna, sea menor o igual que la precisión deseada, en el orden de (10^{-3})

Como este valor no se superó para $N = 700$ se incrementó a 1000, obteniendo un valor pico a pico de $9,075 \cdot 10^{-4}$ cumpliendo con las especificaciones, pero se debe tener en cuenta la desventaja que implica un valor mayor para N , y es que introduce un retraso de $N/2 = 500$ muestras entre la entrada y la salida. Aunque para la frecuencia de muestreo utilizada, solo se traduce en una centésima de segundo.

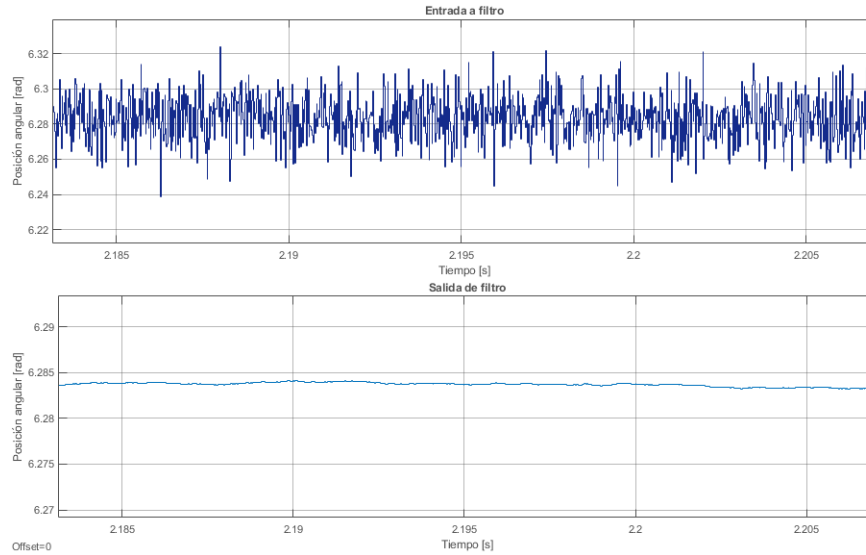


Figura 16: Resultado de la aplicación del filtro de medias móviles en un segmento de tiempo reducido para mejor visualización.

Como última instancia, se evalúa el rendimiento del controlador. Teniendo en cuenta que el sistema físico es controlable, es posible llevarlo a un valor deseado (consigna), por lo que el criterio se basa en determinar si la salida del sistema converge al valor deseado. Como no es posible obtener la salida de la planta sin la introducción de ruido, se comparará la consigna con la señal que ingresa al controlador como realimentación, la cual es una señal que ya ha sido filtrada.

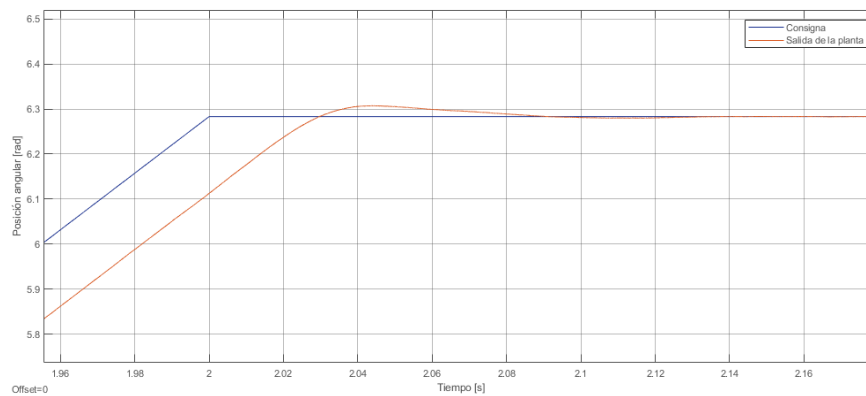


Figura 17: Comparación entre la consigna (entrada del controlador) y la salida de la planta sensada y filtrada.

Con propósito comparativo y de referencia, es posible realimentar el sistema directamente desde la

salida de la planta, únicamente disponible en un contexto de simulación. El objetivo es poder evaluar y comparar la efectividad del controlador aislado de los conflictos del sensor y filtro.

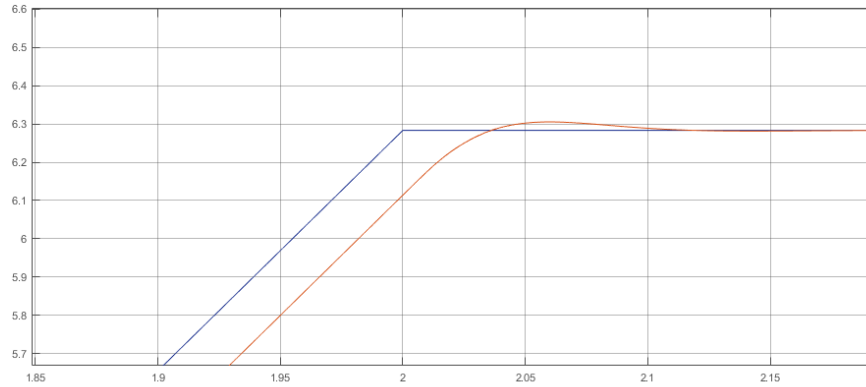


Figura 18: Comparación entre la consigna (entrada del controlador) y la salida de la planta.

En términos generales puede observarse la idoneidad del sistema completo ya que el controlador lleva al sistema físico a los valores deseados en la salida, aunque con cierto retraso perceptible debido al filtrado y al tiempo de convergencia (cercando a los $0,2s$) pero aceptable para la aplicación elegida. Además se pudieron comprobar las especificaciones eléctricas del actuador como se muestra en la siguiente tabla:

Cuadro 1: Comparación entre valores eléctricos máximos aceptables y valores máximos utilizados en el sistema.

	Máxima aceptable	Máxima utilizada
Tensión	12 V	1,229 V
Corriente	800 mA	41,23 mA

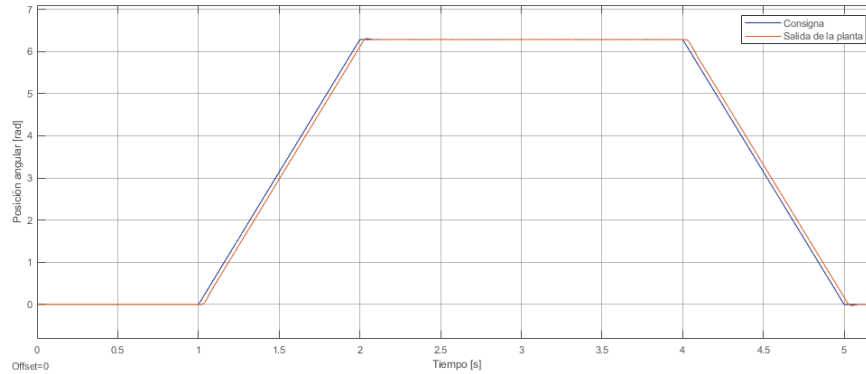


Figura 19: Comparación entre la consigna (entrada del controlador) y la salida de la planta sensada y filtrada para un período completo.

7. Conclusiones

En cuanto al cumplimiento de objetivos, se obtuvo un modelo matemático modular que comprende los subsistemas electromagnético y mecánico con sus correspondientes procesos de conversión de energía.

Se analizó y comprobó la controlabilidad y observabilidad del sistema a través de las matrices del sistema lineal, el cual permite y fundamenta el control, estimación y medición de los parámetros de

la planta.

Se utilizó un control realimentado donde se utiliza la entrada del sistema para incorporar la consigna, la cual es generada por un controlador PID que ha sido modificado para evitar problemas conocidos en la salida, además que se incorpora la variable estimada de la velocidad angular obtenida desde el obserador de estados.

Se obtuvo las gráficas correspondientes con sus respectivas referencias para juzgar la respuesta del sistema ante perturbaciones externas y ruido en las mediciones.

Se implementó un filtro para eliminar el ruido blanco gaussiano en la entrada al controlador de forma exitosa, mientras que se modeló el proceso de medición del sensor de posición angular con su respectivo muestreo y conversión analógica/digital. En este último, el error de cuantización es menor que la precisión especificada y el nivel de ruido es suficientemente bajo.

Como desarrollo futuro, se puede diseñar el control para el resto de las articulaciones cambiando los parámetros del modelo para luego ajustar los del controlador. Además, se puede mejorar el tiempo de respuesta del sistema con respecto a la consigna.

Bibliografía

Rodrigo Gonzalez. Filminas de clase. Control y Sistemas (Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Cuyo) <https://github.com/rodraz/Control>

Ogata. Diseño de control moderno. 5ta edición. Pearson.

Lyons. Understanding Digital Signal Processing. 3ra edición, Prentice Hall

Rodrigo Gonzalez. Guía para la redacción del proyecto final de Control y Sistemas. 2020. <https://es.overleaf.com/project/5ce7209e973f0d6ead24dcef>

Real Academia Española, tecnicismos, neologismos y extranjerismos en el español. 2019. <http://revistas.rae.es/bilrae/article/view/218/525>

Referencias

- [1] Katsuhico Ogata. *Modern Control Engineering*, chapter 1, page 3. Pearson, 5 edition, 2010.
- [2] Katsuhico Ogata. *Modern Control Engineering*, chapter 5, page 223. Pearson, 5 edition, 2010.
- [3] Katsuhico Ogata. *Modern Control Engineering*, chapter 9, page 675. Pearson, 5 edition, 2010.
- [4] Richard G. Lyons. *Understanding Digital Signal Processing*, chapter 9, page 675. Prentice Hall, 3 edition, 2007.
- [5] Anónimo. *Manual de aplicación de encoders*. West Instruments de México, 1 edition. <https://www.acomee.com.mx/clasificaciones/ENCODERS.pdf>.
- [6] Anónimo. Technical datasheet, incremental encoder ri 42. Technical report, Hengstler, 2008. https://www.hengstler.de/gfx/file/shop/encoder/RI42/Datasheet_RI42_en.pdf.
- [7] Alan V. Oppenheim Ronald W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*, chapter 4, page 223. Pearson, 3 edition, 2010.

Anexo

Código para Matlab

```
%Control y Sistemas / Facultad de Ingeniería
%Proyecto Integrador / Agosto de 2020
%Franco Bizzotto (10168)

% Parámetros dinámicos:
r = 314;
J = 5.65e-6;
b = 1.5e-5;
Tlc = 40;
Tl = Tlc/r;
v = 12;

% Parámetros eléctricos:
R = 1.02;
L = 0.0066;
KE = 3*0.01546;
KT = KE;

% Parámetros de segundo orden:
wn = sqrt((b*R+KT*KE)/(J*L));
z = (J*R+b*L)/(J*L*2*wn);

% Polos del sistema:
syms s
P = (J*L)*(s^2 + 2*z*wn*s + wn^2);
Pp = double(solve(P==0))

% Mapa de polos y ceros:
H = tf([KT/(J*L)], [1 2*z*wn wn^2 0]);
pzmap(H)
sgrid

% Sistema lineal matricial:
A = [0 1 0; 0 -b/J KT/J; 0 -KE/L -R/L];
B = [0 0; 0 -1/J; 1/L 0];
Bv = B(:,1);
Bt = B(:,2);
C = [1 0 0];
D = [0 0];

Cont = [Bv,A*Bv,A*A*Bv]; %Matriz de Controlabilidad
Obs = [C;C*A;C*A*A]; %Matriz de Observabilidad
rank(Cont)
rank(Cont)

% Muestreo:
fs = 50000; %Frecuencia de muestreo

%% PID tuning:
Kpc = 7.34377; %Kp crítico
Pcr = 53.887e-3; %Período crítico
```

```

Ti = 0.5*Pcr;
Td = 0.125*Pcr;
Kp = 0.6*Kpc;

Ki = Kp/Ti;
Kd = Kp*Td;

polos=J*L*s^2*(s^2+2*z*wn*s+wn^2)+KT*(Kd*s^2+Kp*s+Ki);
Eq1 = polos==0;
ppc=double(solve(Eq1,s)) %Polos planta-comntrolador

%% Observador de estados:
syms k1 k2 s
Lk = [k1;k2];
An = A(1:2,1:2)-Lk*C(1:2); %Nueva matriz de transferencia. Con matrices del sistema reducidas (sin
p = mean(ppc); %Polo doble como el promedio de todos los polos del sistema

lambda=eig(An);
Eqp1 = lambda(1,1)==41*real(Pp);%Pp(1);
Eqp2 = lambda(2,1)==41*real(Pp);%Pp(2);
[k1e,k2e] = solve(Eqp1,Eqp2,[k1,k2]);
k1e=double(k1e);
k2e=double(k2e);

p_rec=double(subs(lambda,[k1 k2],[k1e k2e]))

k1=k1e %Para simulink
k2=k2e %idem

%% Ruido:

M = 10000;
t = linspace(0,5,M);
m = 2*pi;
d = 4e-6;
x1 = zeros(1,M);
x2 = m*(t-1);
x3 = 2*pi*ones(1,M);
x4 = -m*(t-5);
xt = [x1(1:M/5) x2(M/5+1:2*M/5) x3(2*M/5+1:4*M/5) x4(4*M/5+1:M)];
figure
plot(t,xt)
grid on
Rms = rms(xt); %Valor eficaz
LF = Rms/max(xt); %Factor de carga
hold on
plot(t,Rms*ones(1,M))
legend({'Señal','RMS'})
SNR_adc = 20*log(LF) + 4.77 + 6.02*16
SNR = 10*log10(1/d)
xc = awgn(xt,SNR,'measured');
figure
plot(t,xc)
grid on
title('Señal con ruido')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Posición angular [rad]')

```


$N = 1000;$