

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Engenharia Mecânica
Vibrações Mecânicas

Eduardo Santos de Oliveira Marques
Pablo Henrique de Oliveira
Samuel Nazaret Lopes
Vinicius de Oliveira Carvalhaes Figueira
Vinicius de Souza Baptista

Trabalho Final

Juiz de Fora
2024

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Sistema Massa-Mola	5
Figura 2 – Sistema massa-mola	6
Figura 3 – Sistema massa-mola-amortecedor	6
Figura 4 – Sistema Massa-Mola com 2 GDL's	9
Figura 5 – Sistema Massa-Mola com 2 GDL's	14

LISTA DE SÍMBOLOS

k	Constante de amortecimento da mola
m	Massa do objeto
t	Tempo
V	Velocidade do objeto
x	Posição do objeto
\dot{x}	Velocidade (derivada da posição)
\ddot{x}	Aceleração (segunda derivada da posição)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	4
2	REFERENCIAL TEÓRICO	5
2.1	SISTEMA MASSA-MOLA	5
2.1.1	1 grau de liberdade	5
2.1.2	2 graus de liberdade	9
3	APLICAÇÕES	12
3.1	ENGENHARIA CIVIL E ESTRUTURAL	12
3.2	ENGENHARIA MECÂNICA E AUTOMOTIVA	12
3.3	ENGENHARIA AEROESPACIAL	12
3.4	INDÚSTRIA DE ELETROMÉSTICOS E ELETRÔNICOS	13
3.5	DISPOSITIVOS ELETRÔNICOS E TECNOLÓGICOS	13
4	RESOLUÇÃO ANALÍTICA	14
5	RESOLUÇÃO NUMÉRICA	17
6	CONCLUSÃO	23

1 INTRODUÇÃO

O estudo das vibrações mecânicas é essencial para o entendimento do comportamento dinâmico de sistemas físicos. Vibrações podem ser encontradas em diversas áreas da engenharia, como em sistemas de suspensão de veículos, máquinas industriais, pontes e estruturas civis. Dentre os modelos utilizados para representar e analisar vibrações, os sistemas massa-mola e massa-mola-amortecedor se destacam por sua simplicidade e aplicabilidade em diversas situações. Esses sistemas são amplamente utilizados para modelar, de forma simplificada, fenômenos vibratórios, proporcionando uma base para o entendimento de sistemas mais complexos e possibilitar resoluções analíticas. O comportamento dinâmico de ambos os sistemas citados podem ser descritos por equações diferenciais, cuja solução permite prever a resposta do sistema em função do tempo a diferentes condições iniciais e externas.

Partindo do apresentado acima, este trabalho consiste na elaboração de uma resolução numérica para um sistema massa-mola com dois graus de liberdade, sendo possível editar dados como massa, constante de rigidez, condições iniciais do conjunto e obter ao final a resposta em função do tempo do sistema.

Inicialmente foi feita a fundamentação teórica, a qual possibilitou o entendimento do caso e orientou a elaboração de uma resolução analítica, sendo esta desenvolvida com alguns parâmetros e condições iniciais pré definidas para que posteriormente, com os mesmos parâmetros e condições, fosse possível comparar com a resolução numérica e validar o código desenvolvido. Ao final é apresentado ainda as conclusões acerca dos resultados obtidos em ambas as resoluções bem como as devidas explicações.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 SISTEMA MASSA-MOLA

As vibrações mecânicas estão presentes em uma ampla variedade de sistemas no mundo físico, desde o funcionamento de máquinas industriais até os movimentos de estruturas civis, como pontes e edifícios. O estudo dessas vibrações é essencial para o desenvolvimento de projetos que garantam a segurança e o desempenho adequado de equipamentos e construções, além de evitar falhas catastróficas devido à fadiga e desgaste. Um dos modelos mais básicos e fundamentais no estudo das vibrações é o Sistema Massa-Mola (Figura 1).

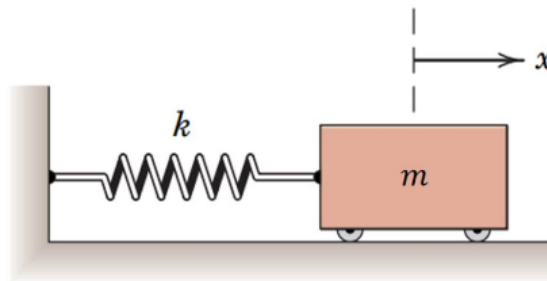


Figura 1 – Sistema Massa-Mola

Esse sistema consiste em uma massa (m) conectada a uma mola (k) que pode ser comprimida ou esticada, o que gera um comportamento oscilatório. O movimento deste sistema, quando deslocado de sua posição de equilíbrio, fornece uma compreensão inicial de como as forças elásticas e inerciais interagem para produzir vibrações periódicas.

O Sistema Massa-Mola é amplamente utilizado para modelar vibrações simples, sendo a base para o entendimento de sistemas mecânicos mais complexos. Sua simplicidade matemática e a facilidade de visualização permitem que engenheiros e cientistas analisem o comportamento dinâmico de sistemas reais de maneira eficaz. Além disso, as equações que descrevem o movimento de sistemas massa-mola podem ser estendidas para incluir amortecimento e forças externas, permitindo a análise de uma gama mais ampla de cenários vibratórios.

2.1.1 1 grau de liberdade

Dentro da análise de um sistema em vibração, é possível categorizá-lo como sendo um sistema com 1 grau de liberdade (1 GDL), ou seja, um conjunto massa-mola ou massa-mola-amortecedor que pode ser descrito por uma única coordenada que especifica a posição da massa no tempo.

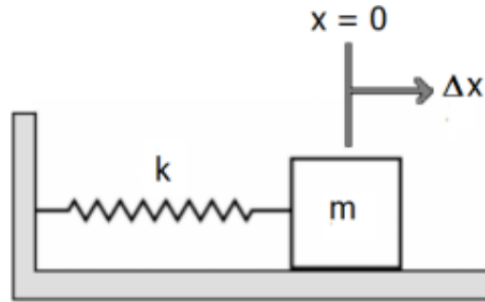


Figura 2 – Sistema massa-mola

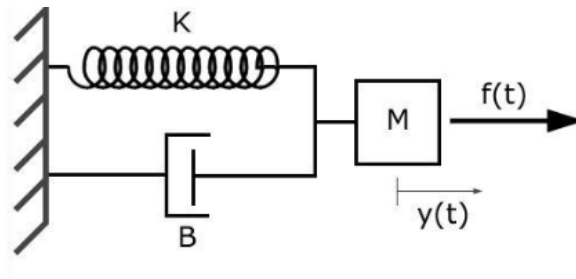


Figura 3 – Sistema massa-mola-amortecedor

Através das indicações presentes nas figuras acima, é possível elaborar o equacionamento para representar o sistema de 1 GDL de massa-mola. Uma força externa deslocando a massa e a retirando de sua condição inicial de equilíbrio leva o sistema a ter duas forças atuantes, sendo uma devido a mola e outra devido a massa.

$$F(t) = -kx$$

$$F(t) = m\ddot{x}$$

Considerando que a força externa no sistema gerou uma perturbação no sistema e igualando as forças propostas como atuantes no conjunto, chega-se em:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Para um sistema massa mola tem que a solução geral é :

$$x(t) = Ce^{st}$$

Contudo, ao utilizar a equação característica na solução geral, existem duas raízes possíveis para o sistema,

$$0 = ms^2 + k$$

$$s = \pm \left(-\frac{k}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm i\omega_n$$

A partir da manipulação da equação característica, obtêm-se a frequência natural. Esse dado indica a frequência em que um objeto vibra livremente sem a aplicação de forças externas, sendo calculado por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como observado anteriormente, duas raízes são consideradas, de modo que ao aplicá-las na solução geral proposta e somando as duas situações obtém-se:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}$$

De maneira empírica, é possível concluir que o sistema oscilará devido a presença da mola no sistema. Assim, torna-se mais conveniente expressar a solução geral por uma combinação de senos e cossenos, de modo que é possível utilizar a identidade de Euler:

$$e^{i\alpha t} = \cos(\alpha t) \pm \text{sen}(\alpha t)$$

O que leva a seguinte solução geral, ao aplicar também as condições iniciais:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \text{sen}(\omega_n t)$$

Condições iniciais são indicadas por:

$$x(t=0) = A_1 = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = \omega_n A_2 = \dot{x}_0$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t)$$

Outra possibilidade de um sistema de 1 GDL seria o sistema-massa-mola-amortecedor, sendo representado na Figura 3. Nesse sistema, também é possível elaborar o equacionamento para representar o sistema de 1 GDL de massa-mola-amortecedor. Iniciando-se pela Segunda Lei de Newton, tem-se:

$$\sum F = m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F$$

Partindo desse ponto, é possível representar o movimento do sistema como:

$$F = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx$$

Realizando algumas manipulações, como utilizar a equação característica e encontrar as suas raízes, é possível assumir que as soluções são funções exponenciais, sendo a solução geral a combinação das funções exponenciais citadas. Assim, as seguintes equações são válidas:

$$ms^2 + cs + k = 0$$

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} \quad x(t) = C_2 e^{s_2 t}$$

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{c}{2m} + \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}} t} + C_2 e^{-\frac{c}{2m} - \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}} t}$$

A partir da solução geral acima, é possível definir outros pontos importantes para a caracterização do sistema proposto. Ressalta-se que C_1 e C_2 são constantes determinadas a partir das condições iniciais propostas para o caso analisado. Analisando a solução, pode-se encontrar algumas propriedades importantes do sistema. A frequência natural do sistema, assim como no sistema não-amortecido, representa como o sistema oscila livremente na ausência de amornecimento e forças externas, é representada pela seguinte equação:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Outra propriedade relevante na definição final do sistema é o amortecimento critico, o qual representa um valor para qual o sistema retorna ao seu estado de equilíbrio no menor tempo sem oscilar.

$$c_c = 2m\sqrt{km} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n$$

Vinculado à propriedade acima, define-se ainda o fator de amortecimento, que determina a relação entre o amortecimento real do sistema e amortecimento critico, podendo ser interpretado como a energia de um sistema oscilatório é dissipada ao longo do tempo.

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

Agora, é possível reescrever a solução geral em função desses dados dispostos, o que leva a essa nova formulação geral:

$$x(t) = C_1 e^{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} + C_2 e^{-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t}$$

2.1.2 2 graus de liberdade

Ao estudar sistemas sujeitos a vibrações, observa-se que eles não se limitam apenas a um grau de liberdade, podendo haver a múltiplos graus de liberdade.

Para determinar o número de graus de liberdade de um sistema, deve-se considerar a quantidade de corpos e a quantidade de tipos de movimentos possíveis de cada massa, sendo o produto o grau de liberdade do conjunto.

Falando de um sistema com 2 graus de liberdade, é possível afirmar que se trata de um sistema que utiliza duas coordenadas independentes para descrever o movimento.

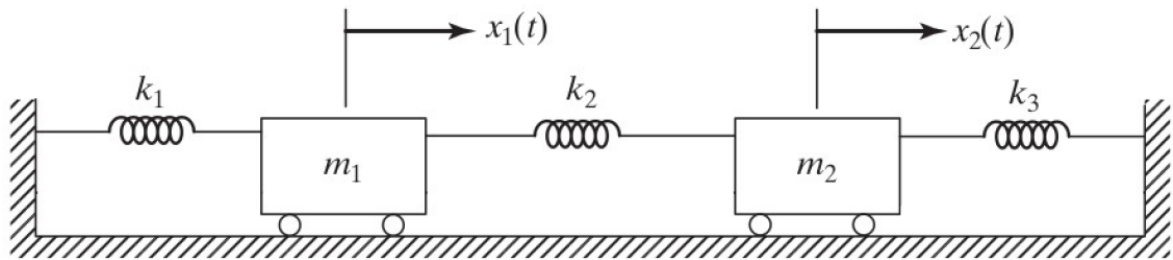


Figura 4 – Sistema Massa-Mola com 2 GDL's

Adequando a equação de 1 GDL para 2 GDL's, é possível obter:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2) x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3) x_2(t) = 0$$

Representando também na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = [m]$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} = [k]$$

Pode-se admitir que as soluções para as equações apresentadas acima são da forma:

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi)$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \phi)$$

Aplicando a primeira e segunda derivada nas soluções propostas e substituindo-as no sistema inicial, é possível obter:

$$[m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)X_1 - k_2X_2]\cos(\omega t + \phi) = 0$$

$$[-k_2X_1 + m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)X_2]\cos(\omega t + \phi) = 0$$

Observa-se que há uma solução trivial, sendo $X_1 = X_2 = 0$, no entanto, para esse caso não há vibração. Sendo assim, o sistema pode ser resolvido, havendo vibração, considerando:

$$\det = \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante:

$$(m_1m_2)\omega^4 - [(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1]\omega^2 + [(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2] = 0$$

A equação acima representa a equação da frequência natural, na qual possui duas raízes, sendo caracterizada como as frequências naturais do sistema.

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1m_2} \right\} \mp \frac{1}{2} \left[\left(\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1m_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1m_2} \right) \right]^{1/2}$$

Obtida as frequências naturais (ω_1 e ω_2), é possível calcular as razões entre as amplitudes, através das seguintes equações:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_2\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$$

Ao obter as razões entre as amplitudes, é possível calcular as amplitudes para cada massa individualmente, tendo-se para m_1 :

$$X_1^{(1)} = \frac{1}{r_2 - r_1} \sqrt{\{r_2 \cdot x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2 \cdot \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2}}$$

$$X_1^{(2)} = \frac{1}{r_2 - r_1} \sqrt{\{-r_1 \cdot x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1 \cdot \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2}}$$

Para m_2 , faz-se valer da definição da razão entre amplitudes apresentada acima com as devidas reorganizações:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} \quad ; \quad r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}$$

$$X_2^{(1)} = r_1 \cdot X_1^{(1)} \quad ; \quad X_2^{(2)} = r_2 \cdot X_1^{(2)}$$

Outro parâmetro relevante para caracterização das equações da posição de cada massa são os ângulos de fase, que determinam se há defasagem e qual o valor dela durante a oscilação, podendo ser obtidos pelas equações:

$$\phi_1 = \arctan \left(\frac{-r_2 \cdot \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 [r_2 \cdot x_1(0) + x_2(0)]} \right)$$

$$\phi_2 = \arctan \left(\frac{r_1 \cdot \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2 [-r_1 \cdot x_1(0) + x_2(0)]} \right)$$

Após ter obtido todos os parâmetros necessários para a resolução do problema, define-se as soluções para os modos de vibração para ambas as massas:

Primeiro modo:

$$x^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^1 \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ X_2^1 \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix}$$

Segundo modo:

$$x^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^2(t) \\ x_2^2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^2 \cdot \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ X_2^2 \cdot \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix}$$

Por fim, determina-se a equação que rege a posição em função do tempo para cada massa, sendo isso feito através da superposição de efeito do primeiro e segundo modo de vibração:

$$x_1(t) = x_1^1(t) + x_1^2(t)$$

$$x_2(t) = x_2^1(t) + x_2^2(t)$$

3 APLICAÇÕES

3.1 ENGENHARIA CIVIL E ESTRUTURAL

O comportamento vibracional das estruturas civis, como edifícios e pontes, é fundamental para garantir a segurança e a integridade estrutural. Quando submetidas a cargas dinâmicas como ventos fortes, tráfego pesado ou tremores sísmicos, essas construções podem sofrer vibrações que, se não forem controladas, podem causar falhas estruturais.

Para prevenir isso, engenheiros utilizam modelos de sistemas massa-mola para simular o comportamento vibracional dessas estruturas sob diferentes condições de carga. Ao entender as frequências naturais dessas estruturas, é possível evitar o fenômeno da ressonância, que pode amplificar as vibrações e levar a danos catastróficos. Além disso, são usados dispositivos como amortecedores de massa sintonizada (Tuned Mass Dampers, TMDs) para mitigar vibrações indesejadas.

3.2 ENGENHARIA MECÂNICA E AUTOMOTIVA

Em máquinas rotativas, motores, transmissões e sistemas de suspensão de veículos, o controle de vibrações é essencial para garantir durabilidade, eficiência e comportamento dinâmico. As vibrações excessivas podem causar desgaste prematuro dos componentes, levando a falhas mecânicas. Um exemplo prático é o sistema de suspensão de um carro, que pode ser modelado como um sistema massa-mola-amortecedor para otimizar o conforto e a estabilidade do veículo.

No desenvolvimento de motores, é crucial garantir que as vibrações provenientes da combustão interna não se propaguem de forma a danificar outros componentes. Além disso, as frequências naturais dos componentes rotativos são calculadas para evitar a ressonância durante o funcionamento, garantindo um desempenho mais seguro e eficiente.

3.3 ENGENHARIA AEROESPACIAL

Em projetos aeroespaciais, o estudo das vibrações é ainda mais crítico devido às condições extremas enfrentadas por aeronaves e espaçonaves. Vibrações durante o voo ou o lançamento podem comprometer componentes cruciais, como sistemas eletrônicos e de navegação. No setor aeronáutico, o controle de vibrações também é vital para aumentar a vida útil de motores a jato e turbinas.

Os engenheiros aeroespaciais utilizam modelos de sistemas massa-mola e para prever como diferentes partes da aeronave responderão às vibrações induzidas por forças aerodinâmicas, motores e turbulências. Componentes como as pás de turbinas e asas são analisados para garantir que não atinjam suas frequências naturais durante o voo.

3.4 INDÚSTRIA DE ELETROMÉSTICOS E ELETRÔNICOS

Em eletrodomésticos, como geladeiras, máquinas de lavar e secadoras, as vibrações podem gerar ruídos incômodos e reduzir a vida útil dos equipamentos. Por isso, é necessário modelar e controlar essas vibrações para melhorar o desempenho e a durabilidade dos produtos.

No caso de máquinas de lavar, por exemplo, o tambor rotativo pode ser considerado uma massa que interage com molas e amortecedores para evitar grandes oscilações. A análise desse sistema garante que as vibrações sejam minimizadas, proporcionando uma operação mais silenciosa e eficiente.

3.5 DISPOSITIVOS ELETRÔNICOS E TECNOLÓGICOS

Os dispositivos eletrônicos, como celulares, laptops e discos rígidos, também se beneficiam do estudo de vibrações. Pequenas vibrações podem afetar a precisão de componentes sensíveis, como discos rígidos e sensores em smartphones. Para mitigar esses efeitos, os engenheiros utilizam sistemas semelhantes ao massa-mola para modelar e controlar as vibrações, garantindo que esses dispositivos funcionem de forma estável e com alta precisão.

4 RESOLUÇÃO ANALÍTICA

O problema proposto baseia-se em um sistema composto por duas massas as quais são interligadas por molas, tanto entre elas quanto com o meio externo, podendo ser representado por um sistema massa-mola de dois graus de liberdade.

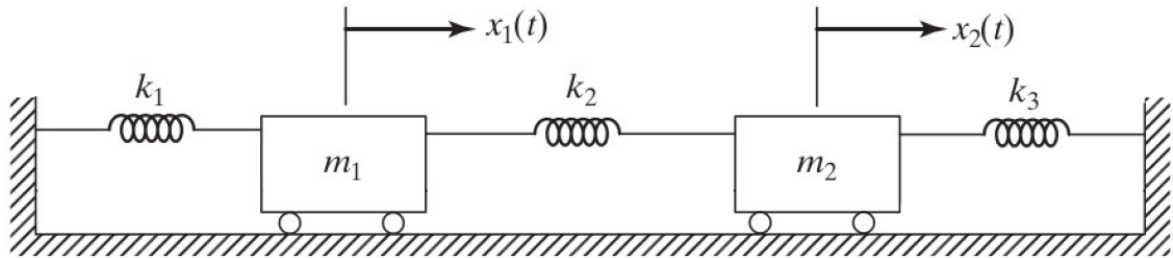


Figura 5 – Sistema Massa-Mola com 2 GDL's

Desse sistema, objetiva-se obter as frequências naturais (ω_1 e ω_2) assim como a resposta da posição em relação ao tempo para cada massa ($x_1(t)$ e $x_2(t)$). Inicialmente, para fins de resolução numérica, é necessário adotar valores para as constantes de rigidez das molas, massas e condições iniciais, sendo elas apresentadas abaixo:

Dados:

- $m_1 = 5kg$
- $m_2 = 10kg$
- $k_1 = 50N/m$
- $k_2 = 10N/m$
- $k_3 = 5N/m$

Condições iniciais:

- $x_1(0) = 1$
- $x_2(0) = 0$
- $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

Partindo do equacionamento apresentado na seção anterior para Sistemas Massa-Molas de 2 GDL's é possível obter as frequências naturais resolvendo o determinante abaixo.

$$\begin{vmatrix} -5\omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -10\omega^2 + (k_2 + k_3) \end{vmatrix} = 0$$

$$(5 \cdot 10)\omega^4 - \{(50 + 10) \cdot 10 + (10 + 5) \cdot 5\}\omega^2 + \{(50 + 10)(10 + 5) - 10^2\} = 0$$

$$50\omega^4 - 675\omega^2 + 800 = 0$$

Para facilitar a resolução do polinômio é possível adotar $s = \omega^2$, obtendo:

$$50s^2 - 675s + 800 = 0$$

A solução da equação do segundo grau acima possui como solução:

$$s_1 = 12,19 \quad ; \quad s_2 = 1,31$$

Sendo possível então obter as frequências naturais:

$$\omega_1 = 3,49 \text{ rad/s} \quad ; \quad \omega_2 = 1,14 \text{ rad/s}$$

Obtida as frequências naturais, calcula-se as razões de amplitudes, sendo:

$$r_1 = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{-5 \cdot 3,49^2 + (50 + 10)}{10} = -0,09$$

$$r_2 = \frac{-m_2\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{10 \cdot 1,14^2 + (50 + 10)}{10} = 4,70$$

Conhecendo as razões de amplitudes e as condições iniciais, é possível então obter as amplitudes para cada modo de vibração. As amplitudes de m_1 para o primeiro e segundo modo de vibração são:

$$X_1^{(1)} = \frac{1}{r_2 - r_1} \sqrt{\{r_2 \cdot x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2 \cdot \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2}} = \frac{1}{4,79} \cdot \sqrt{(4,70 \cdot 1)^2} = 0,98$$

$$X_1^{(2)} = \frac{1}{r_2 - r_1} \sqrt{\{-r_1 \cdot x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1 \cdot \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2}} = \frac{1}{4,79} \cdot \sqrt{(0,09 \cdot 1)^2} = 0,019$$

Já as amplitudes de m_2 para os dois primeiros modos de vibração são:

$$X_2^{(1)} = r_1 \cdot X_1^{(1)} = -0,088$$

$$X_2^{(2)} = r_2 \cdot X_1^{(2)} = 0,089$$

Os ângulos de fase podem ser obtidos por:

$$\phi_1 = \arctan \left(\frac{-r_2 \cdot \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1[r_2 \cdot x_1(0) + x_2(0)]} \right) = \arctan \left(\frac{0}{3,49 \cdot (4,70 \cdot 1)} \right) = 0 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = \arctan \left(\frac{r_1 \cdot \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2[-r_1 \cdot x_1(0) + x_2(0)]} \right) = \arctan \left(\frac{0}{1,14 \cdot (0,09 \cdot 1)} \right) = 0 \text{ rad}$$

Dessa forma, a solução para cada modo de vibração pode ser determinada, sendo:

$$x_1(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,98 \cdot \cos(3,49t) \\ 0,089 \cdot \cos(3,49t) \end{Bmatrix}$$

$$x_2(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,019 \cdot \cos(1,14t) \\ 0,089 \cdot \cos(1,14t) \end{Bmatrix}$$

Por fim, as funções que determinam a posição de cada massa em função do tempo são obtidas somando as soluções de mesmo índice de massa, em outras palavras, são obtidas pela superposição de efeitos dos dois primeiros modos de vibração:

$$x_1(t) = 0,98 \cdot \cos(3,49t) + 0,019 \cdot \cos(1,14t)$$

$$x_2(t) = 0,089 \cdot \cos(3,49t) + 0,089 \cdot \cos(1,14t)$$

5 RESOLUÇÃO NUMÉRICA

A resolução numérica apresenta o desenvolvimento de um sistema automatizado, em Python, para calcular as frequências naturais e a resposta do movimento de um sistema mecânico com dois graus de liberdade (2GLs), composto por duas massas m_1 e m_2 , conectadas por três molas com constantes de rigidez k_1 , k_2 e k_3 , conforme ilustrado na figura do enunciado. O sistema é livre de amortecimento, e as equações de movimento foram resolvidas numericamente.

Antes de se iniciar o programa, é necessário importar as bibliotecas que serão utilizadas ao longo do desenvolvimento da simulação, tais bibliotecas permitem inputs simples para utilizar alguns recursos que facilitam a programação do código.

```
1 # Importando bibliotecas
2 import numpy as np
3 from scipy.integrate import odeint
4 import matplotlib.pyplot as plt
```

Inicialmente, foram definidos os parâmetros do sistema, ou seja, as massas m_1 e m_2 , as constantes de rigidez k_1 , k_2 e k_3 , e as condições iniciais x_1 , x_2 , v_1 e v_2 . No código, foram representadas da seguinte forma:

```
1 # Parâmetros do sistema
2 m1 = 5.0 # massa 1 (kg)
3 m2 = 10.0 # massa 2 (kg)
4 k1 = 50.0 # constante da mola 1 (N/m)
5 k2 = 10.0 # constante da mola 2 (N/m)
6 k3 = 5.0 # constante da mola 3 (N/m)
7 x1 = 1.00 # posição inicial da massa 1 (m)
8 x2 = 0.00 # posição inicial da massa 2 (m)
9 v1 = 0.00 # velocidade inicial da massa 1 (m/s)
10 v2 = 0.00 # velocidade inicial da massa 2 (m/s)
```

O código também possibilita a inserção manual dos parâmetros, para isso, foram criados comandos de ‘input’ para inserir os dados manualmente. É apresentada uma interface, onde pergunta se o usuário deseja manter os dados ou alterá-los.

```
1 # Explicação dos valores sugeridos
2 print("DADOS DE ENTRADA:\n")
3 print("Valores Sugeridos:")
4 print("Massas: m1 = 5 [kg], m2 = 10 [kg]")
5 print("Const. de amort.: k1 = 50 [N/m], k2 = 10 [N/m], k3 = 5 [N/m]")
6 print("Cond. inic.: x1 = 1 [m], x2 = 0 [m], v1 = 0 [m/s], v2 = 0 [m/s]")
7
8 # Perguntar se o usuário deseja usar tais valores ou definir manualmente
9 continuar = input("\nDeseja continuar com tais valores? Informar [S]
    para continuar ou [N] para inserir outros: ").upper()
```

```

10 if continuar == 'S':
11     print("Valores mantidos.")
12
13 elif continuar == 'N':
14     # Massas
15     m1 = float(input("Digite a massa 1 (m1) [kg]: "))
16     m2 = float(input("Digite a massa 1 (m1) [kg]: "))
17     print()
18     # Constantes de amortecimento
19     k1 = float(input("Digite a constante de amortecimento 1 (k1) [N/m]:"))
20     k2 = float(input("Digite a constante de amortecimento 1 (k1) [N/m]:"))
21     k3 = float(input("Digite a constante de amortecimento 1 (k1) [N/m]:"))
22     print()
23     # Posição inicial
24     x1 = float(input("Digite a posição inicial massa 1 (x1) [m]: "))
25     x2 = float(input("Digite a posição inicial massa 2 (x2) [m]: "))
26     print()
27     # Velocidade inicial
28     v1 = float(input("Digite a velocidade inicial massa 1 (v1) [m/s]: "))
29     v2 = float(input("Digite a velocidade inicial massa 2 (v2) [m/s]: "))
30     print()
31     print("Valores inseridos.")
32
33 else:
34     print("Resposta não reconhecida.")

```

O sistema é modelado por equações diferenciais acopladas. Essas equações podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$$

Onde:

- \mathbf{M} é a matriz de massa;
- \mathbf{K} é a matriz de rigidez;
- \mathbf{x} é o vetor de deslocamentos;

As matrizes de massa e rigidez são definidas analiticamente como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

No código, as matrizes foram representadas da seguinte forma:

```

1 # Matriz de massa
2 M = np.array([[m1, 0],
3               [0, m2]])
4
5 # Matriz de rigidez
6 K = np.array([[k1 + k2, -k2],
7               [-k2, k2 + k3]])

```

Para encontrar as frequências naturais e amplitudes, é necessário resolver o problema de autovalores e autovetores da matriz dinâmica do sistema $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Tais resultados podem ser calculados automaticamente através da biblioteca ‘numpy’.

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{I}) = 0$$

Os autovalores obtidos correspondem aos quadrados das frequências naturais ω_1^2 e ω_2^2 . As frequências naturais ω_1 e ω_2 foram definidas como:

```

1 # Calculando as frequências naturais através de autovalores e
   autovetores
2 eigvals, eigvecs = np.linalg.eig(np.dot(np.linalg.inv(M), K))
3
4 # As frequências naturais ( $\omega$ ) são a raiz quadrada dos autovalores
5 omega_natural = np.sqrt(eigvals)
6
7 # Exibir frequências naturais
8 print("ω1 =", omega_natural[0])
9 print("ω2 =", omega_natural[1])

```

Para os parâmetros iniciais, os resultados obtidos no comando ‘print’ foram:

```

ω1 = 3.491008563829783
ω2 = 1.1458006839180686

```

Por sua vez, os autovetores associados correspondem as amplitudes das massas para os dois primeiros modos de vibração, sendo definidas como:

```

1 # Amplitudes para os dois primeiros modos de vibração (autovetores)
2 modos_vibracao = eigvecs
3
4 # Exibir amplitudes para cada modo de vibração
5 print("A1 =", modos_vibracao[0])
6 print("A2 =", modos_vibracao[1])

```

Os resultados obtidos foram:

```

A1 = [0.99565083 0.18394744]
A2 = [-0.09316344 0.98293608]

```

Por fim, os ângulos de fase são determinados pela relação entre o deslocamento e a velocidade inicial, com a tangente do ângulo sendo a razão entre a velocidade e a amplitude ajustada pela frequência natural. As fases podem ser definidas usando a derivada da solução, ou seja, as velocidades. A equação derivada será:

$$x_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

No instante $t = 0$, a solução geral é:

$$x_i(0) = A_i \cos(\phi_i)$$

E as velocidades são:

$$v_i(0) = -A_i \omega_i \sin(\phi_i)$$

Isolando o ângulo de fase ao dividir as equações de velocidade e deslocamento:

$$\frac{v_i(0)}{x_i(0)} = \frac{-A_i \omega_i \sin(\phi_i)}{A_i \cos(\phi_i)} \rightarrow \frac{v_i(0)}{x_i(0)} = \frac{-\omega_i \sin(\phi_i)}{\cos(\phi_i)}$$

$$\tan(\phi_i) = -\frac{v_i(0)}{\omega_i \cdot x_i(0)} \rightarrow \phi_i = \arctan\left(-\frac{v_i(0)}{\omega_i \cdot x_i(0)}\right)$$

O ângulo de fase ϕ_i para cada modo de vibração é dado pela relação entre o deslocamento, frequência angular e a velocidade inicial. Isso resulta na seguinte fórmula no código:

```

1 # Condições iniciais para determinar os ângulos de fase
2 X0 = np.array([x1, x2])
3 V0 = np.array([v1, v2])
4
5 # Ângulos de fase (derivada da solução, velocidades)
6 fases = np.arctan2(np.dot(modos_vibacao.T, V0), np.dot(omega_natural *
7     modos_vibacao.T, X0))
8
9 # Exibir ângulos de fase
10 print("φ1 =", fases[0])
    print("φ2 =", fases[1])

```

O resultado fica da seguinte forma:

```

φ1 = 0.0
φ2 = 0.0

```

Devido à escolha de velocidades iniciais nulas, os ângulos de fase ϕ_1 e ϕ_2 resultaram em 0 radianos, o que significa que as vibrações começam no ponto máximo do deslocamento para o segundo modo de vibração.

Agora, para calcular a resposta da posição em relação ao tempo para cada uma das massas, as equações de movimento foram definidas numericamente. As equações diferenciais que governam o sistema são:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 = 0$$

As equações diferenciais para as acelerações $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ e $\frac{d^2x_2}{dt^2}$ (ou seja, \ddot{x}_1 e \ddot{x}_2) são definidas da seguinte forma:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2 + k_3}{m_2}x_2$$

Essas equações modelam as acelerações das massas de acordo com as forças exercidas pelas molas. A força resultante na massa m_1 é a soma das forças exercidas pela mola k_1 e pela mola k_2 ; e a força resultante na massa m_2 é a soma das forças exercidas pelas molas k_2 e k_3 .

Para resolver essas equações no código, definiu-se uma função no qual têm-se como entrada as condições iniciais (posições e velocidades), tempo, massas e constantes de amortecimento; retornando as derivadas da posição e velocidade.

```

1 # Função para resolver as equações de movimento usando odeint
2 def equations(Y, t, m1, m2, k1, k2, k3):
3     x1, x2, v1, v2 = Y
4
5     # Equações diferenciais
6     dx1dt = v1
7     dx2dt = v2
8
9     dv1dt = -(k1 + k2) / m1 * x1 + (k2 / m1 * x2)
10    dv2dt = -(k2 + k3) / m2 * x2 + (k2 / m2 * x1)
11
12    return [dx1dt, dx2dt, dv1dt, dv2dt]
```

As condições iniciais para as posições e velocidades foram:

$$x_1(0) = 1.0 \text{ m}; \quad x_2(0) = 0.0 \text{ m}; \quad \dot{x}_1(0) = 0.0 \text{ m/s}; \quad \dot{x}_2(0) = 0.0 \text{ m/s}$$

A partir dessas condições, as equações foram resolvidas para um intervalo de tempo de 0 a 10 segundos, gerando os gráficos das posições $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Abaixo seguem as condições e as resoluções das equações:

```

1 # Condições iniciais: [posição inicial de x1, posição inicial de x2,
  velocidade inicial de x1, velocidade inicial de x2]
2 Y0 = [x1, x2, v1, v2]
3
4 # Tempo para a simulação
5 t = np.linspace(0, 10)
6
7 # Resolver as equações diferenciais
8 sol = odeint(equations, Y0, t, args=(m1, m2, k1, k2, k3))
9
10 # Extraíndo as posições x1(t) e x2(t)
11 x1_t = sol[:, 0]
12 x2_t = sol[:, 1]

```

Essas equações foram resolvidas numericamente utilizando o método de Runge-Kutta implementado na função ‘odeint’ da biblioteca ‘SciPy’.

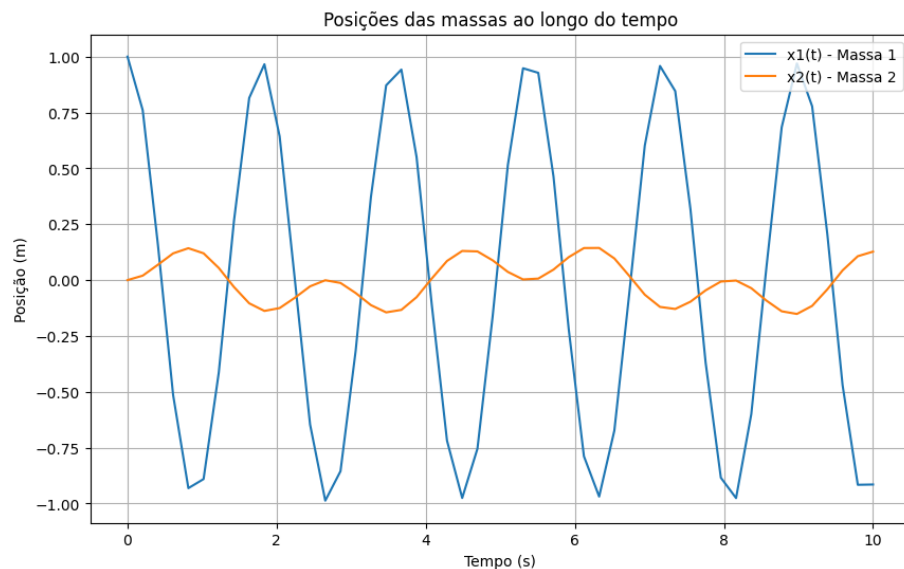
Por fim, foram gerados os gráficos através da biblioteca ‘matplotlib’.

```

1 # Plotar os resultados
2 plt.figure(figsize=(10, 6))
3 plt.plot(t, x1_t, label='x1(t) - Massa 1')
4 plt.plot(t, x2_t, label='x2(t) - Massa 2')
5 plt.title('Posições das massas ao longo do tempo')
6 plt.xlabel('Tempo (s)')
7 plt.ylabel('Posição (m)')
8 plt.legend()
9 plt.grid(True)
10 plt.show()

```

O gráfico gerado mostra as posições $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de cada massa ao longo do tempo. As duas massas oscilam de forma acoplada, refletindo o comportamento dinâmico de um sistema de dois graus de liberdade. Abaixo o gráfico gerado:



6 CONCLUSÃO

Neste estudo, foi analisada a resposta de um sistema massa-mola com dois graus de liberdade, sem amortecimento. Foram utilizados dois métodos para resolver o problema: (1) uma solução analítica exata e (2) uma solução numérica aproximada, implementada por métodos de álgebra linear, integração numérica e matemática simbólica.

Através da análise dos autovalores e da formulação das equações diferenciais, foi possível determinar as frequências naturais do sistema e a resposta temporal do movimento das massas. Tais valores se aproximaram dos obtidos analiticamente, apenas divergindo no resultado do segundo modo de vibração da massa 2.

Essa diferença se deve ao método de cálculo utilizado nas duas resoluções, onde o analítico se baseia nos resultados obtidos anteriormente da massa 1, gerando dessa forma, propagação de erros devido a omissão de casas decimais.

O método numérico Runge-Kutta usado aproxima a solução dividindo o tempo em pequenos intervalos, resolvendo iterativamente as equações diferenciais. Ao simular o sistema, obteve-se uma curva de deslocamento $x(t)$ que segue um comportamento similar ao da solução analítica.

Esse procedimento pode ser aplicado a sistemas com diferentes valores de massa e rigidez, bastando modificar os parâmetros no código. Além disso, o método utilizado é uma forma eficaz de resolver sistemas de múltiplos graus de liberdade em problemas de dinâmica estrutural.

O gráfico da resposta temporal para $x_1(t)$ e $x_2(t)$ mostra que ambas as massas oscilam de maneira periódica, com um comportamento dependente das frequências naturais do sistema.

Se as condições iniciais forem $x_1(0) = x_2(0) = v_1(0) = v_2(0) = 0$, o comportamento esperado é que ambas as massas permaneçam em repouso ao longo do tempo. Isso ocorre porque, em um sistema sem forças externas e sem amortecimento, as massas não terão motivo para começar a se mover a partir do repouso absoluto. Portanto, o gráfico das posições deve, de fato, ser uma reta constante para essas condições definidas.

Em termos práticos, se a velocidade inicial for zero, o ângulo de fase ϕ_i será zero ou múltiplo de π (dependendo do sinal do deslocamento); e se houver uma combinação de deslocamento e velocidade inicial, o ângulo de fase será ajustado de acordo com a relação $\tan(\phi_i)$.

O link do código pode ser encontrado em: https://colab.research.google.com/drive/1oa_pPtAjQo1yNXoXOpFBtVUTGgjAv923?usp=sharing