Trabalho Final - Vibrações Mecânicas

Sistema Massa-Mola Não Amortecido com 2 GDL's

Eduardo, Pablo, Samuel, Vinícius Carvalhaes e Vinicius Baptista

Professor: Prof. Luis Vidigal

Universidade Federal de Juiz de Fora

30 de setembro, 2024

Sumário

Sistema Massa-Mola

- As vibrações mecânicas estão presentes em uma ampla variedade de sistemas;
- Responsável pelo funcionamento de máquinas industriais e movimentos de estruturas civis;
- É essencial para o desenvolvimento de projetos que garantam a segurança e o desempenho;
- Evita falhas catastróficas devido à fadiga e desgaste;
- Modelos mais básicos e fundamentais no estudo das vibrações é o Sistema Massa-Mola.

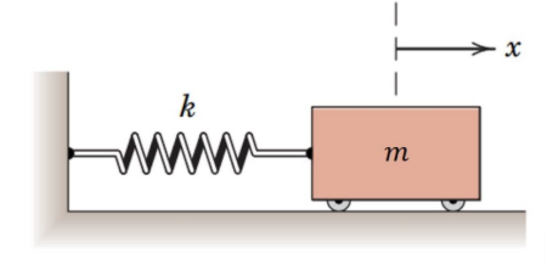


Figura 1 – Sistema Massa-Mola.

Sistema Massa-Mola

- Esse sistema consiste em uma massa (m) conectada a uma mola (k);
- Gera um comportamento oscilatório;
- O movimento deste sistema se inicia quando deslocado de sua posição de equilíbrio;
- Forças elásticas e inerciais interagem para produzir vibrações periódicas;
- O Sistema Massa-Mola é amplamente utilizado para modelar vibrações simples;
- Base para o entendimento de sistemas mecânicos mais complexos;
- Possui simplicidade matemática e a facilidade de visualização;
- Permite que engenheiros e cientistas analisem o comportamento dinâmico de sistemas reais;
- Equações que descrevem o movimento de sistemas massa-mola podem ser estendidas;
- Permite a análise de uma gama mais ampla de cenários vibratórios.

1 Grau de Liberdade

- Pode ser descrito por uma única coordenada que especifica a posição da massa no tempo.

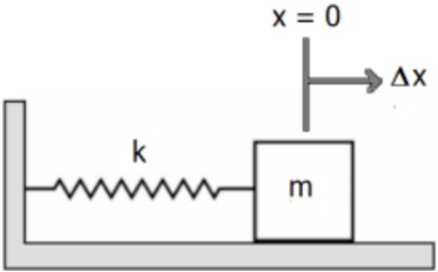


Figura 2 – Sistema Massa-Mola.

1 Grau de Liberdade

É possível elaborar o equacionamento para representar o sistema de 1 GDL de massa-mola. Uma força externa deslocando a massa e a retirando de sua condição inicial de equilíbrio leva o sistema a ter duas forças atuantes, sendo uma devido a mola e outra devido a massa.

$$F(t) = -kx$$

$$F(t) = m\ddot{x}$$

Ao considerar que a força externa no sistema serviu somente para gerar pertubação no sistema e igualando as forças propostas como atuantes no conjunto chega-se a:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

1 Grau de Liberdade

Para um sistema massa-mola, a solução geral é:

$$x(t) = Ce^{st}$$

Ao utilizar a equação característica na solução geral, há duas raízes possíveis para o sistema:

$$0 = ms^2 + k$$

$$s = \pm\left(-\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm i\omega_n$$

1 Grau de Liberdade

A partir da manipulação da equação característica, obtêm-se a frequência natural. Esse dado indica a frequência em que um objeto vibra livremente sem a aplicação de forças externas, sendo calculado por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como observado anteriormente, duas raízes são consideradas, de modo que ao aplicá-las na solução geral proposta e somando as duas situações obtém-se:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}$$

1 Grau de Liberdade

De maneira empírica, é possível concluir que o sistema oscilará devido a presença da mola no sistema. Assim, torna-se mais conveniente expressar a solução geral por uma combinação de senos e cossenos, de modo que é possível utilizar a identidade de Euler:

$$e^{i\alpha t} = \cos(\alpha t) \pm \mathrm{sen}(\alpha t)$$

O que leva a seguinte solução geral, ao aplicar também as condições iniciais:

$$x(t) = A_1 cos(\omega_n t) + A_2 sen(\omega_n t)$$

Condições iniciais são indicadas por:

$$x(t=0) = A_1 = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = \omega_n A_2 = \dot{x}_0$$

$$x(t) = x_0 cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} sen(\omega_n t)$$

1 Grau de Liberdade

Outra possibilidade de um sistema de 1 GDL seria o sistema-masa-mola-amortecedor. Nesse sistema, também é possível elaborar o equacionamento para representar o sistema de 1 GDL de massa-mola-amortecedor. Iniciando-se pela Segunda Lei de Newton, tem-se:

$$\sum F = m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F$$

Partindo desse ponto, é possível representar o movimento do sistema como:

$$F = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx$$

1 Grau de Liberdade

Realizando algumas manipulações, como utilizar a equação característica e encontrar as suas raízes, é possível assumir que as soluções são funções exponenciais, sendo a solução geral a combinação das funções exponenciais citadas. Assim, as seguintes equações são válidas:

$$ms^2 + cs + k = 0$$

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} \qquad x(t) = C_2 e^{s_2 t}$$

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{c}{2m} + \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-\frac{c}{2m} - \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}}t}$$

1 Grau de Liberdade

A partir da solução geral acima, é possível definir outros pontos importantes para a caracterização do sistema proposto. Ressalta-se que C_1 e C_2 são constantes determinadas a partir das condições iniciais propostas para o caso analisado.

A frequência natural do sistema, assim como no sistema não-amortecido, representa como o sistema oscila livremente na ausência de amornecimento e forças externas, é representada pela seguinte equação:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1 Grau de Liberdade

O amortecimento critico representa um valor para qual o sistema retorna ao seu estado de equilíbrio no menor tempo sem oscilar.

$$c_c = 2m\sqrt{km} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n$$

O fator de amortecimento determina a relação entre o amortecimento real do sistema e amortecimento critico, podendo ser interpretado como a energia de um sistema oscilatório é dissipada ao longo do tempo.

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

Agora, é possível reescrever a solução geral em função desses dados dispostos, o que leva a essa nova formulação geral:

$$x(t) = C_1 e^{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t} + C_2 e^{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t}$$

2 Graus de Liberdade

- Sistemas sujeitos a vibrações não se limitam apenas a um grau de liberdade;
- Deve-se considerar a quantidade de corpos e tipos de movimentos possíveis de cada massa;
- Um sistema com 2 graus de liberdade se trata de um sistema com duas coordenadas independentes.

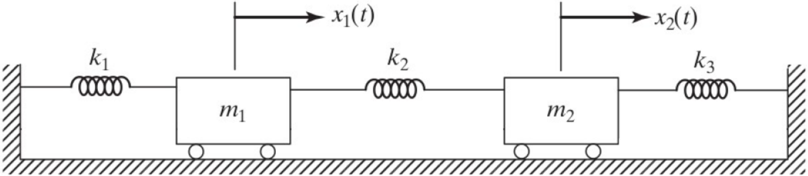


Figura 3 – Sistema Massa-Mola com 2 GDL's.

2 Graus de Liberdade

Adequando a equação de 1 GDL para 2 GDL's, é possível obter:

$$m_1\ddot{x}_1\left(t\right)+\left(k_1+k_2\right)x_1\left(t\right)-k_2x_2\left(t\right)=0$$

$$m_2\ddot{x}_2\left(t\right)-k_2x_1\left(t\right)+\left(k_2+k_3\right)x_2\left(t\right)=0$$

Representando também na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = [m]$$

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} = [k]$$

Pode-se admitir que as soluções para as equações apresentadas acima são da forma:

$$x_1\left(t\right)=X_1cos\left(\omega t+\phi\right)$$

$$x_2\left(t\right)=X_2cos\left(\omega t+\phi\right)$$

2 Graus de Liberdade

Aplicando a primeira e segunda derivada nas soluções propostas e substituindo-as:

$$[m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)X_1 - k_2X_2]cos\,(\omega t + \phi) = 0$$

$$[-k_2X_1 + m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)X_2]cos\,(\omega t + \phi) = 0$$

O sistema pode ser resolvido, havendo vibração, considerando:

$$det = \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = 0$$

$$(m_1 m_2)\,\omega^4 - [(k_1 + k_2)\,m_2 + (k_2 + k_3)\,m_1]\omega^2 + [(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2])] = 0$$

2 Graus de Liberdade

A equação acima representa a equação da frequência natural, na qual possui duas raízes.

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1}{m_1 m_2}\right\} \mp \frac{1}{2}\left[\left(\frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1}{m_1 m_2}\right)^2 - 4\left(\frac{(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2}{m_1 m_2}\right)\right]^{1/2}$$

Obtida as frequências naturais (ω_1 e ω_2), calcula-se as razões entre as amplitudes:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2+(k_1+k_2)}{k_2} \quad ; \quad r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_2\omega_2^2+(k_1+k_2)}{k_2}$$

2 Graus de Liberdade

Ao obter as razões entre as amplitudes, calcula-se as amplitudes para cada massa, em m_1:

$$X_1^{(1)} = \frac{1}{r_2 - r_1}\sqrt{\{r_2 \cdot x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2 \cdot \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2}}$$

$$X_1^{(2)} = \frac{1}{r_2 - r_1}\sqrt{\{-r_1 \cdot x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1 \cdot \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2}}$$

Para m_2, faz-se valer da definição da razão entre amplitudes apresentada acima:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} \quad ; \quad r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}$$

$$X_2^{(1)} = r_1 \cdot X_1^{(1)} \quad ; \quad X_2^{(2)} = r_2 \cdot X_1^{(2)}$$

2 Graus de Liberdade

Os ângulos de fase determinam se há defasagem e qual o valor dela durante a oscilação, sendo:

$$\phi_1 = arctan\left(\frac{-r_2 \cdot \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1[r_2 \cdot x_1(0) + x_2(0)]}\right) \quad ; \quad \phi_2 = arctan\left(\frac{r_1 \cdot \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2[-r_1 \cdot x_1(0) + x_2(0)]}\right)$$

Define-se as soluções para os modos de vibração para ambas as massas:

Primeiro modo:

$$x^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^1 \cdot cos(\omega_1 t + \phi_1 \\ X_2^1 \cdot cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix}$$

Segundo modo:

$$x^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^2(t) \\ x_2^2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^2 \cdot cos(\omega_2 t + \phi_2 \\ X_2^2 \cdot cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix}$$

2 Graus de Liberdade

Por fim, determina-se a equação que rege a posição em função do tempo para cada massa, sendo isso feito através da superposição de efeito do primeiro e segundo modo de vibração:

$$x_1(t) = x_1^1(t) + x_1^2(t)$$

$$x_2(t) = x_2^1(t) + x_2^2(t)$$

Aplicações

Engenharia Civil e Estrutural

- Análise de vibrações em pontes, edifícios e outras estruturas;
- Prevenção de falhas estruturais causadas por ressonância;
- Uso de dispositivos como amortecedores de massa sintonizada para mitigar vibrações;

Engenharia Mecânica e Automotiva

- Controle de vibrações em motores, transmissões e sistemas de suspensão;
- Aumenta a durabilidade e eficiência dos componentes;
- Otimização do conforto e estabilidade em sistemas automotivos.

Aplicações

Engenharia Aeroespacial

- Controle de vibrações em aeronaves e espaçonaves para proteger sistemas delicados;
- Prevenção de falhas estruturais devido a forças aerodinâmicas e turbulências;
- Análise de turbinas e componentes críticos durante o voo.

Eletrodomésticos e Eletrônicos

- Redução de vibrações em geladeiras, máquinas de lavar e outros dispositivos;
- Garantia de operação silenciosa e prolongamento da vida útil dos produtos.

Dispositivos Eletrônicos

- Controle de vibrações em dispositivos sensíveis, como discos rígidos e smartphones;
- Prevenção de danos e melhorias na precisão de componentes eletrônicos.

Resolução Analítica

Dados:

- $m_1 = 5kg$
- $m_2 = 10kg$
- $k_1 = 50N/m$
- $k_2 = 10N/m$
- $k_3 = 5N/m$

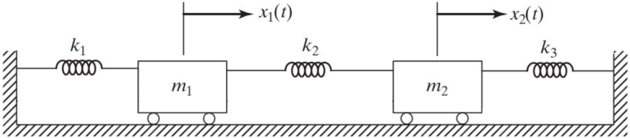


Figura 4 – Sistema Massa-Mola com 2 GDL's.

Condições iniciais:

- $x_1(0) = 1$
- $x_2(0) = 0$
- $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

Desse sistema, objetiva-se obter as frequências naturais (ω_1 e ω_2) assim como a resposta da posição em relação ao tempo para cada massa ($x_1(t)$ e $x_2(t)$).

Resolução Analítica

Partindo do equacionamento apresentado na seção anterior para Sistemas Massa-Molas de 2 GDL's é possível obter as frequências naturais resolvendo o determinante abaixo.

$$\begin{vmatrix} -5\omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -10\omega^2 + (k_2 + k_3) \end{vmatrix} = 0$$

$$(5 \cdot 10)\omega^4 - \{(50+10) \cdot 10 + (10+5) \cdot 5\}\omega^2 + \{(50+10)(10+5) - 10^2\} = 0$$

$$50\omega^4 - 675\omega^2 + 800 = 0$$

Resolução Analítica

Para facilitar a resolução do polinômio é possível adotar $s = \omega^2$, obtendo:

$$50s^2 - 675s + 800 = 0$$

A solução da equação do segundo grau acima possui como solução:

$$s_1 = 12,19 \quad ; \quad s_2 = 1,31$$

Sendo possível então obter as frequências naturais:

$$\omega_1 = 3,49 \ rad/s \quad ; \quad \omega_2 = 1,14 \ rad/s$$

Resolução Analítica

Obtida as frequências naturais, calcula-se as razões de amplitudes, sendo:

$$r_1 = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{-5 \cdot 3,49^2 + (50 + 10)}{10} = -0,09$$

$$r_2 = \frac{-m_2\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{10 \cdot 1,14^2 + (50 + 10)}{10} = 4,70$$

Conhecendo as razões de amplitudes e as condições inciais, é possível então obter as amplitudes para cada modo de vibração.

Resolução Analítica

As amplitudes de m_1 para o primeiro e segundo modo de vibração são:

$$X_1^{(1)} = \frac{1}{r_2 - r_1}\sqrt{\{r_2 \cdot x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2 \cdot \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2}} = \frac{1}{4,79} \cdot \sqrt{(4,70 \cdot 1)^2} = 0,98$$

$$X_1^{(2)} = \frac{1}{r_2 - r_1}\sqrt{\{-r_1 \cdot x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1 \cdot \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2}} = \frac{1}{4,79} \cdot \sqrt{(0,09 \cdot 1)^2} = 0,019$$

Resolução Analítica

Já as amplitudes de m_2 para os dois primeiros modos de vibração são:

$$X_2^{(1)} = r_1 \cdot X_1^1 = -0,088$$

$$X_2^{(2)} = r_2 \cdot X_1^2 = 0,089$$

Os ângulos de fase podem ser obtidos por:

$$\phi_1 = arctan\left(\frac{-r_2 \cdot \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1[r_2 \cdot x_1(0) + x_2(0)]}\right) = arctan\left(\frac{0}{3,49 \cdot (4,70 \cdot 1)}\right) = 0 \ rad$$

$$\phi_2 = arctan\left(\frac{r_1 \cdot \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2[-r_1 \cdot x_1(0) + x_2(0)]}\right) = arctan\left(\frac{0}{1,14 \cdot (0,09 \cdot 1)}\right) = 0 \ rad$$

Resolução Analítica

Dessa forma, a solução para cada modo de vibração pode ser determinada. Sendo elas:

$$x_1(t) = \begin{Bmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{Bmatrix} = \begin{matrix} 0,98 \cdot cos(3,49t) \\ 0,089 \cdot cos(3,49t) \end{matrix}$$

$$x_2(t) = \begin{Bmatrix} x_1^2(t) \\ x_2^2(t) \end{Bmatrix} = \begin{matrix} 0,019 \cdot cos(1,14t) \\ 0,089 \cdot cos(1,14t) \end{matrix}$$

Por fim, as funções que determinam a posição de cada massa em função do tempo são obtidas pela superposição de efeitos dos dois primeiros modos de vibração:

$$x_1(t) = 0,98 \cdot cos(3,49t) + 0,019 \cdot cos(1,14t)$$

$$x_2(t) = 0,089 \cdot cos(3,49t) + 0,089 \cdot cos(1,14t)$$

Resolução Numérica

Antes de se iniciar o programa, é necessário importar as bibliotecas que serão utilizadas

```
# Importando bibliotecas
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

Resolução Numérica

Foram definidos os parâmetros do sistema, ou seja, m_1, m_2, k_1, k_2 e k_3, x_1, x_2, v_1 e v_2

```
# Parametros do sistema
m1 =  5.0 # massa 1 (kg)
m2 = 10.0 # massa 2 (kg)
k1 = 50.0 # constante da mola 1 (N/m)
k2 = 10.0 # constante da mola 2 (N/m)
k3 =  5.0 # constante da mola 3 (N/m)
x1 = 1.00 # posicao inicial da massa 1 (m)
x2 = 0.00 # posicao inicial da massa 2 (m)
v1 = 0.00 # velocidade inicial da massa 1 (m/s)
v2 = 0.00 # velocidade inicial da massa 2 (m/s)
```

Resolução Numérica

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

```
# Matriz de massa
M = np.array([[m1, 0],
              [0, m2]])

# Matriz de rigidez
K = np.array([[k1 + k2, -k2],
              [-k2, k2 + k3]])
```

Resolução Numérica

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{I}) = 0$$

```python
# Calculando as frequencias atraves de autovalores e autovetores
eigvals, eigvecs = np.linalg.eig(np.dot(np.linalg.inv(M), K))

# As frequencias naturais sao a raiz quadrada dos autovalores
omega_natural = np.sqrt(eigvals)

# Exibir frequencias naturais
print("w1 =", omega_natural[0])
print("w2 =", omega_natural[1])
```

Output:

$\omega 1 = 3.491008563829783$

$\omega 2 = 1.1458006839180686$

Resolução Numérica

```python
# Amlitudes para os dois primeiros modos de vibracao (autovetores)
modos_vibracao = eigvecs

# Exibir amplitudades para cada modo de vibracao
print("A1 =", modos_vibracao[0])
print("A2 =", modos_vibracao[1])
```

Output:

A1 = [0.99565083 0.18394744]
A2 = [-0.09316344 0.98293608]

Resolução Numérica

$$\phi_i = \arctan\left(-\frac{v_i(0)}{\omega_i \cdot x_i(0)}\right)$$

```python
# Condicoes iniciais para determinar os angulos de fase
X0 = np.array([x1, x2])
V0 = np.array([v1, v2])

# Angulos de fase (derivada da solucao, velocidades)
fases = np.arctan2(np.dot(modos_vibracao.T, V0), np.dot(omega_natural *
    modos_vibracao.T, X0))

# Exibir angulos de fase
print("o1 =", fases[0])
print("o2 =", fases[1])
```

Output:

$\phi 1 = 0.0$

$\phi 2 = 0.0$

Resolução Numérica

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1} \quad ; \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2+k_3}{m_2}x_2$$

```
# Funcao para resolver as equacoes de movimento usando odeint
def equations(Y, t, m1, m2, k1, k2, k3):
    x1, x2, v1, v2 = Y

    # Equacoes diferenciais
    dx1dt = v1
    dx2dt = v2

    dv1dt = -(k1 + k2) / m1 * x1 + (k2 / m1 * x2)
    dv2dt = -(k2 + k3) / m2 * x2 + (k2 / m2 * x1)

    return [dx1dt, dx2dt, dv1dt, dv2dt]
```

Resolução Numérica

Foi definido um intervalo de tempo de 0 a 10 segundos.

As equações foram resolvidas utilizando o método de Runge-Kutta através da função 'odeint'

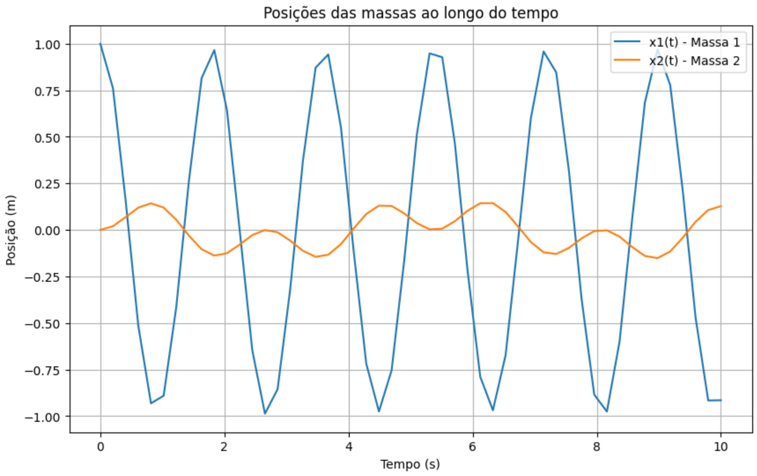
```python
# Condicoes iniciais
Y0 = [x1, x2, v1, v2]

# Tempo para a simulacao
t = np.linspace(0, 10)

# Resolver as equacoes diferenciais
sol = odeint(equations, Y0, t, args=(m1, m2, k1, k2, k3))

# Extraindo as posicoes x1(t) e x2(t)
x1_t = sol[:, 0]
x2_t = sol[:, 1]
```

Resolução Numérica

Por fim, foram gerados os gráficos através da biblioteca 'matplotlib'

```
# Plotar os resultados
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(t, x1_t, label='x1(t) - Massa 1')
plt.plot(t, x2_t, label='x2(t) - Massa 2')
plt.title('Posicoes das massas ao longo do tempo')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Posicao (m)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Resolução Numérica



Considerações Finais

- Analisou-se um sistema massa-mola com dois graus de liberdade, sem amortecimento;
- Dois métodos para resolver o problema: uma solução analítica e uma solução numérica;
- Implementação numérica por álgebra linear, integração numérica e matemática simbólica;
- Foi possível determinar através do cálculo de autovalores, autovetores e equações diferenciais;
- Tais valores se aproximaram dos obtidos analiticamente, divergindo pouco;
- Esse procedimento pode ser aplicado a sistemas com diferentes valores de massa e rigidez;
- O gráfico mostra que ambas as massas oscilam de maneira periódica;