Prof. Dr. Bahne Christiansen

Klausur

W150 Ingenieurmathematik 1 (Q1 / 2019)

Name des Prüflings: **Matrikelnummer:** **Zenturie:**

______________________________ _________________ ________

Dauer: 90 min Datum: 11. März 2019

Erlaubte Hilfsmittel: **Kein** Taschenrechner, 3 Blatt Formelsammlung (beidseitig, beschrieben oder bedruckt)

- Bitte ergänzen Sie auf diesem Deckblatt zunächst Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Zenturie.
- Die Klausuraufgaben umfassen inkl. den Seiten für Ihre Lösungen aber ohne Deckblatt 6 Seiten. Bitte überprüfen Sie Ihr Exemplar auf Vollständigkeit!
- Zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte / 50 % hinreichend.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	Gesamt:
Punktzahl:	16	18	14	16	16	20	100
Erreicht:							

Datum: ____________ Note: ______ Ergänzungsprüfung: ________

Unterschrift: ____________________ Unterschrift: ____________________

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$ und $z_2 = -\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$.

(1.1) (4 Punkte) Berechnen Sie das Produkt $z_3 = z_1 \cdot z_2$ in Normalform.

Lösung:
$z_3 = (\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}) = -2 - 2i - 2i + 2 = -4i$

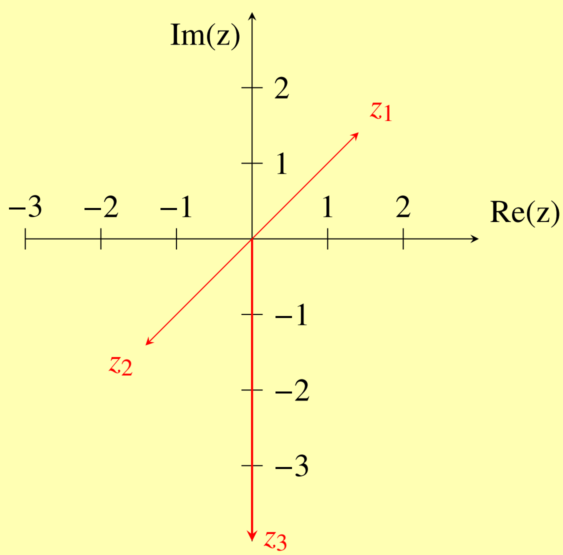
(1.2) (5 Punkte) Stellen Sie z_1 und z_2 in Polarform dar und berechnen Sie anschließend $z_3 = z_1 \cdot z_2$ in Polarform. Überführen Sie das Ergebnis für z_3 in Normalform und überprüfen Sie damit das Ergebnis der vorigen Teilaufgabe.

Hinweis: $\cos(\frac{3}{2}\pi) = 0$, $\sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$, $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

Lösung:
$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{4} \cdot i}$, $z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{4} \cdot i}$, $z_3 = 4e^{\frac{3\pi}{2} \cdot i}$, also $z_3 = -4i$

(1.3) (3 Punkte) Stellen Sie die komplexen Zahlen z_1, z_2 und z_3 graphisch dar.

Lösung:



(1.4) (4 Punkte) Gegeben ist $z = 2i$. Berechnen Sie die 2. Wurzeln aus z.

Lösung:
$z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4} \cdot i}$

Aufgabe 2 (18 Punkte)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ -4x_1 & - & 7x_2 & & & = & -7 \\ & & x_2 & + & (a+2)\cdot x_3 & = & a-5 \end{array}$$

Hierbei ist $a \in \mathbb{R}$.

(2.1) (2 Punkte) Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrix–Form.

Lösung:

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ a-5 \end{pmatrix}$$

(2.2) (12 Punkte) Geben Sie für das lineare Gleichungssystem die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a an. Verwenden Sie zur Lösung das Gauß–Verfahren unter Angabe aller Zwischenschritte.

Lösung:
Gauß–Verfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ -4 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & a+2 & a-5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +2\cdot(I) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & a+2 & a-5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -(II) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array}\right)$$

<u>1. Fall:</u> $a = 2$. Dann entsteht eine Nullzeile und es gibt unendlich viele Lösungen. Setze $x_3 = t$, dann ist $x_2 = -3-4t$ und $x_1 = 7+7t$. Die Lösungsmenge lautet

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}\}$$

<u>2. Fall:</u> $a \neq 2$. Dann ergibt sich durch Rückwärtseinsetzen die Lösung $x_3 = 1$, $x_2 = -7$ und $x_1 = 14$

(2.3) (4 Punkte) Geben Sie den Rang der Koeffizientenmatrix A und der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ zu obigem Gleichungssystem an. Sie dürfen dazu die berechnete Stufenform aus dem vorigen Aufgabenteil verwenden.

Lösung:
$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = 2$, falls $a = 2$ und $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = 3$, falls $a \neq 2$.

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(3.1) (6 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

Lösung:
$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$

(3.2) (8 Punkte) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren für die berechneten Eigenwerte und geben Sie jeweils auch den normierten Eigenvektor an.

Lösung:

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$: $L = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$. Normiert: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 3$: $L = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$. Normiert: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(4.1) (4 Punkte) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatz.

Lösung:

Man entwickelt beispielsweise nach der 1. Zeile oder 1. Spalte (um die Nullen auszunutzen) und erhält $\det(A) = -5$

(4.2) (12 Punkte) Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Lösung:

$\det(A_1) = -15,\ \det(A_2) = -20,\ \det(A_3) = -20,$

$x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 4$

Aufgabe 5 (16 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5.1) (12 Punkte) Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} mit Hilfe der Unterdeterminanten.

Lösung:

$|A| = 1$

$|A_{11}| = 1$, $|A_{12}| = -1$, $|A_{13}| = -1$,

$|A_{21}| = 3$, $|A_{22}| = -2$, $|A_{23}| = -4$,

$|A_{31}| = 1$, $|A_{32}| = 0$, $|A_{33}| = -1$

$$\Rightarrow\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(5.2) (4 Punkte) Multiplizieren Sie zur Kontrolle die Matrizen A und A^{-1}.

Lösung:

Aufgabe 6 (20 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + x + 11}{x^2 + 2x - 3}$.

(6.1) (3 Punkte) Berechnen Sie die Nullstellen vom Nennerpolynom.

Lösung:

PQ-Formel liefert $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$.

(6.2) (3 Punkte) Geben Sie den Definitionsbereich von $f(x)$ an.

Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

(6.3) (6 Punkte) Führen Sie für $f(x)$ eine Polynomdivision durch.

Lösung:

$$\begin{array}{l} \big(\ x^3 + 3x^2 \ \ + x + 11\big) : \big(x^2 + 2x - 3\big) = x + 1 + \dfrac{2x + 14}{x^2 + 2x - 3} \\ \underline{-x^3 - 2x^2 + 3x} \\ \qquad\quad x^2 + 4x + 11 \\ \qquad\ \ \underline{-x^2 - 2x \ + 3} \\ \qquad\qquad\quad 2x + 14 \end{array}$$

(6.4) (8 Punkte) Führen Sie für die aus der eben berechneten verbleibenden echt gebrochen rationalen Funktion eine Partialbruchzerlegung durch.

Lösung:

Partialbruchzerlegung von $\dfrac{2x+14}{x^2+2x-3}$:

1. **Nullstellen vom Nenner**: $x=-3$, $x=1$
2. **Ansatz**: $\dfrac{2x+14}{x^2+2x-3} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-1} = \dfrac{A(x-1)}{x^2+2x-3} + \dfrac{B(x+3)}{x^2+2x-3}$

   $= \dfrac{(A+B)x - A + 3B}{x^2+2x-3}$
3. **Koeffizientenvergleich** (oder durch Einsetzen der Nullstellen):
   $A+B=2$
   $-A+3B=14$
   $\Rightarrow\ A=-2,\ B=4$

   Also $\dfrac{2x+14}{x^2+2x-3} = \dfrac{-2}{x+3} + \dfrac{4}{x-1}$