Aufgabe 1 (7 Punkte)

Notieren Sie bei dieser Aufgabe zu jeder Aussagen-Nummer ein „**w**" für wahr oder ein „**f**" für falsch.
Hinweis: 1 Punkt für jede richtige Antwort. Kein Abzug für falsche Antwort.

1. $\{1\} \notin \big\{1, \{1,2\}, \{\{1\}\}\big\}$
2. $\big\{1, 2, \{1,2\}\big\} \not\subseteq \{1,2\}$
3. Seien x, y, z Objekte. Dann gilt: $\{x, y\} \subseteq \{z\} \Rightarrow x = y$
4. Seien A, B Mengen mit $B \supseteq A$. Dann gilt: $\big\{A \setminus B\big\} \subsetneq \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$
5. Es gibt eine Menge M mit $M \subseteq P(M)$
6. $\big\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > 1\big\} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
7. Seien M, N Mengen und seien A eine zweistellige und B eine einstellige Aussageform.
   Dann gilt:
   $\neg\Big(\forall\, x \in M : \big(\exists\, y \in N : A(x,y)\big) \Rightarrow B(x)\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists\, x \in M : \big(\forall\, y \in N : A(x,y)\big) \wedge \neg B(x)\Big)$

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Seien M, N und L Mengen.

(2.1) (4 Punkte) Zeichnen Sie die Menge $M \setminus (N \cap L)$ und die Menge $(M \setminus N) \cap (M \setminus L)$ in zwei Venn-Diagramme ein, indem Sie die Mengen schraffieren.

(2.2) (2 Punkte) Welche der folgenden Inklusionen ist allgemeingültig wahr? Notieren Sie jeweils die Nummer und „**w**" für wahr oder „**f**" für falsch.

1. $M \setminus (N \cap L) \subseteq (M \setminus N) \cap (M \setminus L)$
2. $(M \setminus N) \cap (M \setminus L) \subseteq M \setminus (N \cap L)$

(2.3) (10 Punkte) Beweisen Sie ggf. die wahre(n) Aussage(n) bzw. widerlegen die falsche(n) Aussage(n) aus (2.2). Nutzen Sie ggf. für das Widerlegen die Mengen $M := \{1,2,3\}$, $N := \{3,4,5\}$ und $L := \{2,3\}$.

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Wir betrachten eine Fabrik, in der Fabrikarbeiter an Maschinen arbeiten können, die in Hallen stehen können. Es bezeichne F die Menge der Fabrikmitarbeiter, M die Menge der Maschinen und H die Menge der Hallen. Verwenden Sie im folgenden die Prädikate: „*Maschine m steht in Halle h*" (Abkürzung: $S(m,h)$) und „*Fabrikarbeiter f arbeitet an Maschine m*" (Abkürzung: $A(f,m)$).

(3.1) (9 Punkte) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen mit geeigneten Quantoren und Junktoren unter Verwendung der oben definierten Mengen und Prädikate.

(1) In jeder Halle steht eine Maschine, an der ein Fabrikarbeiter arbeitet.

(2) Einige Fabrikarbeiter arbeiten an verschiedenen Maschinen.

(3) Einer der Fabrikarbeiter arbeitet an allen Maschinen in derselben Halle.

(3.2) (5 Punkte) Formulieren Sie die **Negation** der folgenden Aussage mit geeigneten Quantoren und Junktoren unter Verwendung der oben definierten Mengen und Prädikate. Dabei soll vor keinem Quantor ein Negationszeichen stehen! Verwenden Sie „⇒" als Junktor, wo es möglich ist.

(4) In einigen Hallen stehen Maschinen, an denen kein Fabrikarbeiter arbeitet.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Beweisen Sie die wahre(n) Aussage(n) und widerlegen Sie die falsche(n) Aussage(n).

(4.1) **(6 Punkte)** $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N} : y \leq x \Rightarrow y \leq 3.$

(4.2) **(6 Punkte)** $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N} : y \leq x \Rightarrow 3 \leq y.$

Aufgabe 5 (12 Punkte)

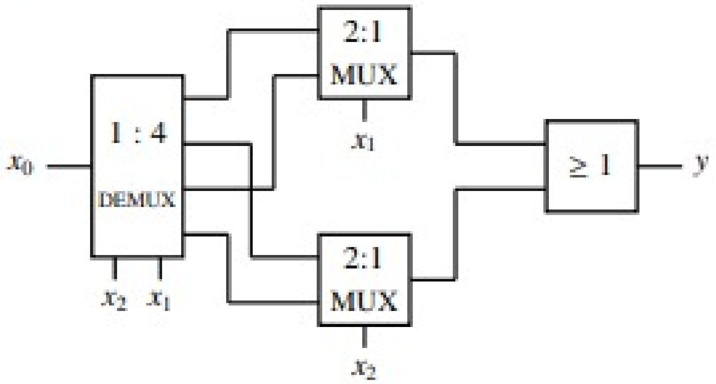
(5.1) **(12 Punkte)** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Behauptung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Korrigieren Sie zunächst die „Ungenauigkeit" bei der Formulierung der Behauptung.

Aufgabe 6 (15 Punkte)

(6.1) **(8 Punkte)** Betrachten Sie die Schaltfunktion y, die über das folgende Schaltnetz definiert wird. Übertragen Sie die Tabelle **richtig** auf Papier und ermitteln Sie y.



x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

(6.2) **(7 Punkte)** Gegeben sei die untenstehende boolesche Funktion. Sie sollen diese Funktion mit möglichst wenigen 2:1-Multiplexern schalten.
Hinweis: Die Eingänge und Steuerleitungen dürfen mit 0, 1 und Literalen belegt werden.

x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0
0	0	1	*
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Aufgabe 7 (14 Punkte)

(7.1) (7 Punkte) Übertragen Sie das nachfolgende KV-Diagramm einer Schaltfunktion y auf Papier. Geben Sie alle minimalen KNF von y an.
Hinweis: Falsch abgeschriebene KV-Diagramme werden nicht korrigiert!

		x_0	x_0		
	1_{0}	1_{1}	0_{5}	0_{4}	
	1_{2}	$*_{3}$	1_{7}	$*_{6}$	x_1
x_3	$*_{10}$	$*_{11}$	1_{15}	0_{14}	x_1
x_3	$*_{8}$	1_{9}	0_{13}	$*_{12}$	
			x_2	x_2	

(7.2) (5 Punkte) Übertragen Sie noch einmal das KV-Diagramm aus (7.1) auf Papier. Geben Sie alle minimalen DNF von y an.

(7.3) (2 Punkte) Würden Sie die Formel(n) aus (7.1) oder aus (7.2) bevorzugen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, dass die folgende Formel eine Tautologie ist:

$$(y \to z)(y \to x)(z \to x) \to (y \to xyz).$$