Lösungsvorschläge zu Aufgabenblatt 3

(Ordnungsrelationen)

Aufgabe 3.1

Es seien M_1, M_2 nichtleere Mengen, und R_i sei eine Ordnungsrelation auf M_i für $i = 1, 2$. Wir verwenden die Notation

$$x_i \sqsubseteq_i y_i :\Leftrightarrow (x_i, y_i) \in R_i \quad \text{für alle } x_i, y_i \in M_i \text{ und } i = 1, 2.$$

Auf $M := M_1 \times M_2$ definiere die Relation

$$(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 \sqsubseteq_1 y_1 \text{ und } x_2 \sqsubseteq_2 y_2 \quad \text{für alle } (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sqsubseteq$ eine Ordnungsrelation auf M definiert.

(b) Betrachte speziell den Fall $M_1 = M_2 = \mathbb{N}_0$ und $\sqsubseteq_1 = \sqsubseteq_2 = \leqslant$. Ist dann die Ordnungsrelation $\sqsubseteq$ auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine totale Ordnung?

Lösung

(a) $\sqsubseteq$ *ist reflexiv:* Sei $(x_1, x_2) \in M$. Da R_1 und R_2 reflexiv sind, gilt $x_1 \sqsubseteq_1 x_1$ und $x_2 \sqsubseteq_2 x_2$. Nach Definition gilt also auch

$$(x_1, x_2) \sqsubseteq (x_1, x_2).$$

$\sqsubseteq$ *ist antisymmetrisch:* Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M$. Es gelte $(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \sqsubseteq (x_1, x_2)$. Nach Definition gilt dann

$$\big(x_1 \sqsubseteq_1 y_1 \ \wedge\ x_2 \sqsubseteq_2 y_2\big) \quad \text{und} \quad \big(y_1 \sqsubseteq_1 x_1 \ \wedge\ y_2 \sqsubseteq_2 x_2\big)$$

Da R_1 antisymmetrisch ist, folgt aus $x_1 \sqsubseteq_1 y_1$ und $y_1 \sqsubseteq_1 x_1$, dass $x_1 = y_1$ ist, und da auch R_2 antisymmetrisch ist, folgt aus $x_2 \sqsubseteq_2 y_2$ und $y_2 \sqsubseteq_2 x_2$, dass $x_2 = y_2$ ist. Also ist $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

$\sqsubseteq$ *ist transitiv:* Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in M$ mit $(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \sqsubseteq (z_1, z_2)$. Zu zeigen: $(x_1, x_2) \sqsubseteq (z_1, z_2)$.
Nach Definition gilt

$$\big(x_1 \sqsubseteq_1 y_1 \ \wedge\ x_2 \sqsubseteq_2 y_2\big) \quad \text{und} \quad \big(y_1 \sqsubseteq_1 z_1 \ \wedge\ y_2 \sqsubseteq_2 z_2\big).$$

Da R_1 transitiv ist, folgt aus $x_1 \sqsubseteq_1 y_1$ und $y_1 \sqsubseteq_1 z_1$, dass $x_1 \sqsubseteq_1 z_1$ ist, und da auch R_2 transitiv ist, folgt aus $x_2 \sqsubseteq_2 y_2$ und $y_2 \sqsubseteq_2 z_2$, dass $x_2 \sqsubseteq_2 z_2$ ist. Also ist $(x_1, x_2) \sqsubseteq (z_1, z_2)$.

(b) Die Ordnungsrelation $\sqsubseteq$ auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist keine totale Ordnung, denn es gilt z.B. weder $(0, 1) \sqsubseteq (1, 0)$ noch $(1, 0) \sqsubseteq (0, 1)$, da $0 < 1$, aber $1 > 0$ ist.

Aufgabe 3.2
Es sei X eine Menge und $M := P(X)$ die Potenzmenge von X.

(a) Zeigen Sie, dass die Teilmengen-Relation $\subseteq$ eine Ordnungsrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M$ gilt $\sup\{A, B\} = A \cup B$ und $\inf\{A, B\} = A \cap B$.

Lösung

(a) $\subseteq$ *ist reflexiv:* Sei $A \in M$. In Disk. Math. 1 wurde gezeigt $A \subseteq A$.

$\subseteq$ *ist antisymmetrisch:* Seien $A, B \in M$. Es gelte $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. In Disk. Math. 1 wurde gezeigt, dass dies gleichbedeutend ist mit $A = B$.

$\subseteq$ *ist transitiv:* Seien $A, B, C \in M$ mit $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$. Zu zeigen: $A \subseteq C$.

Sei dazu $x \in A$. Wegen $A \subseteq B$ folgt hieraus $x \in B$, und wegen $B \subseteq C$ folgt damit auch $x \in C$. Damit ist $A \subseteq C$ bewiesen.

(b) Seien $A, B \in M$.

Beweis von $\sup\{A, B\} = A \cup B$. Hierfür sind zwei Aussagen zu zeigen:

(i) $A \cup B$ ist obere Schranke von $\{A, B\}$.

(ii) $A \cup B$ ist sogar kleinste obere Schranke von $\{A, B\}$.

Zu (i): In Disk. Math. 1 wurde gezeigt: $A \subseteq A \cup B$ und $B \subseteq A \cup B$. Dies heißt gerade, dass $A \cup B$ eine obere Schranke von $\{A, B\}$ ist.

Zu (ii): Sei $C \in M$ eine weitere obere Schranke von $\{A, B\}$. Dann ist zu zeigen: $A \cup B \subseteq C$.

Da C eine obere Schranke von $\{A, B\}$ ist, gilt nach Definition $A \subseteq C$ und $B \subseteq C$. Damit folgt aber auch $A \cup B \subseteq C$, was zu zeigen war.

Beweis von $\inf\{A, B\} = A \cap B$. Hierfür sind zwei Aussagen zu zeigen:

(i) $A \cap B$ ist untere Schranke von $\{A, B\}$.

(ii) $A \cap B$ ist sogar größte untere Schranke von $\{A, B\}$.

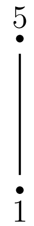
Zu (i): In Disk. Math. 1 wurde gezeigt: $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$. Dies heißt gerade, dass $A \cap B$ eine untere Schranke von $\{A, B\}$ ist.

Zu (ii): Sei $C \in M$ eine weitere untere Schranke von $\{A, B\}$. Dann ist zu zeigen: $C \subseteq A \cap B$.

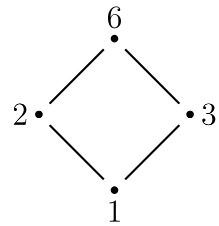
Da C eine untere Schranke von $\{A, B\}$ ist, gilt nach Definition $C \subseteq A$ und $C \subseteq B$. Damit folgt aber auch $C \subseteq A \cap B$, was zu zeigen war.

Aufgabe 3.3

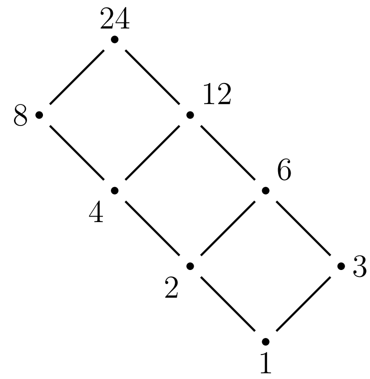
Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $T(n) := \{k \in \mathbb{N} \mid k|n\}$ die Menge aller Teiler von n, ausgestattet mit der Teiler-Ordnung. Erstellen Sie die Hasse-Diagramme von $T(5), T(6), T(24)$ und $T(648)$.



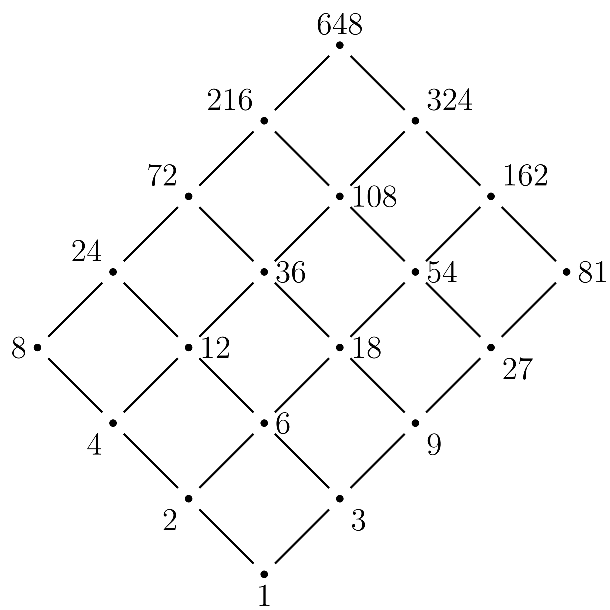
$T(5)$



$T(6)$



$T(24)$



$T(648)$

Aufgabe 3.4

Betrachte die Menge $M := \{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 24, 25\}$ ausgestattet mit der $|$ (teilt)-Relation.

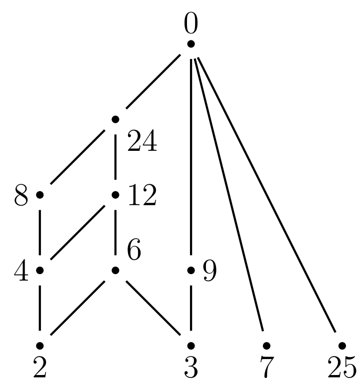
(a) Erstellen sie das zugehörige Hasse-Diagramm.

(b) Bestimmen Sie alle maximalen und minimalen Elemente sowie größtes und kleines Element von M, sofern diese existieren.

(c) Bestimmen Sie alle oberen und unteren Schranken von $A := \{4, 6, 12\}$ sowie $\inf A$ und $\sup A$, sofern diese existieren.

Lösungsskizze

(a)



Hasse-Diagramm

(b) Größtes Element von M ist 0, denn allgemein gilt $x|0$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$. Damit ist 0 auch einziges maximales Element von M. Minimale Elemente sind $2, 3, 7, 25$ (ablesen im Hasse-Diagramm), und es gibt kein kleinstes Element von M.

(c) Die Menge der oberen Schranken von A ist $\{12,24,0\}$. Da diese Menge das kleinste Element 12 besitzt, existiert auch das Supremum von A, und es gilt $\sup A = 12$.

Untere Schranke von A ist nur die 2, also gilt auch $\inf A = 2$.

Aufgabe 3.5

Es sei R eine Ordnungsrelation auf der Menge M.

(a) Zeigen Sie, dass die inverse Relation R^{-1} ebenfalls eine Ordnungsrelation auf M ist.

(b) Seien $A \subseteq M$ und $b \in M$. Zeigen Sie: b ist genau dann größtes Element (resp. maximales Element/obere Schranke/obere Grenze/Supremum) von A bezüglich R, wenn b kleinstes Element (resp. minimales Element/untere Schranke/untere Grenze/Infimum) von A bezüglich R^{-1} ist.

Lösung

(a) R^{-1} *ist reflexiv:* Sei $x \in M$. Da R reflexiv ist, gilt $(x, x) \in R$, nach Definition der inversen Relation gilt also auch $(x, x) \in R^{-1}$.

R^{-1} *ist antisymmetrisch:* Seien $x, y \in M$ mit $(x, y) \in R^{-1}$ und $(y, x) \in R^{-1}$. Nach Definition der inversen Relation folgt damit $(y, x) \in R$ und $(x, y) \in R$. Da R antisymmetrisch ist, folgt $x = y$.

R^{-1} *ist transitiv:* Seien $x, y, z \in M$ mit $(x, y) \in R^{-1}$ und $(y, z) \in R^{-1}$. Nach Definition der inversen Relation folgt damit $(y, x) \in R$ und $(z, y) \in R$, also $(z, y) \in R$ und $(y, x) \in R$. Da R transitiv ist, folgt $(z, x) \in R$, also gilt nach Definition der inversen Relation $(x, z) \in R^{-1}$.

(b) Schreiben wir (wie üblich) $x \sqsubseteq y$ für $(x, y) \in R$, so gilt

$$(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow y \sqsubseteq x.$$

Damit folgen die Aussagen für maximale/minimale und größte/kleinste Elemente sowie für obere/untere Schranken unmittelbar aus den Definitionen.

Sei nun S die Menge der oberen Schranken von A bzgl. R, dann gilt für alle $s \in M$

$$\begin{aligned} s \in S \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, a \in A : a \sqsubseteq s \Leftrightarrow \forall\, a \in A : (s, a) \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad s \text{ ist untere Schranke von } A \text{ bzgl. } R^{-1}, \end{aligned}$$

also ist S gleich der Menge der unteren Schranken von A bzgl. R^{-1}. Sei nun $g \in M$, dann gilt

$$\begin{aligned} g \text{ ist obere Grenze von } A \text{ bzgl. } R \quad &\Leftrightarrow \quad g \text{ ist minimales Element von } S \text{ bzgl. } R \\ &\Leftrightarrow \quad g \text{ ist maximales Element von } S \text{ bzgl. } R^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad g \text{ ist untere Grenze von } A \text{ bzgl. } R^{-1}, \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} g \text{ ist Supremum von } A \text{ bzgl. } R \quad &\Leftrightarrow \quad g \text{ ist kleinstes Element von } S \text{ bzgl. } R \\ &\Leftrightarrow \quad g \text{ ist größtes Element von } S \text{ bzgl. } R^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad g \text{ ist Infimum von } A \text{ bzgl. } R^{-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

Es sei $M := \mathbb{Q}$ ausgestattet mit der $\leqslant$-Ordnung und $A := \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq M$. Bestimmen Sie $\inf A$ und $\sup A$.

Lösung

Zum Supremum. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} \leqslant 1$. Andererseits ist $1 = \frac{1}{1} \in A$. Also ist 1 größtes Element von A, und damit insbesondere auch $\sup A = 1$.

Zum Infimum. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} \geqslant 0$, also ist 0 eine untere Schranke von A. Wir wollen zeigen, dass 0 sogar größte untere Schranke von A ist. Dazu ist zu zeigen:

$$\forall\, s \in \mathbb{Q} \,:\, s \text{ untere Schranke von } A \Rightarrow s \leqslant 0.$$

Wir zeigen dazu die Kontraposition, also:

$$\forall\, s \in \mathbb{Q} \,:\, s > 0 \Rightarrow s \text{ keine untere Schranke von } A.$$

Wir lösen dies weiter auf: Dass $s \in Q$ eine untere Schranke von A ist, bedeutet: $\forall\, a \in A \,:\, s \leqslant a$. Also ist zu zeigen:

$$\forall\, s \in \mathbb{Q} \,:\, s > 0 \Rightarrow \big(\exists\, a \in A \,:\, a < s.\big)$$

Sei also $s \in \mathbb{Q}$. Es gelte $s > 0$. Wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{s}$ (dies ist möglich, da $\mathbb{N}$ keine oberen Schranken in $\mathbb{Q}$ besitzt). Setze $a := \frac{1}{n}$, dann ist $a \in A$, und es gilt $a = \frac{1}{n} < s$, was zu zeigen war.