Aufgaben Diskrete Mathematik 1

Noah Peeters

22. Februar 2019

Zusammenfassung

Dies ist eine Sammlung von Aufgaben für Diskrete Mathematik 1. Sie gibt keinen Aufschluss darüber welche Aufgaben in der Klausur kommen.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Potenzmenge

Berechnen Sie:

- $P(\{\})$
- $P(P(\{\}))$
- $P(\{1, 2, 3, 4\})$
- $|P(\{1, 2, 3, 4\})|$
- $|P(\{x|x \in \mathbb{N} \wedge x > 10 \wedge x < 100\})|$

1.2 Quantoren I

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1.2.1 (un)eingeschränkter Allquantor

- $\forall a \in A : a < 5 \Leftrightarrow \forall a : a \in A \wedge a < 5$
- $\forall a \in A : a < 5 \Leftrightarrow \forall a : a \in A \vee a < 5$
- $\forall a \in A : a < 5 \Leftrightarrow \forall a : a \in A \Rightarrow a < 5$ ✓

1.2.2 (un)eingeschränkter Existenzquantor

- $\exists a \in A : a < 5 \Leftrightarrow \exists a : a \in A \wedge a < 5$ ✓
- $\exists a \in A : a < 5 \Leftrightarrow \exists a : a \in A \vee a < 5$
- $\exists a \in A : a < 5 \Leftrightarrow \exists a : a \in A \Rightarrow a < 5$

1.2.3 Reihenfolge von Quantoren

- $\forall a \in A : \forall b \in B : \exists c \in C : a + b = c \Leftrightarrow \forall b \in B : \forall a \in A : \exists c \in C : a + b = c$ ✓
- $\forall a \in A : \forall b \in B : \exists c \in C : a + b = c \Leftrightarrow \forall a, b \in A : \exists c \in C : a + b = c$
- $\forall a \in A : \forall b \in B : \exists c \in C : a + b = c \Leftrightarrow \forall a \in A : \exists c \in C : \forall b \in B : a + b = c$
- $\forall a \in A : \forall b \in B : \exists c \in C : a + b = c \Leftrightarrow \exists c \in C : \forall a \in A : \forall b \in B : a + b = c$
- $\forall a \in A : \forall b \in A : \exists c \in C : a + b = c \Leftrightarrow \forall a, b \in A : \exists c \in C : a + b = c$

1.2.4 Negation Allquantor

- $\overline{\forall a \in A : a < 5} \Leftrightarrow \forall a \in A : a < 5$
- $\overline{\forall a \in A : a < 5} \Leftrightarrow \exists a \in A : a < 5$
- $\overline{\forall a \in A : a < 5} \Leftrightarrow \forall a \in A : a \geq 5$
- $\overline{\forall a \in A : a < 5} \Leftrightarrow \exists a \in A : a \geq 5$ ✓

1.2.5 Negation Existenzquantor

- $\overline{\exists a \in A : a < 5} \Leftrightarrow \forall a \in A : a < 5$
- $\overline{\exists a \in A : a < 5} \Leftrightarrow \exists a \in A : a < 5$
- $\overline{\exists a \in A : a < 5} \Leftrightarrow \forall a \in A : a \geq 5$ ✓
- $\overline{\exists a \in A : a < 5} \Leftrightarrow \exists a \in A : a \geq 5$

1.2.6 Negation gemischt

- $\overline{\forall a \in A : \forall b \in B : \exists c \in C : a + b = c} \Leftrightarrow \exists a \in A : \exists b \in B : \forall c \in C : a + b = c$
- $\overline{\forall a \in A : \forall b \in B : \exists c \in C : a + b = c} \Leftrightarrow \exists a \in A : \exists b \in B : \forall c \in C : a + b \neq c$ ✓
- $\overline{\forall a \in A : \forall b \in B : \exists c \in C : a + b = c} \Leftrightarrow \forall c \in C : \exists a \in A : \exists b \in B : a + b \neq c$
- $\overline{\forall a \in A : \forall b \in B : \exists c \in C : a + b = c} \Leftrightarrow \forall c \in C : \exists a \in A : \exists b \in B : a + b = c$

1.3 Quantoren II

Übertragen Sie folgende Sätze in prädikatenlogische Aussagen. Verwenden Sie geeignete Prädikate und Mengen.

a) • Wenn jemand ein Geschwisterkind hat, ist dieser selbst Geschwisterkind von dem Geschwisterkind.
b) • Es gibt höchstens einen Papst.
c) • Es gibt ganau einen Papst.
d) • Alle Mathematikdozenten mögen Mathematik.
e) • Jeder Student hat einen Dozenten, der Mathematik unterrichtet.
f) • Alle Studenten haben denselben Dozenten, der Mathematik unterrichtet.
g) • Manche Studenten haben einen Dozenten, der Mathematik unterrichtet.
h) • Kein Student hat einen Dozenten, der Mathematik unterrichtet.
i) • Jeder Mathematikdozent hat mindestens einen Studenten, den er unterrichtet.

Negieren Sie die Aussagen und schreiben Sie einen deutschen Satz, mit der selben Bedeutung wie die negierte Aussage.

1.4 Quantoren III

Welche der Operationen $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ sollte in folgenden Aussagen für $\odot$ eingesetzt werden. Begründen Sie ihre Entscheidung.

- $\forall b : b\ ist\ ein\ Buch \odot b\ hat\ einen\ Titel$
- $\exists b : b\ ist\ ein\ Buch \odot b\ hat\ mehr\ als\ 500\ Seiten$

1.5 Quantoren IV

Übertragen Sie folgende prädikatenlogische Aussagen in Sätze. Welche der Aussagen ergibt Sinn?

- $\forall h : \exists m : h\ ist\ Haustier \Rightarrow m\ ist\ Mensch \wedge m\ ist\ Besitzer\ von\ h$ ✓
- $\exists m : \forall h : h\ ist\ Haustier \Rightarrow m\ ist\ Mensch \wedge m\ ist\ Besitzer\ von\ h$
- $\forall h : \exists m : h\ ist\ Haustier \wedge m\ ist\ Mensch \Rightarrow m\ ist\ Besitzer\ von\ h$
- $\exists m : \forall h : h\ ist\ Haustier \wedge m\ ist\ Mensch \Rightarrow m\ ist\ Besitzer\ von\ h$

1.6 Mengenbeweise

1.6.1 Wikibooks

Folgendes ist eine Linksammlung zu Beweisen bei Wikibooks. Die Beweise, wie sie auf der Webseite aufgeschireben sind, sind für die Klausur vermutlich zu kurz gehalten.

Beweise zur Teilmenge. Zum Beispiel die Transitivität

Beweis zum Differenzoperator

De Morgansche Regeln für Mengen. Beweis der Spezialfälle.

Assoziativität von Schnitt, Vereinigung und Symmetrischer Differenz. Die normale Mengendifferenz ist nicht Assoziativ

Distributivgesetze bei Mengen. Auch hier wieder nur die Spezialfälle.

1.6.2 Moodle Kurse

Im Moodle Kurs gibt es eine liste mit Mengenbeweisen.

1.6.3 Weitere Sätze

- Seien A, B, C beliebige Mengen. Beweisen Sie $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- Seien A, B beliebige Mengen. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
  - $A \subset B$
  - $A \cap B = A$
  - $A \cup B = B$
  - $A \setminus B = \emptyset$

1.7 Vollständige Induktion

Hier gibt es eine umpfangreiche Sammlung von Induktionsbeweisen: emath.de: Induktion

Aufgaben, die in der Klausur kommen können finden sich in:

- A) Teilbarkeit
- B) Summenwerten: Wird in der Vorlesung gemacht und war auch schon in Klausuren. Die linke Seite wird in der Klausur als Summenzeichen geschrieben und sollte für einen Beweis auch so umgestellt werden.
- C) Produktwerten: Eine Aufgabe mit Produktwerten war in der Nachschreibeklausur. Die linke Seite wird in der Klausur als Produktzeichen geschrieben und sollte für einen Beweis auch so umgestellt werden.
- D) Ungleichungen
- E) Rekursive Folgen: Wird in der Vorlesung gemacht und war auch schon in Klausuren.

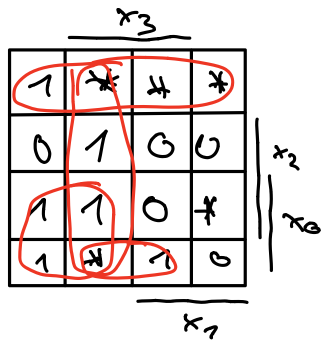
Ein weiteres Beispiel für einen Beweis für die Produktformel: Wikibooks. Der Beweis ist genau so aufgeschrieben, wie er von Zimmermann erwartet wird.

2 Boolsche Algebra

2.1 Boolesche Funktionen und Schaltungen

Gegeben sei folgende Wertetabelle (* = Don't care):

a)



$y = \bar{x}_0\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_3 + x_0 \bar{x}_1 + x_0 \bar{x}_2 x_3$

b) $\bar{y} = (x_0 + x_2)(x_1 + \bar{x}_3)(\bar{x}_0 + x_1)(\bar{x}_0 + x_2 + \bar{x}_3)$

c) $y = \overline{(x_0 + x_2)(x_1 + \bar{x}_3)(\bar{x}_0 + x_1)(\bar{x}_0 + x_2 + \bar{x}_3)}$

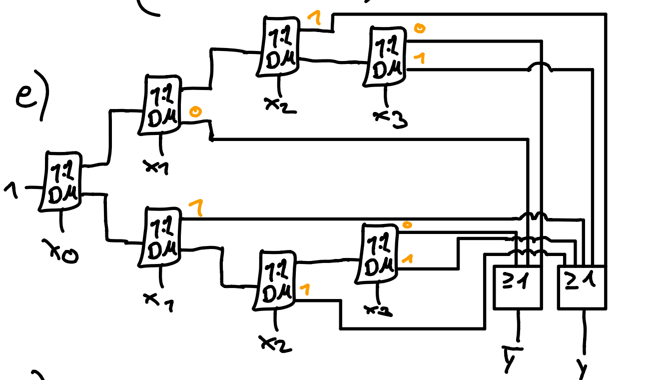
$y = \overline{x_0 + x_2} + \overline{x_1 + \bar{x}_3} + \overline{\bar{x}_0 + x_1} + \overline{\bar{x}_0 + x_2 + \bar{x}_3}$

$y = \bar{x}_0\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_3 + x_0\bar{x}_1 + x_0\bar{x}_2 x_3$

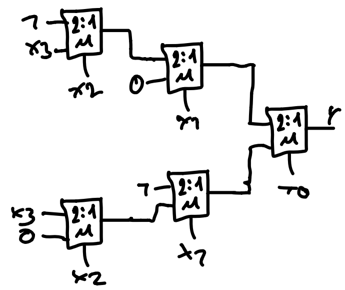
x_0	x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	*
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	*
0	1	0	1	*
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	*
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	*
1	1	1	1	0

d) $y = (\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_0 + x_1 + x_2 + \bar{x}_3)$
$(x_0 + x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_0 + x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$
$(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$

e)



f)



- a) Geben Sie eine minimale DNF an.
- b) Wandeln Sie die DNF in eine KNF um.
- c) Wandeln Sie die KNF zurück in eine DNF um.
- d) Geben Sie die minimale KKNF für die Wertetabelle an.
- e) Erstellen Sie eine Schaltung aus 1:2-Demultiplexern für die Wertetabelle.
- f) Erstellen Sie eine Schaltung aus 2:1-Multiplexern für die Wertetabelle.

2.2 Resolutionskalkühl

Zeigen Sie, dass die folgende Formel eine Antinomie ist:

- $(A + C)(\bar{C} + B)(\bar{A})(\bar{B} + \bar{C} + A)$

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln Tautologien sind:

- $(x \to y)(y \to z) \to ((x \leftrightarrow y) + z)$
- $a\bar{c} + dc + ac\bar{f} + \bar{a}\bar{b} + e + acf + \bar{a}b$