

Lösungsvorschläge zu Aufgabenblatt 10

(Restklassengruppen mit Multiplikation)

Aufgabe 10.1

Zeigen Sie die folgende Variante des Satzes von Bézout:

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{Z}$ mit

$$\text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b.$$

Aufgabe 10.2

Aufgrund der vielen Studenten soll die Nordakademie in Elmshorn an die U-Bahn angeschlossen werden. Zwei Linien, die U_{15} und die U_{21} fahren im 15- bzw. 21-Minuten Takt. Leider hat der Bahnhof nur einen Bahnsteig, so dass in einer Minute immer nur ein Zug in Elmshorn halten kann.

- (a) Ist es möglich, einen Fahrplan zu erstellen so, dass die angegebene Taktung (unfallfrei) eingehalten werden kann?
- (b) Wie verhält es sich mit den Linien U_{15} und U_{22} , wenn die Linie U_{22} im 22-Minuten Takt fährt?

Aufgabe 10.3

Welche der folgenden Gleichungen sind lösbar? Geben Sie gegebenenfalls alle Lösungen an.

- (a) $[140]_{555} \cdot x = [100]_{555},$
- (b) $[210]_{1100} \cdot x = [147]_{1100},$
- (c) $[21]_{80} \cdot x = [6]_{80},$
- (d) $[207]_{5814} \cdot x = [45]_{5814}.$

Aufgabe 10.4

Beweisen Sie die fehlende Richtung vom Satz "Gesamtheit Lösungen Restklassengleichung" (Folie 191):

Sei $m \in \mathbb{N}$ ein fester Modulus, und seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $g := \text{ggT}(a, m) | b$. Es sei $x_0 = [c]_m$ eine Lösung der Gleichung

$$[a]_m \otimes x = [b]_m.$$

Dann ist jede Lösung von der Gestalt

$$x_j = [c + j \cdot q]_m$$

für ein $j \in \{0, \dots, g-1\}$ mit $q := \frac{m}{g}$.

Aufgabe 10.5

Erstellen Sie ein Programm, das zu einer gegebenen modulo-Gleichung alle Lösungen ausgibt.