Aufgabenblatt 4 zur Diskreten Mathematik 2

(Verbände und Äquivalenzrelationen)

Aufgabe 4.1

Betrachte $\mathbb{N}$ ausgestattet mit der "teilt"-Ordnung.

(a) Bestimmen Sie $\inf\{a, b\}$ und $\sup\{a, b\}$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $T(n) := \{k \in \mathbb{N} \mid k|n\} \subseteq M$ die Menge aller Teiler von n. Zeigen Sie, dass $T(n)$ ein Verband ist.

Hinweis: *Es wird ggf. Schulwissen über elementare Zahlentheorie benötigt.*

Aufgabe 4.2

Definiere auf der Menge $M := \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (-1, -1), (0, -1), (0, -2)\}$ die Relation

$$(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 \quad \text{für alle } (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $(0, 0), (1, 0)$ und $(1, 1)$.

(c) Notieren Sie die Menge $M/\equiv$ explizit.

(d) Geben Sie ein Repräsentantensystem an.

Aufgabe 4.3

Definiere auf der Menge $M := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Relation

$$(a, b) \equiv (c, d) :\Leftrightarrow a + d = b + c \quad \text{für alle } (a, b), (c, d) \in M.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $(1, 1), (1, 2)$ und $(2, 1)$.

Anmerkung: *Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\equiv$ lässt sich über ein geeignetes Repräsentantensystem mit den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ identifizieren.*

Aufgabe 4.4

Es sei M eine nichtleere Menge, und es sei $\mathcal{Z} \subseteq P(M)\backslash\{\varnothing\}$ eine Zerlegung von M, das heißt, es gelte:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{Z}} A = M \quad \text{und} \quad \forall\, A, B \in \mathcal{Z} :\; A \cap B = \varnothing \;\vee\; A = B.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$x \equiv y :\Leftrightarrow \;\exists\, A \in \mathcal{Z} :\; \{x, y\} \subseteq A \quad \text{für alle } x, y \in M$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird, für die gilt $M/\equiv\, = \mathcal{Z}$.