Aufgabenblatt 11 zur Diskreten Mathematik 2

(Untergruppen)

Aufgabe 11.1

1. Bestimmen Sie die Ordnungen der Elemente in der Gruppe $(\mathbb{Z}_7 \backslash \{[0]_7\}, \otimes)$ sowie die von ihnen erzeugten Untergruppen.
2. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe $(\mathbb{Z}_9, \oplus)$.
3. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe $(\mathbb{Z}_9 \backslash \{[0]_9, [3]_9, [6]_9\}, \otimes)$ (warum ist dies eine Gruppe?).
4. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe $(\mathbb{Z}_{2017}, \oplus)$.

Aufgabe 11.2

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $[a]_m$ genau dann ein Erzeuger der additiven Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ ist, wenn gilt $\text{ggT}(m, a) = 1$.

Aufgabe 11.3

Sei $(G, \cdot)$ eine kommutative Gruppe. Auf der Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\equiv_H$ definieren wir:

$$[g_1]_{\equiv_H} \circ [g_2]_{\equiv_H} := [g_1 g_2]_{\equiv_H}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$G/H := G/{\equiv_H} = \{[g]_{\equiv_H} \mid g \in G\} = \{gH \mid g \in G\}$$

mit der Verknüpfung $\circ$ eine kommutative Gruppe ist.

Anmerkung zur Notation: *Verwendet man wie in dieser Aufgabe "$\cdot$" für die Gruppenverknüpfung, so ist es wie beim herkömmlichen Rechnen mit Zahlen üblich, verkürzt $gh := g \cdot h$ zu schreiben.*