POTENZMENGE:
Die „Potenzmenge“ $P(M)$ einer Menge M ist die Gesamtheit aller Teilmengen von M, einschließlich der leeren Menge und der Menge selbst.

$$P(M) = \{x|x \subseteq M\}$$

MÄCHTIGKEIT EINER MENGE:
Es sei S eine Menge mit endlich vielen Elementen. Die Anzahl der Elemente, auch „Kardinalität“ oder „Mächtigkeit“ genannt, schreibt man $|S|$.

VEREINIGUNG ZWEIER MENGEN:
Die „Vereinigung“ zweier Mengen S und T ist die Menge aller Elemente, die zu S oder zu T gehören.

$$S \cup T = \{x|x \in S \vee x \in T\}$$

MENGENDIFFERENZ:
Die „Differenz“ zweier Mengen S und T ist die Menge aller Elemente von S, die nicht zu T gehören.

$$S \setminus T = \{x|x \in S \wedge x \notin T\}$$

SYMMETRISCHE DIFFERENZ:
Die „symmetrische Differenz“ zweier Mengen S und T ist die Menge aller Elemente, die zu genau einer der beiden Mengen S und T gehören.

$$S \Delta T = \{x|(x \in S \wedge x \notin T) \vee (x \notin S \wedge x \in T)\}$$

KARTESISCHES PRODUKT:
Das „Kartesische Produkt“ zweier Mengen S und T ist die Menge aller geordneten Paare. $S \times T = \{x|\text{Es gibt } y \in S \text{ und } z \in T\text{, so dass } x = (y, z)\}$

N-TUPEL:
Es seien $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ beliebige Objekte. Das geordnete „n-tupel“ ist das Objekt $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Zwei geordnete n-tupel $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ sind gleich, wenn $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$ und ... und $x_n = y_n$.
Das kartesische Produkt von n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist definiert durch:

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in M_n\}$$

KOMPLEMENT EINER MENGE:
Sei $S \subseteq M$, eine Teilmenge einer festen Grundmenge M (das Universum). Das „Komplement“ $\overline{S}$ von S in M ist die Menge aller Elemente von M, die nicht in S liegen.

$$\overline{S} = M \setminus S = \{x | x \in M \text{ und } x \notin S\}$$

GEORDNETE PAARE:
Es seien a_1 und a_2 beliebige Objekte, (a_1, a_2) heißt geordnetes Paar.
Zwei geordnete Paare sind gleich:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2)$$

DURCHSCHNITT ZWEIER MENGEN:
Der „Durchschnitt $S \cap T$ zweier Mengen S, T ist die Menge, die aus allen Elementen besteht, die zu S **und** zu T gehören.

$$S \cap T = \{x | x \in S \wedge x \in T\}$$

DISJUNKTE MENGEN:

S und T heißen “disjunkt“ oder „elementfremd“, falls $S \cap T = \emptyset$.

WAHRHEITSWERTE:
In der Aussagenlogik betrachten wir die zwei **aussagenlogischen Konstanten (Wahrheitswerte)** „wahr“ und „falsch“.

AUSSAGENLOGISCHE AUSSAGE:
Eine **aussagenlogische Aussage** ist nun ein Konstrukt, in dem die Elementaraussagen „wahr“ und „falsch“ über Operatoren miteinander verknüpft werden. Solche Operatoren sind die Verknüpfung „und“, „oder“, „wenn . . ., dann . . .“ oder der in der technischen Realisierung wichtige „nand“ Operator. Diese Operatoren werden auch als **aussagenlogische Junktoren** bezeichnet.

BELEGUNGEN:
Sei $\mathbb{V}$ eine Menge von aussagenlogischen Variablen. Eine **Belegung** b der Variablen ist eine Funktion $b : \mathbb{V} \to B$, die jeder Variablen einen Wahrheitswert zuordnet.

ERFÜLLBARKEITSPROBLEM:

Gegeben eine Menge von aussagenlogischen Variablen $\mathbb{V}$ und eine aussagenlogische Aussageform α. Gibt es eine Belegung $b : \mathbb{V} \to \mathbf{B}$, so dass α wahr wird?

FOLGERUNG:

Sei α eine aussagenlogische Aussageform und $\mathbb{A}$ eine Menge von aussagenlogischen Aussageformen.
α lässt sich aus $\mathbb{A}$ **folgern**, wenn für jede zu $\mathbb{A}$ konsistente Belegung b gilt: $b(\alpha) = wahr$. Wir schreiben dazu: $A \models \alpha$.

PRÄDIKAT:
Ein n-stelliges Prädikat ordnet jedem n-tupel von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens einen Wahrheitswert zu.

KONSISTENTE MENGEN VON AUSSAGEFORMEN:

Sei $\mathbb{A}$ eine Menge von aussagenlogischen Aussageformen über der Variablenmenge $\mathbb{V}$.
Eine Belegung $b : \mathbb{V} \to \mathbf{B}$ heißt **konsistent** zu $\mathbb{A}$, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{A}$ gilt $b(\alpha) = wahr$.
Eine Menge $\mathbb{A}$ von aussagenlogischen Aussageformen heißt **konsistent**, wenn es eine zu $\mathbb{A}$ konsistente Belegung gibt.

TAUTOLOGIE, KONTRADIKTION UND ERFÜLLBARKEIT:
Sei $\mathbb{V}$ eine Variablenmenge und α eine aussagenlogische Aussageform. α heißt

- eine **Tautologie**, falls für jede Belegung $b : \mathbb{V} \to \mathbf{B}$ $b(\alpha) = wahr$ ist.
- eine **Kontradiktion**, falls für jede Belegung b: $b : \mathbb{V} \to \mathbf{B}$ $b(\alpha) = falsch$ ist.
- **erfüllbar**, falls es eine Belegung $b : \mathbb{V} \to \mathbf{B}$ gibt, für die $b(\alpha) = wahr$ ist.

AUSSAGENLOGISCHE AUSSAGEFORM:
Eine **aussagengenlogische Aussageform** (über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$) ist nun ein sprachliches Konstrukt, in dem Wahrheitswerte (wahr, falsch) und aussagenlogiche Variablen $x_1, \ldots, x_n$ über aussagenlogische Junktoren miteinander verknüpft werden.
Durch Einsetzen von Wahrheitswerten für die aussagenlogischen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ erhält man eine aussagenlogische Aussage.
Ergibt sich aus einer aussagenlogischen Aussageform über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ unabhängig von den für die Variablen eingesetzten Wahrheitswerte eine wahre (falsche) Aussage, so heißt die Aussageform eine **Tautologie** (**Kontradiktion**).

FORMALE DEFINITION VON AUSSAGENLOGISCHEN AUSSAGEFORMEN:
Sei $\mathbb{V}$ eine Menge von aussagenlogischen Variablen mit $\mathbb{V} \cap \{(,), \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} = \emptyset$.
Aussagenlogische Aussageformen über $\mathbb{V}$ sind Zeichenketten über $\mathbb{V} \cup \{(,), \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, die auf folgende Weise gebildet werden können:

1. Jede aussagenlogische Variable $x \in \mathbb{V}$ sowie die Konstanten wahr und falsch sind aussagenlogische Aussageformen.
2. Ist α eine aussagenlogische Aussageform, dann ist auch $(\neg\alpha)$ eine aussagenlogische Aussageform.
3. Sind α, β aussagenlogische Aussageformen, dann sind auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$ und $(\alpha \Rightarrow \beta)$ und $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ aussagenlogische Aussageformen.
4. Nur Zeichenketten, die durch endlich häufiges Anwenden der Regeln 1-3 gebildet werden, sind aussagenlogische Aussageformen.

Die Menge aller aussagenlogischen Aussageformen über $\mathbb{V}$ bezeichne ich mit $T_{\mathbb{V}}$.

ALLQUANTOR:
Sei $Q(x_1, \ldots, x_n)$ eine prädikatenlogische Aussageforn mit n freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$, unter denen x_i eine ist. Dann bezeichnet

$$\forall x_i : Q(x_1, \ldots, x_n)$$

eine prädikatenlogische Aussageform mit n-1 Variablen. Im Spezialfall $n = 1$ erhalten wir eine prädikatenlogische Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $Q(x_1)$ für alle Dinge unserer Anschauung oder unseres Denkens wahr ist.´

EINGESCHRÄNKTER EXISTENZQUANTOR:
Sei $Q(x)$ eine prädikatenlogische Aussageform, in der die freie Variable x vorkommt und M eine beliebige Menge.

$$\exists x \in M : Q(x)$$

ist äquivalent zu:

$$\exists x : x \in M \land Q(x)$$

FAKULTÄT:
Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Wert $n!$ (sprich: n Fakultät) durch:

1. $0! = 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$

INVERSE RELATION:
Es seien M, N beliebige Mengen und $R \subseteq M \times N$ eine Relation.
Die inverse Relation $R^{-1} \subseteq N \times M$ ist:

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

PEANO AXIOME:
Unter den natürlichen Zahlen verstehen wir eine Menge $\mathbb{N}$, für die eine Nachfolgeroperation definiert ist, und die die folgenden Eigenschaften hat:

P1) 1 ist eine natürliche Zahl.

P2) Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat genau einen Nachfolger $n' \in \mathbb{N}$.

P3) Jede natürliche Zahl ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.

P4) $1 \in \mathbb{N}$ ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.

P5) Sei P eine beliebige Eigenschaft von natürlichen Zahlen.

Wenn die folgenden zwei Aussagen wahr sind:

(a) Induktionsanfang: P(1) ist wahr.
(b) Induktionsschluss: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n')$

Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

RELATION:
Eine (binäre) Relation R zwischen zwei Mengen M und N ist eine beliebige Teilmenge des kartesischen Produkts $M \times N$ (siehe Mengenlehre).

$$R \subseteq M \times N$$

EINGESCHRÄNKTER ALLQUANTOR:
Sei $Q(x)$ eine prädikatenlogische Aussageform, in der die freie Variable x vorkommt und M eine beliebige Menge.

$$\forall x \in M : Q(x)$$

ist äquivalent zu:

$$\forall x : x \in M \Rightarrow Q(x)$$

EXISTENZQUANTOR:

Sei $Q(x_1, \ldots, x_n)$ eine prädikatenlogische Aussageform mit n freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$, unter denen x_i eine ist. Dann bezeichnet

$$\exists x_i : Q(x_1, \ldots, x_n)$$

eine prädikatenlogische Aussageform mit n-1 Variablen. Im Spezialfall $n = 1$ erhalten wir eine prädikatenlogische Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $Q(x_1)$ für wenigstens ein Ding unserer Anschauung oder unseres Denkens wahr ist.

GLEICHHEIT VON MENGEN (EXTENSIONALITÄTSPRINZIP):
Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen „gleich", (genau dann) wenn sie die gleichen Elemente enthalten.
Mit anderen Worten:

1. Jedes Element von M_1 ist Element von M_2.

   und

2. Jedes Element von M_2 ist Element von M_1.

TEILMENGE:
Eine Menge M_1 heißt „Teilmenge" der Menge M_2, wenn jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist. Man schreibt dann:

$$M_1 \subseteq M_2.$$

Die Tatsache, dass M_1 nicht Teilmenge von M_2 ist, wird durch

$$M_1 \nsubseteq M_2$$

ausgedrückt.
Falls $M_1 \subseteq M_2$ und $M_1 \neq M_2$ heißt M_1 „echte Teilmenge" von M_2. Man verwendet hierfür die Schreibweise

$$M_1 \underset{\neq}{\subset} M_2$$

.