Aufgabe 1 (33 Punkte)

Der Klausurteil von Herrn Neuhaus wird auf einem separatem Aufgabenblatt ausgeteilt.

Aufgabe 2 (18 Punkte)

Kreuzen Sie in den folgenden Multiple Choice Aufgaben **maximal** je 3 Antworten als richtig an.

Bewertungshinweis:

- Wenn Sie mehr als drei Kreuze pro Frage ankreuzen, erhalten Sie keine Punkte.
- Haben sie alle richtigen Antworten angekreuzt, erhalten Sie die volle Punktzahl.
- Haben Sie eine richtige Antwort zu wenig angekreuzt, erhalten Sie die halbe Punktzahl.
- Ansonsten erhalten Sie keine Punkte.

(2.1) (3 Punkte) Seien $R_1 \subseteq M_1 \times M_2$, $R_2 \subseteq M_2 \times M_3$ und $R_3 \subseteq M_3 \times M_4$ beliebige Relationen und $I = \{(x,x) | x \in M\}$.
Es gilt:

- [ ] $R_1 \circ R_1^{-1} = R_1^{-1} \circ R_1 = I$.
- [ ] R^{-1} ist nur definiert, wenn $R \neq \emptyset$.
- [x] $(R_1^{-1})^{-1} = R_1$.
- [ ] $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.
- [x] $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.
- [ ] $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
- [x] $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$.

3

(2.2) (3 Punkte) Sei M eine nichtleere Menge und $R, S \subseteq M \times M$ eine beliebige Relation.

- [ ] Wenn R nicht irreflexiv ist, ist R reflexiv.
- [x] Wenn R irreflexiv ist, ist R nicht reflexiv.
- [ ] Wenn R symmetrisch und transitiv ist, so ist R auch reflexiv.
- [x] Wenn R asymmetrisch ist, so ist R irreflexiv.
- [x] Wenn R und S symmetrisch sind, dann ist auch $R \cup S$ symmetrisch.
- [ ] Wenn R und S transitiv sind, dann ist auch $R \cup S$ transitiv.

3

(2.3) (3 Punkte) Sei M eine beliebige nichtleere Menge und $A \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge. Sei $\sqsubseteq$ eine beliebige Ordnungsrelation in M.

- [ ] Wenn A nichtleer ist, dann hat A ein größtes Element.
- [x] Wenn A nichtleer ist, dann hat A ein maximales Element. f
- [x] Wenn A zwei verschiedene maximale Elemente hat, dann hat A kein größtes Element.
- [x] Wenn A ein größtes Element hat, dann ist A nicht leer.
- [ ] Wenn A eine obere Schranke hat, dann ist A nicht leer.
- [ ] Wenn A leer ist, dann ist jedes Element von M obere Schranke.

3

(2.4) (3 Punkte) Sei M eine beliebige nichtleere Menge und $A \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge. Sei $\equiv$ eine beliebige Äquivalenzrelation in M.

- [ ] Wenn $x \in M$ verschieden von $y \in M$ ist, dann sind die Äquivalenzklassen von x und y elementfremd.
- [x] Wenn die Äquivalenzklassen von $x \in M$ und $y \in M$ verschieden sind, dann sind x und y verschieden.
- [ ] Wenn die Äquivalenzklassen von $x \in M$ und $y \in M$ gleich sind, dann sind x und y gleich.
- [x] Wenn zwei Äquivalenzklassen ein gemeinsames Element haben sind sie gleich.
- [ ] Jede Äquivalenzklasse hat einen eindeutig festgelegten Repräsentanten.
- [x] Äquivalenzklassen sind immer nichtleer.

(2.5) (3 Punkte) Seien $R_1 : M_1 \to M_2$ und $R_2 : M_2 \to M_3$ beliebige Abbildungen. Dafür, dass $R_1 \circ R_2$ injektiv ist,

- [ ] ist hinreichend, dass R_1 injektiv ist.
- [x] ist notwendig, dass R_1 injektiv ist.
- [ ] ist hinreichend, dass R_2 injektiv ist.
- [ ] ist notwendig, dass R_2 injektiv ist.
- [x] ist hinreichend, dass R_1 und R_2 injektiv sind.
- [ ] ist notwendig, dass R_1 und R_2 injektiv sind.
- [ ] ist hinreichend, dass R_1 oder R_2 injektiv ist.
- [ ] ist notwendig, dass R_1 oder R_2 injektiv ist.
- [ ] ist weder notwendig noch hinreichend, dass R_1 injektiv ist.
- [x] ist weder notwendig noch hinreichend, dass R_2 injektiv ist.

3

(2.6) (3 Punkte) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- [x] Es gibt genau ein $e \in G$, so dass für alle $a \in G$ gilt: $a \circ e = e \circ a = a$.
- [ ] Es gibt genau ein $e \in G$, so dass für alle $a \in G$ gilt: $a \circ e = e \circ a = e$.
- [x] Es gibt genau ein $a' \in G$, so dass für alle $a \in G$ gilt: $a \circ a' = a' \circ a = e$.
- [ ] Die Gleichung $a \circ x = b$ ist für beliebige $a \in G$ und $b \in G$ immer durch ein $x \in G$ lösbar.
- [x] Die Gleichung $x \circ a = b$ ist für beliebige $a \in G$ und $b \in G$ immer durch ein $x \in G$ lösbar. Diese Lösung ist eindeutig
- [ ] Die Gleichungen $a \circ x = b$ und $x \circ a = b$ sind für beliebige $a \in G$ und $b \in G$ immer durch ein $x \in G$ lösbar. Diese Lösung ist eindeutig.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $M = \{a, b, c\}$. Geben Sie ein Beispiel für eine Relation $R \subseteq M \times M$ an, die

(3.1) (3 Punkte) reflexiv, symmetrisch aber nicht transitiv ist.

$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a)\}$ ✓

3

(3.2) (2 Punkte) irreflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

$R = \{(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)\}$

0

(3.3) (3 Punkte) antisymmetrisch aber nicht asymmetrisch ist.

$R = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

3

Aufgabe 4 (21 Punkte)

Sei $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Menge alle Punkte in der x, y Ebene. Die Relation $\equiv$ sei durch

$$(x, y) \equiv (u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

definiert. Hinweis zum besseren Vorstellen: Da $x^2 + y^2$ das Quadrat des Abstandes des Punktes (x, y) vom Ursprung angibt, bedeutet $(x, y) \equiv (u, v)$, dass die Punkte (x, y) und (u, v) denselben Abstand vom Ursprung haben. Das heißt nichts anderes, als dass sie auf demselben Kreis um den Ursprung liegen.

(4.1) (3 Punkte) Geben Sie die formale Definition einer Äquivalenzrelation $\equiv \subseteq M \times M$. (Mit Quantoren, nur Eigenschaften aufzählen reicht nicht!)

Eine beliebige Relation R heißt Äquivalenzrelation genau wenn:

$\forall x, y \in M: (x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R$ (Symmetrie)

$\forall x, y, z \in M: (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ (Tran

$\forall x \in M: (x,x) \in R$ (Reflexiv)

3

(4.2) (6 Punkte) Beweisen Sie, dass es sich bei $\equiv$ um eine Äquivalenzrelation handelt. Tipp: Bitte berücksichtigen Sie, dass es sich bei den Elementen der Menge M um Paare handelt.

Sei R wie beschrieben.

1) Reflexiv:

Sei $(x,y) \in M$ beliebig ~~[illegible]~~ Zu zeigen $(x,y) \equiv (x,y)$.

Zu zeigen $x^2+y^2 = x^2+y^2$. Das ist das selbe. ✓

2. Symmetrie:

Sei $(x,y), (u,v) \in M$ beliebig mit $(x,y) \equiv (u,v)$. Zu zeigen $(u,v) \equiv$

Nach Vorraussetzung $x^2+y^2 = u^2+v^2$

$u^2+v^2 = x^2+y^2 \Rightarrow (u,v) \equiv (x,y)$ ✓

3. Transitiv:

Sei $(x,y), (u,v), (a,b) \in M$ beliebig mit $(x,y) \equiv (u,v)$ und $(u,v$

Zu zeigen $(x,y) \equiv (a,b)$.

Nach Vorraussetzung: $x^2+y^2 = u^2+v^2$

$u^2+v^2 = a^2+b^2$

$\Rightarrow x^2+y^2 = a^2+b^2 \Rightarrow (x,y) \equiv (a,b)$

6

w.z.

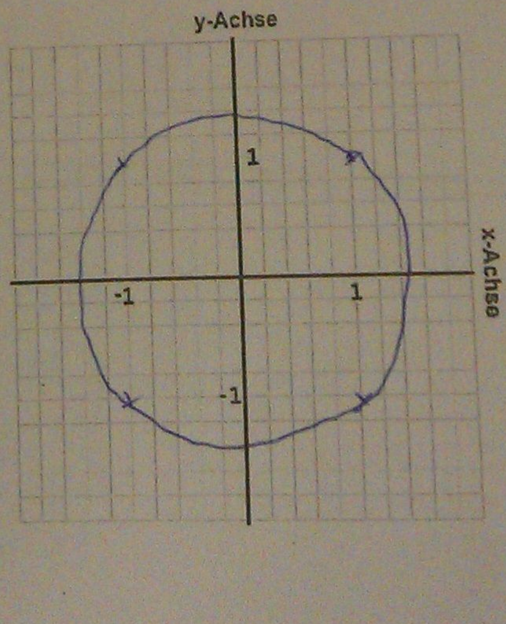
(4.3) (4 Punkte) Skizzieren Sie die Äquivalenzklasse des Punktes $(-1,1)$ in der x,y Ebene und geben Sie die Koordinaten von drei weiteren Punkten dieser Äquivalenzklasse an.

$(1,1)$

$(1,-1)$

$(-1,-1)$

4



(4.4) (8 Punkte) Beweisen Sie, dass das durch $(x, y) \odot (u, v) = (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u)$ definierte Produkt von zwei Punkten unabhängig vom Repräsentanten ist.
Tipp: Beweisen Sie mit Hilfe der ersten und zweiten binomischen Formeln

$$(x \cdot u - y \cdot v)^2 + (x \cdot v + y \cdot u)^2 = (x^2 + y^2) \cdot (u^2 + v^2)$$

Anschaulich bedeutet diese Formel, dass der Abstand des Produktes vom Nullpunkt gleich dem Produkt der Abstände vom Nullpunkt ist. Danach brauchen Sie nur noch hin zu schreiben, was die "Unabhängigkeit vom Repräsentanten" bedeutet.

Seien $(x, y), (u, v), (x', y'), (u', v') \in M$ mit $(x, y) \equiv (x', y$
und $(u, v) \equiv (u', v')$.

zu zeigen: $(x \cdot u - y \cdot v,\ x \cdot v + y \cdot u) \equiv (x' \cdot u' - y' \cdot v',\ x'$

Nach Voraussetzung: a) $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$
b) $u^2 + v^2 = u'^2 + y'^2$

a), b): $(x^2 + y^2) \cdot (u^2 + v^2) = (x'^2 + y'^2)$

$\Rightarrow (x \cdot u - y \cdot v)^2 + (x \cdot v + y \cdot u)^2 = (x' \cdot u' - y' \cdot v'$

$\Rightarrow ($

8

$(x \cdot u - y \cdot v,\ x \cdot v + y \cdot u) \equiv (x' \cdot u' - y' \cdot v',\ x' \cdot v' + y'$

q.e.d.

Aufgabe 5 (20 Punkte) 7. Januar 2013

Rechnen in Restklassenstrukturen

(5.1) (6 Punkte) Welche der folgenden Aufgaben ist eindeutig lösbar? Schreiben Sie "eindeutig lösbar" / "nicht eindeutig lösbar" hinter die Aufgabe.

1. $[16]_{64} \cdot [x]_{64} = [8]_{64}$ ggT(16,64) = 16 ↳ nicht eindeutig
2. $[17]_{64} \cdot [x]_{64} = [16]_{64}$ ggT(17,64) = 1 ↳ eindeutig lösbar
3. $[18]_{64} \cdot [x]_{64} = [32]_{64}$ ggT(18,64) = 2 ↳ eindeutig lösbar

(5.2) (14 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $[207]_{5814} \cdot [x]_{5814} = [45]_{5814}$

$5814 = 28 \cdot 207 + 18$

$207 = 11 \cdot 18 + 9$

$18 = 2 \cdot \underline{\underline{9}} + 0$ ✓ 4/4

$9 = 207 - (11 \cdot 18)$

$9 = 207 - 11 \cdot (5814 - 28 \cdot 207)$

$= 207 - 11 \cdot 58 + 128 \cdot 207$ 4/4

$= 309 \cdot 207 - 11 \cdot 58$ ✓

$x = 5 \cdot 309 = \underline{\underline{1545}}$ ✓ 3/3

$\frac{m}{ggT(a,m)} =$

$= \{ 1545, 2191, 2837, 3483, 4129, 4775, 5421$ 3/3

1

el Erfolg