Aufgabenblatt 6 zur Diskreten Mathematik 2

(Abbildungen)

Aufgabe 6.1

(a) Prüfen Sie die "teilt"-Ordnung auf $\mathbb{N}$ auf Links-/Rechtseindeutigkeit und Links-/Rechtstotalität.

(b) Es sei R eine reflexive linkseindeutige Relation auf der Menge M. Zeigen Sie $R = I_M$.

Aufgabe 6.2

Es sei M eine nichtleere Menge.

(a) Es sei N eine Menge und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass durch

$$R_f := \{(x, y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird (die sogenannte *Bildgleichheitsrelation unter der Abbildung* f).

(b) Sei umgekehrt R eine Äquivalenzrelation auf M und

$$f_R : M \to M/R, x \mapsto [x]_R$$

die Abbildung, die jedes $x \in M$ auf seine zugehörige Äquivalenzklasse $[x]_R$ bzgl. R abbildet. Zeigen Sie: $R_{f_R} = R$.

Anmerkung: *Aufgabenteil (a) verallgemeinert die Aufgaben 4.2 und 4.3 - die zugrundeliegenden Funktionen dort sind* $f : M \to \mathbb{N}_0, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$ *(Aufgabe 4.2) bzw.* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a, b) \mapsto a + b$ *(Aufgabe 4.3). Aufgabenteil (b) zeigt, dass letztlich* ***jede*** *Äquivalenzfunktion als Bildgleichheitsrelation zustande kommt.*

Aufgabe 6.3

Wir betrachten $M := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Äquivalenzrelation aus Aufgabe 4.3, also

$$(a, b) \equiv (c, d) :\Leftrightarrow a + d = b + c \quad \text{für alle } (a, b), (c, d) \in M,$$

und die zugehörige Menge $X := M/\equiv$ der Äquivalenzklassen. Welche der folgenden Relationen von X nach $\mathbb{Z}$ sind auch Abbildungen?

(a) $f := \big\{\big([(a, b)], a - b\big) \,\big|\, a, b \in \mathbb{N}\big\}$,

(b) $g := \big\{\big([(a, b)], a + b\big) \,\big|\, a, b \in \mathbb{N}\big\}$.

Anmerkung: *Aufgrund unseres Kenntnisstands über Relationen haben wir hier eine formal korrekte Formulierung der Aufgabenstellung gegeben. In beiden Fällen handelt es sich um Kandidaten für Abbildungen auf der Menge* $X = M/\equiv$ *von Äquivalenzklassen, die repräsentantenweise definiert werden sollen. Hierfür wird oft auch die intuitivere, jedoch formal nicht ganz korrekte Formulierung verwendet (vgl. Vorlesung):*

Welche der beiden folgenden Abbildungsvorschriften sind wohldefiniert (bzw. unabhängig vom Repräsentanten)?

$$f : X \to \mathbb{Z}, [(a, b)] \mapsto a - b, \qquad g : X \to \mathbb{Z}, [(a, b)] \mapsto a + b.$$

Aufgabe 6.4

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m, n) \mapsto 2^{m-1} \cdot (2n - 1)$$

bijektiv ist.

Aufgabe 6.5

(1) Beweisen Sie den Satz "Verkettung und totale Relationen" (Folie 118):

Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen und $R_1 \subseteq M_1 \times M_2$ und $R_2 \subseteq M_2 \times M_3$ links-(rechts)totale Relationen. Dann ist $R_1 \circ R_2$ links-(rechts)total.

(2) Beweisen Sie den Satz "Notwendige Bedingung für Sur- und Injektivität der Verkettung" (Folie 124):

Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen und $f : M_1 \to M_2$ sowie $g : M_2 \to M_3$ beliebige Abbildungen. Ist $g \circ f : M_1 \to M_3, x \mapsto g(f(x))$ eine surjektive (injektive) Abbildung, dann ist g surjektiv (f injektiv).

(3) Zeigen Sie durch Beispiele, dass im Satz "Notwendige Bedingung für Sur- und Injektivität der Verkettung" nicht auf die Surjektivität von f (Injektivität von g) geschlossen werden kann.