Mathematik Klausur I00

Zenturie:	I00 a,b,c	**Name:**
Datum:	11. 10. 2001	
Bearbeitungszeit:	120 Minuten	
Erlaubte Hilfsmittel:	Nicht programmierbarer Taschenrechner	
Maximale Punktzahl:	100	
Erreichte Punktzahl:		
Note:		

Die Klausur ist Bestandteil der Diplomvorprüfung im Sinne der Prüfungsordnung. **Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und einer Seitenzahl. Bitte kennzeichnen Sie deutlich die Zugehörigkeit von Antwort zu Aufgabe. Bitte schreiben Sie leserlich.**

---

1. Aufgabe...Mengenlehre (max. 7 Punkte)

2. Aufgabe...Logik

3. Aufgabe...Relationen (max. 10 Punkte)

4. Aufgabe...Kryptografie

5. Aufgabe:..Vollständige Induktion (max. 15 Punkte)

6. Aufgabe...Reihen und Folgen

7. Aufgabe...Taylorreihen (max. 13 Punkte)

8. Aufgabe...Extremwerte (max. 5 Punkte)

9. Aufgabe...Integralrechnung

1. Aufgabe: Mengenlehre (max. 7 Punkte)

a) Was ist ein Venn-Diagramm? (max. 3 Punkte)

b) Wie lauten die Venn-Diagramme für die Boole’schen Operatoren OR, AND, NOT, XOR? Zeichnen Sie je ein Beispiel für folgende Sachverhalte: (max. 3 Punkte)

Früchte **OR** Gemüse
Früchte **OR** Gemüse **OR** Getreide
Flüsse **AND** Salzgehalt
Milchprodukte **AND** Export **AND** Europa
Früchte **NOT** Äpfel
Schafe **XOR** Ziegen

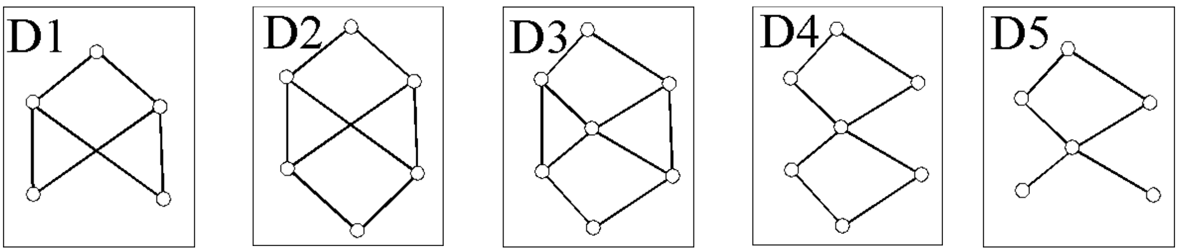
c) Zeichnen Sie Venn-Diagramme für folgende Sachverhalte: (max. 1 Punkt)

Füchse **OR** Kaninchen **AND** Schädlingsbekämpfung
Tierparasiten **OR** Schädlinge **NOT** Kaninchen

3. Aufgabe: Relationen (max. 10 Punkte)

a) Was ist eine Hasse Diagramm? (max. 3 Punkte)

b) Welches der folgenden Diagramme ist <u>kein</u> Hasse-Diagramm? (max. 3 Punkte)



c) Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die Ordnungsrelation „a teilt b“ für die folgende Menge von natürlichen Zahlen (max. 4 Punkte)

M = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

5. Aufgabe: Vollständige Induktion (max. 15 Punkte)

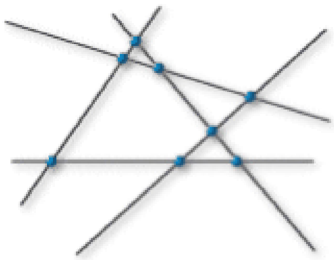
a) Beweisen Sie Summenformel der arithmetischen Reihe, d. h. die Formel (max 6 Punkte)

$$A(n) = a + (a + d) + ...+ (a + (n-1)d/2)n$$

b) Verkehrtes Mikado. Beweisen Sie für alle $n \geq 1$: (max. 6 Punkte)

Die Anzahl der Punkte, in denen sich n in einer Ebene gelegene Geraden schneiden können, beträgt höchstens

$(n - 1)n/2$.



Tipp: Wie viele Schnittpunkte können durch eine neue Gerade höchstens hinzu kommen, wenn 1, 2, 3 ...Geraden schon vorhanden sind?

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: die Folge $A(n) = 1/n$ hat nur positive Glieder. (max. 3 Punkte)

Aufgabe 7: Taylorreihen (max 13 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \ln(1 - x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe (Potenzreihe) in der Form: Taylorpolynom n-ten Grades plus Restglied. (max 4 Punkte)

Dazu sind folgende Zwischenschritte durchzuführen:

a) Beweisen Sie die Formel für die allgemeine Form der n-ten Ableitung durch volllständige Induktion (max 3 Punkte)

b) Wie ist der Konvergenzradius der unendlichen Taylorreihe? (Achtung: Untersuchen Sie auch die Ränder). (max 3 Punkte)

c) Was können Sie über das Verhalten des Restgliedes aussagen, wenn Sie n gegen unendlich streben lassen? (max 3 Punkte)

Tipp:
Die Formel für eine Taylorreihe für den Entwicklungspunkt x_0 lautet mit Restglied:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

8. Aufgabe: Extremwerte (max. 5 Punkte)

Aus einem quadratischen Stück Karton der Seitenlänge 1m soll eine quaderförmige Schachtel (ohne Deckfläche) mit der Höhe x hergestellt werden.

a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.

b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?

c) Geben Sie das maximale Volumen der Schachtel an.