2. Klausur Analysis und Stochastik (Modul I147), 28.11.2013

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$.

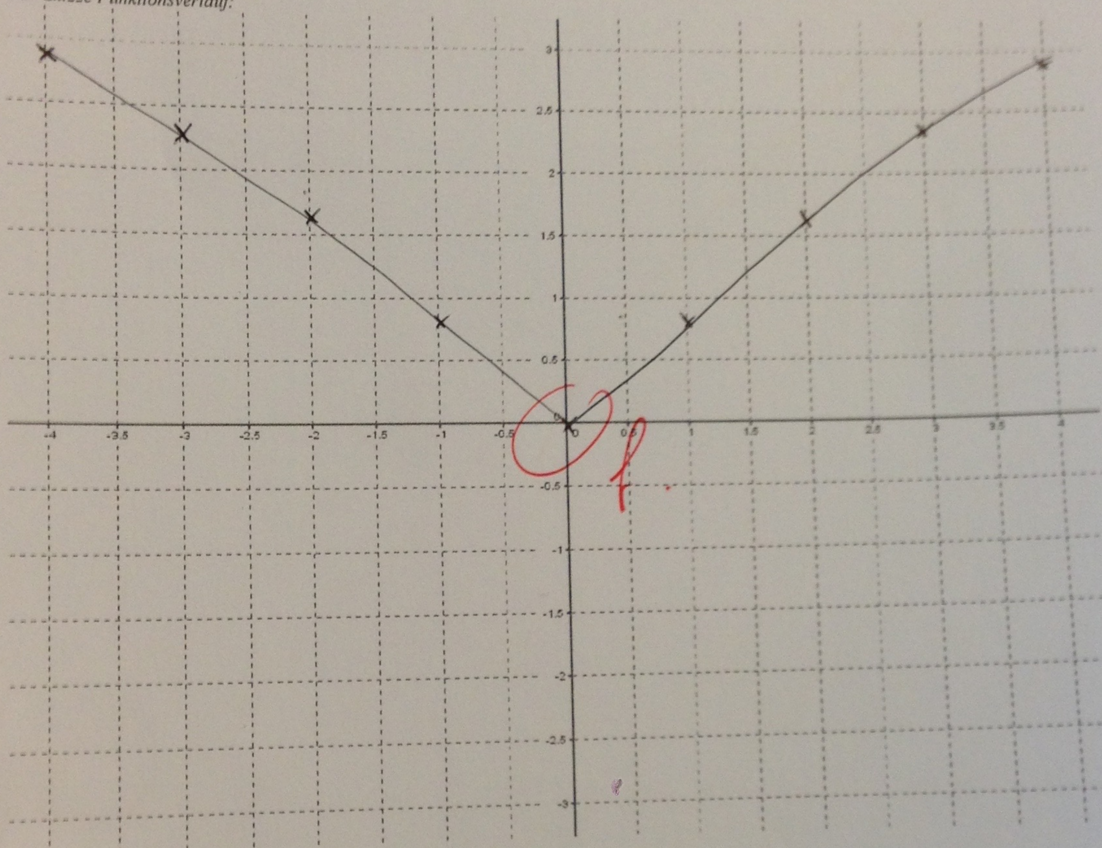
a) Bestimmen Sie den Definitions- und den Wertebereich von f.

b) Hat die Funktion besondere Punkte (Extremwerte, Wendepunkte)?

c) Skizieren Sie den Funktionsverlauf im Intervall $[-4, 4]$.

Lösung:

Für Skizze Funktionsverlauf:



f

c)

−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
2,83	2,30	1,61	0,64	0	0,64	1,61	2,3	2,8

a)

$D = \mathbb{R}$ ✓ $W = \mathbb{R}$ f

b)

~~Min Minimum bei x=0~~

~~Glob~~

~~Min~~ Globales Minimum bei $x=0$ (✓)

wo?

3P

Aufgabe 2 (16 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom vierten Grades der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ mit dem Entwicklungspunkt 0.

b) Benutzen Sie das Restglied von Lagrange zur Abschätzung des maximalen Fehlers, den man begeht, wenn dieses Polynom zur Berechnung von $f(1) = e$ benutzt wird?

c) Wie groß ist der tatsächliche Fehler im Vergleich zum Taschenrechnerergebnis?

Lösung:

a)
$a = 0$
Ableitungen 1-5

$f(x) = x \cdot e^x$
$f'(x) = e^x + x \cdot e^x$
$f''(x) = e^x + e^x + x \cdot e^x = 2e^x + x \cdot e^x$
$f'''(x) = e^x + e^x + e^x + x \cdot e^x = 3e^x + x \cdot e^x$
$f''''(x) = e^x + e^x + e^x + e^x + x \cdot e^x = 4e^x + x \cdot e^x$
$f^5(x) = 5e^x + x \cdot e^x$

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

$$\Rightarrow 0 + ((e^1 + e^1) \cdot x) + \frac{2e^2 + 2 \cdot e^2}{2} \cdot x^2 + \frac{3e^3 + 3e^3}{6} \cdot x^3 + \frac{4e^4 + 4e^4}{24} \cdot x^4$$

f f f f

b)
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

$c = 1 \Rightarrow$ max Fehler

genauer ?

$$= \frac{5e^1 + e^1}{120} \cdot (1-0)^5$$

$= 0{,}13591$

8 P

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie den Grenzwert:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^5+12x^3+6000}{3x^5-3x^4+4x-10}$

Lösung:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^5+12x^3+6000}{3x^5-3x^4+4x-10}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^5}\left(18+\overbrace{\frac{12}{x^2}}^{\text{gegen } 0}+\frac{6000}{x^5}\right)\text{ gegen } 0}{\cancel{x^5}\left(3-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\text{gegen } 0}+\underbrace{\frac{4}{x^4}}_{\text{gegen } 0}-\underbrace{\frac{10}{x^5}}_{\text{gegen } 0}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18}{3} = 6$ //

✓

/10 P

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-2x^3}}dx$. (Benutzen Sie die Substitution $u = 5-2x^3$.)

Lösung:

$$\int g'(x)\, f(g(x))\, dx \qquad u = 5-2x^3 \quad u' = -6x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{-6x^2}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{u}} = \left[\frac{\frac{1}{3}x^3 + c}{\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c}\right]$$

$c=0$

$$= \left[\frac{\frac{1}{3}x^3 \cancel{+c}}{\frac{2}{3}(-6x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{\frac{1}{3}\cancel{x^3}}{-4\cancel{x^3}} = -\frac{1}{12}$$

einsetzen ergibt

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{-6x^2}\, du = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$

$$= -\frac{1}{6}\left(2u^{\frac{1}{2}}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{5-2x^3} + C$$

...

3P

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sie haben von einem Arbeitskollegen eine Kontingenztabelle mit den Ergebnissen einer Untersuchung hinsichtlich der Merkmale „Qualifikation" und „Bereich" erhalten. Unglücklicherweise verschütten Sie einen Kaffee und viele Zahlen der Tabelle sind nicht mehr lesbar. Sie haben aber noch die Aussage Ihres Kollegen im Gedächtnis, dass er eine unabhängige Verteilung der Merkmale festgestellt habe. Rekonstruieren Sie die Tabelle.

Bereich / Qualifikation	Vertrieb	Produktion	Personal	Σ
Nicht-Akademiker	0,16			0,5
Akademiker	0,24	0,24	0,12	0,5
Σ	0,4			1

Lösung:

Sie können die ermittelten Werte direkt in die Tabelle eintragen.

	Vetrieb	Produktion	Personal	Σ
NA	0,16	0,16	0,08	0,4
A	0,24	0,24	0,12	0,6
	0,4	0,4	0,2	1

$$\frac{h_i \cdot h_y}{n} = h_y \qquad \frac{x \cdot \cancel{0{,}6}}{\cancel{1}} = \frac{0{,}24}{0{,}6}$$

$$\frac{0{,}4 \cdot x}{1} = 0{,}16$$

$$0{,}4 \cdot x = 0{,}16$$

$$x = \frac{0{,}16}{0{,}4}$$

✓

/12P

Aufgabe 6 (16 Punkte)

Ein Existenzgründer erwartet im ersten Geschäftsjahr einen Umsatz in Höhe von 150 Tsd. €. Er möchte wissen, mit welchem Aufwand er tendenziell rechnen muss. Von sechs vergleichbaren Existenzgründungen aus dem letzten Jahr liegen die Umsatzzahlen und die Aufwendungen vor.

Umsatz (Tsd. €)	121	128	130	135	149	154
Aufwand (Tsd. €)	40	37	45	49	48	55

a) Stellen Sie fest, welches Regressionsmodell geeignet erscheint (graphische Darstellung)

b) Ermitteln und interpretieren Sie die Regressionsfunktion.

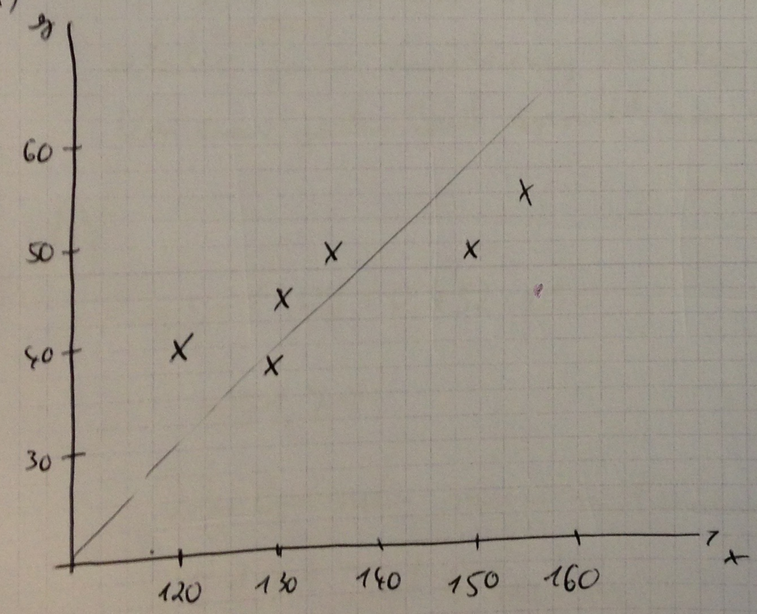
c) Beurteilen Sie die Güte der Regression.

d) Stellen Sie fest, mit welchem Aufwand der Existenzgründer rechnen muss.

Lösung:

(Für die graphische Darstellung:)

a)



=> lineares Regressionsmodell

b) Eingabe in Taschenrechner

$y = a + bx$

$a = -13{,}09$

$b = 0{,}432$ $\quad y = -13{,}09 + 0{,}432x$ //

✓

c)

$r = 0{,}85$

$r^2 = 0{,}72$

r^2 ist nahe an 0,8 also kann man von einer relativ moderat guten Annäherung der Regression sprechen. Von einer guten Güte spricht man, wenn $r^2 \geq 0{,}8$ ist

✓

d)

$y = -13{,}09 + 0{,}432 \cdot 150$

$= 51{,}71$

Der Gründer muss mit einem Umsatz von 51,71 Tsd. € rechnen.

✓

/16P

Aufgabe 7 (18 Punkte)

Ein Zulieferer produziert ein Bauteil X auf den drei Maschinen A, B und C, die mit Ausschussquoten von 4, 3 bzw. 1% arbeiten.

Bei einer Lieferung an einen Kunden stammen 20% der Bauteile von Maschine A, 30% von B und 50% von C.

a) Nennen Sie die gegebenen Ereignisse mit ihren Wahrscheinlichkeiten.

b) Der Kunde akzeptiert Lieferungen mit einer maximalen Ausschussquote von 2%. Wird bei der gegebenen Lieferung die maximale Ausschussquote überschritten?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Lieferung ein defektes Bauteil von Maschine A stammt?

d) Als Verbesserungsmaßnahme wird eine Endkontrolle eingeführt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,5% wird in der Endkontrolle ein defektes Bauteil als solches erkannt. Andererseits wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,8% ein fehlerfreies Bauteil irrtümlich als defekt eingestuft.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil defekt ist, wenn es in der Endkontrolle als defekt eingestuft wurde?

Schreiben Sie auch für Teil d) zuerst die Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten auf.

Lösung:

a) Maschine A Ausschussquote $P(A/M_A) = 0{,}04$

Maschine B Ausschussquote $P(A/M_B) = 0{,}03$

Maschine C Ausschussquote $P(A/M_C) = 0{,}01$

P

~~Lieferung Wahrscheinlichkeit A = 0,2 · 0,04~~

$P(M_A) = 0{,}2$

$P(M_B) = 0{,}3$

$P(M_C) = 0{,}5$

b) $P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}04 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 + 0{,}5 \cdot 0{,}01$

$= 0{,}022 // \Rightarrow 2{,}2\%$

Die Ausschussquote wird überschritten.

c)

$$P(M_1/A) = \frac{P(M_1) \cdot P(A/M_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}04}{0{,}022} = 0{,}\overline{36} \approx 36\%$$

Die Wahrscheinlichkeit dass ein defektes Teil der Maschine A dabei ist beträgt ca. 36%.

d)

Defektes Bauteil $= 0{,}485$

Fehlerfreies Bauteil $= 0{,}018$

$0{,}485 \times 0{,}018 = 0{,}01773$

$\Rightarrow 1{,}773\%$ f.

$\Rightarrow 98{,}227\%$

ist das Bauteil defekt f

/13 P