Dr. K. Röber	NORDAKADEMIE HOCHSCHULE DER WIRTSCHAFT	Matrikelnummer

Mathematik Nach-Klausur I01c (+ Wiederholer)

Centurie: **Name:**
Datum: 2002
Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner
Maximale Punktzahl: 100
Erreichte Punktzahl:
Note:

Die Klausur ist Bestandteil der Diplomvorprüfung im Sinne der Prüfungsordnung.
Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und einer Seitenzahl.
Bitte kennzeichnen Sie deutlich die Zugehörigkeit von Antwort zu Aufgabe.
Bitte schreiben Sie leserlich.

---

1. Aufgabe: Mengenlehre (max. 13 Punkte)

1.1 Welche der folgenden Mengen sind nicht leer (kreuzen Sie einfach an) (max. 6 Punkte)?
- a) $\mathbf{Z}\setminus(\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z})$
- b) $\mathbf{Q}\setminus\mathbf{R}$
- c) $\{x\in\mathbf{Q} : 1 - x^4 = 0\}$
- d) $\{x\in\mathbf{Z} : 1 + x^5 \leq 0\}$
- e) $\{x\in\mathbf{R} : x < x\}$

1.2 Sei $S\subseteq M$ eine Teilmenge einer festen Grundmenge M. Die Menge der Elemente, die in M, aber nicht in S liegen heißt ____________________?
(max. 2 Punkte)

1.3 Die Potenzmenge einer Menge M bezeichnen wir mit P(M). Was bedeutet die Beziehung
$M\subseteq P(M)$? (max. 5 Punkte)

2. Aufgabe: Logik (max. 15 Punkte)

Was verstehen Sie mathematisch unter einer „Aussage“? Wie lassen sich Aussagen verknüpfen (logische Junktoren)? Geben Sie jeweils ein Beispiel (verbal) für eine solche Verknüpfung.

3. Aufgabe: Relationen (max. 12 Punkte)

3.1 Welche Eigenschaften hat eine „strikte Ordnungsrelation“? Geben Sie ein Beispiel für eine solche Relation und weisen Sie die Eigenschaften nach. (max 10 Punkte)

3.2 Wodurch unterscheidet sich eine strikte Ordnungsrelation von einer Ordnungsrelation?

4. Aufgabe: Vollständige Induktion (max. 10 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass für alle $n\in\mathbf{N}$, $p\geq -1$ gilt:

$$(1 + p)^n \geq 1 + np$$

5. Aufgabe: Folgen und Reihen (max 14 Punkte)

5.1 Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $a_n = n/(2n+1)$ für $n \to \infty$. (max. 7 Punkte)

5.2 Zeigen Sie die absolute Konvergenz der Reihe (max. 7 Punkte)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx)}{n^2}, x \in \mathbf{R}$$

6. Aufgabe: Taylorreihen (max 13 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe (Potenzreihe). Schreiben Sie diese als Summenformel hin(max 4 Punkte)
Dazu wären standardmäßig folgende Zwischenschritte durchzuführen:
a) Beweisen Sie die Formel für die allgemeine Form der n-ten Ableitung durch vollständige Induktion (max 3 Punkte)
b) Wie ist der Konvergenzradius der unendlichen Taylorreihe? (Achtung: Untersuchen Sie auch die Ränder). (max 3 Punkte)
c) Was können Sie über das Verhalten des Restgliedes aussagen, wenn Sie n gegen unendlich streben lassen? (max 3 Punkte)
Hinweis: Die Formel für eine Taylorreihe für den Entwicklungspunkt x_0 lautet mit Restglied:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Wenn Sie eine einfachere Lösung finden als die Standardlösung, dürfen Sie auch diese verwenden und können sich dann a) sparen.

7. Aufgabe: Differentiation und Extremwerte (max. 11 Punkte)

7.1 Stellen Sie eine Formel für die n-te Ableitung von $f(x) = 1/(1 - x)$ auf und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion. (max. 5 Punkte)

7.2 Aus einem Stab der Länge L forme man einen Kreis und ein Quadrat so, dass die Summe der Flächeninhalte möglichst groß wird. (max 6 Punkte)

Hinweis. Die Fläche eines Kreises mit dem Radius r ist $r^2\pi$, der Umfang des Kreises ist $2r\pi$.
Achtung: Denken Sie an den Satz von Weierstrass: Eine auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion besitzt dort sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.

8. Aufgabe: Integralrechnung (max. 12 Punkte)

8.1 Berechnen Sie das bestimmte Integral von $f(x) = xe^x$ im Intervall [0,1] (partielle Integration?) (max. 6 Punkte)

8.2 Berechnen Sie (max 6 Punkte)

$$\int 15\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$$