Matheklausur, I11

Dozenten: Albert, Zimmermann

Aufgabe 1) (9 Punkte)

Minimieren Sie die Schaltfunktion

$\lambda(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

Und entwerfen Sie für das Ergebnis eine Schaltung, bei der Sie nur NAND-Gatter mit zwei Eingängen benutzen.

Aufgabe 2) (15 Punkte)

Gegeben sei die Schaltfunktion $\lambda(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_1 x_2 \leftrightarrow x_1 x_3} \leftrightarrow x_2 x_3}$

a) Stellen Sie die Schaltfunktion als DNF (disjunktive Normalform) dar.
b) Stellen Sie die Schaltfunktion als KNF (konjunktive Normalform) dar.

Aufgabe 3) (9 Punkte)

Gegeben sei die logische Formel $\bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_2 + \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$

Zeigen Sie mit dem Resolutionskalkül, dass es sich bei der Formel um eine Tautologie handelt.

Aufgabe 4) (10 Punkte)

Für eine beliebige Menge M sei P(M) die Potenzmenge von M.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Aussage.

(4.1) (3 Punkte)

Für beliebige Mengen M, N gilt: $P(M \cup N) = P(M) \cup P(N)$.

(4.2) (3 Punkte)

Für beliebige Mengen M, N gilt: $P(M \setminus N) = P(M) \setminus P(N)$.

(4.3) (4 Punkte)

Es gibt Mengen M und N, für die gilt: $P(M \setminus N) = P(M) \setminus P(N)$.

Aufgabe 5) (18 Punkte)

Seien A, B und C drei beliebige Mengen. Betrachten Sie die sogenannte Bell oder „Ungleichung“

$$A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$$

(5.1) (3 Punkte)

Geben Sie die formalen Definitionen der Mengendifferenz, Vereinigung und Teilmenge an.

(5.2) (6 Punkte)

Beweise Sie die Inklusion mittels eines Venn Diagramms.

(5.3) (3 Punkte)

Warum ist ein Venn Diagramm für eine derartige Aussage ein gültiger Beweis.

(5.4) (6 Punkte)

Beweise Sie die Aussage mit einem formalen Beweis. Tipp: Verwenden Sie eine Fallunterscheidung für $x \in B \ \vee \ x \notin B$ und den Satz Vereinigung ist Obermenge.

Aufgabe 6) (19 Punkte)

(6.1) (3 Punkte)

Was versteht man unter einem einstelligen Prädikat?

(6.2) (4 Punkte)

Sei M eine Menge und $Q(x)$ ein Prädikat mit der freien Variablen x. Drücken Sie die Aussagen mit den eingeschränkten Quantoren als Aussage mit uneingeschränkten Quantoren aus.

1. $\forall x \in M : Q(x)$
2. $\exists x \in M : Q(x)$

(6.3) (8 Punkte)

Die Firma Fraenkelbräu ist eine andere global vertretene Brauerei. Sei **K** die Menge aller Kunden, **R** die Menge der Vertriebsregionen und **V** die Menge der Vertriebsmitarbeiter. Folgende Prädikate sind in diesem Szenario von Bedeutung. Kunde **gehört zu** Vertriebsregion. Vertriebsmitarbeiter **betreut** Kunde. Übertragen Sie die folgenden Aussagen des Vertriebsleiters Adolf Abraham Halevi Fraenkel (Fraenkel war übrigens ein Pionier der Mengenlehre) in prädikatenlogische Ausdrücke mit Quantoren.

1. Alle Kunden sind einer Vertriebsregion zugeordnet.
2. Jeder Vertriebsmitarbeiter betreut in wenigstens einer Region alle Kunden.
3. Ein Kunde wird von einem Vertriebsmitarbeiter betreut.
4. Manche Kunden werden von mehr als einem Vertriebsmitarbeiter betreut.

(6.4) (4 Punkte)

Negieren Sie die zweite Aussage und schreiben Sie sie so, dass keine Quantoren negiert vorkommen.

Aufgabe 7) (20 Punkte)

Gegeben sei eine Folge von Zahlen $f_n, n \in \mathbb{N}_0$,die den Bedingungen genügen:

1. $f_0 = 1$ und $f_1 = 3$
2. $\forall n \in \mathbb{N}_2 : f_n = 2 \cdot f_{n-1} + 3 \cdot f_{n-2}$

Beweisen Sie $f_n = 3^n$ durch vollständige Induktion, indem Sie zuerst die „Ungenauigkeit“ der Aufgabenstellung korrigieren.