Aufgabenblatt 5 zur Diskreten Mathematik 2

(Restklassen)

Aufgabe 5.1
Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Teiler-Relation:

(1) Für alle $m, n, k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$ gilt: $m|n \Leftrightarrow km|kn$.

(2) Für alle $m, n_1, n_2, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$ gilt: $m|n_1 \wedge m|n_2 \Rightarrow m|(\ell_1 n_1 + \ell_2 n_2)$.

(3) Für alle $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ gilt: $m_1|n_1 \wedge m_2|n_2 \Rightarrow m_1 m_2|n_1 n_2$.

Aufgabe 5.2
Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv_m b$ und $c \equiv_m d$. Zeigen Sie, dass dann auch gilt $a + c \equiv_m b + d$ und $a - c \equiv_m b - d$.

Hinweis: *Sie können die Aussagen von Aufgabe 5.1 verwenden.*

Aufgabe 5.3
Bestimmen Sie für $m = 7$ und $m = 10$ und die Zahlen $145, 200$ und 711 jeweils die zugehörige Restklasse $[r]_m$ mit $0 \leqslant r < m$.

Aufgabe 5.4 Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $\forall\, a \in \mathbb{Z} : [a]_m \subseteq [a]_n$.

(2) $\exists\, a \in \mathbb{Z} : [a]_m \subseteq [a]_n$.

(3) $n|m$.