Dr. K. Röber	NORDAKADEMIE HOCHSCHULE DER WIRTSCHAFT	Matrikelnummer

Mathematik Klausur I01c (+ Wiederholer)

Centurie: **Name:**
Datum: 1. 10. 2002
Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner
Maximale Punktzahl: 100
Erreichte Punktzahl:
Note:

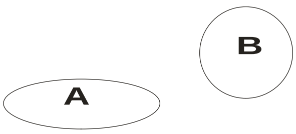
Die Klausur ist Bestandteil der Diplomvorprüfung im Sinne der Prüfungsordnung.
Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und einer Seitenzahl.
Bitte kennzeichnen Sie deutlich die Zugehörigkeit von Antwort zu Aufgabe.
Bitte schreiben Sie leserlich.

---

1. Aufgabe: Mengenlehre (max. 13 Punkte)

1.1 Welche der folgenden Mengen sind leer (kreuzen Sie einfach an) (max. 6 Punkte)?
- a) $\mathbf{N}\setminus(\mathbf{Q}\setminus\mathbf{N})$
- b) $\mathbf{Z}\setminus\mathbf{Q}$
- c) $\{x\in\mathbf{R} : 1 - x^4 = 0\}$
- d) $\{x\in\mathbf{R} : 1 + x^4 \leq 0\}$
- e) $\{x\in\mathbf{Q} : x < x\}$

1.2 Die Mengen A und B haben einen leeren Durchschnitt und heißen deshalb ________ (max. 2 Punkte)



1.3 Welche Menge ist die Potenzmenge von $\emptyset$ (kreuzen Sie einfach an)? (max. 5 Punkte)
- a) $\emptyset$
- b) $\{\emptyset\}$
- c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- d) $\{\{\emptyset\}\}$

2. Aufgabe: Logik (max. 15 Punkte)

Welche drei mathematischen Beweisverfahren kennen Sie? Beschreiben Sie kurz die Grundidee der jeweiligen Beweistechnik.

3. Aufgabe: Relationen (max. 12 Punkte)

3.1 Welche der Eigenschaften „reflexiv", „symmetrisch" und „transitiv" haben die folgenden Relationen R auf **N**? (max. 10 Punkte)
- a) $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow a$ ist Primteiler von b
- b) $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow |a| = |b|$
- c) $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow$ (a teilt b) oder (b teilt a)
- d) $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow a = 5^m b$ für ein $m\in\mathbf{Z}$

3.2 Eine Relation mit obigen Eigenschaften heißt __________________? (max. 2 Punkte)

Hinweis: Ein Primteiler ist ein Teiler, der zugleich Primzahl ist.
Das „oder" heißt nicht etwa „entweder – oder"

4. Aufgabe: Vollständige Induktion (max. 10 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass für alle $n \in N$, $n \geq 2$ gilt:

$$\frac{1 - nx}{(1 - x)^n} < 1 \text{ für } 0 < x < 1$$

Hinweis: Formen Sie die Aussage in eine äquivalente Aussage um, die keinen Bruchstrich enthält.

5. Aufgabe: Folgen und Reihen (max 14 Punkte)
5.1 Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $a_n = 2^{1/n}$. (max. 7 Punkte)
Hinweis: Formen Sie $2^{1/n}$ in eine e-Funktion um.
5.2 Zeigen Sie die absolute Konvergenz der Reihe (max. 7 Punkte)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}, x \in \mathbf{R}$$

6. Aufgabe: Taylorreihen (max 13 Punkte)
Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x^2/(1 – x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe (Potenzreihe). Schreiben Sie diese als Summenformel hin(max 4 Punkte)
Dazu wären standardmäßig folgende Zwischenschritte durchzuführen:
a) Beweisen Sie die Formel für die allgemeine Form der n-ten Ableitung durch vollständige Induktion (max 3 Punkte)
b) Wie ist der Konvergenzradius der unendlichen Taylorreihe? (Achtung: Untersuchen Sie auch die Ränder). (max 3 Punkte)
c) Was können Sie über das Verhalten des Restgliedes aussagen, wenn Sie n gegen unendlich streben lassen? (max 3 Punkte)
Hinweis: Die Formel für eine Taylorreihe für den Entwicklungspunkt x_0 lautet mit Restglied:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Wenn Sie eine einfachere Lösung finden als die Standardlösung, dürfen Sie auch diese verwenden.

7. Aufgabe: Differentiation und Extremwerte (max. 11 Punkte)
8.1 Bestimmen Sie die fünfte Ableitung von
$f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 – x + 500$ ohne zu rechnen. (max. 1 Punkt)

8.2 Stellen Sie eine Formel für die n-te Ableitung von $f(x) = 1/(1 + 2x)$ auf und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion. (max. 5 Punkte)
8.3 Wie muss man einen Stab der Länge l in zwei Stücke zerbrechen, damit das aus den Teilstücken gebildete Dreieck maximale Fläche hat?
Hinweis. Die Fläche eines Dreiecks mit den Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel α ist F = ½*ab sin α (max. 5 Punkte)

8. Aufgabe: Integralrechnung (max. 12 Punkte)
8.1 Berechnen Sie eine Stammfunktion (partielle Integration?) von $f(x) = x^2 \sin x$. (max. 6 Punkte)
8.2 Berechnen Sie eine Stammfunktion (Substitution?) von $f(x) = (x + 3)(x^2 + 6x + 10)^{1/2}$ (max. 6 Punkte)