Betriebssystem-Klausur vom 27.6.2006

1. Betriebssysteme

a) Notwendige Bedingung für Deadlocks + kurze Erklärung.

1. Die Betriebsmittel werden ausschließlich durch die Prozesse freigegeben (No Preemption).
2. Die Prozesse fordern Betriebsmittel an, behalten aber zugleich den Zugriff auf andere (Hold and Wait).
3. Der Zugriff auf die Betriebsmittel ist exklusiv (Mutual Exclusion).
4. Nicht weniger als zwei Prozesse warten in einem geschlossenen System (Circular Wait).

bezeichnet in der Informatik einen Zustand, bei dem mindestens zwei Prozesse auf Betriebsmittel warten, die einem anderen beteiligten Prozess zugeteilt sind.

b) Warum ist ein wechselseitiger Ausschluss sowohl bei Single-Core wie auch bei Multi-Core möglich?

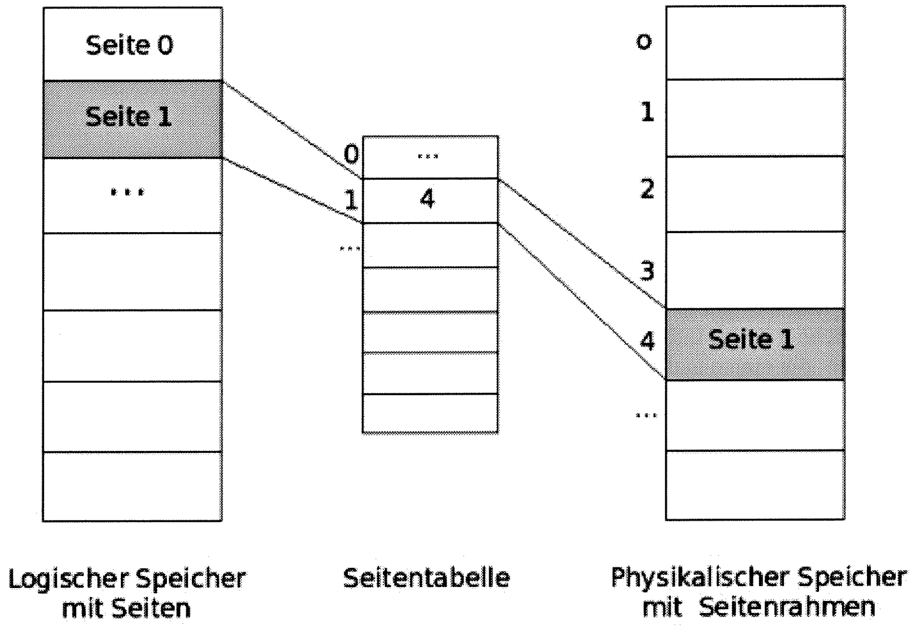
Sowohl Threads wie auch Prozesse können einen wechselseitigen Ausschluss verursachen.

c) Erläutern Sie die Aktivitäten bei einem Prozesswechsel.

resume(Prozess P) =
Wechsel in den Kernel-Modus
Rette die allgemeinen Register // aktueller Prozess
Rette Programm Counter, Status Register und Stack Pointer // aktueller Prozess
Setze Memory Management Unit-Deskriptoren von P // neuer Prozess P
Stelle Programm Counter, Status Register und Stack Pointer her // neuer Prozess P
Stelle allgemeine Register her // neuer Prozess P
Wechsel in den User-Modus

d) Wie sieht die Bildung des realen Hauptspeichers bei Segmenten und bei fester Seitenlänge aus?

Unter **Segmentierung** versteht man bei der Speicherverwaltung in einem Betriebssystem die Unterteilung des benutzten Speicheradressraums in einzelne Segmente. Zweck der Unterteilung ist meist die Implementierung von Schutzmechanismen. Je nach Betriebssystem und unterliegender Hardware können einem Segment verschiedene Attribute zugewiesen werden. So können beispielsweise Programm-, Daten- und Stack-Segmente festgelegt werden. Die jeweilige Speicherwaltung sorgt dann unter anderem dafür, dass aus dem Programmsegment nur Befehle aber keine Daten gelesen werden, oder dass Daten im Datensegment nicht als Befehle interpretiert werden. Oft ist es auch möglich Segmenten Privilegierungsebenen zuzuweisen, sodass die entsprechenden Segmente nur von Programmen der gleichen oder einer höheren Privilegierungsebene zugegriffen werden können. Man kann so zum Beispiel Betriebsystemdaten und -befehle vor Zugriff durch andere Programme schützen. Häufig kann auch die Zugriffsart (zum Beispiel nur lesen, nur schreiben, kein Zugriff) eingeschränkt werden. Manche Systeme erlauben auch Privilegierungsebenen-abhängige Zugriffsarteneinschränkung.



Beim Paging werden logischer Speicher und physischer Speicher unterschieden. Der logische Speicher beschreibt die Organisation des Hauptspeichers aus Programmsicht. Der physische Speicher ist durch den verfügbaren Hauptspeicher sowie ggf. zusätzlichen ausgelagerten Speicher (z.B. in Form einer Auslagerungsdatei) gegeben. Man unterteilt den logischen Speicher in gleich große Stücke, die man als *Seiten* (engl. „pages") bezeichnet. Auch der physische Speicher ist derart unterteilt - hier nennt man die einzelnen Stücke *Seitenrahmen* oder auch *Kacheln* (engl. „frames"). Eine Seite passt genau in einen Seitenrahmen. Um Seiten und Seitenrahmen einander zuordnen zu können, wird eine *Seitentabelle* verwendet. Dementsprechend existiert für jeden Prozess eine derartige Seitentabelle. Nun wird klar, warum hier keine externe Fragmentierung im Hauptspeicher mehr auftreten kann: Zwar ist der logische Speicher weiterhin zusammenhängend, im physischen Speicher können die benachbarten Seiten jedoch in weit von einander entfernt liegenden Seitenrahmen abgelegt werden. Die Reihenfolge der Seitenrahmen ist damit beliebig und somit ist es nicht mehr sinnvoll, von Lücken und damit von externer Fragmentierung zu sprechen.

Da die Zugriffszeit auf einzelne physische Speicherzellen immer identisch ist, müssen keine Effizienzeinbußen in Kauf genommen werden. Da bei diesem Verfahren der Zugriff auf die Seitentabelle sehr häufig ist, verwenden moderne Prozessoren zu diesem Zweck in der Regel spezielle Hardware-Register, die sogenannte Memory Management Unit.

2. Rechnerkommunikation

a) Wie ist eine MAC-Adresse aufgebaut? (insbesondere der Byte-Aufbau)

Eine MAC-Adresse besteht aus sechs Byte. Die ersten drei Byte kennzeichnen den Hersteller, die anderen drei bezeichnen die Typen- bzw. Seriennummer.

b) Darf ein CSMA/DA-Sender so viele Pakete schicken wie er hat?
Bei diesem Verfahren kann der Sender theoretisch alle Pakete auf einmal senden. Das Problem tritt aber bereits auf, sobald es mehr als einen Sender gibt, da diese womöglich „konkourierend“ versuchen an die selbe Emfpänger-Station Pakete zu senden und so ein Kollisions-Verfahren zum tragen kommt. Dieses ermöglicht den beiden Sendern nach und nach ihre Pakete abzusenden.

c) Wird die Prüfsumme eines IP-Paketes oder ATM-Zelle über das gesamte Paket gebildert?
Ja.

d) Max. drei Repeater zwischen zwei Kommunikationspartnern im Ethernet?
Nein, Repeater dienen zur Signalverstärkung im Internet. Es können beliebig viele Repeater zwischen zwei Kommunikationspartnern stehen. Aber: 5-4-3 Regel
Es sind maximal 5 Segmente erlaubt, die über 4 Repeater verbunden sind. Davon dürfen nur drei Segmente Endgeräte enthalten, die beiden übrigen dürfen nur der Verlängerung des Busses dienen.

e) Dienen Brücken zur Filterung und Lastenverteilung?
Typischerweise dienen Brücken der Lastenverteilung während sie nicht für die Filterung zuständig sind.

f) Kann die CIDR: „198.168.0.0/25“ 128 Hostadressen aufnehmen?
Nein, kann sie nicht. Notation ist falsch geschrieben mit „/25“, dies würde auf 25 Adressen hindeuten. Richtig wäre „196.168.0.0./128“.

g) Dient ein Router zum Übergang zwischen LAN und Internet?
Ja, ein Router ist ein Vermittlungsrechner, der mehrere Rechnernetze koppelt, das bedeutet bei ihm eintreffende Netzwerk-Pakete eines Protokolls werden auf Basis von Layer-3 Informationen analysiert und zum vorgesehenen Zielnetz (auch Ziel-Subnetze) weitergeleitet oder geroutet.

h) Was ist der Unterschied zwischen verbindungsloser und verbindungsorintierter Kommunikation?
Die "verbindungsorientierte Kommunikation" geht davon aus, daß vor dem eigentlichen Datentransfer vom Client-Prozess eine logische Verbindung aufgebaut wird, über die dann in der Folge beliebig viele Datenpakete hin und her geschickt werden können - so lange bis einer der beiden Partner die Verbindung wieder abbricht ("hangup"). Bei dieser Art der Kommunikation wird Empfänger- und Absenderadresse nur beim Verbindungsaufbau angegeben - danach erfolgt die Kommunikation über Verbindungsnummern, die vom Betriebssystem zugeteilt werden. Die Telefonie funktioniert nach diesem Prinzip.
Diese Form der Kommunikation eignet sich besser für Anwendungen, bei denen große Datenmengen übertragen werden. Der Verbindungsaufbau dauert zwar etwas, die eigentlichen Daten werden allerdings vollständig und in der richtigen Reihenfolge von der Quelle zum Ziel übermittelt.

Bei der "verbindungslosen Kommunikation" gibt es - wie der Name sagt - keine bestehende Verbindung zwischen den Partnern. Die Datenpakete werden einzeln mit den vollständigen Adressangaben versehen und auf den Weg gebracht. Im täglichen Leben entspricht dies der Kommunikation mittels Briefen.
Bei diesem Modell - man spricht dabei auch von "Datagrammen" - wird vom Betriebssystem die korrekte Reihenfolge der einzelnen Datenpakete nicht garantiert. Es ist noch nicht mal gewährleistet, daß ein Paket überhaupt ankommt. Da jedoch der zeitaufwendige Verbindungsaufbau entfällt, ist es in Fällen, bei denen es mehr auf Schnelligkeit als auf Sicherheit ankommt, oft die bessere Wahl. Eventuell nötige Reihenfolge-Überprüfungen bzw. Zeitüberwachngen müssen dann aber vom Anwendungsprozess selbst vorgenommen werden.

i) Fenstertechnik / gleitendes Fenster mit Sammelbestätigung erklären

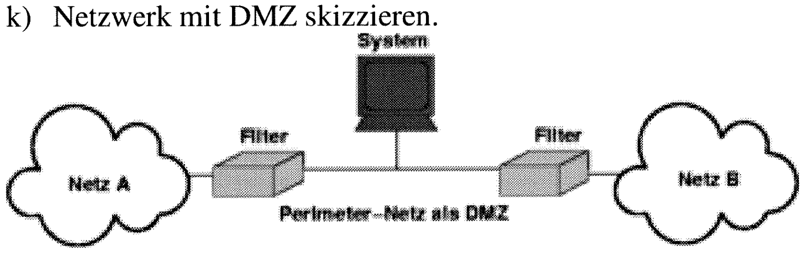
Das TCP-Protokoll verwendet das Prinzip des „Sliding Window``. Einfache Protokolle senden z. B. einen Datenblock und warten auf Bestätigung, bevor sie ein neues Datenpaket verschicken. Das Sliding-Window-Prinzip erlaubt jedoch, mehrere Segmente ohne Bestätigung zu versenden. Die Anzahl der Bytes, die versendet werden dürfen, wird durch die Fenstergröße festgelegt. Während des Sendevorgangs können gleichzeitig Quittungen empfangen werden, die neue Fenstergrößen festlegen. Diese Aufgabe übernimmt das Feld Fenstergröße im TCP-Protokollkopf. Dieses Prinzip ist vor allem bei Übertragungsstrecken mit großer Laufzeit sinnvoll, da sonst die Übertragungsbandbreite durch das Warten des Senders auf die Bestätigung nicht genutzt werden kann.

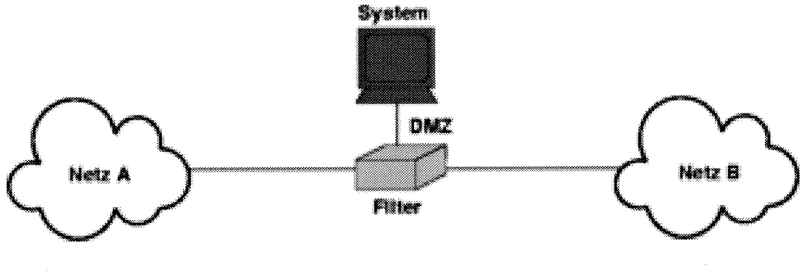
j) Was ist eine DMZ und wozu ist sie gut?

Eine **Demilitarized Zone** (**DMZ**, auch *ent- oder demilitarisierte Zone*) bezeichnet ein Computernetzwerk mit sicherheitstechnisch kontrollierten Zugriffmöglichkeiten auf die daran angeschlossenen Netzwerkknoten (Computer, Router, etc). Die in der DMZ aufgestellten Systeme werden durch Filtersysteme (Paketfilter, Firewall) gegen andere Netze (z. B. Internet, LAN) abgeschirmt. Durch diese Trennung kann der Zugriff auf öffentlich erreichbare Dienste (Bastion Hosts mit z. B. E-Mail, WWW o. ä.) gestattet und gleichzeitig das interne Netz (LAN) vor unberechtigten Zugriffen geschützt werden. Die Filterfunktionen können durchaus von einem einzelnen Gerät übernommen werden; in diesem Fall benötigt das filternde System mindestens drei Netzwerkanschlüsse: je einen für die beiden zu verbindenden Netzwerksegmente (z. B. WAN und LAN) und einen dritten für die DMZ.

Der Sinn besteht darin, auf möglichst sicherer Basis Dienste des Rechnerverbundes sowohl dem WAN (Internet) als auch dem LAN (Intranet) zur Verfügung zu stellen. Ihre Schutzwirkung entfaltet eine DMZ durch die Isolation eines Systems gegenüber zwei oder mehr Netzen.

k) Netzwerk mit DMZ skizzieren.





l) Unter Autonegotiation versteht man ein Verfahren zur automatischen Festlegung der Verbinundungscharakterika, wie Verbindungsgeschwindigkeit oder Festlegung der ???

Autonegotiation bezeichnet ein Verfahren, welches es Netzwerkkarten bzw. HBAs ermöglicht, selbständig die korrekte Übertragungsgeschwindigkeit und das Duplex-Verfahren des

Netzwerkports, an den sie angeschlossen werden, zu erkennen und sich entsprechend zu konfigurieren.

NORDAKADEMIE
HOCHSCHULE DER WIRTSCHAFT

MATHEMATIK-KLAUSUR
I03

4. Semester
(Bernd Nörthemann)

Nachfolgende
7 Seiten
zu Händen
Mirko Steinicke

Erlaubte Hilfsmittel

Beigefügte Formelsammlung
Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 2 Stunden, insgesamt sind 60 Punkte erreichbar.

Bitte notieren Sie Ihren Namen und/oder Matrikelnummer auf jedem Blatt, kennzeichnen Sie deutlich, was bewertet werden soll – geben Sie also nicht mehrere Lösungsversuche ab.

Übersicht, mögliche/erhaltene Punkte:

Aufg1	**Aufg2**	**Aufg3**	**Aufg4**	**Aufg5**	**Aufg6**	**Aufg7**	**Aufg8**
6 Punkte	12 Punkte	6 Punkte	4 Punkte	6 Punkte	12 Punkte	6 Punkte	8 Punkte

Aufgabe1 (6 Punkte)
Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \approx 0$$

Zweiseitige Re Grenzwert $x > 1$ und $x < 1$

Aufgabe2 (12 Punkte)

a) Für welche $z \in R$ liegt für die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$$

absolute Konvergenz bzw. Divergenz vor?

b) Untersuche, ob die alternierende Reihe konvergiert oder divergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln k}$$

c) Treffe ebenfalls eine Aussage zur Konvergenz/Divergenz (mit Nachweis) der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{\ln k} \qquad c \in R : c > 0 \text{ beliebig, aber fest}$$

Aufgabe3 (6 Punkte)
Wie ist $a \in R$ zu wählen, damit

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{a}} \qquad \text{in} \qquad x_0 = 1$$

einen Wendepunkt hat?

Aufgabe4 (4 Punkte)
Folgendes Integral ist durch geeigneten Ansatz zu integrieren

$$\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2 + 4}\,dx$$

Aufgabe5 (6 Punkte)
Auf 50 000 Personen kommen jährlich durchschnittlich 2 Selbstmorde. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sich in einer Stadt mit 100 000 Einwohnern jährlich 2 oder mehr Selbstmorde ereignen.

Aufgabe6 (12 Punkte)
Das Füllgewicht von Bierflaschen sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 0{,}503$ l und $\sigma = 0{,}002$ l.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Füllmenge wenigstens $0{,}500$ l?
b) Welche Füllmenge wird mit Wahrscheinlichkeit $0{,}98$ wenigstens erreicht?
c) Wie groß müsste - bei gleichem Wert für σ - der Parameter μ mindestens sein, damit eine Füllmenge von wenigstens $0{,}500$ l mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}98$ erreicht wird?

Aufgabe7 (6 Punkte)
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass unter 625 zufällig ausgewählten einstelligen Zahlen 60 bis 70 mal die Zahl 7 vorkommt.
(Anleitung: Führen Sie eine approximative Berechnung mit der Normalverteilung durch, nachdem Sie das Modell der "eigentlichen" zutreffenden Verteilung beschrieben haben)

Aufgabe8 (8 Punkte)
$X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit den Verteilungen

x_i	1	3	6	11
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{20}$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summenvariable X Werte zwischen 4820 und 5180 annimmt.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Existiert der Grenzwert der Funktion (Anwendung L'Hospital)?

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Bestimme den Konvergenzradius und gebe explizit das Konvergenzintervall der Potenzreihe an (Anwendung Quotientenkriterium)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(k-1)!}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Reihe – entscheide, ob Divergenz, bedingte oder absolute Konvergenz vorliegt.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Funktion $y = f(x)$ sei wie folgt erklärt

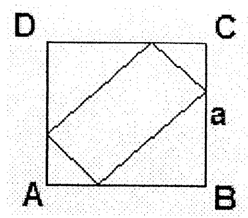
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x \leq 1 \\ a + bx^2 & ; x > 1 \end{cases} \qquad a, b \in \Re$$

a) Ist $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ stetig?
Vorgehen: Führe zweiseitige Grenzwertbetrachtungen in der Umgebung von $x_0 = 1$ durch – gebe schließlich Bedingungen für $a, b \in \Re$ an, damit Stetigkeit an betrachteter Stelle vorliegt.

b) Ist $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar?
Vorgehen: Prüfe auf Übereinstimmung der links- und rechtsseitigen Ableitung – gebe schließlich Bedingungen für $a, b \in \Re$ an, damit sowohl Differenzierbarkeit als auch Stetigkeit an betrachteter Stelle vorliegt.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Einem Quadrat der Kantenlänge a ist ein Rechteck längs der Diagonalen einzuschreiben (siehe Skizze). Gesucht ist das Rechteck größten Flächeninhaltes.



a) Führen Sie zunächst eine allgemeine Lösung herbei.
b) Geben Sie dann konkret $a = 6$ vor.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Pro Jahr sterben weltweit durchschnittlich 2500 Menschen während eines Fluges, überwiegend an Herz – Kreislauf – Versagen.

a) Schätzen sie den Erwartungswert $\mu = E(x)$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{VarX}$ der Zufallsvariablen

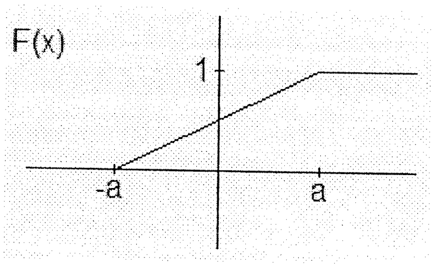
   X = {Anzahl der Menschen, welche weltweit pro Tag während eines Fluges sterben}

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stirbt an einem (zufällig ausgewählten) Tag weltweit kein Mensch während eines Fluges?

c) Innerhalb welchen Zeitraumes stirbt weltweit mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit kein Mensch während eines Fluges

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz für eine stetige Zufallsvariable mit der nebenstehenden dargestellten Verteilungsfunktion F(x).



Aufgabe 8 (10 Punkte)

Der Intelligenzquotient (IQ) der Studenten einer Eliteuniversität sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 137$ und der Standardabweichung $\sigma = 12$.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Student dieser Universität einen IQ zwischen 131 und 146?

b) Welchen IQ überschreiten die 5 % der intelligentesten Studenten?

Teil 1

Aufgabe 1

$y = |x - 3|$

5 Pkt. a) Stetigkeitsbetrachtung an der Stelle $x = 3$ (Fallunte

5 Pkt. b) Diskutiere Ableitung der Funktion $y = f(x) = |x$
↳ Differenzial Hauptsatz

Aufgabe 3

5 Pkt. a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Konvergiert oder Divergiert diese Reihe? Im Konverg
fall den Grenzwert angeben.
Vorgehen: Partialbruchzerlegung

5 Pkt. b) Versuchen Sie, über die aus Teilaufgabe 3a) gewonnenen Ergebnisse auf das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ zu schließen.

Aufgabe 2

Was können Sie zur Konvergenz / Divergenz der beiden unendlichen Reihen sagen? Bitte mit Begründung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{2^{k-1}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot c \quad (c \in \mathbb{R} \text{ bel. aber fest})$$

Im Fall der Konvergenz ist der Grenzwert anzugeben.
Weiterhin ist eine Aussage zum Konvergenzbereich (Konvergenzradius) der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k \quad x \in \mathbb{R}$$

zu treffen.

Vorgehen: Bitte betrachten Sie auch das Verhalten der Reihe an den Grenzen des Konvergenzbereiches.

① Existieren die Grenzwerte der Funktion (Anwendung de L'Hospital)?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-e^x+1}{x(e^x+1)}\right) = \frac{0}{0}$$ $\Rightarrow$ Anwendung de L'Hospital

(I) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}\right) = \frac{0}{0}$$ $\Rightarrow$ Anwendung de L'Hospital

(II) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^x}{xe^x+e^x+e^x}\right) = \left(\frac{-e^x}{e^x(x+2)}\right) = -\frac{1}{2}$$

---

② Bestimme den Konvergenzradius und gib explizit das Konvergenzintervall der Potenzreihe an (Anwendung Quotientenkriterium)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{(k-1)!}$$

Quotientenkriterium: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$

$q<1$: Konvergenz
$q>1$: Divergenz

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+1}}{k!}\right| : \left|\frac{(k-1)!}{x^{2k-1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{x^{2k-1}}\cdot x^2}{k\cdot\cancel{(k-1)!}}\cdot\frac{\cancel{(k-1)!}}{\cancel{x^{2k-1}}}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^2}{k}\right| = \lim_{k\to\infty}|x^2|\cdot\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k}\right| = 0$$

Und weil $0<1$ folgt daraus $\Rightarrow$ Konvergenz

Konvergenzintervall $I=\mathbb{R}$; Konvergenzradius $r=\infty$

---

③ Untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Reihe. Entscheide, ob Divergenz, bedingte oder absolute Konvergenz vorliegt.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$ alternierende Reihe $\Rightarrow$ Anwendung

(I) Nullfolge? $\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = 0$ ✓

(II) Monotonie? $\left|\frac{(-1)^x}{\sqrt{k}}\right| \geq \left|\frac{(-1)^x}{\sqrt{k+1}}\right|$

trivial, da $|(-1)^x| = 1$ und $1=1$ und
$|\sqrt{k}| < |\sqrt{k+1}|$
$\Rightarrow$ Monoton fallend : Konvergenz

absolute Konvergenz? zu zeigen: $\cancel{\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^x}{\sqrt{k}}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^x}{\sqrt{k}}\right|}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^x}{\sqrt{k}}\right| \to q$$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{k}}$ Anwendung Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ $q<1$

$\Rightarrow$ Konvergenz (absolut)

$$\left|\frac{1}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{\sqrt{k}}{1}\right| = \sqrt{\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}}$$

für $k\to\infty$ folgt $\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{k}}} = 1$ $\Rightarrow$ nicht absolut konvergent

④ Die Funktion $y = f(x)$ sei wie folgt erklärt: $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 1 \\ a+bx & x > 1 \end{cases}$ $a, b \in \mathbb{R}$

ⓐ Ist $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ stetig? Vorgehen: führe zweiseitige Grenzwertbetrachtungen an der Umgebung $x_0 = 1$ durch. Gib schließlich Bedingungen für $a, b \in \mathbb{R}$ an, damit Stetigkeit an betrachteter Stelle vorliegt.

(I) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x+2 = 3$ (II) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} a+bx = a+b$

$\Rightarrow$ Stetigkeit, wenn $\underline{a+b = 3}$ (an der Stelle $x_0 = 1$)

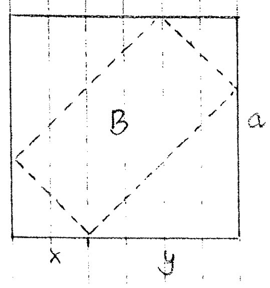
ⓑ Ist $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar? Vorgehen: Prüfe auf Übereinstimmung der links- und rechtsseitigen Ableitung. Gib schließlich Bedingungen für $a, b \in \mathbb{R}$ an, damit sowohl Differenzierbarkeit, als auch Stetigkeit an betrachteter Stelle vorliegen.

(I) $f'(x+2) = 1$ (II) $f'(a+bx) = b$

$\Rightarrow$ differenzierbar an der Stelle $x_0 = 1$, wenn $\underline{b = 1}$ $\Rightarrow$ differenzierbar + stetig an der Stelle ~~x_0 w~~ $x_0 = 1$, wenn $\underline{b = 1}$ und $\underline{a = 2}$.

---

⑤ Einem Quadrat der Kantenlänge a ist ein Rechteck längs der Diagonalen einzuschreiben. Gesucht ist das Rechteck größten Flächeninhaltes.



ⓐ Führe zunächst eine allgemeine Lösung herbei.

$A = a^2$

$a = x + y$

$B = A - x^2 - y^2$

$y = a - x$

$f(x) = a^2 - a^2 + 2ax - x^2 - x^2 = 2ax - 2x^2 = 2x(a-x)$

Gesucht B_{max} $\Rightarrow$ $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$

$f'(x) = 2(a-x) + 2x(-1) = 2a - 4x$

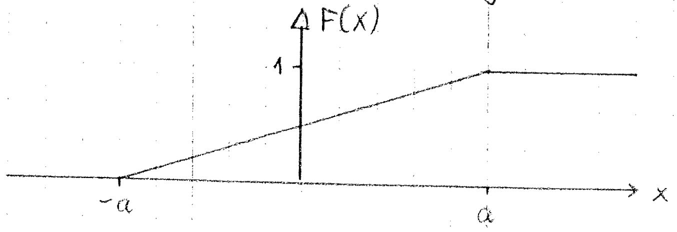
$2a - 4x \stackrel{!}{=} 0$ $\Rightarrow$ $\underline{x = \frac{1}{2}a}$

$\Rightarrow B_{max} = 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot (a - \frac{1}{2}a) = a \cdot \frac{1}{2}a = \underline{\frac{1}{2}a^2}$

ⓑ Geben Sie konkret $a = 6$ vor

$B_{max} = \frac{1}{2}a^2$ für $a = 6$ $\Rightarrow$ $B_{max_6} = \underline{18}$

⑥ Ermitteln Sie bitte Wahrscheinlichkeitsdichte, Erwartungswert und Varianz für eine kontinuierliche Zufallsvariable mit der nebenstehend dargestellten Verteilungsfunktion:



$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x \le -a \\ \frac{x}{2a} & : -a < x < a \\ 1 & : x \ge a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 0 & : x \le -a \\ \frac{1}{2a} & : -a < x < a \\ 0 & : x \ge a \end{cases}$$

Ableitung von $\frac{x}{2a} = \frac{1 \cdot 2a - x \cdot 0}{(2a)^2} = \frac{1}{2a}$

Erwartungswert: $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$

$$\int_{-a}^{a} x \cdot \frac{1}{2a}\,dx = \frac{1}{2a} \cdot \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{-a}^{a} = \underline{\underline{0}}$$

Varianz: $Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$

$$\int_{-a}^{a} (x-0)^2 \frac{1}{2a}\,dx = \frac{1}{2a} \cdot \left[\frac{1}{3} x^3\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{2}{3} a^3 = \underline{\underline{\frac{1}{3} a^2}}$$

---

⑦ Pro Jahr sterben weltweit jährlich durchschnittlich 2500 Menschen während eines Fluges überwiegend an Herz-Kreislauf-Versagen.

ⓐ Schätzen Sie den Erwartungswert $\mu = E(X)$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var\,X}$ der Zufallsvariablen X = Anzahl Menschen, welche weltweit pro Tag während eines Fluges sterben.

$\mu = \frac{2500}{365} = 6{,}849315068 \approx \underline{\underline{6{,}85}}$

Poissonverteilung
$\Rightarrow Var(X) = E(X) = \mu$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{2500}{365}} = 2{,}617119613 \approx \underline{\underline{2{,}62}}$

ⓑ Mit welcher Wahrscheinlichkeit stirbt an einem (zufällig ausgewähltem) Tag weltweit kein Mensch während eines Fluges

$f(0) = ?$ Formel: $f_P(0; 6{,}85) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{1 \cdot 1{,}060181596 \cdot 10^{-03}}{1} = 0{,}0010601815$

$\approx \underline{\underline{0{,}11\ \%}}$

ⓒ Innerhalb welchen Zeitraumes stirbt weltweit mit 90% Wahrscheinlichkeit kein Mensch während eines Fluges? (z = Zeitraum in Tagen)

$(e^{-\mu})^z = 0{,}9 \iff \ln (e^{-\mu})^z = \ln 0{,}9 \iff z \cdot \ln(e^{-\mu}) = \ln 0{,}9$

$\iff z = \frac{\ln 0{,}9}{-\mu \cdot \ln e} \iff z = \frac{\ln 0{,}9}{-\mu} = 0{,}015382635\,(\text{Tage}) = 0{,}369183246\,(\text{Stunden}) \approx \underline{\underline{22{,}15}}$ Minute

⑦ Der Intelligenzquotient (IQ) der Studenten einer Eliteuniversität sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 137$ und der Standardabweichung $\sigma = 12$

ⓐ Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Student dieser Universität einen IQ zwischen 131 und 146?

$$P(131 \leq X \leq 146) = F(146) - F(131) = \Phi\left(\frac{146-137}{12}\right) - \Phi\left(\frac{131-137}{12}\right) =$$

$$\Phi(0{,}75) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(0{,}75) - (1 - \Phi(0{,}5)) = 0{,}7733 - 1 + 0{,}6914 = 0{,}4647$$

$$= \underline{\underline{46{,}47\ \%}}$$

ⓑ Welchen IQ überschreiten die 5% der intelligentesten Studenten dieser Universität?

$F(?) = 0{,}05$ Formel: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ gesucht: x

$z \cdot \sigma + \mu = x$ $\Phi(?) = 0{,}95$

durch Ablesen aus Tabelle: $\Phi(1{,}64) = 0{,}9495$
$\Phi(1{,}65) = 0{,}9505$

$\Rightarrow$ Differenz: $0{,}001$

$\Rightarrow \Phi(1{,}645) = 0{,}9500$

$1{,}645 \cdot 12 + 137 = \underline{\underline{156{,}74}}$

NORDAKADEMIE
STUDIENGANG WIRTSCHAFTSINFORMATIK

Name:..

Matrikel-Nr.:............................ Zenturie:.............

MATHEMATIK-KLAUSUR
ÜBER DAS
DRITTE UND VIERTE
SEMESTER

Prüfer: Dr. Jens Bohlmann

Datum: 16. Juni 2004

Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner, ausgeteilte Formelsammlungen und Tabellen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Die Aufgabenblätter sowie die Formelsammlungen und Tabellen sind am Ende der Klausur mitabzugeben.

Erreichbare Punktzahlen:

Aufgabe	1.1	1.2	2	a	b	3	4	5	a	b	6	7
Punkte	10	2		3	5	6	6		3	5	4	10

Aufgabe	8	a	b	9	10.1	10.2	10.3	11.1	11.2	12	13
Punkte		4	6	10	4	2	4	6	4	10	16

Ergebnis: Note:

Aufgabe 1

1.1 Sei $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$. Zeigen Sie bitte: Wenn die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ in $\mathbb{K}$ konvergiert, dann ist sie auch eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$.

1.2 In welchem Fall bzw. in welchen Fällen ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und/oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) gilt auch die Umkehrung der Aussage in 1.1? (Begründen Sie Ihre Antwort bitte kurz!)

Aufgabe 2

Untersuchen Sie bitte das Konvergenzverhalten der folgenden beiden Reihen; entscheiden Sie bitte, ob die Reihen divergieren, bedingt konvergieren oder absolut konvergieren.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10k}}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{10k}}$

Aufgabe 3

Zeigen Sie bitte, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!}$ absolut konvergent ist und ermitteln Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4

Sei die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $f(0) < 0$ sowie $f(1) > 1$. Zeigen Sie bitte, daß dann gilt:

$\exists\, x \in (0,1) : f(x) = x$. (Lösungshinweis: Rückführung auf den Zwischenwertsatz von Bolzano!)

Aufgabe 5

Bilden Sie bitte jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen. Vereinfachen Sie die Ergebnisse bitte soweit wie möglich.

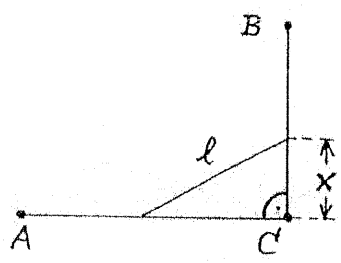
a) $f(x) = e^{\cos x} \sin x$ b) $g(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Aufgabe 6

Ermitteln Sie bitte $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x^3}{x}$.

Aufgabe 7

Der Weg von A-Stadt nach B-Hausen über C-Dorf soll durch eine Umgehungsstraße für C-Dorf verkürzt werden (siehe nebenstehende Skizze). Es steht nur ein Budget für eine ℓ = 5 km lange Umgehungsstraße zur Verfügung (die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ seien jeweils länger als 5 km). In welcher Entfernung x von C-Dorf auf der Strecke zwischen B und C muß die Umgehungsstraße abzweigen, damit die Wegersparnis für eine Fahrt von A nach B maximal wird?



Aufgabe 8

Berechnen Sie bitte die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\int \sin x \cos^3 x \, dx$ b) $\int x \cos 3x \, dx$

Aufgabe 9

Donald Duck passiert mit seinem Auto innerhalb eines Jahres an fünfundsiebzig Tagen das Autobahndreieck Entenhausen-Südost. Dabei überschreitet er an zehn Tagen zufällig die dortige Geschwindigkeitsbeschränkung. An fünf von den oben genannten fünfundsiebzig Tagen werden Geschwindigkeitskontrollen am Autobahndreieck Entenhausen-Südost durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Donald mindestens einmal innerhalb eines Jahres bei einer Überschreitung der Geschwindigkeitsbeschränkung am Autobahndreieck Entenhausen-Südost erwischt wird?

Aufgabe 10

Pro Jahr sterben weltweit durchschnittlich 2500 Menschen während eines Fluges, überwiegend an Herz-Kreislauf-Versagen. (Quelle: Der "Spiegel" Nr. 21 (2004) 151.)

10.1 Schätzen Sie bitte Erwartungswert $\mu = \langle X \rangle$ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ der Zufallsvariablen

X = Anzahl der Menschen, welche weltweit pro Tag während eines Fluges sterben.

10.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit stirbt an einem (zufällig ausgewählten) Tag weltweit kein Mensch während eines Fluges?

10.3 Innerhalb welches Zeitraumes stirbt weltweit mit 90%iger Wahrscheinlichkeit kein Mensch während eines Fluges?

Aufgabe 11

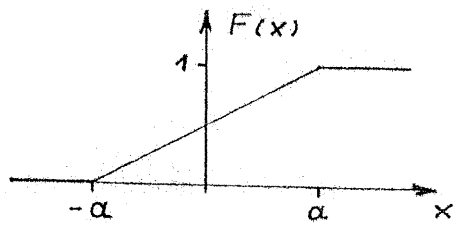
Der Intelligenzquotient (IQ) der Studenten einer Eliteuniversität sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 137$ und der Standardabweichung $\sigma = 12$.

11.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Student dieser Universität einen IQ zwischen 131 und 146?

11.2 Welchen IQ überschreiten die 5% der intelligentesten Studenten dieser Universität?

Aufgabe 12

Ermitteln Sie bitte Wahrscheinlichkeitsdichte, Erwartungswert und Varianz für eine kontinuierliche Zufallsvariable mit der nebenstehend dargestellten Verteilungsfunktion $F(x)$.



Aufgabe 13

Bei einer Tiefbohrung in sehr hartem Gestein werden n gleichartige Bohrköpfe eingesetzt. Die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit

X_j = Lebensdauer des j-ten Bohrkopfes

seien paarweise statistisch unabhängig sowie jeweils exponentialverteilt mit $\mu_j = \langle X_j \rangle = 3$ h und $\sigma_j = \sqrt{\mathrm{Var}(X_j)} = 3$ h für alle $j = 1, 2, \ldots, n$. Wieviele Bohrköpfe sind bereitzustellen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % mindestens 300 Betriebsstunden zu ermöglichen?

Teil 2

Aufgabe 1)

Die Betriebszeit von der Erstinbetriebnahme bis zum Ausfall (Funktionsdauer) T eines elektronischen Bauteiles genüge einer stetigen Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeits- bzw Dichtefunktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 0{,}002 e^{-0{,}002 t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

5 Pkt. a) Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen T handel

5 Pkt. b) Wie lautet die zugehörige Verteilungsfunktion F(t

5 Pkt. c) Skizzieren Sie beide Funktionen f(t) und F(t) (vergleichende Darstellung)

5 Pkt. d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit überlebt ein solch Bauelement die ersten 1000 Stunden ausfallfrei

5 Pkt. **Aufgabe 2**

Eine Zufallsgröße X sei $N(\mu, \sigma)$-verteilt. Mit welche Wahrscheinlichkeit ist der Abstand bel. Realisierungen vom Erwartungswert μ kleiner als ein vorgegebener Wert $\varepsilon > 0$?

Vorgehen: Setze $\varepsilon = n \cdot \sigma$ mit $n \in \mathbb{N}$, gebe nach allgemeir Betrachtung ein konkretes Ergebnis $n = 3$ an und interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 3   10 Pkt.

Die erreichte Punktzahl in einer Klausur sei normalverteilt mit Erwartungswert 76 und einer Standardabweichung von 15. Die besten 15% der Studenten erhalten eine Auszeichnung, die schlechtesten 10% fallen durch. Bestimme die minimale Punktzahl

a) eine Auszeichnung

b) das Bestehen.

Aufgabe 4   5 Pkt.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl 3 höchstens 950 mal unter 10.000 zufällig ausgewählten einstelligen Zahlen vorkommt.

Vorgehen: Notieren Sie zunächst den Lösungsansatz für die zugrunde liegende diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, führen Sie aber die Berechnung approximativ über eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung durch.