Lösungsvorschläge zu Aufgabenblatt 5

(Restklassen)

Aufgabe 5.1

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Teiler-Relation:

(1) Für alle $m, n, k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$ gilt: $m|n \Leftrightarrow km|kn$.

(2) Für alle $m, n_1, n_2, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$ gilt: $m|n_1 \wedge m|n_2 \Rightarrow m|(\ell_1 n_1 + \ell_2 n_2)$.

(3) Für alle $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ gilt: $m_1|n_1 \wedge m_2|n_2 \Rightarrow m_1 m_2|n_1 n_2$.

Lösung

(1) Seien $m, n, k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$.

„$\Rightarrow$“: Es gelte $m|n$. *Zu zeigen:* $km|kn$.

Nach Voraussetzung existiert ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $n = ma$, also gilt auch $kn = kma$, also gilt $km|kn$ nach Definition.

„$\Leftarrow$“: Es gelte $km|kn$. *Zu zeigen:* $m|n$.

Nach Voraussetzung existiert ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $kn = kma$. Wegen $k \neq 0$ folgt hieraus $n = ma$, also gilt $m|n$ nach Definition.

(2) Seien $m, n_1, n_2, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$. Es gelte $m|n_1$ und $m|n_2$. *Zu zeigen:* $m|(\ell_1 n_1 + \ell_2 n_2)$.

Nach Voraussetzung existieren $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $n_1 = a_1 m$ und $n_2 = a_2 m$. Es folgt

$$\ell_1 n_1 + \ell_2 n_2 = \ell_1 a_1 m + \ell_2 a_2 m = \underbrace{(\ell_1 a_1 + \ell_2 a_2)}_{k:=} m = km,$$

also gilt nach Definition auch $m|(\ell_1 n_1 + \ell_2 n_2)$.

(3) Seien $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Es gelte $m_1|n_1$ und $m_2|n_2$. *Zu zeigen:* $m_1 m_2|n_1 n_2$.

Nach Voraussetzung existieren $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $n_1 = a_1 m_1$ und $n_2 = a_2 m_2$. Es folgt

$$n_1 n_2 = (a_1 m_1)(a_2 m_2) = \underbrace{(a_1 a_2)}_{k:=} m_1 m_2 = k m_1 m_2,$$

also gilt nach Definition auch $m_1 m_2|n_1 n_2$.

Aufgabe 5.2

Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv_m b$ und $c \equiv_m d$. Zeigen Sie, dass dann auch gilt $a + c \equiv_m b + d$ und $a - c \equiv_m b - d$.

Hinweis: *Sie können die Aussagen von Aufgabe 5.1 verwenden.*

Lösung

Nach Voraussetzung gilt $m|b-a$ und $m|d-c$. Wir wenden Teil (2) der vorherigen Aufgabe an und erhalten:

$$m|(b-a)+(d-c) \quad \text{und} \quad m|(b-a)-(d-c).$$

Das heißt aber gerade $m|(b+d)-(a+c)$, also $a+c \equiv_m b+d$, und $m|(b-d)-(a-c)$, also $a-c \equiv_m b-d$.

Aufgabe 5.3
Bestimmen Sie für $m = 7$ und $m = 10$ und die Zahlen $145, 200$ und 711 jeweils die zugehörige Restklasse $[r]_m$ mit $0 \leqslant r < m$.

Lösung

Man erhält in allen Fällen das gesuchte r mithilfe von Teilen mit Rest. Dies liefert:

$$[145]_7 = [5]_7, \;\; [200]_7 = [4]_7, \;\; [711]_7 = [4]_7,$$

und

$$[145]_{10} = [5]_{10}, \;\; [200]_{10} = [0]_{10}, \;\; [711]_{10} = [1]_{10}.$$

Aufgabe 5.4 Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $\forall\, a \in \mathbb{Z} : [a]_m \subseteq [a]_n$.

(2) $\exists\, a \in \mathbb{Z} : [a]_m \subseteq [a]_n$.

(3) $n|m$.

Lösung

Es reicht zu zeigen: (1)$\Rightarrow$(2) und (2)$\Rightarrow$(3) und (3)$\Rightarrow$(1) (vgl. Vorlesung).

„(1) $\Rightarrow$ (2)“: Es gelte (1). Da $\mathbb{Z} \neq \varnothing$ ist, folgt dann auch (2), z.B. gilt $[0]_m \subseteq [0]_n$.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Es gelte (2). Wähle also $a \in \mathbb{Z}$ mit $[a]_m \subseteq [a]_n$. Nach Vorlesung gilt $[a]_m = a + m\mathbb{Z}$ und $[a]_n = a + n\mathbb{Z}$. Insbesondere ist $a+m = a+m\cdot 1 \in [a]_m$, also gilt auch $a+m \in [a]_n = a+n\mathbb{Z}$, es gibt also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a+m = a+n\cdot k$. Es folgt $m = n\cdot k$, also $n|m$.

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: Es gelte $n|m$, wir finden also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $m = n\cdot k$. Sei $a \in \mathbb{Z}$. Zu zeigen ist $[a]_m \subseteq [a]_n$. Sei also $b \in [a]_m = a + m\mathbb{Z}$, dann gibt es ein $\ell \in \mathbb{Z}$ mit $b = a + m\cdot\ell$. Es folgt

$$b = a + m\cdot\ell = a + (n\cdot k)\cdot\ell = a + n\cdot\underbrace{(k\cdot\ell)}_{\in\mathbb{Z}} \in a + n\mathbb{Z} = [a]_n.$$