Ullmann

Klausur

Angewandte Mathematik A101

2. Quartal 2021

Name des Prüflings: **Matrikelnummer:** **Zenturie:**

Dauer: 120 min Seiten ohne Deckblatt: 3 Datum: 22. Juni 2021

Zugelassene Hilfsmittel: Nordakademie Taschenrechner, Stifte, aber kein roter, offizielle Formelsammlung (ausgedruckt oder als PDF am Rechner)

Wichtige Hinweise:

- Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben leere, bereitliegende Blätter.
- Bitte schreiben Sie auf jedes Lösungsblatt:
  Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Zenturie und die Modul-Nummer.
- Bitte nummerieren Sie zusätzlich Ihre Lösungsblätter.
- Geben Sie immer an, zu welcher Aufgabennummer eine Lösung auf einem Blatt gehört!
- Das Klausuraufgabenheft enthält 3 Seiten (ohne Deckblatt). Bitte überprüfen Sie Ihr Aufgabenheft auf Vollständigkeit!
- Diese Klausur enthält 8 Aufgaben. Es können 100 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur reichen 50 Punkte.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	Prozent:
Punktzahl:	13	9	12	12	17	18	6	13	100
Erreicht:									

Datum: __________ Note: ______ Ergänzungsprüfung: ________

Unterschrift: ______________ Unterschrift: ______________

Aufgabe 1 (13 Punkte)

(1.1) (4 Punkte) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\dfrac{3n^2+n}{n^2\sqrt[n]{n}+5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$?
Falls der Grenzwert existiert, bestimmen Sie ihn.

(1.2) (4 Punkte) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left((-1)^n \cdot \dfrac{n+2}{2n^2-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$?
Falls der Grenzwert existiert, bestimmen Sie ihn.

(1.3) (5 Punkte) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch: $a_0 := 0,\ a_{n+1} = a_n^2 + \dfrac{1}{4}\ (n \in \mathbb{N}_0)$.
Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Konvergiert die Folge? Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Sie dürfen die Ungleichung $0 \le a_n \le \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ als gegeben annehmen.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

(2.1) (5 Punkte) Prüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{4} - \frac{4}{5}\right|^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

(2.2) (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$. Geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(3.1) (4 Punkte) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} ax^3 & \text{falls } x < 1, \\ 5, & \text{falls } x = 1, \\ x^2 + b, & \text{falls } x > 1 \end{cases}$
stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(3.2) (4 Punkte) Bestimmen Sie unter Anwendung der Differentiationsregeln die Ableitung von $f(x) := \dfrac{e^{2x}x^2}{\ln(x)}$ für alle $x > 0$.

(3.3) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Funktionsgrenzwert $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - 1}{x^2}$, sofern er existiert.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

(4.1) (3 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{falls } x \in [-1,0[\,, \\ 5 & \text{falls } x = 0, \\ x^2 + 1 & \text{falls } x \in]0,1]. \end{cases}$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(4.2) (4 Punkte) Bestimmen Sie mithilfe der Substitutionsregel $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$.

(4.3) (5 Punkte) Bestimmen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-|x-1|}\,dx$.

Aufgabe 5 (17 Punkte)

In einer Gemeinde gibt es zehn Facharzt-Praxen, die sich bezüglich ihres Umsatzes in drei Gruppen einteilen lassen (geringer, mittlerer und hoher Umsatz).

Innerhalb jeder Gruppe haben die Praxen dabei jeweils den gleichen Umsatz. Der Gesamtumsatz aller Praxen beläuft sich im Jahr 2016 auf 1.5 Mio.€. Davon entfallen 40% auf eine einzige Praxis, während die fünf Praxen mit geringem Umsatz zusammen 300 000€ erwirtschaftet haben.

Hinweis: Verwenden Sie als Einheit T EUR (1 000€)

(5.1) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Umsatz der Praxen in den jeweiligen Gruppe sowie den durchschnittlichen Umsatz aller Praxen und die Streuung.

(5.2) (2 Punkte) Ist der in (5.1) berechnete Durchschnittswert ein guter Repräsentant für den Datensatz? (kurze Begründung)

(5.3) (11 Punkte) Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle so, dass Sie die zugehörige Lorenzkurve und den Gini-Koeffizienten bestimmen können. Zeichnen Sie die Lorenzkurve und berechnen und interpretieren Sie den Gini-Koeffizienten.

Aufgabe 6 (18 Punkte)

Auf der ganzen Welt steigt der Wasserverbrauch von Jahr zu Jahr infolge des immer höheren Lebensstandards, der Bevölkerungszunahme und der starken Entwicklung einer vielgestaltigen Industrie. Lag der Wasserverbrauch vor wenigen Jahrzehnten noch bei ca. 100 Litern pro Kopf der Bevölkerung und Tag, so stieg er in manchen Ländern bis auf 350, in einzelnen Städten bereits auf über 1000 Liter. Die folgende Tabelle zeigt den Wasserverbrauch der Erdbevölkerung pro Jahr:

Zeit t (in Jahren)	1900	1940	1950	1960	1970	1980
Wasserverbrauch W (in km^3/Jahr)	15.0	40.7	78.6	132.4	182.6	263.2

Es soll mittels einer Regression die funktionale Abhängigkeit des Wasserverbrauchs von der Zeit untersucht werden.

Hinweis: Runden Sie Entscheidungsgrößen in dieser Aufgabe auf 3 Stellen nach dem Komma.

(6.1) (3 Punkte) Fertigen Sie ein Streudiagramm an.

(6.2) (5 Punkte) Führen Sie eine lineare Regression durch und geben Sie die lineare Regressionsfunktion an. Ist das lineare Modell geeignet zur Beschreibung der Datenlage? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer geeigneten Maßzahl.

(6.3) (3 Punkte) Bestimmen Sie mit dem Taschenrechner eine Regressionsfunktion vom Typ $\widehat{w} = a \cdot t^b$. Liefert diese ein besseres Ergebnis als die lineare Regression?

(6.4) (4 Punkte) Gibt es eine bessere Regressionsfunktion zur Beschreibung der Datenlage? Bestimmen Sie ggf. eine solche Regressionsfunktion, und begründen Sie Ihre Antwort mithilfe einer geeigneten Maßzahl!

(6.5) (2 Punkte) Prognostizieren Sie den Wasserverbrauch für das Jahr 2050 mithilfe einer Regressionsfunktion, die ein Bestimmtheitsmaß von mindestens $R^2 = 0.8$ aufweist.

(6.6) (1 Punkt) Halten Sie die Prognose auf Basis der Daten für sinnvoll?

Aufgabe 7 (6 Punkte)

An einer bestimmten Krankheit leiden 1% der Menschen. Ein Diagnosetest habe die Eigenschaft, dass er bei Kranken mit Wahrscheinlichkeit 98% und bei Gesunden mit 95% die richtige Diagnose liefert.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, bei der die Krankheit diagnostiziert wird, dennoch gesund ist?

Hinweis: Nutzen Sie für die Modellierung dieser Aufgabe die Ereignisse:

$K :=$ *„Eine zufällig gewählte Person ist krank."* und

$D :=$ *„Bei einer zufällig gewählten Person wird die Krankheit diagnostiziert."*

Geben Sie das Ergebnis als Prozentzahlen mit zwei Dezimalstellen an.

Aufgabe 8 (13 Punkte)

(8.1) (6 Punkte) Eine Familie plant 6 Kinder. Die Geburtenstatistik der letzten Jahre zeigt, dass im Schnitt 51% der Geburten Jungen sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) genau die Hälfte der Kinder Mädchen werden?

(b) höchstens die Hälfte der Kinder Mädchen werden?

(c) mindestens die Hälfte der Kinder Mädchen werden?

(8.2) (7 Punkte) Eine Limonaden-Fabrik füllt mit einer Anlage 330ml-Flaschen ab. Die genaue Füllmenge unterliegt einer zufälligen Schwankung und ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 330$ und Standardabweichung $\sigma = 2$.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllmenge um höchsten 4ml vom Sollwert 330ml abweicht.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllmenge exakt gleich 330ml ist.

(c) Geben Sie ein um 330 symmetrisches Intervall an, in dem die Füllmenge mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% liegt (Runden eine Stelle nach dem Komma).

(d) Ein Kunde beschwert sich, dass in einer Kiste, die er der Fabrik abgekauft hat, mehrere Flaschen mit weniger als 300ml befüllt seien. Nehmen Sie hierzu Stellung mithilfe einer geeigneten Kennzahl.