Probeklausur Diskrete Mathematik

Achtung: Dies ist nur eine inoffizielle Probeklausur aus dem Mathe-Tutorium. Aus dieser Probeklausur kann keinerlei Rückschluss auf den Schwierigkeitsgrad, den Umfang oder auf die Inhalte der echten Klausur gezogen werden!

- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt
- Falls Sie einen Fehler in der Aufgabenstellung vermuten, treffen Sie geeignete Annahmen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Insgesamt gibt es 100 Punkte.
- Zum Bestehen der Klausur werden 50 Punkte benötigt.
- Für diese Probeklausur gilt folgende (typische) Notenskala:

Punkte	**Note**
bis 49	5.0 (nicht bestanden)
ab 50	4.0
ab 55	3.7
ab 60	3.3
ab 65	3.0
ab 70	2.7
ab 75	2.3
ab 80	2.0
ab 85	1.7
ab 90	1.3
ab 95	1.0

<u>Aufgabe 1</u> (7 Punkte)

Sie dürfen in dieser Aufgabe keine Wahrheitstabelle benutzen. Stellen Sie eine aussagenlogische Formel auf und lösen Sie diese mit den Rechenregeln der booleschen Algebra.
Herr Meyer, Frau Schmidt, Herr Dach und Frau Lind treffen sich zu einer Besprechung.
Bestimmen Sie, wer alles pünktlich zur Besprechung erscheint.
Verwenden Sie die logischen Variablen M, S, D, L.
(M := „Herr Meyer kommt pünktlich“, die anderen Variablen entsprechend)

- Wenn Herr Meyer pünktlich zur Besprechung kommt, ist auch Frau Schmidt pünktlich.
- Wenn Herr Dach nicht pünktlich ist, dann sind auch Herr Meyer und Frau Lind nicht pünktlich.
- Wenn Frau Schmidt zu spät kommt, dann ist auch Herr Meyer zu spät.
- Wenn Herr Meyer oder Frau Lindt zu spät kommen, ist Frau Schmidt pünktlich.
- Herr Dach kommt nie pünktlich zur Besprechung.

<u>Aufgabe 2</u> (8 Punkte)

In den folgenden Multiple Choice Aufgaben sind je 3 Antworten richtig. Bewertungshinweis:
- Es gibt maximal vier Punkte pro Frage
- Wenn Sie mehr als drei Kreuze pro Frage ankreuzen, erhalten Sie keine Punkte
- Haben Sie ein Kreuz in einer Frage falsch gesetzt, erhalten Sie die halbe Punktzahl
- Haben Sie mehr als ein Kreuz in einer Frage falsch gesetzt, erhalten Sie keine Punkte

(1.1) (4 Punkte) Kreuzen Sie die drei richtigen Antworten an:

❑ Sei M eine Menge. Dann ist M × M im allgemeinen keine Relation.

❑ Jede Ordnungsrelation hat mindestens ein kleinstes oder mindestestens ein größtes Element.

❑ Seien a, b Elemente einer beliebigen Menge E mit einer beliebig zugehörigen Äquivalenzrelation ≡. Es gilt: $a \equiv b \Rightarrow a = b$.

❑ Aus der Gleichheit von Äquivalenzklassen folgt die Äquivalenz der Repräsentanten und umgekehrt.

❑ Wenn R und S reflexiv sind, dann ist auch $R \cup S$ reflexiv.

❑ $(R2 \circ R1)^{-1} = R1^{-1} \circ R2^{-1}$ (1.2)

(1.2) (4 Punkte) Kreuzen Sie die drei richtigen Antworten an:

❑ Sei R eine Relation. Aus der Asymmetrie von R folgt auch die Irreflexivität von R.

❑ Sei R1 eine Relation. Es gilt: $R1 \circ R1^{-1} = R1$.

❑ Auf der Menge M := {1, 2, 3, 4, 5} gibt es 5! = 120 Relationen.

❑ Sei R eine Relation. Wenn R nicht reflexiv ist, dann ist R irreflexiv..

❑ Die leere Menge ist eine transitive Relation auf M, wobei M eine beliebige Menge sei.

❑ Aus der Gleichheit zweier Relationen folgt die Gleichheit der respektiven inversen Relationen.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Geben Sie in der folgenden Tabelle an, welche Aussagen wahr sind und welche falsch sind.

- Für jedes richtig gesetzte Kreuz erhalten Sie 0.5 Punkte.
- Für jedes falsch gesetzte Kreuz werden Ihnen 0.5 Punkte abgezogen.
- Für ausgelassene Kreuze werden weder Punkte abgezogen noch vergeben.
- Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet.
- In allen folgenden Aussagen sind A,B,C jeweils beliebige, endliche Mengen.

Nr.	Aussage	Wahr	Falsch
1.	$\forall x \in A : x \in P(A)$ (Mit $P(A)$ ist die Potenzmenge von A gemeint)		
2.	Wenn $\|A \setminus B\| = \|A\|$, dann sind A,B disjunkt.		
3.	$(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \Rightarrow (A \cap B = C)$		
4.	$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x : (x \in A) \Rightarrow (x \notin B)$		
5.	$\exists x \in \{\} : x = 3$		
6.	$P(\{\}) = \{\}$		
7.	$\{x \in \mathbb{N} \mid (x-1=0) \vee (x-2=1)\} = (\{1,2,3,5\} \setminus \{5,2\})$		
8.	$\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\|$		
9.	$(A=B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \{\})$		
10.	$4 \in \{x \in \mathbb{N} \| (x=3) \vee (x>2)\}$		
13.	$\{4,2\} \in \{ \{x,y\} \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (y \in \mathbb{N}) \wedge (2 * x = y) \}$		
14.	$\{3,4,1\} \cap \{1,2,3,4\} \cap \{2,3,1\} = \{\} \cup \{1,3\} \cup \{1\}$		
15.	$(A=B) \Rightarrow (A \setminus B = \{\})$		
16.	$\forall x \in \{\} : x = 3$		
17.	$1 \in \{ \{1\},2,3,4 \} \cap \{1,\{1\},\{3\}\}$		
18.	$\{x \in \mathbb{N} \| x \leq 5 \} \subseteq \{x \in \mathbb{N} \| x * 2 < 10\}$		
19.	Sei A,B disjunkt, dann gilt: $\forall x \in (A \cap B) : (x \notin A) \wedge (x \notin B)$		
20.	$\exists x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x+3=y \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} : x+3=y$		
21.	$(A \neq B) \Leftrightarrow ((\exists a \in A : a \notin B) \wedge (\exists b \in B : b \notin A))$		
22.	$\{x \| (x \in \mathbb{N}) \wedge (x>0)\} = \{x \in \mathbb{N} \| x > -1\}$ (Hinweis: $0 \notin \mathbb{N}$)		
24.	$\forall x : (x \in \mathbb{N}) \wedge (x>0)$ (Hinweis: $0 \notin \mathbb{N}$)		
25.	$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x>y \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x>y$		

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Geben Sie die Definitionen in Quantoren-Schreibweise an für:

(5.1) (0.5 Punkte) Mengen-Gleichheit

(5.2) (0.5 Punkte) Echte Teilmenge

In den folgenden Aufgaben sind A,B,C jeweils beliebige Mengen. Genau eine der untenstehenden Aussagen ist wahr. Genau zwei sind falsch.

I) $(A \setminus B) \cap C \subseteq (A \setminus C) \cap B$

II) $A \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$

III) $(A \triangle B) \cup (A \setminus B) \subseteq A \cup B$

(5.7) (5 Punkte) Geben Sie an, welche Aussagen falsch sind, indem Sie die falschen Aussagen mit konkreten Gegenbeispielen widerlegen. Sie dürfen bei den Gegenbeispielen jedoch nicht die leere Menge benutzen.

(5.8) (8 Punkte) Beweisen Sie die wahre Aussage mit einem formalen Beweis.

(5.9) (2 Punkte) Beweisen Sie die wahre Aussage mit einem Venn Diagramm.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Beweisen Sie folgende Summenformel mit vollständiger Induktion. Formulieren Sie dazu zunächst eine entsprechende, prädikatenlogische Aussage.

$$\sum_{i=0}^{n} 5^i = \frac{1 - 5^{n+1}}{-4}$$

<u>Aufgabe 6</u> (17 Punkte)

Sei $\boldsymbol{H}$ die Menge aller Haustiere, $\boldsymbol{M}$ die Menge aller Menschen und $\boldsymbol{L}$ die Menge aller Leckerlies.
Folgende Prädikate sollen verwendet werden:

B(m, h) := Mensch **besitzt** Haustier
M(h, l) := Haustier **mag** Leckerlie

In Ihren Lösungen zu folgenden Aufgaben dürfen keine Quantoren negiert vorkommen.
In Ihrem Rechenweg dürfen Sie aber negierte Quantoren benutzen. Sie dürfen Prädikate sowohl in Ihrem Rechenweg als auch in Ihren Lösungen negiert benutzen.

(5.1) (8 Punkte) Übertragen Sie folgende Aussagen in prädikatenlogische Aussagen mit eingeschränkten Quantoren.

- Jeder Mensch besitzt mehr als ein Haustier.
- Einige Menschen besitzen nur Haustiere, die Leckerlies mögen.
- Manche Haustiere mögen gar keine Leckerlies.
- Alle Menschen besitzen genau ein Haustier.

(5.2) (4 Punkte) Negieren Sie die beiden Aussagen

- Jeder Mensch besitzt mehr als ein Haustier
- Einige Menschen besitzen nur Haustiere, die Leckerlies mögen.

Verwenden Sie wieder eingeschränkte Quantoren. Formulieren Sie die negierten Aussagen in einfachen, deutschen Sätzen.

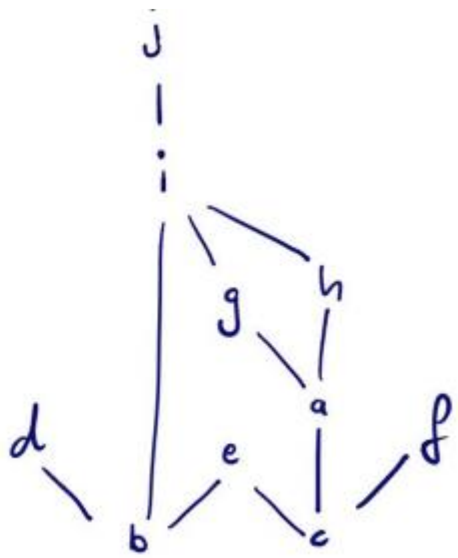
(5.3) (2 Punkte) Schreiben Sie Ihre prädikatenlogische Aussage für „Manche Haustiere mögen gar keine Leckerlies“, so um, dass sie nur noch uneingeschränkte Quantoren enthält.

(5.4) (3 Punkte) Genau eine der untenstehenden, prädikatenlogischen Aussagen ist falsch. Geben Sie die falsche Aussage an und begründen Sie, warum die Aussage falsch ist.

- ○ $\forall a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : a = b$
- ○ $\forall a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : a \neq b$
- ○ $\forall a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : a < b$
- ○ $\forall a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : a > b$
- ○ $\forall a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : a \leq b$
- ○ $\forall a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : a \geq b$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben sei das folgende Hasse-Diagramm der zehn-elementigen Menge M := {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}:



Geben Sie größte/kleinste und maximale/minimale Elemente sowie obere/untere Schranken, obere/untere Grenzen und Supremum/Infimum von {a, g, h} und {b, c, e} an, falls existent.

	{a, g, h}	{b, c, e}		{a, g, h}	{b, c, e}
Größte Elemente			Kleinste Elemente		
Maximale Elemente			Minimale Elemente		
Obere Schranken			Untere Schranken		
Obere Grenzen			Untere Grenzen		
Supremum			Infimum		

Aufgabe 8 (15 Punkte)

Gegeben sei die Relation ≡ auf der Menge der ganzen Zahlen, die durch $a \equiv b :\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 2a - 2b$ definiert wird.

(4.1) (8 Punkte) Zeigen Sie, dass ≡ eine Äquivalenzrelation ist.

(4.2) (4 Punkte)
Geben Sie die Äquivalenzklassen [0], [1], [2] und [3] explizit an. Hinweis: Die Äquivalenz kann auch folgend dargestellt werden: $a \equiv b \Leftrightarrow (a - b) \cdot (a + b - 2) = 0$

(4.3) (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass $[a] \oplus [b] := [a + b]$ für alle $x, y \in Z$ nicht wohldefiniert bzw. nicht unabhängig vom Repräsentanten ist. Hinweis: Nutzen Sie dazu die Äquivalenzklassen [0] und [1].

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Gegeben sei die Äquivalenzrelation ≡ auf $\mathbb{Z}$, die durch $a \equiv b :\Leftrightarrow |a| = |b|$ definiert wird.
Zeigen Sie, dass die Relation $f := \{([a]_\equiv, |a|) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ auf $(\mathbb{Z}/\equiv) \times \mathbb{Z}$ eine Abbildung ist.
Erinnerung: $\mathbb{Z}/\equiv := \{[a]_\equiv \mid a \in \mathbb{Z}\}$