Prof. Dr. Bahne Christiansen

Nachklausur

W151 Ingenieurmathematik 2 (Q4 / 2019)

Name des Prüflings: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________ **Zenturie:** ________

Dauer: 90 min

Datum: 19. November 2019

Erlaubte Hilfsmittel: **Kein** Taschenrechner, 3 Blatt Formelsammlung (beidseitig, beschrieben oder bedruckt)

- Bitte ergänzen Sie auf diesem Deckblatt zunächst Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Zenturie.
- Die Klausuraufgaben umfassen inkl. den Seiten für Ihre Lösungen aber ohne Deckblatt 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie Ihr Exemplar auf Vollständigkeit!
- Zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte / 50 % hinreichend.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	Gesamt:
Punktzahl:	18	20	12	16	14	20	100
Erreicht:							

Datum: ______________ Note: ________ Ergänzungsprüfung: __________

Unterschrift: ______________________ Unterschrift: ______________________

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \ln^2(x+1)$$

(1.1) (3 Punkte) den Definitionsbereich,

Lösung:

$\ln x$ nur für $x > 0$ definiert und somit muss $x > -1$ sein:

$$D_f = (-1, \infty)$$

(1.2) (4 Punkte) den Wertebereich,

Lösung:

Für $x \in (-1, \infty)$ ist $x+1 \in (0, \infty)$. Damit nimmt $\ln(x+1)$ alle Werte im Intervall $(-\infty, \infty)$ an und letztlich folgt für den Wertebereich von $f(x) = \ln^2(x+1)$

$$W_f = [0, \infty) = \mathbb{R}_0^+$$

(1.3) (3 Punkte) die Nullstellen,

Lösung:

$$\begin{aligned}
&\ln^2(x+1) = 0 \\
\Rightarrow \quad &\ln(x+1) = 0 \\
\Rightarrow \quad &x+1 = 1 \\
\Rightarrow \quad &x = 0
\end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle befindet sich bei $x = 0$.

(1.4) (8 Punkte) und die lokalen Extrempunkte.
Geben Sie zu den ermittelten x–Werten der Extrempunkte auch die y–Werte an.

Lösung:

$$f'(x) = 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} \text{ (verschachtelte Kettenregel)}$$
$$f''(x) = 2\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} \text{ (Quotientenregel)}$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$2\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0$$

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$:

$$f''(0) = 2\frac{1-\ln(1)}{1^2} = 2 > 0 \quad \text{(lokales Minimum)}$$

Zugehöriger Funktionswert: $f(0) = 0$.

Der Punkt $(0,0)$ ist ein lokales Minimum.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

(2.1) (10 Punkte) Berechnen Sie das Integral $\int \frac{x+7}{x^2-4x-5}dx$.

Lösung:

Mittels Partialbruchzerlegung:

- Nullstellen des Nenners: $x = -1$ und $x = 5$
- Partialbruchzerlegung: $\frac{x+7}{x^2-4x-5} = \frac{2}{x-5} - \frac{1}{x+1}$
- Integration liefert $\int \frac{x+7}{x^2-4x-5}dx = 2\ln|x-5| - \ln|x+1| + c,\ c \in \mathbb{R}$

(2.2) (5 Punkte) Berechnen Sie das Integral $\int x \cdot e^{-x}dx$.

Lösung:

Mittels partieller Integration: Lösung $\int x \cdot e^{-x} dx = -e^{-x} \cdot (x+1) + c,\ c \in \mathbb{R}$

(2.3) (2 Punkte) Bestätigen Sie das Ergebnis aus 2.2 durch Ableiten der berechneten Stammfunktion.

Lösung:

Nachrechnen mit Produktregel

(2.4) (3 Punkte) Berechnen Sie den Wert des Integrals aus 2.2 für die untere Grenze -1 und die obere Grenze 0.

Lösung:

$\int_{-1}^{0} x \cdot e^{-x} dx = [-e^{-x} \cdot (x+1)]_{-1}^{0} = -1 - 0 = -1$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(3.1) (6 Punkte) Berechnen Sie das Integral $\int 3x^2 \sin(x^3) dx$ mit Hilfe der Integration durch Substitution.

Lösung:

Substitution $u = x^3$ liefert $\int 3x^2 \sin(x^3) dx = -\cos(x^3) + c,\ c \in \mathbb{R}$

(3.2) (6 Punkte) Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung des Graphens von $f(x) = 2e^{-x}$ um die x-Achse im Intervall $[0, \infty)$ entsteht.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
V_x &= \lim_{b\to\infty} \pi \cdot \int_0^b f(x)^2\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \pi \cdot \int_0^b 4e^{-2x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \pi \cdot \left[-2e^{-2x}\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \pi \cdot \left[-2e^{-2b}+2\right] \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

(4.1) (4 Punkte) Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen der Funktion f.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \\
f''(x) &= \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} \\
f'''(x) &= \frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{1}{16}e^{\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

(4.2) (5 Punkte) Berechnen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung um den Entwicklungspunkt $a = 0$.

Lösung:

Taylorpolynom: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.
Mit obigen Ableitungen ergibt sich

$$T_4(x) = 1 + \frac{1}{2\cdot 1}x + \frac{1}{4\cdot 2}x^2 + \frac{1}{8\cdot 6}x^3 + \frac{1}{16\cdot 24}x^4$$

(4.3) (3 Punkte) Geben Sie das Bildungsgesetz der Taylorreihe an.

Lösung:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k\cdot k!}x^k$$

(4.4) (4 Punkte) Berechnen Sie den Konvergenzbereich der Taylorreihe.

Lösung:

Konvergenzradius:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{\frac{1}{2^k\cdot k!}}{\frac{1}{2^{k+1}\cdot(k+1)!}} = \frac{2^{k+1}\cdot(k+1)!}{2^k\cdot k!} = 2\cdot(k+1)$$

$$\Rightarrow\ r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|2\cdot(k+1)\right| = \infty$$

Der Konvergenzbereich lautet somit $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (14 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung $y'\cdot\sqrt{x} = y$.

(5.1) (2 Punkte) Geben Sie die Differentialgleichung in expliziter Form an.

Lösung:

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}}$$

(5.2) (4 Punkte) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung.

Lösung:
Der Standardform $y' - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot y = 0$ entnimmt man:

- gewöhnlich
- 1. Ordnung
- linear
- keine konstanten Koeffizienten
- homogen

(5.3) (6 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch Anwendung der Methode „Trennung der Variablen“.

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}}$$

Trennung der Variablen: $\frac{dy}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx$

Integration: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = 2\sqrt{x} + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Auflösen nach y: $y = e^{2\sqrt{x}+c}$

(5.4) (2 Punkte) Berechnen Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(4) = 1$.

Lösung:

$$y(4) = e^{2\cdot 2+c} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -4, \quad \text{d.h., } y(x) = e^{2\sqrt{x}-4}$$

Aufgabe 6 (20 Punkte)
Gegeben ist die Differentialgleichung (DGL) $2y'' + 8y' = -8y + 16x^2 - 16$.

(6.1) (4 Punkte) Geben Sie die DGL in Standardform an und klassifizieren Sie die DGL.

Lösung:
Standardform: $y'' + 4y' + 4y = 8x^2 - 8$
Klassifizierung: Gewöhnlich, 2. Ordnung, linear, konst. Koeffizienten, inhomogen

(6.2) (5 Punkte) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen DGL an.

Lösung:
$y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(6.3) (5 Punkte) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Lösung:
Ansatz: $y_p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ (da Störfunktion Polynom 2. Grades).
Ableitungen: $y_p'(x) = a_1 + 2a_2 x$, $y_p''(x) = 2a_2$.
Einsetzen und Koeffizientenvergleich liefern $a_0 = 1$, $a_1 = -4$, $a_2 = 2$, d.h.

$$y_p(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

(6.4) (1 Punkt) Nennen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Lösung:
$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + 2x^2 - 4x + 1$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(6.5) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung der DGL mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$.

Lösung:
$y(0) = c_1 + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = -1$ $y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x} - 2c_2 x e^{-2x} + 4x - 4$
Also $y'(0) = -2c_1 + c_2 - 4 = 2$ und wegen $c_1 = -1$ gilt schließlich $c_2 = 4$

$$y(x) = -e^{-2x} + 4xe^{-2x} + 2x^2 - 4x + 1$$