NAME DES DOZENTEN: BJÖRN-HELGE BUSCH

KLAUSUR A100
FORMALE GRUNDLAGEN

QUARTAL: Q1/2016

Name des Prüflings: ______________________ Matrikelnummer: ______________________ Zenturie: ______________

Dauer: 120 Min. Seiten ohne Deckblatt und Infoblatt: 17 Datum: 17.02.2016

Hilfsmittel:
- Infoblatt zur Klausur (siehe letzte Seite)

Bemerkungen:
- Bitte kontrollieren Sie Ihr Klausurheft zu Beginn der Prüfung auf Vollständigkeit.

Es sind 120 Punkte erreichbar.
Zum Bestehen der Klausur sind 60 Punkte ausreichend.

Punkte für Aufgaben	
Aufgabe 1	von 10
Aufgabe 2	von 31
Aufgabe 3	von 28
Aufgabe 4	von 24
Aufgabe 5	von 27
Insgesamt	von 120

Datum: _______ Note: _________ Ergänzungsprüfung: ____________

Unterschrift: ____________________

Termin für Klausureinsicht: _________________ Ort: __________________

Aufgabe 1: Wortmengen und Wortfunktionen

a) Geben Sie Eigenschaften von formalen und natürlichen Sprachen an. Nutzen Sie für die Gegenüberstellung die Tabelle (3 Punkte)

Natürliche Sprache	Formale Sprache

b) Erläutern Sie den Begriff Alphabet. (1 Punkt)

c) Erläutern Sie den Begriff der Präfixfreiheit und geben Sie ein Beispiel einer präfixfreien Sprache an (1 Punkt)

d) Geben Sie zwei Wortfunktionen inklusive des Definitions- und Wertebereichs gemäß üblicher (mengentheoretischer) Funktionsvorschrift und beispielhaftem Funktionsaufruf an. Erläutern Sie die jeweiligen Zuordnungen von Definitions- und Wertebereich. (2 Punkte)

e) Stellen Sie eine Wortfunktion Ihrer Wahl als Turingautomaten dar. Geben Sie entsprechenden Zustandsüberführungsfunktionen exemplarisch für das Eingabealphabet

$$\mathbf{\Sigma = \{1, 2, c\}}$$

an. (3 Punkte)

Aufgabe 2: Endliche Automaten

a) Erläutern Sie den Begriff Produktautomat mithilfe eines Beispiels. Nutzen Sie für die Konstruktion die Sprachen

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w = \{ab\}\{c\}^*\}$$
$$L_2 = \left\{w \in \Sigma^* \mid w = \{a\}^+\{b\}\right\}$$

Hinweis: Produktautomaten akzeptieren den Schnitt oder die Differenz von Sprachen. (3 Punkte)

b) Was versteht man unter der reflexiv-transitiven Hülle der Zustandsüberführungsfunktion δ eines DEA? Ist δ für alle regulären Sprachen stets total? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

c) Erläutern Sie den Begriff Kleene-Stern-Produkt und konstruieren Sie einen Automaten, der das Kleene-Stern-Produkt über einem beliebigen Alphabet Σ akzeptiert. (1 Punkt)

d) Gegeben sind die Sprachen

$$\boldsymbol{L_3 = \{w \in \Sigma^* | w = \{a, f\}^+ \{c, d\}^* \{bb, ee\}^i \{aa, cc\}^*, i > 0\}}$$
$$\boldsymbol{L_4 = \{w \in \Sigma^* | w = \{c, d\}^* \{xy, xx, yx, yy\} b^j c^k, j > 0, k > 1\}}.$$

Konstruieren Sie einen <u>nicht verallgemeinerten</u> DEA $\boldsymbol{A_4}$, der <u>ausschließlich</u> die Sprache

$$\boldsymbol{L_5 = L_3 \cup L_4}$$

akzeptiert. Geben Sie die graphische Repräsentation mit markierten akzeptierenden Zuständen an. Auf eine mengenwertige Darstellung von $\boldsymbol{\delta_5}$ kann verzichtet werden. (8 Punkte)

e) Erläutern Sie den Begriff Transduktor und skizzieren Sie eine Mealy-Maschine, die das Verhalten eines Fahrkartenautomaten widerspiegelt (mindestens fünf Zustände). (7 Punkte)

f) Was versteht unter der „Semantik einer Mealy-Maschine“? (2 Punkte)

g) Gegeben sei die Sprache

$$\boldsymbol{L_6} = \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\Sigma}^* | \boldsymbol{w} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}^* \{\boldsymbol{bb}\} \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}^+\}$$

Konstruieren Sie den korrespondierenden, nicht verallgemeinerten NEA $\boldsymbol{A_6}$ (Automatengraph genügt) und demonstrieren Sie die Äquivalenz zwischen NEA und DEA, indem Sie $\boldsymbol{A_6}$ in einen äquivalenten DEA $\boldsymbol{A_6}^*$ transformieren. Nutzen Sie dafür den tabellarischen Ansatz und zeichnen Sie den Graphen von $\boldsymbol{A_6}^*$. (8 Punkte)

Aufgabe 3: Grammatiken

a) Erläutern Sie die Begriffe rechtslineare Grammatik und linkslineare Grammatik. (1 Punkte)

b) Erläutern Sie die Begriffe Produktion bzw. Regel, Ableitung, Satzform, Ableitungsstück, Terminalsymbol und Nonterminalsymbol. (3 Punkte)

c) Gegeben ist die Sprache

$$L_7 = \{w \in \Sigma^* | w = \{1, 2\}^+ (aa, bb)^i, i > 0\}.$$

Geben Sie die normierte Grammatik G_7 mit der Regelmenge P_7 an, die ausschließlich die Sprache L_7 erzeugt. Zeichnen Sie den mit P_7 korrespondierenden Automaten und leiten Sie mithilfe der Regeln aus P_7 das Wort $w = 121aabb$ mit vollständiger Angabe der Satzformen ab (6 Punkte).

d) Erläutern Sie den Begriff Greibach-Normalform mithilfe einer beispielhaften, konformen Regelmenge P für die Sprache

$$L_8 = \{w \in \Sigma^* | \{a, c\}^+ b^i d^i, i > 1\}.$$

(3 Punkte)

e) Gegeben sei die Sprache

$$L_9 = \{w \in \Sigma^* | w = \{1,2,3\}^* a^i b^i \{1,2,3\}^*, i > 1\}$$

Geben Sie die Grammatik G_9 in Chomsky-Normalform mit der Regelmenge P_9 an und konstruieren Sie den korrespondierenden Kellerautomaten K_9 mit Angabe der Zustandsübergangsfunktion δ_9. (7 Punkte)

f) Gegeben sei die Regelmenge $P = \{S_0 \to S_0BB | S_0CC | B | C, B \to b, C \to c\}$ mit dem Startsymbol S_0. Handelt es sich um eine mehrdeutige Grammatik? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe eines Syntaxbaumes für ein beliebiges Wort w mit $|w| = 3$. (3 Punkte)

g) Geben Sie den Mehrkellerautomaten $\boldsymbol{K}$ an, der die Sprache

$$\boldsymbol{L_{10}} = \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\Sigma}^* | \boldsymbol{w} = \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\}^+ \boldsymbol{a^i b^i c^i} \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\}^*, \boldsymbol{i} > \boldsymbol{1}\}$$

akzeptiert. Die Angabe der Zustandsüberführungsfunktion genügt. (5 Punkte)

Aufgabe 4: Sprachklassen

a) Zeigen Sie mithilfe einer Skizze, dass die Sprache $\boldsymbol{L_{11}} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ zur Klasse der regulären Sprache gehört. (2 Punkte)

b) Skizzieren Sie die Chomsky-Hierarchie und erläutern Sie die Unterschiede anhand der Ausdrucksmächtigkeit der klassifizierten Grammatiken (Hinweis: $\boldsymbol{P}$ enthält Regeln unterschiedlichen Typs zur Worterzeugung). Geben Sie die jeweiligen Abschlusseigenschaften an. (8 Punkte)

c) Gegeben sei eine beliebige reguläre Sprache $\boldsymbol{L_{12}}$**.** Handelt es sich bei $\boldsymbol{L_{12}}^{+}$, also der Plushülle von $\boldsymbol{L_{12}}$**,** um eine reguläre Sprache? Nutzen Sie für Ihre Ausführungen eine Skizze. (2 Punkte)

d) Erläutern Sie mithilfe einer Skizze, warum reguläre Sprachen abgeschlossen gegenüber der Spiegelung sind. (2 Punkte)

e) Erläutern Sie, warum $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{*} \neq \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{+}$ gilt. Skizzieren Sie den Automaten, der $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{+}$ akzeptiert. (2 Punkte)

f) Lässt sich das Wortproblem für Typ 1 – Sprachen lösen? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

g) Gegeben seien die Sprachen

$$\boldsymbol{L_{12} = \{w \in \Sigma^* | w = \{1, 2, 3\}^+ m^i l^j l^j a^i \{c, e\}^*, i > 1, j > 1\}}$$
$$\boldsymbol{L_{13} = \{w \in \Sigma^* | w = \{dd\} a^i b^i d^i c^i \{xy\}^*, i > 0\}}$$

Testen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, ob es sich um Typ 3, Typ 2 oder Typ1/Typ0 Sprachen handeln könnte und geben Sie für die jeweilige Zerlegung, sofern möglich, die Pumping-Lemma-Zahl an. (6 Punkte)

Aufgabe 5: Berechenbarkeit

a) Erläutern Sie den Begriff <u>Algorithmus</u>. Wann spricht man von einer berechenbaren Funktion $\boldsymbol{f}$. (2 Punkte)

b) Was versteht man unter einer universellen Turingmaschine – UTM? (3 Punkte)

c) Erläutern Sie den Begriff Gödelisierung. Welche Schlussfolgerungen lassen sich aus dem Prinzip der Gödelisierung hinsichtlich der Existenz nichtlösbarer Problemstellungen ziehen? (2 Punkte)

d) Ordnen Sie folgenden Funktionen infrage kommenden Berechenbarkeitskonzepten zu und begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

$$\boldsymbol{f_1}: \boldsymbol{\Sigma}^* \longrightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{f_2}: \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \longrightarrow \mathbb{N}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \mathbf{5}$$

$$\boldsymbol{f_3}: \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \times \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \times \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \to \mathbb{N}_{\mathbf{0}}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \mapsto \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{f_4}: \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \times \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \longrightarrow \mathbb{N}_{\mathbf{0}}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{f_5}: \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \longrightarrow \mathbb{N}_{\mathbf{0}}, (\boldsymbol{x}) \mapsto \sqrt{\boldsymbol{x}}$$

e) Erläutern Sie das Prinzip der $\boldsymbol{\mu}$-Rekursion? Nennen Sie zwei Beispiele für Funktionen, die mithilfe der $\boldsymbol{\mu}$-Rekursion gelöst werden könnten. (2 Punkte)

f) Gegeben sei die die Funktion $f\colon \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \times \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \longrightarrow \mathbb{N}_{\mathbf{0}}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}.$ Geben Sie die Turingmaschine $\boldsymbol{TM}$ mit Zustandsüberführungsfunktion an, die diese Funktion implementiert, wobei die Eingaben gemäß

$$\boldsymbol{\alpha}\colon \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \longrightarrow \{|\}^*, \boldsymbol{n} \mapsto |^{\boldsymbol{n}}$$

mit der Null als Trennsymbol für k-stellige Eingaben codiert werden. Für die Ausgabecodierung gilt dementsprechend $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{-\mathbf{1}}$. Stellen Sie die Entwicklung des Bandinhalts für die Verarbeitung der Operanden $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}, \boldsymbol{y} = \mathbf{3}$ als Sequenz dar. (4 Punkte)

g) Erläutern Sie die allgemeinen Eigenschaften der programmiersprachlichen Berechenbarkeitskonzepte GOTO, WHILE oder LOOP hinsichtlich ihrer Syntax und ihrer Mächtigkeit in Bezug auf die Berechenbarkeit von Funktionen. (3 Punkte)

h) Stellen Sie die Funktion

$$\boldsymbol{f}\colon \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \times \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \longrightarrow \mathbb{N}_{\mathbf{0}}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$$

mithilfe eines <u>geeigneten Programms</u> (GOTO, WHILE oder LOOP) dar. (6 Punkte)