Prof. Dr. Bahne Christiansen

Klausur

W151 Ingenieurmathematik 2 (Q2 / 2019)

Name des Prüflings: **Matrikelnummer:** **Zenturie:**

____________________________________ ____________________ __________

Dauer: 90 min Datum: 25. Juni 2019

Erlaubte Hilfsmittel: **Kein** Taschenrechner, 3 Blatt Formelsammlung (beidseitig, beschrieben oder bedruckt)

- Bitte ergänzen Sie auf diesem Deckblatt zunächst Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Zenturie.
- Die Klausuraufgaben umfassen inkl. den Seiten für Ihre Lösungen aber ohne Deckblatt 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie Ihr Exemplar auf Vollständigkeit!
- Zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte / 50 % hinreichend.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	Gesamt:
Punktzahl:	17	24	14	10	14	21	100
Erreicht:							

Datum: ____________________ Note: __________ Ergänzungsprüfung: _____________

Unterschrift: ________________________________ Unterschrift: ________________________________

Aufgabe 1 (17 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot \ln(x)$.

(1.1) (2 Punkte) Geben Sie den Definitionsbereich von f an.

Lösung:

$D = (0, \infty)$

(1.2) (3 Punkte) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

Lösung:

Da $x \neq 0$ muss $\ln(x) = 0$ sein.
Also $e^{\ln(x)} = e^0 = 1$ und somit $x = 1$. Die einzige Nullstelle ist daher $x = 1$.

(1.3) (4 Punkte) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f.

Lösung:

$$f'(x) = \ln(x) + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

(1.4) (4 Punkte) Berechnen Sie die Extremstellen der Funktion f. Geben Sie zu den berechneten x-Werten auch die zugehörigen y-Werte an.

Lösung:

$$f'(x) = \ln(x) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f''(\frac{1}{e}) = e > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{e} \text{ ist lokales Minimum}$$

Zugehöriger y-Wert ist $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

(1.5) (4 Punkte) Beurteilen Sie mit Hilfe der ersten Ableitung, für welche $x \in D$ die Funktion f monoton wachsend und für welche $x \in D$ monoton fallend ist?

Lösung:
Die einzige Nullstelle von $f'(x) = \ln(x) + 1$ ist $\frac{1}{e}$. Für $x < \frac{1}{e}$ ist $f'(x) < 0$ und für $x > \frac{1}{e}$ ist $f'(x) > 0$. Somit ergibt sich

- f ist monoton fallend für $x \in (0, \frac{1}{e})$.
- f ist monoton wachsend für $x \in (\frac{1}{e}, \infty)$.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(2.1) (10 Punkte) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{3x+6}{x^2-x-2} dx$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Lösung:

- $x^2 - x - 2 = 0$ für $x = -1$ und $x = 2$ (beides einfache Nullstellen)
- Ansatz: $\dfrac{3x+6}{x^2-x-2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2}$
- $\Rightarrow \quad \dfrac{3x+6}{x^2-x-2} = \dfrac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)} \Rightarrow 3x+6 = A(x-2)+B(x+1)$
- Einsetzen von $x = -1$ liefert $A = -1$
- Einsetzen von $x = 2$ liefert $B = 4$.
- Also $\dfrac{3x+6}{x^2-x-2} = -\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{4}{x-2}$ und somit

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx = \int -\frac{1}{x+1} dx + \int \frac{4}{x-2} dx = -\ln|x+1| + 4\ln|x-2| + c,\ c \in \mathbb{R}$$

(2.2) (8 Punkte) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen von

$$f(x) = 4 \cdot e^{x^2-1} \cdot x$$

zwischen $x = 0$ und $x = 1$ eingeschlossen wird.

Lösung:

f besitzt im Intervall $(0,1)$ keine Nullstelle, daher kann von 0 bis 1 integriert werden.

Substitution: $u = x^2 - 1$, $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$\int_0^1 4 \cdot e^{x^2-1} \cdot x dx = \int_{-1}^0 4 \cdot e^u \cdot x \frac{du}{2x} = [2e^u]_{-1}^0 = 2 - 2e^{-1} = 2 - \frac{2}{e}$$

(2.3) (6 Punkte) Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung des Graphens von $f(x) = e^{-x}$ um die x-Achse im Intervall $[0,\infty)$ entsteht.

Lösung:

$$\begin{aligned} V_x &= \lim_{b\to\infty} \pi \cdot \int_0^b f(x)^2 \, dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \pi \cdot \int_0^b e^{-2x} \, dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \pi \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \pi \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-2b} + \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \approx 1{,}571 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (14 Punkte)

(3.1) (9 Punkte) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$.

Berechnen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung um den Entwicklungspunkt $a = 0$.

Lösung:

Formel Taylorpolynom: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.
Mit obiger Funktion ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(\tfrac{x}{2}) \\ f'(x) &= -\tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{x}{2}) \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{4}\cos(\tfrac{x}{2}) \\ f'''(x) &= \tfrac{1}{8}\sin(\tfrac{x}{2}) \\ f^{(4)}(x) &= \tfrac{1}{16}\cos(\tfrac{x}{2}) \end{aligned}$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2!\cdot 4}\cdot x^2 + \frac{1}{4!\cdot 16}\cdot x^4 = 1 - \frac{1}{8}\cdot x^2 + \frac{1}{384}\cdot x^4$$

für die korrekte Auswertung der Formel

(3.2) (5 Punkte) Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{e^n}$ auf Konvergenz.

Lösung:

Sei $a_n = \frac{2n}{e^n}$. Dann gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{2n} = \frac{1}{e} \cdot \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{e} < 1$.

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{e^n}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(4.1) (7 Punkte) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int x^2 \cdot \sin(x)\,dx.$$

Lösung:

Zweifach partiell Integrieren liefert

$$\int x^2 \cdot \sin(x)\,dx = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

(4.2) (3 Punkte) Bestätigen Sie ihr Ergebnis durch Ableitung der in 4.1 berechneten Stammfunktion.

Lösung:
Nachrechnen mit Produktregel.

Aufgabe 5 (14 Punkte)
Gegeben ist die Differentialgleichung (DGL)

$$y' = y \cdot x + x.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL mittels Variation der Konstanten.

Lösung:
DGL lässt sich schreiben als $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ mit $f(x) = -x$ und $g(x) = x$.

- Variation der Konstanten liefert

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-F(x)} = c(x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

- Dabei ergibt sich $c(x)$ durch

$$c(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx = \int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Mittels Substitution ($u = -\frac{1}{2}x^2$) erhält man

$$c(x) = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + c, \quad c \in R$$

- Die allgemeine Lösung der DGL lautet also

$$y(x) = (-e^{-\frac{1}{2}x^2} + c) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} = -1 + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 6 (21 Punkte)
Gegeben ist die Differentialgleichung (DGL) $2y'' - 8y' + 8y = 2e^{-x}$.

(6.1) (2 Punkte) Geben Sie die Differentialgleichung in Standardform an.

Lösung:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$$

(6.2) (4 Punkte) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung.

Lösung:

- Gewöhnlich
- 2. Ordnung
- Linear
- Konst. Koeffizienten
- inhomogen

(6.3) (4 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Lösung:
Die (zweifache) Nullstelle von $\lambda^2 - 4\lambda + 4$ ist 2.
$\Rightarrow y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(6.4) (5 Punkte) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Lösung:
Ansatz: $y_p(x) = A \cdot e^{-x}$
Ableiten: $y_p'(x) = -Ae^{-x}$, $y_p''(x) = Ae^{-x}$
Einsetzen: $Ae^{-x} + 4Ae^{-x} + 4Ae^{-x} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{9}$
Also ist eine Partikulärlösung $y_p(x) = \frac{1}{9} \cdot e^{-x}$

(6.5) (1 Punkt) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Lösung:
$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{9} \cdot e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(6.6) (5 Punkte) Berechnen Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $y(0) = \frac{10}{9}$ und $y'(0) = \frac{8}{9}$.

Lösung:

$y(0) = c_1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1$

$y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} - \frac{1}{9} e^{-x}$

$y'(0) = 2c_1 + c_2 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -1$

$\Rightarrow \quad y(x) = e^{2x} - x e^{2x} + \frac{1}{9} e^{-x}$