1 Mengenlehre (15 Punkte)

1.1 Multiple Choice 5 Punkte

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (P(M) ist die Potenzmenge von M):

1. $\forall x \in \emptyset : x = 2$ wahr
2. $\forall M Menge : \emptyset \in M$ falsch
3. $\forall M Menge : \emptyset \subseteq M$ wahr
4. $\forall M Menge : \emptyset \in P(M)$ wahr
5. $\forall M Menge : \emptyset \subseteq P(M)$ wahr

1.2 Mengeninklusion 10 Punkte

Beweisen Sie folgende Aussage:

Für zwei beliebige Mengen A und B gilt: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$\Rightarrow$: Seien A, B beliebige Mengen mit $A \subseteq B$. Wir müssen zeigen, dass $A \cap B = A$ ist. Sei dazu $x \in A \cap B$ beliebig. Dann gilt nach der Definition von $\cap$: $x \in A \wedge x \in B$, also mit Sicherheit $x \in A$.
Sei umgekehrt $x \in A$ beliebig, dann gilt nach der Voraussetzung $A \subseteq B$ auch $x \in B$, und damit $x \in A \cap B$. Damit ist die Gleichheit der Mengen A und $A \cap B$ bewiesen.

$\Leftarrow$: Seien A, B beliebige Mengen mit $A \cap B = A$. Wir müssen zeigen, dass $A \subseteq B$. Sei dazu $x \in A$ beliebig. Dann ist nach der Voraussetzung $x \in A \cap B$, und damit $x \in A \wedge x \in B$. Daraus folgt insbesondere $x \in B$.

2 Logik (10 Punkte)

Die Firma Cantorbräu ist eine global vertretene Brauerei. Sei K die Menge aller Kunden, R die Menge der Vertriebsregionen und V die Menge der Vertreibsmitarbeiter. Übertragen Sie die folgenden Aussagen des Vertriebsleiters Adolf Abraham Halevi Fraenkel in prädikatenlogische Ausdrücke mit Quantoren. Folgende Prädikate sollen verwendet werden: Kunde **gehört zu** Vertriebsregion. Vertriebsmitarbeiter **betreut** Kunde.

1. Alle Kunden sind einer Vertriebsregion zugeordnet.
   $\forall k \in K\ \exists r \in R : k$ gehört zu r
2. Jeder Vertriebsmitarbeiter betreut in wenigstens einer Region alle Kunden.
   $\forall v \in V\ \exists r \in R\ \forall k \in K :\ k$ gehört zu $r \Rightarrow v$ betreut k
3. Ein Kunde wird von einem Vertriebsmitarbeiter betreut.
   $\forall k \in K\ \exists v \in V :\ v$ betreut k
4. Manche Kunden werden von mehr als einem Vertriebsmitarbeiter betreut.
   $\exists k \in K\ \exists v_1 \in V\ \exists v_2 \in V :\ v_1 \neq v_2 \quad \wedge \quad v_1$ betreut $k \quad \wedge \quad v_2$ betreut k

Negieren Sie die zweite Aussage und schreiben Sie sie so, dass keine Quantoren negiert vorkommen.

$\exists v \in V\ \forall r \in R\ \exists k \in K :\ k$ gehört zu $r \wedge \neg(v$ betreut $k)$

3 Vollständige Induktion (15 Punkte)

Nahe Verwandte der Fibonacci Zahlen f_n sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch folgende rekursive Definition festgelegt:

- $f_0 = 2 \quad f_1 = 3$
- $\forall n \in \mathbb{N} : f_{n+1} = 3 \cdot f_n - 2 \cdot f_{n-1}$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : f_n = 2^n + 1$$

Bewertungshinweis: Die Rechnungen im Induktionsschluss müssen nachvollziehbar sein.

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} :\ f_n = 2^n + 1 \ \wedge\ f_{n-1} = 2^{n-1} + 1$

1. Induktionsanfang
   LS: $f_1 = 3$ RS: $2^1 + 1 = 3$
   LS: $f_0 = 2$ RS: $2^0 + 1 = 2$
2. Induktionsschritt
   Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

a) Induktionsvoraussetzung
$f_n = 2^n + 1 \ \wedge \ f_{n-1} = 2^{n-1} + 1$

b) Induktionsbehauptung
$f_{n+1} = 2^{n+1} + 1 \ \wedge \ f_n = 2^n + 1$

c) Induktionsschluss
Da der zweite Teil der Behauptung schon in der Voraussetzung vorkommt, muss nur der erste Teil gezeigt werden. Es gilt:
$f_{n+1} \overset{rek.Def.}{=} 3 \cdot f_n - 2 \cdot f_{n-1} \overset{IV}{=} 3(\cdot 2^n + 1) - 2 \cdot (2^{n-1} + 1) = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^{n-1} + 1 = 3 \cdot 2^n - 2^n + 1 = 2 \cdot 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1$

4 Äquivalenzrelationen (10 Punkte)

Sei $\equiv_m$ die bekannte Kongruenz modulo m und $[a]_m$ die zu $a \in \mathbb{Z}$ gehörige Äquivalenzklasse. Üblicherweise definiert man die Restklassenmultiplikation durch:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \ [a]_m \odot [b]_m = [a \cdot b]_m$$

Erklären Sie warum diese Definition „problematisch“ ist und wie man die Sinnhaftigkeit beweisen kann.

Es muss die Unabhängigkeit vom Repräsentanten gezeigt werden. D. h. es muss gezeigt werden:

Sind $a, a' \in \mathbb{Z}$ zwei Repräsentanten derselben Restklasse und sind $b, b' \in \mathbb{Z}$ zwei Repräsentanten einer zweiten Restklasse, dann sind $a \cdot b$ und $a' \cdot b'$ Repräsentanten derselben Restklasse.

Dass kann man aber unter den gegebenen Voraussetzungen wie folgt sehen:

Zunächst gibt nach der Definition der Restklassen es Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$, so dass

$a - a' = k \cdot m$ und $b - b' = l \cdot m$.

Dann folgt:

$a \cdot b - a' \cdot b' = a \cdot b - a \cdot b' + a \cdot b' - a' \cdot b' = a \cdot (b - b') + (a - a') \cdot b' = a \cdot l \cdot m + k \cdot m \cdot b' = (a \cdot l + k \cdot b') \cdot m$

Damit gehören $a \cdot b$ und $a' \cdot b'$ zu derselben Restklasse.

5 Lösen von Gleichungen in Gruppen (20 Punkte)

Gegeben sei eine Gruppe $(G, \circ)$.

5.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen 4 Punkte

Formulieren die Existenz und Eindeutigkeitssätze für das Lösen von Gleichungen $a \circ x = b$ mit Hilfe von Quantoren.

Existenzsatz: $\forall a, b \in G \; \exists x \in G : \; a \circ x = b$

Eindeutigkeitssatz: $\forall a, b, x_1, x_2 \in G : \; a \circ x_1 = b \; \wedge \; a \circ x_2 = b \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$

5.2 Bijektivität des Translationsoperators 5 Punkte

Für jedes $a \in G$ definiert man die Abbildung $T_a : G \longrightarrow G; \quad T_a(x) = a \circ x$.

Beweisen Sie die Aussage: $\forall a \in G : T_a$ ist bijektiv.

Sei $a \in G$ beliebig.

Um zu zeigen, dass die Abbildung T_a bijektiv ist, muss gezeigt werden, dass die Abbildung surjektiv und injektiv ist.

Zur Surjektivität: Nach der Definition der Surjektivität muss man zeigen: $\forall b \in G \; \exists x \in G : \; T_a(x) = b$. Da $T_a(x) = a \circ x$ bedeutet das nichts anderes als der Existenzsatz für festes $a \in G$ aus 5.1.

Zur Injektivität: Nach der Definition der Injektivität muss man zeigen: $\forall x_1, x_2, b \in G \; T_a(x_1) = b = T_a(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Da $T_a(x_1) = a \circ x_1$ und $T_a(x_2) = a \circ x_2$ bedeutet das nichts anderes als der Eindeutigkeitssatz für festes $a \in G$ aus 5.1.

5.3 Restklassengleichungen 6 Punkte

Lösen Sie folgende Gleichungen:

1. $85 \cdot x \equiv_{187} 34$
2. $88 \cdot x \equiv_{187} 34$
3. $86 \cdot x \equiv_{187} 34$

1. Zur ersten Gleichung:

   Bestimmung ggt(85,187) $\begin{array}{rcrcrcr} 187 & = & 2 & \cdot & 85 & + & 17 \\ 85 & = & 5 & \cdot & 17 & + & 0 \end{array}$

   Also ist der ggt(85,187)=17 und damit die Gleichung lösbar.

   Wegen $17 = 187 - 2 \cdot 85$ ist eine -2 Lösung von $85 \cdot x \equiv_{187} 17$ und damit -4 eine Lösung von $85 \cdot x \equiv_{187} 34$. Alle Lösungen ergeben sich durch Addition von Vielfachen von $187/17 = 11$.

   Also $\mathbb{L} = \{-4, 7, 18, 29, 40, 51, 62, 73, 84, 95, 106, 117, 128, 139, 150, 161, 172\}$

2. Zur zweiten Gleichung:

   Bestimmung $ggt(88, 187)$

   $$\begin{array}{rcrcrcr} 187 & = & 2 & \cdot & 88 & + & 11 \\ 88 & = & 8 & \cdot & 11 & + & 0 \end{array}$$

   Also ist der $ggt(85, 187) = 11$ und damit die Gleichung nicht lösbar, da 34 kein Vielfaches von 11 ist.

3. Zur dritten Gleichung:

   Bestimmung $ggt(86, 187)$

   $$\begin{array}{rcrcrcr} 187 & = & 2 & \cdot & 86 & + & 15 \\ 86 & = & 5 & \cdot & 15 & + & 11 \\ 15 & = & 1 & \cdot & 11 & + & 4 \\ 11 & = & 2 & \cdot & 4 & + & 3 \\ 4 & = & 1 & \cdot & 3 & + & 1 \end{array}$$

   Also ist der $ggt(85, 187) = 1$ und damit die Gleichung eindeutig lösbar.

   Wegen $1 = 4-3 = 4-(11-2\cdot4) = 3\cdot4-11 = 3(15-1\cdot11)-11 = 3\cdot15 - 4\cdot11 = 3\cdot15 - 4\cdot(86-5\cdot15) = 23\cdot15 - 4\cdot86 = 23\cdot(187-2\cdot86) - 4\cdot86 = 23\cdot187 - 50\cdot86$ ist eine $-50 \equiv_{187} 127$ Lösung von $86 \cdot x \equiv_{187} 1$ und damit $137 \cdot 34 \equiv_{187} 170$ eine Lösung von $86 \cdot x \equiv_{187} 34$.

5.4 Existenzsatz für $p \cdot q$ 5 Punkte

Sei $m = p \cdot q$ wobei p und q Primzahlen sind. Für wie viele $a \in \{1, \ldots, m-1\}$ gilt die Aussage:

$$\forall\, b \in \{1, \ldots, m-1\} : \; \exists\, x \in \{1, \ldots, m-1\} : \; a \cdot x \equiv_m b$$

Es gibt nur dann eine Lösung von $a \cdot x \equiv_m b$, wenn b ein Vielfaches von $ggt(a, m)$ ist. Sollen alle $b \in \{1, \ldots, m-1\}$ Vielfache von $ggt(a, m)$ sein, so muss $ggt(a, m) = 1$ sein.

Da $ggt(a, p \cdot q) \in \{1, p, q\}$ ist fallen aus allen $m-1$ möglichen Werten für a, die heraus, die Vielfache von p oder Vielfache von q sind.

Das sind die Zahlen $q-1$ Zahlen $p, 2 \cdot p, 3 \cdot p \ldots (q-1) \cdot p$ und die $p-1$ Zahlen $q, 2 \cdot q, 3 \cdot q \ldots (p-1) \cdot q$. Somit ist die gesuche Zahl: $(p \cdot q - 1) - (p-1) - (q-1) = ()p-1)(q-1)$.

6 Unterräume (15 Punkte)

6.1 Unterraumbeispiele 7 Punkte

Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Mengen U_1, U_2, U_3 sind Unterräume? Geben Sie eine Begründung.

1. $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} | x + 3y - z = 0 \wedge 2x - y + 5z = 0\}$

   U_1 ist nicht leer, da $(0,0,0) \in U_1$. Ist $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, y_3) \in U_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

   $$x_1 + 3y_1 - z_1 = 0 \text{ und } 2x_1 - y_1 + 5z_1 = 0 \text{ und}$$
   $$x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \text{ und } 2x_2 - y_2 + 5z_2 = 0.$$

   Addiert man die erste und die dritte Gleichung, sowie die zweite und die vierte, so erhält man $(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)-(z_1+z_2) = 0$ und $2(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+5(z_1+z_2) = 0$. Das bedeutet aber $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in U_1$.

   Multipliziert man die ersten beiden Gleichungen mit der Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ so erhält man $\lambda x_1 + 3\lambda y_1 - \lambda z_1 = 0$ und $2\lambda x_1 - \lambda y_1 + 5\lambda z_1 = 0$. Damit ist auch $\lambda(x_1, y_1, z_1) \in U_1$.

2. $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} | x + 3y - z \geq 0\}$

   Es gilt $(1,0,0) \in U_2$ aber $(-1)(1,0,0) = (-1,0,0) \notin U_2$, d.h. U_2 ist nicht abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation.

3. $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} | x^2 = y^2\}$

   Es gilt $(1,1,0), (1,-1,0) \in U_3$ aber $(2,0,0) = (1,1,0) + (1,-1,0) \notin U_3$, d.h. U_3 ist nicht abgeschlossen bzgl. der Vektoraddition.

6.2 Duchschnitt von Unterräumen 8 Punkte

Seien U und W Unterräume des Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $U \cap W$ auch ein Unterraum ist.

Da U und W Unterräume des Vektorraums V sind ist $\vec{0} \in U$ und $\vec{0} \in W$. Also ist $\vec{0} \in U \cap W$, und damit $U \cap W$ nichtleer.

$U \cap W$ ist abgeschlossen gegen Vektoraddition, denn sind $\vec{x}, \vec{y} \in U \cap W$ beliebig, so sind $\vec{x}, \vec{y} \in U$ und $\vec{x}, \vec{y} \in W$. Da U und W als Unterräume abgeschlossen gegenüber der Vektoraddition sind, folgt $\vec{x} + \vec{y} \in U$ und $\vec{x} + \vec{y} \in W$. Da bedeutet $\vec{x} + \vec{y} \in U \cap W$.

$U \cap W$ ist abgeschlossen gegen Skalarmultiplikation, denn sind $\vec{x} \in U \cap W$ und $k \in K$beliebig, so sind $\vec{x} \in U$ und $\vec{x} \in W$. Da U und W als Unterräume abgeschlossen gegenüber der Skalarmultiplikation sind, folgt $k\ \vec{x} \in U$ und $k\ \vec{x} \in W$. Da bedeutet $k\,\vec{x} \in U \cap W$.

7 Gaußsches Eliminationsverfahren (10 Punkte)

Durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

wird ein Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten festgelegt.

Bestimmen Sie den $Kern_A$ (2 Punkte), die Dimension des Kerns, die Dimension von $Bild_A$ (1 Punkt) und stellen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren fest, ob die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} -16 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 36 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$ in $Bild_A$ liegen (3 Punkte). Geben Sie alle Urbilder (w.a.W. Lösungen des inhomogenen LGS) an (2 Punkte). Geben Sie eine Basis des Bildes an (2 Punkte).

Ich wende das Gaußsche Eliminationsverfahren gleich auf beide rechte Seiten an:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & -2 & -16 & 36 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 8 \\ 1 & -6 & 5 & 4 & -12 \end{array}\right) \text{ skaliere die erste Zeile mit } 1/2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -8 & 18 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 8 \\ 1 & -6 & 5 & 4 & -12 \end{array}\right) \text{ ziehe die erste Zeile von der zweiten und dritten ab}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -8 & 18 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -10 \\ 0 & -6 & 6 & 12 & -30 \end{array}\right) \text{ skaliere die zweite Zeile mit } -1/2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -8 & 18 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & -6 & 6 & 12 & -30 \end{array}\right) \text{ addiere das 6 fache der 2 Zeile von der dritten ab}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -8 & 18 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus ergibt sich $dim(Kern_A) = 1$ und $dim(Bild_A) = 3 - 1 = 2$. Beide Vektoren sind in $Bild_A$. Da sie linear unabhängig sind, sind diese Vektoren auch eine Basis von $Bild_A$.

Für die Lösungen des homogenen LGS erhält man

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \end{array}$$

Man kann $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig wählen und erhält:

$$Kern_A = \left\{ \left(\begin{array}{c} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{array} \right) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Für die Lösung der inhomogenen Systeme folgt:

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{r} -8 + \lambda \\ -2 + \lambda \\ \lambda \end{array} \right) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Man kann $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig wählen und erhält:

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \left(\begin{array}{r} 18 + \lambda \\ 5 + \lambda \\ \lambda \end{array} \right) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$