Mathematik Klausur I01c (+ Wiederholer)

über das 3. + 4. Semester (Lineare Algebra und WS/Statistik)

Prüfer: Dr. Jens Bohlmann (Lineare Algebra)
Dr. Klaus Röber (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik)

Name: ____________________

Datum: 18. 06. 2003
Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner, ausgeteilte Formelsammlungen und Tabellen
Punktzahl für 100%: 100
Erreichte Punktzahl:

Note:

Die Klausur ist Bestandteil der Diplomvorprüfung im Sinne der Prüfungsordnung.

- **Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Ihrem Namen und einer Seitenzahl.**
- **Bitte kennzeichnen Sie <u>deutlich</u> die Zugehörigkeit von Antwort zu Aufgabe.**
- **Bitte schreiben Sie <u>leserlich</u>.**
- **Die Aufgabenblätter sowie die ausgeteilten Formelsammlungen und Tabellen sind am Ende der Klausur abzugeben.**

---

1. Teil: Lineare Algebra:

<u>Aufgabe 1:</u> a) 8 Punkte, b) 4 Punkte

a) Geben Sie bitte die Definitionen für die folgenden Begriffe an:

1. Lineare Abbildung
2. Kern einer linearen Abbildung
3. Bild einer linearen Abbildung

b) Nennen Sie bitte den Dimensionssatz für lineare Abbildungen (Voraussetzungen und Aussage).

<u>Aufgabe 2:</u> 6 Punkte

Für welche $\lambda \in \mathbf{R}$ ist die Matrix

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 4 \\ 8 & \lambda \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar?

Aufgabe 3: 14 Punkte
Sei B eine n x n-Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonalelementen, also

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & b_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } b_i \neq b_j \text{ für } i \neq j$$

oder anders ausgedrückt: die Matrixelemente b_{jk} von B sind von der Gestalt

$$b_{jk} = b_j\,\delta_{jk} \quad \text{mit} \quad b_i \neq b_j \quad \text{für } i \neq j.$$

Sei weiterhin A eine mit B kommutierende n x n Matrix, d. h. es gelte $A * B = B * A$.
Zeigen Sie bitte, dass dann auch A eine Diagonalmatrix ist.

(Lösungshinweis: Indexschreibweise verwenden and $a_{jl} = 0$ für $j \neq l$ zeigen.)

Aufgabe 4: a) 4 Punkte, b) 14 Punkte

Seien $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

und sei T: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \quad \text{und} \quad T(\vec{e}_2) = -4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 \quad ,$$

a) Geben Sie bitte die Matrixdarstellung dieser linearen Abbildung bezüglich der kanonischen Basis

$$\mathbf{B_1} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$$

im Bild- und im Urbildraum an.

b) Ermitteln Sie bitte die Matrixdarstellung der betrachteten linearen Abbildung bezüglich der kanonischen Basis $\mathbf{B_1}$ im Bildraum und der Basis

$$\mathbf{B_2} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

im Urbildraum.

Aufgabe 5: a) 6 Punkte, b) 8 Punkte, c) 6 Punkte (Zusatzaufgabe, Bearbeitung ist freiwillig (kann aber viele Punkte geben!))

Betrachtet werde der von den Funktionen $u_1(x) = e^x$ und $u_2(x) = e^{-x}$ aufgespannte zweidimensionale Vektorraum

$$\mathbf{V} = \{\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid \varphi(x) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\}$$

a) Zeigen Sie bitte, dass die durch

$$T[\varphi](x) := \varphi'(x) + \varphi(x)$$

definierte Abbildung $T: \mathbf{V} \to ?$ eine lineare Abbildung von V in sich selbst ist.

b) Ermitteln Sie bitte Bild und Kern von T.

c) Ermitteln Sie bitte die Lösungsmenge $\mathbf{L} \subset \mathbf{V}$ der Gleichung $\varphi'(x) + \varphi(x) = 2e^x$.

2. Teil: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Aufgabe 6: a) 6 Punkte, b) 6 Punkte

a) Aus einer Gruppe von 800 Personen werden 6 willkürlich zur Befragung ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

b) Beim Skatspiel wird mit 32 Karten gespielt, unter denen vier Buben sind. Jeder der drei Spieler erhält zehn Karten, zwei Karten kommen in den "Skat". Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Skat zwei Buben liegen?

Aufgabe 7: a) 6 Punkte, b) 7 Punkte

a) Was bedeuten die Aussagen: "Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig"?
"Zwei Ereignisse A und B sind unvereinbar"?
Wie hängen die Begriffe "unabhängig" und "unvereinbar" zusammen?

b) Zeigen Sie bitte, dass für zwei unabhängige Ereignisse A und B auch A und B unabhängig sind.

Aufgabe 8: a) 5 Punkte, b) 5 Punkte

a) Wie lautet der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik?

b) Was ist seine wesentliche Konsequenz z. B. in Bezug auf die Binominalverteilung?

Aufgabe 9: a) 3 Punkte b) 12 Punkte

a) Formulieren Sie die Tschebyscheffsche Ungleichung für standardisierte Zufallsgrößen.

b) Eine Firma will beim Verkauf ihrer Geräte Wartungsverträge anbieten. Sie rechnet mit durchschnittlich 7,20 Euro Reparaturkosten pro verkauftem Gerät pro Jahr bei einer Standardabweichung von 15 Euro. Wie viele Wartungsverträge muss die Firma mindestens abschließen, damit das arithmetische Mittel an anfallenden Kosten mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit weniger als 3 Euro vom Erwartungswert 7,20 Euro abweicht?
(Lösungshinweis: Die Zufallsgrößen der Aufgabe b sind unabhängig und gleichverteilt. Was gilt dann für die Varianz ihrer Summe?)