Mathematik Nach-Klausur

über das 3. + 4. Semester (Lineare Algebra und WS/Statistik)

Prüfer: Dr. Jens Bohlmann (Lineare Algebra)
Dr. Klaus Röber (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik)

Name: ___________________ MatrikelNr: ________ Zenturie: ______

Datum: 16. 12. 2003
Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner, ausgeteilte Formelsammlungen und Tabellen
Punktzahl für 100%: 100
Erreichte Punktzahl: Lineare Algebra :
WS und Statistik :
Gesamt :

Note:

Die Klausur ist Bestandteil der Diplomvorprüfung im Sinne der Prüfungsordnung.

- **Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Ihrem Namen und einer Seitenzahl.**
- **Bitte kennzeichnen Sie deutlich die Zugehörigkeit von Antwort zu Aufgabe.**
- **Bitte schreiben Sie leserlich.**
- **Die Aufgabenblätter sowie die ausgeteilten Formelsammlungen und Tabellen sind am Ende der Klausur abzugeben.**

Aufgabe 5 ist eine Zusatzaufgabe, deren Bearbeitung freiwillig ist.

---

1. Teil: Lineare Algebra:

Aufgabe 1: 10 Punkte

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar?

Wie lauten für diese Werte von λ die Lösungen der Gleichung

$$A(\lambda)\vec{x} = \vec{0} \text{ ?}$$

Aufgabe 2: a) 4 Punkte b) 4 Punkte c) 6 Punkte

Überprüfen Sie, ob die nachstehend angegebenen Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Unterräume des $\mathbb{R}^2$ sind.

a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \cdot y = 0 \right\}$,

b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x - 2y = 5 \right\}$,

c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{vmatrix} x & 4 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\}$.

Aufgabe 3: a) 4 Punkte b) 10 Punkte

Seien $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und sei $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$T(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \quad \text{und} \quad T(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 .$$

a) Geben Sie bitte die Matrixdarstellung dieser linearen Abbildung bezüglich der kanonischen Basis $\mathbb{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ im Bild- und Urbildraum an.

b) Ermitteln Sie bitte die Matrixdarstellung der betrachteten linearen Abbildung bezüglich der kanonischen Basis $\mathbb{B}_1$ im Bildraum und der Basis

$$\mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im Urbildraum.}$$

Aufgabe 4: 12 Punkte

Sei $\sigma: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$\sigma(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie bitte Bild und Kern dieser linearen Abbildung.

Geben Sie für das Bild und den Kern bitte jeweils eine Basis an.

Aufgabe 5: a) 10 Punkte b) 4 Punkte c) 4 Punkte

Sei $V = \{ f \mid f(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_o;\ a_2, a_1, a_o, t \in \mathbb{R} \}$

der dreidimensionale Vektorraum der reellwertigen Polynome zweiten Grades.

a) Zeigen Sie bitte, daß die durch

$$[H(f)](x) := \int_0^x f(t)\,dt \ , \quad x \in \mathbb{R},$$

definierte Abbildung $H : V \to ?$ eine lineare Abbildung von V in den Vektorraum der reellwertigen Polynome dritten Grades ist.

b) Ist die Abbildung H surjektiv?

c) Ist die Abbildung H injektiv?

2. Teil: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Aufgabe 6: a) 6 Punkte, b) 6 Punkte

a) Auf wie viele Arten lassen sich sieben gleiche Kugeln auf 12 Urnen verteilen, wenn in jede Urne höchstens eine Kugel kommt?

b) Für die Kennzeichnung von Gegenständen werden "Wörter" mit je vier Buchstaben des Alphabets (26 Buchstaben) verwendet. Für wie viele Gegenstände reicht das?

Aufgabe 7: a) 6 Punkte, b) 6 Punkte

a) Was verstehen Sie unter einem Ereignisfeld?

b) Wie ist eine Wahrscheinlichkeitsbelegung eines Ereignisfeldes definiert?

Aufgabe 8: a) 6 Punkte b) 4 Punkte

a) Was verstehen Sie unter dem "schwachen Gesetz der großen Zahlen" bzw. unter dem "starken Gesetz der großen Zahlen"?

b) Was sagen diese Gesetze aus?

Aufgabe 9: a) 4 Punkte b) 12 Punkte

a) Wie lautet die Tschebyscheffsche Ungleichung für eine Zufallsgröße?

b) Zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit μ = 17,8 und σ^2 = 1,3 ist mit der Tschebyscheff'schen Ungleichung ein Intervall zu bestimmen, in dem die Zufallsvariable X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% liegt.