Aufgabe 1

a) Ermitteln Sie den Grenzwert von $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin(x^2)}$

Lösung in Kurzform:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x\cdot\cos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)}=\frac{1}{2}$$

L'Hospital musste zweimal angewendet werden, da nach der ersten Anwendung immer noch ein Ausdruck $\frac{0}{0}$ vorhanden war.

b) Ermitteln Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n=\ln(\frac{n+4}{n-1/2})$

$$a_n=\ln(b_n)\quad\text{mit}\quad b_n:=\frac{n+4}{n-1/2}\qquad \lim_{n\to\infty}b_n=1\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}(\ln(b_n))=0$$

Verfahren mal noch merken + Stetigkeit

Die Folge (c_n) hat den Grenzwert 1. Der Logarithmus von 1 ist Null.
Wichtig hierbei ist die Stetigkeit von ln(x). Sie garantiert $\ln(\lim\limits_{x\to\infty}c_n)=\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(c_n))$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz/Divergenz und bestimmen gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{4^{2k+1}}$$

Lösung in Kurzform: 10

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{4^{2k+1}}=\frac{5}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2k}}=\frac{5}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16^k}$$ (= geometrische Reihe, diese konvergiert!)

Es gilt [redacted] $(a\neq 0, a\neq 1)$ [redacted]

Also folgt ws Index 0

merken 9

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{4^{2k+1}}=\frac{5}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16^k}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{16}}-1\right)=\frac{5}{4}\left(\frac{16}{15}-1\right)=\frac{1}{12}$$

Aufgabe 3

a) Vergleichen Sie den Satz von Rolle mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. (Worin unterscheiden Sie sich? Hinweis: Sie müssen nicht die vollständigen Definitionen beider Sätze aufschreiben.)
Lösung, Stichworte: Mittelwertsatz = Erweiterung des Satzes von Rolle ...

b) Welchem Urnenmodell entspricht die hypergeometrische Verteilung? Geben Sie ein Beispiel für die Anwendung der hypergeometrischen Verteilung an.
Lösung, Stichworte: Ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung Reihenfolge.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Die Funktion $f:x\to y$ sei durch $f(x)=\ln(\frac{1+x}{1-x})$ gegeben. Analysieren Sie diese Funktion:

a) Geben sie den Definitionsbereich und den Wertebereich an.
b) Untersuchen Sie die Funktion auf relative Minima bzw. Maxima, Wendepunkte und errechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten.
c) Skizzieren Sie die Funktion im Koordinatenkreuz.

Lösung in Kurzform:

a) Def:]-1,1[Wertebereich $]-\infty,\infty[$
Gar nicht so leicht
Das kann man sehr leicht ermitteln, wenn man überlegt $\ln(\frac{1+x}{1-x})=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ und weil der Logarithmus nur für positive Werte definiert ist, folgen die Ungleichungen: 1+x>0 und 1-x>0. Daraus ergibt sich sofort der Definitionsbereich.

b) keine lokalen Extremalstellen, Wendepunkt in (0,0)

Lösung entweder über $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ oder mittels Ableitungen usw.

Weg 1

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}\cdot 1-\frac{1}{1-x}\cdot(-1)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}$$

Man sieht sofort, dass f' nie Null werden kann, d.h. es gibt keine lokalen Extrema.
Nun weitere Untersuchung auf Wendepunkte usw.

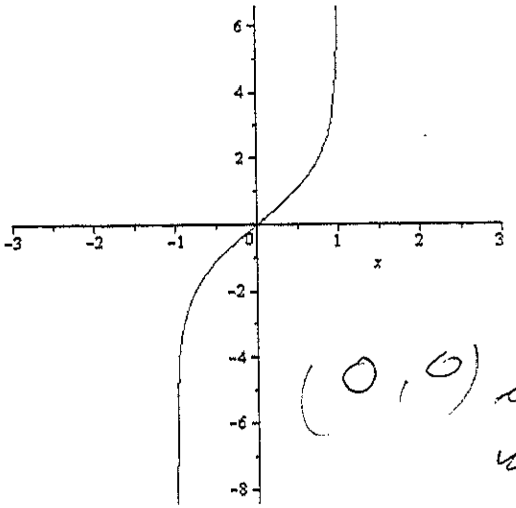
Weg 2: stur ableiten ergibt

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x^2}$$

Ansonsten wie bei Weg 1.

c)



(0,0) ist wendepunkt

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion $f(x)=(\ln(x))^2$

Lösung :

$Substitution: \ \ln x = u \Leftrightarrow x = e^u, \quad dx = e^u du$

$\int u^2 e^u du$ (Lösen mirt part. Integration)

Andere Lösungen ebenfalls möglich, z.B. direkt partielle Integration, dann aber zweimal anwenden, weil dann $\int \ln x dx = x \cdot (\ln x - 1) + const.$ auch gelöst werden muss Auch andere Substitutionen möglich.

$F(x) = x \cdot ((\ln x - 1)^2 + 1)$

b) Bestimmen Sie das folgende Integral mittels der Substitutionsmethode:

$$\int_0^1 (1+x^3)^2 \cdot 3x^2 dx$$

Lösung :

Verschiedene Substitutionsmöglichkeiten (Aber auch direktes Ausmultiplizieren und Integrieren möglich)

$x^3 = u$ und $du = 3x^2 dx$

$$\int_0^1 (1+x^3)^2 \cdot 3x^2 dx = \int_0^1 (1+u)^2 du = [\tfrac{1}{3}(1+u)^3]_0^1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Viele andere Substitutionsmöglichkeiten.

Aufgabe6

Ein Versandhändler führt 400 verschiedene Artikel. Die Häufigkeitsverteilung (in Tsd. €) des letzten Monats ist

Umsatz (Tsd. €) von ...	bis unter ...	Anzahl der Artikel	
0	10	50	
10	20	80	130
20	30	80	210
30	40	100	310
40	60	60	370
60	100	10	380
100	200	20	

a) Berechnen Sie den gesamten Artikelumsatz

9 b) Berechnen Sie arithmetisches Mittel, Modalklasse und Median. Welchen Umsatz erzielen somit 50% der Artikel?

c) Berechnen und interpretieren Sie das erste Quartil.

d) Wie viele Artikel haben einen Wert unter 50 Tsd. € ?

e) Wie viel Prozent der Artikel haben einen Wert von mindestens 75 Tsd € ?

f) Berechnen sie die Varianz.

Lösung

Die Basisrechnungen ergeben sich aus der folgenden Tabelle

Klasse	Umsatz (Tsd. €) von ...	bis unter ...	Anzahl der Artikel	kum. Häufigkeit	Klassen-mittelwerte	Klassen-umsatz	Häufigkeits-dichte	Median	(Klassenmitte - Mittelwert)^2	(KLassenmitte-Mittelwert)^2 * Häufigkeit
1	0	10	50	50	5	250	5		862,9	43144,53
2	10	20	80	130	15	1200	8		375,4	30031,25
3	20	30	80	210	25	2000	8	28,75	87,9	7031,25
4	30	40	100	310	35	3500	10		0,4	39,06
5	40	60	60	370	50	3000	3		244,1	14648,44
6	60	100	10	380	80	800	0,25		2081,6	20816,41
7	100	200	20	400	150	3000	0,2		13369,1	267382,81
			400		Umsatz	13750,00			42,6	383093,75
					gew. Mittel	34,38			Varianz	957,734375

a) Artikelumsatz: **13,75 Tsd.**

b) arithmetisches Mittel: **34,38 Tsd. €**

Modalklasse: **Klasse 4** (größte Häufigkeitsdichte)

Median: $x_{\frac{400}{2}} = x_{200}$: es gilt $\frac{200-130}{210-130} = \frac{x_{200}-20}{30-20} \Leftrightarrow x_{200} = \frac{70}{80} * 10 + 20 = 28{,}75$

Also Median = **28,75 Tsd. €**

Frage: Welchen Umsatz erzielen somit 50% der Artikel?

Antwort: 50% der Artikel erzielen einen Umsatz von höchstens 28,75 Tsd. €

(Die Frage „Welchen Umsatz erzielen 50% der Artikel?“ ist missverständlich und wurde in der Aufgabe deshalb nicht gewertet. – Gefragt war einfach nach einer verbalen Interpretation des Median.
Andere Interpretation: Wie viel Gesamtumsatz erzielen 50% der Artikel?)

c) Erstes Quartil: $x_{\frac{400}{4}} = x_{100}$: es gilt $\frac{100-50}{130-50} = \frac{x_{100}-10}{20-10} \Leftrightarrow x_{100} = \frac{50}{80} \cdot 10 + 10 = 16{,}25$

erstes Quartil = **16,25 Tsd.€**, d.h. 25% der Artikel erzielen höchstens einen Umsatz von 16,25 Tsd. €

d) Zur Berechnung des Wertes wird die betreffende Klasse ermittelt:

Klasse 1: weniger als 10 Tsd. €,
Klasse 2: weniger als 20 Tsd. €
usw.

die gesuchte Klasse ist die Klasse 5: 40 Tsd. € ≤ Artikelwert < 60 Tsd. €

Die Anzahl der relevanten Artikel in Klasse 5 muss interpoliert werden, wobei das in diesem Fall einfach ist: gerade die Hälfte minus 1 (Obergrenze gehört nicht dazu) von den 60 Artikeln, d.h. 29. Dazu müssen dann die Artikel der Klassen 1-4 addiert werden und es ergibt sich:

Anzahl Artikel mit einem Wert unter 50 Tsd. € ist 310 + 29 =**339 Artikel.**

(Falls als Ergebnis 340 ermittelt wurde, so wird das ebenfalls zugelassen - Feinheit nicht beachtet, aber deswegen kein Punktabzug.)

e) Wieviel Prozent der Artikel haben einen Wert von mindestens 75 Tsd € ?

Das ist eine analoge Rechnung zu d), wobei man umgekehrt vorgeht und dann zusätzlich ein Prozentsatz errechnet wird.

Mindestens 75 Tsd. € , d.h. in jedem Fall die Klasse 7 und Interpolation bei der Klasse 6:

75 Tsd. €, d.h. bei der Klassenbreite von 40 haben 5/8 der Artikel von Klasse 6 einen Wert von mindestens 75 Tsd. €.
Es ergibt sich: Anzahl der Artikel = 20 + 5/8*10=26,25, gerundet 26 (27) Artikel.
Daraus ergibt sich ein Prozentsatz von 26/400*100= **6,5** oder 27/400*100=**6,75.**

Beide Rundungen sind je nach Interpretation zu vertreten, daher werden beide als richtig gewertet.

9 / 6

f) Varianz:

Siehe Tabelle oben: 957,73 [illegible] durch 400