Aufgabenblatt 3 zur Diskreten Mathematik 2

(Ordnungsrelationen)

Aufgabe 3.1

Es seien M_1, M_2 nichtleere Mengen, und R_i sei eine Ordnungsrelation auf M_i für $i = 1, 2$. Wir verwenden die Notation

$$x_i \sqsubseteq_i y_i :\Leftrightarrow (x_i, y_i) \in R_i \quad \text{für alle } x_i, y_i \in M_i \text{ und } i = 1, 2.$$

Auf $M := M_1 \times M_2$ definiere die Relation

$$(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 \sqsubseteq_1 y_1 \text{ und } x_2 \sqsubseteq_2 y_2 \quad \text{für alle } (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sqsubseteq$ eine Ordnungsrelation auf M definiert.

(b) Betrachte speziell den Fall $M_1 = M_2 = \mathbb{N}_0$ und $\sqsubseteq_1 = \sqsubseteq_2 = \leqslant$. Ist dann die Ordnungsrelation $\sqsubseteq$ auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine totale Ordnung?

Aufgabe 3.2

Es sei X eine Menge und $M := P(X)$ die Potenzmenge von X.

(a) Zeigen Sie, dass die Teilmengen-Relation $\subseteq$ eine Ordnungsrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M$ gilt $\sup\{A, B\} = A \cup B$ und $\inf\{A, B\} = A \cap B$.

Aufgabe 3.3

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $T(n) := \{k \in \mathbb{N} \mid k|n\}$ die Menge aller Teiler von n, ausgestattet mit der Teiler-Ordnung. Erstellen Sie die Hasse-Diagramme von $T(5), T(6).T(24)$ und $T(648)$.

Aufgabe 3.4

Betrachte die Menge $M := \{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 24, 25\}$ ausgestattet mit der $|$ (teilt)-Relation.

(a) Erstellen sie das zugehörige Hasse-Diagramm.

(b) Bestimmen Sie alle maximalen und minimalen Elemente sowie größtes und kleines Element von M, sofern diese existieren.

(c) Bestimmen Sie alle oberen und unteren Schranken von $A := \{4, 6, 12\}$ sowie $\inf A$ und $\sup A$, sofern diese existieren.

Aufgabe 3.5

Es sei R eine Ordnungsrelation auf der Menge M.

(a) Zeigen Sie, dass die inverse Relation R^{-1} ebenfalls eine Ordnungsrelation auf M ist.

(b) Seien $A \subseteq M$ und $b \in M$. Zeigen Sie: b ist genau dann größtes Element (resp. maximales Element/obere Schranke/obere Grenze/Supremum) von A bezüglich R, wenn b kleinstes Element (resp. minimales Element/untere Schranke/untere Grenze/Infimum) von A bezüglich R^{-1} ist.

Aufgabe 3.6

Es sei $M := \mathbb{Q}$ ausgestattet mit der $\leqslant$-Ordnung und $A := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq M$. Bestimmen Sie $\inf A$ und $\sup A$.