Lösungsvorschläge zu Aufgabenblatt 9

(Gruppen)

Aufgabe 9.1

Definiere $G := \mathbb{Q}\backslash\{1\}$, und auf G definiere die Verknüpfung

$$x \circ y := x + y - xy \quad (x, y \in G)$$

Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe ist.

Lösung

Wir rechnen die 4 Gruppenaxiome gemäß Folie 157 zzgl. des Kommutativgesetzes nach.

1. (Abgeschlossenheit): Seien $x, y \in G$. Dann gilt:

$$x + y - xy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y(1-x) = 1 - x \overset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} y = 1,$$

und wegen $y \neq 1$ gilt somit $x + y - xy \neq 1$, also $x \circ y = x + y - xy \in G$.

2. (Assoziativgesetz): Seien $x, y, z \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (x + y - xy) \circ z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \\ &= x + y + z - xy - xz - yz + xyz \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= x \circ (y + z - yz) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \\ &= x + y + z - xz - xy - yz + xyz, \end{aligned}$$

also

$$(x \circ y) \circ z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz = x \circ (y \circ z).$$

3. (Existenz neutrales Element): Wir zeigen, dass $0 \in G$ neutrales Element ist. Sei $x \in G$, dann gilt

$$0 \circ x = 0 + x - 0 \cdot x = x.$$

4. (Existenz inverser Elemente): Sei $x \in G$. Setze $x' := \frac{x}{x-1}$. Dies ist zulässig, da nach Definition von G gilt $x \neq 1$. Außerdem gilt

$$x' = 1 \Leftrightarrow x = x - 1 \Leftrightarrow 0 = -1,$$

also ist $x' \neq 1$ und damit $x' \in G$. Wir zeigen, dass x' das inverse Element zu x ist:

$$x' \circ x = \frac{x}{x-1} + x - \frac{x}{x-1} \cdot x = \frac{x + x(x-1) - x^2}{x-1} = \frac{x + x^2 - x - x^2}{x-1} = 0.$$

5. (Kommutativgesetz): Seien $x, y \in G$, dann gilt

$$x \circ y = x + y - xy = y + x - yx = y \circ x.$$

Aufgabe 9.2

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit $g \circ g = e$ für alle g in G. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Lösung

Seien $a, b \in G$. Dann gilt $a \circ a = e$ und $b \circ b = e$, also auch

$$a \circ a \circ b \circ b = e \circ e = e.$$

Außerdem gilt auch $(a \circ b) \circ (a \circ b) = e$, also

$$a \circ (a \circ b) \circ b = e = a \circ (b \circ a) \circ b.$$

Anwenden der Kürzungsregel von rechts und links liefert $a \circ b = b \circ a$.

Aufgabe 9.3

(1) Es sei $(M, \circ)$ eine algebraische Struktur mit den folgenden Eigenschaften:[1]

(i) $\forall\, x, y, z \in M \,:\, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (Assoziativgesetz),

(ii) $\exists\, e \in M\, \forall\, x \in M \,:\, e \circ x = x = x \circ a$ (Existenz neutrales Element).

Ein Element $x \in M$ heisst invertierbar, wenn es ein $x' \in M$ gibt mit $x' \circ x = e = x \circ x'$. Setze

$$M^\times := \{x \in M \mid x \text{ ist invertierbar}\}.$$

Zeigen Sie: $M^\times$ ist eine Gruppe.

(2) (a) Zeigen Sie: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\{[1]_m, [m-1]_m\} \subseteq \mathbb{Z}_m^\times$.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{Z}_m^\times$ für $m = 6, 7, 8$.

Lösung

(1) Wir zeigen zunächst, dass $M^\times$ abgeschlossen gegenüber der Verknüpfung $\circ$ ist. Seien dazu $x, y \in M^\times$. Dann findet man inverse Elemente $x', y' \in M$. Setze $z := y' \circ x'$, dann gilt

$$\begin{aligned} z \circ (x \circ y) &= (y' \circ x') \circ (x \circ y) = y' \circ (x' \circ x) \circ y = y' \circ e \circ y = y' \circ y = e \\ &= x \circ x' = x \circ e \circ x' = x \circ (y \circ y') \circ x' = (x \circ y) \circ (y' \circ x') = (x \circ y) \circ z. \end{aligned}$$

Da $M^\times \subseteq M$ ist und in M nach (i) das Assoziativgesetz gilt, gilt auch in $M^\times$ das Assoziativgesetz. Außerdem ist e nach Definition invertierbar, denn es gilt $e = e \circ e$, also ist auch $e \in M^\times$ und damit besitzt $M^\times$ ein neutrales Element. Es ist also nur noch zu zeigen, dass jedes $x \in M^\times$ auch ein linksinverses Element in $M^\times$ besitzt. Sei also $x \in M^\times$. Nach Definition existiert ein inverses Element in M, also ein $x' \in M$ mit $x' \circ x = e = x \circ x'$. Das heißt aber nach Definition auch, dass x' invertierbar ist mit inversem Element x, also gilt $x' \in M$.

[1]Man nennt eine algebraische Struktur mit diesen Eigenschaften Monoid.

(2) Sei $m \in \mathbb{N}$. Wegen $[1]_m \otimes [1]_m = [1]_m$ ist $[1]_m \in \mathbb{Z}_m^\times$. Außerdem gilt

$$[m-1]_m \otimes [m-1]_m = [(m-1)^2]_m = [m^2 - 2m + 1]_m = [1 + m(m-2)]_m = [1]_m,$$

also ist auch $[m-1]_m \in \mathbb{Z}_m^\times$.

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_6^\times &= \{[1]_6, [5]_6\}, \\ \mathbb{Z}_7^\times &= \{[1]_7, [2]_7, [3]_7, [4]_7, [5]_7, [6]_7\} = \mathbb{Z}_7 \backslash \{[0]_7\}, \\ \mathbb{Z}_8^\times &= \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9.4

Gibt es eine Gruppe der Ordnung 5, die nicht kommutativ ist? Falls ja, geben Sie eine an, falls Nein, beweisen Sie, dass es keine solche Gruppe gibt.

Hinweis: *Verwenden Sie Verknüpfungstafeln.*

Lösung

Eine Gruppe der Ordnung 5, die nicht kommutativ ist, existiert nicht.

Beweis:

Annahme: Es gibt eine Gruppe G der Ordnung 5, die nicht kommutativ ist.
Nach Voraussetzung existiert ein neutrales Element $e \in G$.

Wären alle Elemente selbstinvers, d.h. $g \circ g = e$ für alle $g \in G$, dann wäre G nach Aufgabe 9.2 kommutativ. Was ein Widerspruch zur Annahme wäre.

Also muss es ein Element $x \in G \backslash \{e\}$ geben, welches nicht selbstinvers ist. Dies wiederum liefert ein drittes Element $x^{-1} \in G \backslash \{e, x\}$. Da $|G| = 5$ ist, muss es noch zwei weitere Elemente in G geben. Sei $y \in G \backslash \{e, x, x^{-1}\}$ ein weiteres Element. Wir müssen nun zwei Fälle betrachten.

1. Fall: y ist nicht selbstinvers. Dann ist $y^{-1} \in G \backslash \{e, x, x^{-1}, y\}$ das fünfte und letzt gesuchte Element.
Im nächsten Schritt schauen wir uns die Verknüpfungstafel dieser Gruppe an. Da G Gruppe ist, gelten nach Folie 163 der Vorlesung die Existenz- und Eindeutigkeitssätze. Dies bedeutet wiederum mit Folie 142 aus der Vorlesung, dass in jeder Zeile und Spalte jedes Element aus G genau einmal vorkommen muss.

Wir tragen zunächst die offensichtlichen Zellen in die Tafel ein. Dies sind die erste Zeile und die erste Spalte sowie das Element e. Dann können wir in die Zelle (1) noch eines der Elemente y, y^{-1} und x^{-1} eintragen. Wir entscheiden uns als erstes für y. Dies führt zu der folgenden eindeutigen Tafel. ((i) steht für den i-ten Schritt.)

$\circ$	e	x	x^{-1}	y	y^{-1}
e	e	x	x^{-1}	y	y^{-1}
x	x	(1) y	e	(2) y^{-1}	(3) x^{-1}
x^{-1}	x^{-1}	e	(6) y^{-1}	(4) x	(7) y
y	y	(11) y^{-1}	(12) x	(5) x^{-1}	e
y^{-1}	y^{-1}	(10) x^{-1}	(9) y	e	(8) x

Diese Verknüpfungstafel ist spiegelsymmetrisch bzgl. der Hauptdiagonalen, d.h. die Gruppe ist kommutativ. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Als nächstes setzen wir y^{-1} in die Zelle (1) ein. Dies führt zu der folgenden eindeutigen Tafel.

$\circ$	e	x	x^{-1}	y	y^{-1}
e	e	x	x^{-1}	y	y^{-1}
x	x	(1) y^{-1}	e	(2) x^{-1}	(3) y
x^{-1}	x^{-1}	e	(6) y	(7) y^{-1}	(4) x
y	y	(10) x^{-1}	(9) y^{-1}	(8) x	e
y^{-1}	y^{-1}	(11) y	(12) x	e	(5) x^{-1}

Auch hier ist die Verknüpfungstafel spiegelsymmetrisch bzgl. der Hauptdiagonalen, d.h. die Gruppe ist kommutativ. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Als nächstes setzen wir x^{-1} in die Zelle (1) ein. Dies führt zu dem folgendem Widerspruch.

$\circ$	e	x	x^{-1}	y	y^{-1}
e	e	x	x^{-1}	y	y^{-1}
x	x	(1) x^{-1}	e	(2) y^{-1}	(3) y
x^{-1}	x^{-1}	e		(6)	(4) x
y	y				e
y^{-1}	y^{-1}			e	(5) x^{-1}

In die Zelle (6) müsste laut Zeilenbelegung y oder y^{-1} stehen. Dies geht laut Spaltenbelegung aber nicht.

2. Fall: y ist selbstinvers. Dann gibt es ein $z \in G \backslash \{e, x, x^{-1}, y\}$ das selbstinvers sein muss. Damit haben wir auch hier alle fünf Elemente zusammen.
Im nächsten Schritt schauen wir uns die Verknüpfungstafel dieser Gruppe an. Da G Gruppe ist, gelten nach Folie 163 der Vorlesung die Existenz- und Eindeutigkeitssätze. Dies bedeutet wiederum mit Folie 142 aus der Vorlesung, dass in jeder Zeile und Spalte jedes Element aus G genau einmal vorkommen muss.

Wir tragen zunächst die offensichtlichen Zellen in die Tafel ein. Dies sind die erste Zeile und die erste Spalte sowie das Element e. Dann können wir in die Zelle (1) noch eines der Elemente y, z und x^{-1} eintragen. Wir entscheiden uns als erstes für y. Dies führt zu dem folgendem Widerspruch.

$\circ$	e	x	x^{-1}	y	z
e	e	x	x^{-1}	y	z
x	x	(1) y	e	(2) z	(3) x^{-1}
x^{-1}	x^{-1}	e	(4) z	(6) x^{-1}	(5) y
y	y	(8) z	(9)	e	(7) x
z	z				e

In die Zelle (9) müsste laut Zeilenbelegung x^{-1} stehen. Dies geht laut Spaltenbelegung aber nicht.

Als nächstes setzen wir z in die Zelle (1) ein. Dies führt zu dem folgendem Widerspruch.

$\circ$	e	x	x^{-1}	y	z
e	e	x	x^{-1}	y	z
x	x	(1) z	e	(2) x^{-1}	(3) y
x^{-1}	x^{-1}	e	(4) y	(6) z	(5) x
y	y	(9)	(8) z	e	(7) x^{-1}
z	z				e

In die Zelle (9) müsste laut Zeilenbelegung x stehen. Dies geht laut Spaltenbelegung aber nicht.

Als nächstes setzen wir x^{-1} in die Zelle (1) ein. Dies führt zu dem folgendem Widerspruch.

$\circ$	e	x	x^{-1}	y	z
e	e	x	x^{-1}	y	z
x	x	(1) x^{-1}	e	(2) z	(3) y
x^{-1}	x^{-1}	e	(4) z	(5)	(6)
y	y			e	
z	z				e

In die Zelle (5) oder (6) müsste laut Zeilenbelegung y stehen. Dies geht laut Spaltenbelegung aber nicht.