Probeklausur Diskrete Mathematik 1

Achtung: Dies ist nur eine inoffizielle Probeklausur aus dem Mathe-Tutorium. Aus dieser Probeklausur kann keinerlei Rückschluss auf den Schwierigkeitsgrad, den Umfang oder auf die Inhalte der echten Klausur gezogen werden!

- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Falls Sie einen Fehler in der Aufgabenstellung vermuten, treffen Sie geeignete Annahmen.
- Insgesamt gibt es 8 Aufgaben.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Insgesamt gibt es 100 Punkte.
- Zum Bestehen der Klausur werden 50 Punkte benötigt.
- Für diese Probeklausur gilt folgende Noten-Skala:

	Punkte	**Note**
bis	49	5,0 (nicht bestanden)
ab	50	4,0
ab	55	3,7
ab	60	3,3
ab	65	3,0
ab	70	2,7
ab	75	2,3
ab	80	2,0
ab	85	1,7
ab	90	1,3
ab	95	1,0

Aufgabe 1) (10 Punkte)

a) Geben Sie für folgende Wahrheitstabelle die minimale DNF an. (6 Teilpunkte)

b) Wandeln Sie durch die Rechenregeln der booleschen Algebra die minimale DNF in eine KNF um. (3 Teilpunkt)

c) Würden Sie die KNF oder die DNF bevorzugen und warum? (1 Teilpunkt)

Hinweis: * = „Don’t care“.

X_0	X_1	X_2	X_3	y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	*
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	*
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Aufgabe 2) (9 Punkte)

Geben sei eine boolesche Funktion $\boldsymbol{f(a,b)}$, die durch folgende Wahrheitstabelle definiert ist:

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{f(a,b)}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

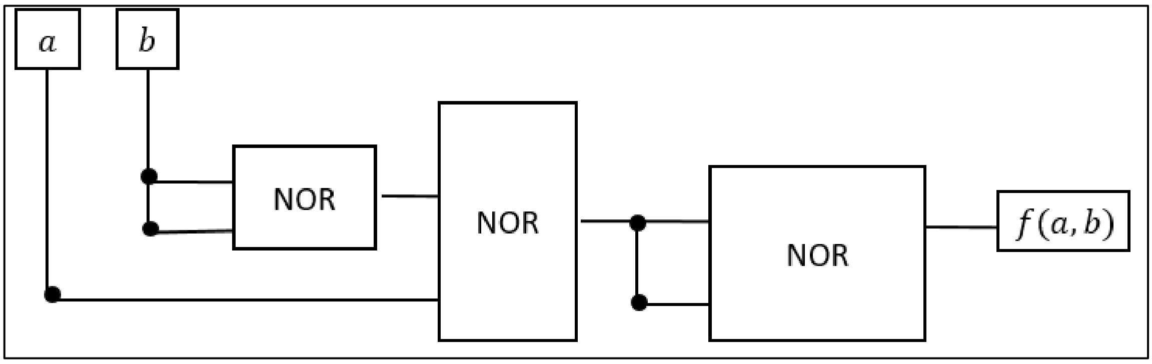
a) Realisieren Sie die Wahrheitstabelle mit 1:2-Demultiplexern und genau einem OR-Gatter. Verwenden Sie dabei so wenig Gatter wie möglich. (3 Teilpunkte)

b) Realisieren Sie die Wahrheitstabelle mit NAND-Gattern. (Sie dürfen keine anderen Gatter verwenden.) (3 Teilpunkte)

c) Kreuzen Sie die boolesche Funktion an, die untenstehender Schaltung entspricht. Es entspricht genaue eine Funktion der Schaltung. (3 Teilpunkte)

$f(a,b) =$

- ○ a
- ○ b
- ○ $\bar{a}b$
- ○ $a\bar{b}$
- ○ ab
- ○ $a+b$
- ○ $a \Rightarrow b$
- ○ $a \Leftrightarrow b$
- ○ $b \Rightarrow a$
- ○ $\bar{a} + \bar{b}$



Aufgabe 3) (7 Punkte)

Sie dürfen in dieser Aufgabe keine Wahrheitstabelle benutzen. Stellen Sie eine aussagenlogische Formel auf und lösen Sie diese mit den Rechenregeln der booleschen Algebra.

Herr Meyer, Frau Schmidt, Herr Dach und Frau Lind treffen sich zu einer Besprechung. Bestimmen Sie, wer alles pünktlich zur Besprechung erscheint.

Verwenden Sie die logischen Variablen M, S, D, L.
(M := „Herr Meyer kommt pünktlich“, die anderen Variablen entsprechend)

- Wenn Herr Meyer pünktlich zur Besprechung kommt, ist auch Frau Schmidt pünktlich.
- Wenn Herr Dach nicht pünktlich ist, dann sind auch Herr Meyer und Frau Lind nicht pünktlich.
- Wenn Frau Schmidt zu spät kommt, dann ist auch Herr Meyer zu spät.
- Wenn Herr Meyer oder Frau Lindt zu spät kommen, ist Frau Schmidt pünktlich.
- Herr Dach kommt nie pünktlich zur Besprechung.

Aufgabe 4) (8 Punkte)

a) Was versteht man unter einer Tautologie, was versteht man unter einer Antinomie? Geben Sie jeweils eine beispielhafte Formel an. (1 Teilpunkt)

b) Beweisen Sie Sie mit dem Resolutionskalkül folgende, semantische Äquivalenz. (7 Teilpunkte)

$$(\bar{x} + \bar{y} \Rightarrow \bar{x}\bar{z}) + (\bar{x} + y \Rightarrow \bar{x}z) \equiv 1$$

Aufgabe 5) (13 Punkte)

Geben Sie in der folgenden Tabelle an, welche Aussagen wahr sind und welche falsch sind.

- Für jedes richtig gesetzte Kreuz erhalten Sie 0.5 Punkte.
- Für jedes falsch gesetzte Kreuz werden Ihnen 0.5 Punkte abgezogen.
- Für ausgelassene Kreuze werden weder Punkte abgezogen noch vergeben.
- Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet.
- In allen folgenden Aussagen sind A, B, C jeweils beliebige, endliche Mengen.

	Aussage	**Wahr**	**Falsch**
1.	$\forall x \in A: x \in P(A)$ (Mit $P(A)$ ist die Potenzmenge von A gemeint)		
2.	Wenn $\|A \setminus B\| = \|A\|$, dann sind A, B disjunkt.		
3.	$(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \Rightarrow (A \cap B = C)$		
4.	$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x: (x \in A) \Rightarrow (x \notin B)$		
5.	$\exists x \in \{\ \}: x = 3$		
6.	$P(\{\}) = \{\}$		
7.	$\{x \in \mathbb{N} \mid (x-1=0) \vee (x-2=1)\} = (\{1,2,3,5\} \setminus \{5,2\})$		
8.	$\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\|$		
9.	$(A = B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \{\})$		
10.	$4 \in \{x \in \mathbb{N} \| (x = 3) \vee (x > 2)\}$		
11.	$\{2,1\} \subseteq \{\{1\},\{2\}\}$		
12.	$\{\ \} \subseteq \{\ \}$		
13.	$\{4,2\} \in \{\{x,y\} \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (y \in \mathbb{N}) \wedge (2 * x = y)\}$		
14.	$\{3,4,1\} \cap \{1,2,3,4\} \cap \{2,3,1\} = \{\ \} \cup \{1,3\} \cup \{1\}$		
15.	$(A = B) \Rightarrow (A \setminus B = \{\})$		
16.	$\forall x \in \{\ \}: x = 3$		
17.	$1 \in \{\{1\}, 2, 3, 4\} \cap \{1, \{1\}, \{3\}\}$		
18.	$\{x \in \mathbb{N} \| x \leq 5\} \subseteq \{x \in \mathbb{N} \| x * 2 < 10\}$		
19.	Sei A, B disjunkt, dann gilt: $\forall x \in (A \cap B): (x \notin A) \wedge (x \notin B)$		
20.	$\exists x \in \mathbb{N}: \exists y \in \mathbb{N}: x + 3 = y \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}: \exists x \in \mathbb{N}: x + 3 = y$		
21.	$(A \neq B) \Leftrightarrow ((\exists a \in A: a \notin B) \wedge (\exists b \in B: b \notin A))$		
22.	$\{x \| (x \in \mathbb{N}) \wedge (x > 0)\} = \{x \in \mathbb{N} \| x > -1\}$ (Hinweis: $0 \notin \mathbb{N}$)		
23.	$\|P(A)\| = \|A\|^2$		
24.	$\forall x: (x \in \mathbb{N}) \wedge (x > 0)$ (Hinweis: $0 \notin \mathbb{N}$)		
25.	$\forall x \in \mathbb{N}: \exists y \in \mathbb{N}: x > y \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}: \forall y \in \mathbb{N}: x > y$		
26.	$\{\ \} \in A$		

Aufgabe 6) (20 Punkte)

Geben Sie die Definitionen in <u>Quantoren-Schreibweise</u> an für:

a) Mengen-Gleichheit (0.5 Teilpunkte)
b) Echte Teilmenge (0.5 Teilpunkte)

Skizzieren Sie folgende Situationen jeweils mit einem Venn Diagramm:

c) $A \quad \triangle \quad B$ (Symmetrische Differenz) (0.5 Teilpunkte)
d) Schnittmenge (0.5 Teilpunkte)

Seien A, B beliebige Mengen. Geben Sie die formale Definition an für:

e) $A \ \cup B$ (0.5 Teilpunkte)
f) $A \ \setminus B$ (0.5 Teilpunkte)

In den folgenden Aufgaben sind A, B, C jeweils beliebige Mengen. <u>Genau eine</u> der untenstehenden Aussagen ist wahr. <u>Genau zwei</u> sind falsch.

- $(A \setminus B) \cap C \subseteq (A \setminus C) \cap B$
- $A \ \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \ \setminus C$
- $(A \triangle B) \cup (A \setminus B) \subseteq A \cup B$

g) Geben Sie an, welche Aussagen <u>falsch</u> sind, indem Sie die falschen Aussagen mit <u>konkreten Gegenbeispielen</u> widerlegen. Sie dürfen bei den Gegenbeispielen jedoch <u>nicht die leere Menge</u> benutzen. (6 Teilpunkte)

h) Beweisen Sie die <u>wahre</u> Aussage mit einem <u>formalen Beweis</u>. (9 Teilpunkte).

i) Beweisen Sie die wahre Aussage mit einem Venn Diagramm (2 Teilpunkt).

Aufgabe 7) (13 Punkte)

Beweisen Sie folgende Summenformel mit <u>vollständiger Induktion</u>. Formulieren Sie dazu zunächst eine entsprechende, prädikatenlogische Aussage.

$$\sum_{i=0}^{n} 5^i = \frac{1 - 5^{n+1}}{-4}$$

Aufgabe 8) (20 Punkte)

Sei $\boldsymbol{H}$ die Menge aller Haustiere, $\boldsymbol{M}$ die Menge aller Menschen und $\boldsymbol{L}$ die Menge aller Leckerlies.
Folgende Prädikaten sollen verwendet werden:

- Mensch **besitzt** Haustier
- Haustier **mag** Leckerlie

In Ihren Lösungen zu folgenden Aufgaben dürfen keine Quantoren negiert vorkommen.
In Ihrem Rechenweg dürfen Sie aber negierte Quantoren benutzen. Sie dürfen Prädikate sowohl in Ihrem Rechenweg als auch in Ihren Lösungen negiert benutzen.

a) Übertragen Sie folgende Aussagen in prädikatenlogische Aussagen mit eingeschränkten Quantoren. (8 Teilpunkte)
   - Jeder Mensch besitzt mehr als ein Haustier.
   - Einige Menschen besitzen nur Haustiere, die Leckerlies mögen.
   - Manche Haustiere mögen gar keine Leckerlies.
   - Alle Menschen besitzen genau ein Haustier.

b) Negieren Sie die beiden Aussagen
   - Jeder Mensch besitzt mehr als ein Haustier
   - Einige Menschen besitzen nur Haustiere, die Leckerlies mögen.

   Verwenden Sie wieder eingeschränkte Quantoren. Formulieren Sie die negierten Aussagen in einfachen, deutschen Sätzen. (6 Teilpunkte)

c) Schreiben Sie Ihre prädikatenlogische Aussage für „Manche Haustiere mögen gar keine Leckerlies“, so um, dass sie nur noch uneingeschränkte Quantoren enthält.
   (2 Teilpunkte)

d) Genau eine der untenstehenden, prädikatenlogischen Aussagen ist falsch. Geben Sie die falsche Aussage an und begründen Sie, warum die Aussage falsch ist. (4 Teilpunkte)

   - ○ $\forall a \in \mathbb{N}: \exists b \in \mathbb{N}: a = b$
   - ○ $\forall a \in \mathbb{N}: \exists b \in \mathbb{N}: a \neq b$
   - ○ $\forall a \in \mathbb{N}: \exists b \in \mathbb{N}: a < b$
   - ○ $\forall a \in \mathbb{N}: \exists b \in \mathbb{N}: a > b$
   - ○ $\forall a \in \mathbb{N}: \exists b \in \mathbb{N}: a \leq b$
   - ○ $\forall a \in \mathbb{N}: \exists b \in \mathbb{N}: a \geq b$