Prof. Dr. Zimmermann

NORDAKADEMIE
HOCHSCHULE DER WIRTSCHAFT

Klausur

Mathematik I11

3Q 2009

Name des Prüflings: **Matrikelnummer:** **Zenturie:**

Dauer: 120 Min. Seiten ohne Deckblatt 11 Datum: 9.10.2009

Hilfsmittel: Nordakademie Taschenrechner.

Bemerkungen: Diese Klausur enthält 8 Aufgaben. Es können 100 Punkte erreicht werden.

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf die jeweiligen Aufgabenblätter. Falls Sie mit dem Platz nicht auskommen, verwenden sie auch die Rückseite.

Trennen Sie nicht die Heftung. Falls Sie zusätzliche Lösungsblätter verwenden, kennzeichnen Sie deutlich die Zugehörigkeit von Antwort zu Aufgabe, versehen Sie sie auch mit Ihrer Matrikelnummer.

Schreiben Sie leserlich!

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe:
Punktzahl:	10	12	15	10	9	13	23	8	100
Davon erreicht:									

Datum: ____________ Note: ________ Ergänzungsprüfung: ________

Unterschrift: ____________

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bitte kreuzen Sie an? Bewertung: Mindestens 6 richtige Antworten, dann für jede weitere richtige Antwort 2 Punkte. Tipp: P(M) ist die Potenzmenge der Menge M.

Frage	Antwortmöglichkeiten
$\{1\} \in \{1, \{1, 2\}\}$	Wahr , Falsch
$\{1\} \subseteq \{1, \{1, 2\}\}$	Wahr , Falsch
$1 \in \{1, \{1, 2\}\}$	Wahr , Falsch
$\emptyset \in \{1, \{1, 2\}\}$	Wahr , Falsch
$\emptyset \not\subseteq \{1, \{1, 2\}\}$	Wahr , Falsch
$\emptyset \subsetneq \{1, \{1, 2\}\}$	Wahr , Falsch
$\emptyset \in \emptyset \times \{0, 1, 2\}$	Wahr , Falsch
$\emptyset \in P(\{\emptyset, \{1, 2\}\})$	Wahr , Falsch
$\{2\} \in \{\{x, y\} \mid x \in \{1, 2\} \wedge y \in \{2, 3\}\}$	Wahr , Falsch
Wenn S und T beliebige disjunkte Mengen sind, dann gilt: $\lvert S \cup T\rvert = \lvert S\rvert + \lvert T\rvert$	Wahr , Falsch
$M \in P(M)$	Gilt für alle Mengen M Gilt für manche Mengen M Gilt für keine Menge M
$M \subseteq P(M)$	Gilt für alle Mengen M Gilt für manche Mengen M Gilt für keine Menge M

Lösung:

1. $\{1\} \in \{1, \{1, 2\}\}$ F
2. $\{1\} \subseteq \{1, \{1, 2\}\}$ W
3. $1 \in \{1, \{1, 2\}\}$ W
4. $\emptyset \in \{1, \{1, 2\}\}$ F
5. $\emptyset \not\subseteq \{1, \{1, 2\}\}$ F
6. $\emptyset \subsetneq \{1, \{1, 2\}\}$ W

7. $\emptyset \in \emptyset \times \{0,1,2\}$ F
8. $\emptyset \in P(\{\emptyset, \{1,2\}\})$ W
9. $\{2\} \in \{\{x,y\} | x \in \{1,2\} \wedge y \in \{2,3\}\}$ W
10. Wenn S und T beliebige disjunkte Mengen sind, dann gilt: $|S \cup T| = |S| + |T|$ W
11. Für alle Mengen $M : M \in P(M)$
12. Für manche Mengen $M : M \subseteq P(M)$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(2.1) (2 Punkte) Geben Sie die formalen Definitionen von $\subseteq$ und $\cup$ wieder.

Lösung:
$S \subseteq T \Leftrightarrow \forall x \in S : x \in T$
$S \cup T = \{x | x \in S \vee x \in T\}$

(2.2) (10 Punkte) Beweisen Sie: Für beliebige Mengen S, T gilt: $S \cup T \subseteq S \Leftrightarrow T \subseteq S$.

Lösung:

- Seien zunächst S, T zwei beliebige Mengen mit $S \cup T \subseteq S$.

  Wir sollen zeigen $T \subseteq S$:

  Sei dazu $x \in T$ beliebig aber fest. Nach der Definition von $\cup$ gilt $x \in S \cup T$. Nach der Voraussetzung $S \cup T \subseteq S$ ist deshalb auch $x \in S$.

- Seien nun S, T zwei beliebige Mengen mit $T \subseteq S$.

  Wir sollen zeigen $S \cup T \subseteq S$:

  Sei dazu $x \in S \cup T$ beliebig aber fest. Nach der Definition von $\cup$ gilt $x \in S$ oder $x \in T$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung.

  1. Fall $x \in S$
     Dann sind wir sofort fertig.
  2. Fall $x \in T$
     Nach der Voraussetzung $T \subseteq S$ ist deshalb auch $x \in S$.

  In jedem Fall folgt $x \in S$, was zu beweisen war.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

(3.1) (15 Punkte) Sei f_n, $n \in \mathbb{N}_0$ eine Folge von Zahlen, die den Bedingungen genügt:

1. $f_0 = 1$ und $f_1 = 3$
2. $\forall n \in \mathbb{N}_2 : f_n = 2f_{n-1} + 3f_{n-2}$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $f_n = 3^n$

Hinweise: $\mathbb{N}_2 = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$. „Präzisieren“ Sie zunächst die Aufgabenstellung.

Lösung:

Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; f_n = 3^n \wedge f_{n-1} = 3^{n-1}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang n=1

   Linke Seite: $f_1 = 3$ und $f_0 = 1$

   Rechte Seite: $3^1 = 3$ und $3^0 = 1$.

2. Induktionsschluss

   Sein $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest.

   (a) Induktionsvoraussetzung
   $f_n = 3^n \wedge f_{n-1} = 3^{n-1}$

   (b) Induktionsbehauptung
   $f_{n+1} = 3^{n+1} \wedge f_n = 3^n$

   (c) Induktionsschritt Der zweite Teil der Induktionsbehauptung ist gleich dem ersten Teil der Induktionsvoraussetzung. Deshalb braucht dafür nichts mehr beweisen werden.
   Zum ersten Teil $f_{n+1} = 2f_n + 3f_{n-1} = 2 * 3^n + 3 * 3^{n-1} = 2 * 3^n + 3^n = 3 * 3^n = 3^{n+1}$

...

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(4.1) (8 Punkte) Benutzen Sie als Betrachtungsbereiche die Menge S der Studenten der Nordakademie und die Menge P der Prüfungen. Wir haben ein zweistelliges Prädikat, das Bestehen einer Prüfung: „$\cdot$ besteht $\cdot$“. Formulieren Sie folgende Aussagen und deren Negationen mit Quantoren. Achten Sie darauf, dass keine Quantor negiert vorkommt.

1. Alle Studenten bestehen eine Prüfung.
2. Es gibt eine Prüfung, die alle Studenten bestehen.
3. Es gibt einen Studenten, der alle Prüfungen besteht.
4. Wenigstens ein Student besteht wenigstens eine Prüfung nicht.

Lösung:

1. $\forall s \in S\ \exists p \in P : s\ besteht\ p.$
2. $\exists p \in P\ \forall s \in S : s\ besteht\ p.$
3. $\exists s \in S\ \forall p \in P : s\ besteht\ p.$
4. $\exists p \in P\ \exists s \in S : \neg(s\ besteht\ p).$ oder $\exists s \in S\ \exists p \in P : \neg(s\ besteht\ p).$

1. $\exists s \in S\ \forall p \in P : \neg s\ besteht\ p.$
2. $\forall p \in P\ \exists s \in S : \neg s\ besteht\ p.$
3. $\forall s \in S\ \exists p \in P : \neg s\ besteht\ p.$
4. $\forall p \in P\ \forall s \in S : (s\ besteht\ p).$ oder $\forall s \in S\ \forall p \in P : (s\ besteht\ p).$

(4.2) (2 Punkte) In der vorherigen Teilaufgabe gibt es eine logische Beziehung zwischen Aussage 1 und Aussage 2. Welche der Implikationen (1) $\Rightarrow$ (2) bzw. (2) $\Rightarrow$ (1) ist immer richtig, egal Studenten welche Prüfungen bestehen.

Lösung:

(2) $\Rightarrow$ (1) ist immer richtig

Aufgabe 5 (9 Punkte)

(5.1) (9 Punkte) Sei $m \in \mathbb{N}$ ein fester Modulus. Welche der folgenden Definitionen ist sinnvoll? Begründen Sie mit einem Beweis/Beispiel.

1. $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [a]_m \odot [b]_m = [a \cdot b]_m$
2. $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [a]_m < [b]_m = a < b$

Lösung:

Die erste Definition ist sinnvoll, weil sie vom Repräsentanten unabhängig ist. Um die Unabhängigkeit von den Repräsentanten zu beweisen, seien zwei ganze Zahlen $a, a' \in \mathbb{Z}$ gegeben, die dieselbe Restklasse repräsentieren, also $[a]_m = [a']_m$. Ferner seien die Zahlen $b, b' \in \mathbb{Z}$ so, dass $[b]_m = [b']_m$. Wir müssen beweisen, dass $[a * b]_m = [a' * b']_m$ ist. Nach der Voraussetzung gibt es ganze Zahlen $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, so dass $a - a' = q_1 * m$ und $b - b' = q_2 * m$. Dann gilt:

$a*b-(a'*b') = a*b-a'*b+a'*b-a'*b' = (a-a')*b+a'*(b-b') = q_1*m*b+a'*q_2*m = (q_1 * b + a' * q_2) * m$

Die zweite Definition ist nicht sinnvoll, da sie nicht unabhängig vom Repräsentanten ist:

Beispiel: Es ist $[2]_3 = [5]_3$ und $[2]_3 < [3]_3$ weil $2 < 3$ aber nicht $[5]_3 < [3]_3$ da nicht $5 < 3$.

...

Aufgabe 6 (13 Punkte)
Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen und $F : M_1 \to M_2$, $G : M_2 \to M_3$ beliebige Abbildungen.

(6.1) (3 Punkte) Geben Sie die Eigenschaften einer Funktion F mit Quantoren an. Wann ist die Funktion injektiv?

Lösung:

- F ist linkstotal: $\forall x \in M_1 \exists y \in M_2 : (x, y) \in F$
- F ist rechtseindeutig: $\forall x \in M_1 \forall y_1, y_2 \in M_2 : (x, y_1) \in F \wedge (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2$
- F ist injektiv: $\forall y \in M_2 \forall x_1, x_2 \in M_1 : (x_1, y) \in F \wedge (x_2, y) \in F \Rightarrow x_1 = x_2$

(6.2) (10 Punkte) Beweisen Sie die Aussage: Wenn $F \circ G$ injektiv ist, dann ist F injektiv.

Lösung:
Seien F, G wie in der Aufgabe beschrieben, insbesondere $F \circ G$ injektiv. Wir müssen zeigen: $\forall x_1, x_2 \in M_1, y \in M_2 : (x_1, y) \in F \wedge (x_2, y) \in F \Rightarrow x_1 = x_2$.

Sei dazu $x_1, x_2 \in M_1$ und $y \in M_2$ beliebig mit $(x_1, y) \in F \wedge (x_2, y) \in F$. Da G linkstotal ist, gibt es es ein $z \in M_3$, so dass $(y, z) \in G$. Nach der Definition der Verkettung von Relationen gilt $(x_1, z) \in F \circ G$ und $(x_2, z) \in F \circ G$. Aus der Injektivität von $F \circ G$ folgt nun $x_1 = x_2$.

Aufgabe 7 (23 Punkte)

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Wir definieren in G die Relation $\equiv$ durch

Für $a, b \in G$ beliebig gilt $a \equiv b$ genau dann, wenn $\exists g \in G : a = g^{-1} \circ b \circ g$.

(7.1) (6 Punkte) Geben Sie die Definition einer Gruppe wieder.

Lösung:

Eine algebraische Struktur $(G, \circ)$ heißt Gruppe , wenn gilt:

1. $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (Assoziativgesetz)
2. Es gibt ein $e \in G$ (neutrales Element von G) mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $e \circ a = a$ für alle $a \in G$, (linksneutrales Element)
   (b) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$ mit $a' \circ a = e$.

(7.2) (8 Punkte) Gegeben sei die Gruppe D_3 mit der folgenden Verknüpfungstafel.

$\circ$	d_0	d_{120}	d_{240}	s_0	s_1	s_2
d_0	d_0	d_{120}	d_{240}	s_0	s_1	s_2
d_{120}	d_{120}	d_{240}	d_0	s_1	s_2	s_0
d_{240}	d_{240}	d_0	d_{120}	s_2	s_0	s_1
s_0	s_0	s_2	s_1	d_0	d_{240}	d_{120}
s_1	s_1	s_0	s_2	d_{120}	d_0	d_{240}
s_2	s_2	s_1	s_0	d_{240}	d_{120}	d_0

Berechnen Sie:

$s_0^{-1} \circ d_0 \circ s_0 \quad =$

$d_{120}^{-1} \circ d_0 \circ d_{120} \quad =$

$s_0^{-1} \circ d_{120} \circ s_0 \quad =$

$s_1^{-1} \circ d_{120} \circ s_1 \quad =$

$s_2^{-1} \circ d_{120} \circ s_2 \quad =$

$d_0^{-1} \circ s_0 \circ d_0 \quad =$

$d_{120}^{-1} \circ s_0 \circ d_{120} \quad =$

$d_{240}^{-1} \circ s_0 \circ d_{240} \quad =$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
s_0^{-1} \circ d_0 \circ s_0 &= d_0 \\
d_{120}^{-1} \circ d_0 \circ d_{120} &= d_0 \\
s_0^{-1} \circ d_{120} \circ s_0 &= d_{240} \\
s_1^{-1} \circ d_{120} \circ s_1 &= d_{240} \\
s_2^{-1} \circ d_{120} \circ s_2 &= d_{240} \\
d_0^{-1} \circ s_0 \circ d_0 &= s_0 \\
d_{120}^{-1} \circ s_0 \circ d_{120} &= s_1 \\
d_{240}^{-1} \circ s_0 \circ d_{240} &= s_2
\end{aligned}
$$

(7.3) (6 Punkte) Beweisen Sie: $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.

Lösung:

$\equiv$ ist reflexiv: Sei $a \in G$ beliebig, dann gilt $a = n^{-1} \circ a \circ n$. Also $a \equiv a$.

$\equiv$ ist symmetrisch: Seien $a, b \in G$ beliebig mit $a \equiv b$. Dann gibt es ein $g \in G$, so dass $a = g^{-1} \circ b \circ g$. Daher gilt $(g^{-1})^{-1} \circ a \circ g^{-1} = (g^{-1})^{-1} \circ g^{-1} \circ b \circ g \circ g^{-1} = n \circ a \circ n = a$. Also $b \equiv a$.

$\equiv$ ist transitiv: Seien $a, b, c \in G$ beliebig mit $a \equiv b$ und $b \equiv c$. Dann gibt es $g_1, g_2 \in G$, so dass $a = g_1^{-1} \circ b \circ g_1$ und $b = g_2^{-1} \circ c \circ g_2$. Dann gilt $a = g_1^{-1} \circ b \circ g_1 = g_1^{-1} \circ g_2^{-1} \circ c \circ g_2 \circ g_1 = (g_2 \circ g_1)^{-1} \circ c \circ (g_2 \circ g_1)$. Daher gilt auch: $a \equiv c$.

(7.4) (3 Punkte) Welches sind die Äquivalenzklassen von d_0, d_{120}, s_0 bezüglich $\equiv$.

Lösung:

$$[d_0] = \{d_0\}$$

$$[d_{120}] = \{d_{120}, d_{240}\}$$

$$[s_0] = \{s_0, s_1, s_2\}$$

Aufgabe 8 (8 Punkte)
Lösen Sie die Gleichung $[35]_{3559} \odot [x]_{3559} = [14]_{3559}$. Machen Sie eine Probe.

Geben Sie für x mit $0 \leq x < 3559$ an: .

Lösung:

Euklids Algorithmus

1. $3559 = 101 * 35 + 24$
2. $35 = 1 * 24 + 11$
3. $24 = 2 * 11 + 2$
4. $11 = 5 * 2 + 1$
5. $2 = 2 * 1 + 0$

Bestimmen des inversen zu 35:

1. $1 = 11 - 5 * 2$
2. $= 11 - 5 * (24 - 2 * 11)$
3. $= 11 * 11 - 5 * 24$
4. $= 11 * (35 - 1 * 24) - 5 * 24$
5. $= 11 * 35 - 16 * 24$
6. $= 11 * 35 - 16 * (3559 - 101 * 35)$
7. $= 1627 * 35 - 16 * 3559$

$[1627]_{3559}$ ist das multiplkative inverse zu $[35]_{3559}$

Daher ist $[1627 * 14]_{3559} = [1424]_{3535}$ das gesuchte Element.

Viel Erfolg