Probeklausur Lösungsvorschläge

Achtung: Das Dokument stellt lediglich Vorschläge zur Lösung der in der Probleklausur gestellten Aufgaben dar. Es besteht keinerlei Gewähr auf absolute Richtigkeit dieser. Selbstverständlich existieren andere (zumeist ähnliche) Lösungswege, die genauso richtig sind.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Wenn Herr Meyer pünktlich zur Besprechung kommt, ist auch Frau Schmidt pünktlich.

$\mathbf{M \rightarrow S}$

Wenn Herr Dach nicht pünktlich ist, dann sind auch Herr Meyer und Frau Lind nicht pünktlich.

$\mathbf{\neg D \rightarrow (\neg M \land \neg L)}$

Wenn Frau Schmidt zu spät kommt, dann ist auch Herr Meyer zu spät.

$\mathbf{\neg S \rightarrow \neg M}$

Wenn Herr Meyer oder Frau Lindt zu spät kommen, ist Frau Schmidt pünktlich.

$\mathbf{(\neg M \lor \neg L) \rightarrow S}$

Herr Dach kommt nie pünktlich zur Besprechung.

$\mathbf{\neg D}$

Verbindung der Aussagen mittels Konjunktion (da alle Aussagen gleichzeitig gelten):

$$(M \rightarrow S) \land (\neg D \rightarrow (\neg M \land \neg L)) \land (\neg S \rightarrow \neg M) \land ((\neg M \lor \neg L) \rightarrow S) \land (\neg D)$$

Anwenden der Umformungsgesetze:

$$(\neg M \lor S) \land (D \lor (\neg M \land \neg L)) \land (S \lor \neg M) \land (\neg (\neg M \lor \neg L) \lor S) \land (\neg D)$$

$$(\neg M \lor S) \land (D \lor (\neg M \land \neg L)) \land (S \lor \neg M) \land ((M \land L) \lor S) \land (\neg D)$$

$$(\neg M \lor S) \land (D \lor (\neg M \land \neg L)) \land ((M \land L) \lor S) \land (\neg D)$$

$$(\neg M \lor S) \land (D \lor (\neg M \land \neg L)) \land ((M \land L) \lor S) \land (\neg D)$$

$$((\neg M \land D) \lor (\neg M \land \neg L) \lor (S \land D) \lor (S \land \neg M \land \neg L)) \land ((M \land L \land \neg D) \lor (S \land \neg D))$$

$$((\neg M \land D) \lor (\neg M \land \neg L) \lor (S \land D)) \land ((M \land L \land \neg D) \lor (S \land \neg D))$$

$$(\neg M \land D \land M \land L \land \neg D) \lor (\neg M \land \neg L \land M \land L \land \neg D) \lor (S \land D \land M \land L \land \neg D) \lor$$
$$(\neg M \land D \land S \land \neg D) \lor (\neg M \land \neg L \land S \land \neg D) \lor (S \land D \land S \land \neg D)$$

$$F \lor F \lor F \lor (\neg M \land \neg L \land S \land \neg D) \lor F \lor F$$

$$\mathbf{(\neg M \land \neg L \land S \land \neg D)}$$

Nur Frau Schmidt kommt pünktlich!

<u>Aufgabe 2</u> (8 Punkte)

(1.1) (4 Punkte) Kreuzen Sie die drei richtigen Antworten an:

F Sei M eine Menge. Dann ist M × M im allgemeinen keine Relation.
Die Definition einer Relation ist eben dass sie Teilmenge von M × M ist. M × M ist aber Teilmenge von M × M.

F Jede Ordnungsrelation hat mindestens ein kleinstes oder mindestestens ein größtes Element.
Beispielsweise stellt die kleiner-gleich Relation auf den ganzen Zahlen eine Ordnungsrelation dar, die kein kleinstes und kein größtes Element hat.

F Seien a, b Elemente einer beliebigen Menge E mit einer beliebig zugehörigen Äquivalenzrelation ≡. Es gilt: $a \equiv b \Rightarrow a = b$.
Betrachte bspw. die Äquivalenzrelation $a \equiv b \Leftrightarrow |a| = |b|$ auf den ganzen Zahlen. Nur weil -3 ≡ 3, gilt nicht -3 = 3

W Aus der Gleichheit von Äquivalenzklassen folgt die Äquivalenz der Repräsentanten und umgekehrt.
Gilt nach der Definition von ÄK.

W Wenn R und S reflexiv sind, dann ist auch $R \cup S$ reflexiv.
Wenn R und S alle reflexiven Paare enthalten, so tut $R \cup S$ das natürlich auch

W $(R2 \circ R1)^{-1} = R1^{-1} \circ R2^{-1}$ (1.2)
Diese Rechenregel wurde in der Vorlesung besprochen.

(1.2) (4 Punkte) Kreuzen Sie die drei richtigen Antworten an:

W Sei R eine Relation. Aus der Asymmetrie von R folgt auch die Irreflexivität von R.
Asymmetrie bedeutet, dass wenn (x,y) in R ist (y,x) nicht in R ist. Wäre nun ein (x,x) in R, dürfte (x,x) nicht in R sein. Somit ist kein (x,x) in R und die Relation Irreflexiv

F Sei R1 eine Relation. Es gilt: $R1 \circ R1^{-1} = R1$.
Es gilt R1 ∘ R1-1 = ID (Identitätsrelation)

F Auf der Menge M := {1, 2, 3, 4, 5} gibt es 5! = 120 Relationen.
Anzahl der Relationen = Anzahl der möglichen Teilmengen von M × M = |P(M × M)| = 2 |M × M| = $2^{5*5} = 2^{25}$ = 33.554.432

F Sei R eine Relation. Wenn R nicht reflexiv ist, dann ist R irreflexiv
Reflexiv und irreflexiv sind keine Gegensätze. Reflexiv bedeutet dass alle „gleichen" Paare drin sind, irreflexiv dass keines drin ist. Es kann aber auch nur ein Teil der gleichen Paare drin sein, wodurch die Relation weder reflexiv noch irreflexiv wäre.

W Die leere Menge ist eine transitive Relation auf M, wobei M eine beliebige Menge sei.
Da es sich bei der Quantorenschreibweise der Transitivität um eine Allaussage handelt (Definition ist in den Folien) und wir gelernt haben, dass Allaussagen über die leere Menge immer wahr sind, ist die leere Menge immer transitiv.

W Aus der Gleichheit zweier Relationen folgt die Gleichheit der respektiven inversen Relationen.
Gilt offensichtlich.

<u>Aufgabe 3</u> (11 Punkte)

Nr.	Aussage	Wahr	Falsch
1.	$\forall x \in A : x \in P(A)$ (Mit $P(A)$ ist die Potenzmenge von A gemeint)		X
2.	Wenn $\|A \setminus B\| = \|A\|$, dann sind A,B disjunkt.	X	
3.	$(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \Rightarrow (A \cap B = C)$		X
4.	$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x : (x \in A) \Rightarrow (x \notin B)$	X	
5.	$\exists x \in \{\} : x = 3$		X
6.	$P(\{\}) = \{\}$		X
7.	$\{x \in \mathbb{N} \mid (x-1=0) \vee (x-2=1)\} = (\{1,2,3,5\} \setminus \{5,2\})$	X	
8.	$\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\|$		X
9.	$(A = B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \{\})$		X
10.	$4 \in \{x \in \mathbb{N} \mid (x=3) \vee (x>2)\}$	X	
11.	$\{4,2\} \in \{\{x,y\} \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (y \in \mathbb{N}) \wedge (2*x=y)\}$	X	
12.	$\{3,4,1\} \cap \{1,2,3,4\} \cap \{2,3,1\} = \{\} \cup \{1,3\} \cup \{1\}$	X	
13.	$(A = B) \Rightarrow (A \setminus B = \{\})$	X	
14.	$\forall x \in \{\} : x = 3$	X	
15.	$1 \in \{\{1\},2,3,4\} \cap \{1,\{1\},\{3\}\}$		X
16.	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\} \subseteq \{x \in \mathbb{N} \mid x*2 < 10\}$		X
17.	Sei A,B disjunkt, dann gilt: $\forall x \in (A \cap B) : (x \notin A) \wedge (x \notin B)$	X	
18.	$\exists x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x+3=y \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} : x+3=y$	X	
19.	$(A \neq B) \Leftrightarrow ((\exists a \in A : a \notin B) \wedge (\exists b \in B : b \notin A))$		X
20.	$\{x \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (x>0)\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x > -1\}$ (Hinweis: $0 \notin \mathbb{N}$)	X	
21.	$\forall x : (x \in \mathbb{N}) \wedge (x > 0)$ (Hinweis: $0 \notin \mathbb{N}$)		X
22.	$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x > y \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x > y$	X	

Erklärungen sind auf der nächsten Seite.

1.	F	Setze $A := \{1\}$. Es gilt: $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ und $1 \notin P(A)$
2.	W	Wären A und B nicht disjunkt $\exists a \in A : x \in B$ und nach Def. „\" gilt $x \notin A \setminus B$. Dann $\lvert A\rvert \neq \lvert A \setminus B\rvert$
3.	F	Setze $A := \{1\}$ $B := \{1\}$ $C := \{1,2\}$. $A \cap B = \{1\} \neq \{1,2\} = C$
4.	W	Um zu zeigen, dass $A \not\subseteq B$ muss man zeigen dass ein $a \in A$ mit $a \notin B$ ex.
5.	F	Existenzaussagen über die leere Menge sind immer falsch, da keine El. ex.
6.	F	$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
7.	W	V
8.	F	Setze $A := \{1\}$ $B := \{1\}$. Es gilt $\lvert A \cup B\rvert = 1 \neq 2 = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$
9.	F	Setze $A := \{1\}$ $B := \{1,2\}$. Es gilt $A \neq B$, aber $A \setminus B = \emptyset$
10.	W	$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 3 \lor x > 2\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\} = \{3,4,5,6,\dots\}$
11.	W	Setze $x := 2$ $y := 4$. Es gilt: $x \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{N} \land 2 \cdot x = 2 \cdot 2 = 4 = y$, also $\{2,4\} = \{4,2\} \in M$
12.	W	V
13.	W	V
14.	W	Allaussagen über leere Menge sind immer wahr, kein El. aus $\emptyset$ widerspricht Bedingung
15.	F	$1 \notin \{\{1\}\}$
16.	F	$5 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$ aber $5 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot 2 < 10\}$
17.	W	Da A, B disjunkt ist $A \cap B = \emptyset$
18.	W	Zwei gleiche Junktoren die genau nebeneinander stehen dürfen vertauscht werden
19.	F	Was dort steht ist $A \neq B \Leftrightarrow A \not\subseteq B \land B \not\subseteq A$. Es müsste aber sein $A \neq B \Leftrightarrow A \not\subseteq B \lor B \not\subseteq A$
20.	W	$\{1,2,3,\dots\} = \{1,2,3,\dots\}$
21.	F	Falsch, da nicht alle Objekte nat. Zahlen sind. $\forall x \in \mathbb{N}: x > 0$ oder $\forall x: x \in \mathbb{N} \Rightarrow x > 0$ wäre richtig.
22.	W	In diesem Fall ist es legitim die Quantoren zu vertauschen, das geht aber nicht immer! (F.165)

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Geben Sie die Definitionen in Quantoren-Schreibweise an für:

(5.1) (0.5 Punkte) Mengen-Gleichheit

$A = B \Leftrightarrow ((\forall a \in A: a \in B) \land (\forall b \in B: b \in A))$

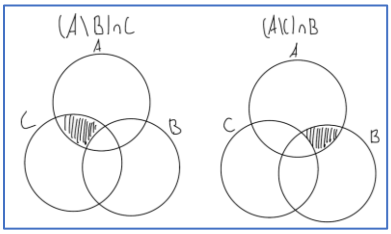
(5.2) (0.5 Punkte) Echte Teilmenge

$A \subsetneq B \Leftrightarrow ((\forall a \in A: a \in B) \land (\exists b \in B: b \notin A))$

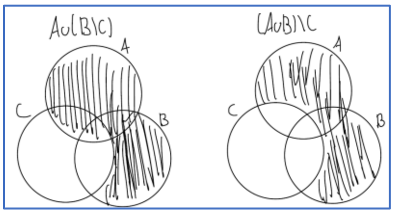
In den folgenden Aufgaben sind A,B,C jeweils beliebige Mengen. Genau eine der untenstehenden Aussagen ist wahr. Genau zwei sind falsch.

(Die Venn-Diagramme zu I und II hätte man nicht zeichnen müssen. Es ist relativ offensichtlich, dass III wahr ist.)

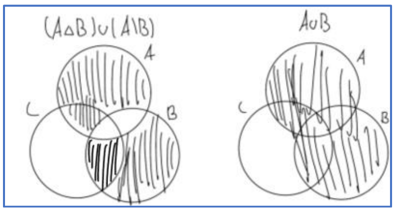
I) $(A \setminus B) \cap C \subseteq (A \setminus C) \cap B$



II) $A \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$



III) $(A \triangle B) \cup (A \setminus B) \subseteq A \cup B$



(5.7) (5 Punkte) Geben Sie an, welche Aussagen falsch sind, indem Sie die falschen Aussagen mit konkreten Gegenbeispielen widerlegen. Sie dürfen bei den Gegenbeispielen jedoch nicht die leere Menge benutzen.

Gegenbeispiel zu I:

Setze $A := \{1, 2\}$
$B := \{2\}$
$C := \{1\}$

$(A \setminus B) \cap C = (\{1,2\} \setminus \{2\}) \cap \{1\} = \{1\} \neq \{2\} = (\{1,2\} \setminus \{1\}) \cap \{2\} = (A \setminus C) \cap B$ //

Gegenbeispiel zu II:

Setze $A := \{1, 2\}$
$B := \{1\}$
$C := \{2\}$

$A \cup (B \setminus C) = \{1,2\} \cup (\{1\} \setminus \{2\}) = \{1,2\} \neq \{1\} = (\{1,2\} \cup \{1\}) \setminus \{2\} = (A \cup B) \setminus C$

(5.8) (8 Punkte) Beweisen Sie die wahre Aussage mit einem formalen Beweis.

Beweis: [z.z. $(A \triangle B) \cup (A \setminus B) \subseteq A \cup B$]

Sei $x \in (A \triangle B) \cup (A \setminus B)$ [z.z. $x \in A \cup B$]

Nach Def. „$\cup$" gilt $x \in A \triangle B$ oder $x \in A \setminus B$.

1. Fall $x \in A \triangle B$.

Nach Def. „$\triangle$" gilt entweder $x \in A$ oder $x \in B$.

1.1 Fall $x \in A$ und $x \notin B$.

Nach Def. „$\cup$" gilt $x \in A \cup B$.

1.2 Fall $x \notin A$ und $x \in B$

Analog zu 1.1.

2. Fall $x \in A \setminus B$.

Nach Def. „$\setminus$" gilt $x \in A$ und $x \notin B$.

Nach Def. „$\cup$" gilt $x \in A \cup B$ //

(5.9) (2 Punkte) Beweisen Sie die wahre Aussage mit einem Venn Diagramm.

Ist bereits oben bei den Mengenangaben geschehen.

<u>Aufgabe 5</u> (12 Punkte)

Beweisen Sie folgende Summenformel mit vollständiger Induktion. Formulieren Sie dazu zunächst eine entsprechende, prädikatenlogische Aussage.

$$\sum_{i=0}^{n} 5^i = \frac{1-5^{n+1}}{-4}$$

Beweis: [z.z. $\forall n \in \mathbb{N}_0: \sum_{i=0}^{n} 5^i = \frac{1-5^{n+1}}{-4}$]

(I.A). Setze $n := 0 \in \mathbb{N}_0$. Es gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} 5^i = \sum_{i=0}^{0} 5^i = 5^0 = 1 = \frac{-4}{-4} = \frac{1-5}{-4} = \frac{1-5^1}{-4} = \frac{1-5^{0+1}}{-4} = \frac{1-5^{n+1}}{-4}$$

(I.S) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gelte $\sum_{i=0}^{n} 5^i = \frac{1-5^{n+1}}{-4}$. (I.V)

[z.z. $\sum_{i=0}^{n+1} 5^i = \frac{1-5^{(n+1)+1}}{-4} = \frac{1-5^{n+2}}{-4}$]

Es gilt:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 5^i = \left(\sum_{i=0}^{n} 5^i\right) + 5^{n+1} \underset{(I.V)}{=} \frac{1-5^{n+1}}{-4} = \frac{1-5^{n+1}}{-4} + \frac{-4 \cdot 5^{n+1}}{-4} = \frac{1-5^{n+1}-4\cdot 5^{n+1}}{-4} = \frac{1-5\cdot 5^{n+1}}{-4} = \frac{1-5^{n+2}}{-4}$$

//

<u>Aufgabe 6</u> (17 Punkte)

(5.1) (8 Punkte) Übertragen Sie folgende Aussagen in prädikatenlogische Aussagen mit eingeschränkten Quantoren.

- Jeder Mensch besitzt mehr als ein Haustier.

$$\forall m \in M \; \exists h_1, h_2 \in H: \; B(m,h_1) \land B(m,h_2) \land h_1 \neq h_2$$

- Einige Menschen besitzen nur Haustiere, die Leckerlies mögen.

$$\exists m \in M \; \forall h \in H \; \exists l \in L: \; B(m,h) \Rightarrow M(h,l)$$

- Manche Haustiere mögen gar keine Leckerlies.

$$\exists h \in H \; \forall l \in L: \; \neg M(h,l)$$

- Alle Menschen besitzen genau ein Haustier.

$$\forall m \in M: (\exists h \in H: B(m,h)) \land (\forall h_1, h_2 \in H: (B(m,h_1) \land B(m,h_2)) \Rightarrow h_1 = h_2))$$

$\hookrightarrow$ ggf. $\forall m \in M \; \exists! h \in H: B(m,h)$

(5.2) (4 Punkte) Negieren Sie die beiden Aussagen

- Jeder Mensch besitzt mehr als ein Haustier

$$\neg(\forall m \in M \; \exists h_1, h_2 \in H: \; B(m,h_1) \land B(m,h_2) \land h_1 \neq h_2)$$

$$\exists m \in M \; \forall h_1, h_2 \in H: \; \neg B(m,h_1) \lor \neg B(m,h_2) \lor h_1 = h_2$$

Es gibt Menschen, die höchstens ein Haustier besitzen.

- Einige Menschen besitzen nur Haustiere, die Leckerlies mögen.

$\neg(\exists m\in M\ \forall h\in H\ \exists l\in L: \quad B(m,h) \Rightarrow M(h,l))$

$\forall m\in M\ \exists h\in H\ \forall l\in L: \quad B(m,h) \land \neg M(h,l)$

Jede Mensch besitzt mind. 1 Haustier, das keine Leckerlis mag

(5.3) (2 Punkte) Schreiben Sie Ihre prädikatenlogische Aussage für „Manche Haustiere mögen gar keine Leckerlies“, so um, dass sie nur noch uneingeschränkte Quantoren enthält.

$\exists h\in H\ \forall l\in L: \neg M(h,l)$

$\exists h\ \forall l: h\in H \land (l\in L \Rightarrow \neg M(h,l))$

(5.4) (3 Punkte) Genau eine der untenstehenden, prädikatenlogischen Aussagen ist falsch. Geben Sie die falsche Aussage an und begründen Sie, warum die Aussage falsch ist.

- $\forall a\in\mathbb{N} : \exists b\in\mathbb{N} : a=b$
- $\forall a\in\mathbb{N} : \exists b\in\mathbb{N} : a\neq b$
- $\forall a\in\mathbb{N} : \exists b\in\mathbb{N} : a<b$
- $\forall a\in\mathbb{N} : \exists b\in\mathbb{N} : a>b$
- $\forall a\in\mathbb{N} : \exists b\in\mathbb{N} : a\leq b$
- $\forall a\in\mathbb{N} : \exists b\in\mathbb{N} : a\geq b$

Nummer 4 ist falsch. Beweis der Negation.

$\neg(\forall a\in\mathbb{N}\ \exists b\in\mathbb{N}: a>b)$

$\exists a\in\mathbb{N}\ \forall b\in\mathbb{N}: a\leq b$

Beweis: [z.z. $\exists a\in\mathbb{N}\ \forall b\in\mathbb{N}: a\leq b$]

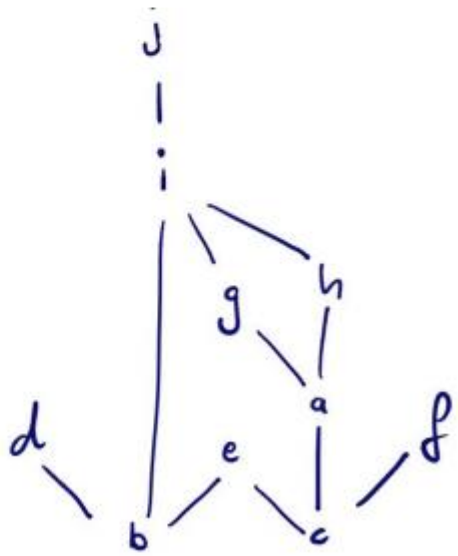
Setze $a:=1\in\mathbb{N}$. Sei $b\in\mathbb{N}$. Nach Def. der nat. Zahlen gilt:

$a=1\leq b$, da 1 die kleinste nat. Zahl ist.

(Der Beweis ist hier nur aufgeführt um das formale Prinzip nochmal zu verdeutlichen. Wenn in der Klausur steht „begründen Sie“ reicht es im Allgemeinen auch das entsprechend zu begründen, d.h. es würde reiche zu schreiben „4 ist falsch, da es für die 1 keine nat. Zahl gibt die kleiner ist“)

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben sei das folgende Hasse-Diagramm der zehn-elementigen Menge M := {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}:



Geben Sie größte/kleinste und maximale/minimale Elemente sowie obere/untere Schranken, obere/untere Grenzen und Supremum/Infimum von {a, g, h} und {b, c, e} an, falls existent.

	{a, g, h}	{b, c, e}		{a, g, h}	{b, c, e}
Größte Elemente	/	e	Kleinste Elemente	a	/
Maximale Elemente	g, h	e	Minimale Elemente	a	b, c
Obere Schranken	i, j	e	Untere Schranken	a,c	/
Obere Grenzen	i	e	Untere Grenzen	a	/
Supremum	i	e	Infimum	a	/

Aufgabe 8 (15 Punkte)

Gegeben sei die Relation ≡ auf der Menge der ganzen Zahlen, die durch a ≡ b :⇔ a^2 − b^2 = 2a − 2b definiert wird.

(4.1) (8 Punkte) Zeigen Sie, dass ≡ eine Äquivalenzrelation ist.

Beweis: [z.z. ≡ reflexiv $\land$ ≡ symmetrisch $\land$ ≡ transitiv]

[z.z. ≡ reflexiv, d.h. $\forall x \in \mathbb{Z}: (x,x) \in \equiv$]

Sei $x \in \mathbb{Z}$. [z.z. $(x,x) \in \mathbb{Z}$, d.h. $x \equiv x$, d.h. $x^2 - x^2 = 2x - 2x$]

Es gilt:

$x^2 - x^2 = 0 = 2x - 2x$.

[z.z. ≡ symmetrisch, d.h. $\forall x,y \in \mathbb{Z}: (x,y) \in \equiv \Rightarrow (y,x) \in \equiv$]

Seien $x,y \in \mathbb{Z}$. Es gelte: $x \equiv y$. [z.z. $y \equiv x$, d.h. $y^2 - x^2 = 2y - 2x$]

Nach Vor. gilt $x^2 - y^2 = 2x - 2y \Leftrightarrow -1 \cdot (x^2 - y^2) = -1 \cdot (2x - 2y) \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 2y - 2x$.

[z.z. ≡ transitiv, d.h. $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}: x \equiv y \land y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$]

Seien $x,y,z \in \mathbb{Z}$. Es gelte: $x \equiv y$ und $y \equiv z$. [z.z. $x \equiv z$]

Nach Vor. gilt $x^2 - y^2 = 2x - 2y$ und $y^2 - z^2 = 2y - 2z$. [z.z. $x^2 - z^2 = 2x - 2z$]

$\Leftrightarrow y^2 - x^2 = 2y - 2x$

$\Leftrightarrow \underline{y^2} = x^2 + 2y - 2x$ $\Leftrightarrow \underline{y^2} = z^2 + 2y - 2z$

Es gilt:

$x^2 + 2y - 2x = z^2 + 2y - 2z \Leftrightarrow x^2 - 2x = z^2 - 2z \Leftrightarrow x^2 - z^2 = 2x - 2z$ //

(4.2) (4 Punkte)

Geben Sie die Äquivalenzklassen [0], [1], [2] und [3] explizit an. Hinweis: Die Äquivalenz kann auch folgend dargestellt werden: a ≡ b ⇔ (a − b) · (a + b − 2) = 0

[Zur Erklärung: Zwei Zahlen a,b sind dann äqu., wenn sie die Gleichung $(a-b)(a+b-2)=0$. Nach Satz vom Nullprodukt muss also gelten $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$ oder $a+b-2=0 \Leftrightarrow a=2-b$

↳ bspw:

a	b
2	0
4	-2
6	-4
1	1

→ wir sehen: es geht scheinbar darum, dass sie den gleichen Abstand zu 1 haben!]

$[0] = \{0,2\}$

$[1] = \{1\}$

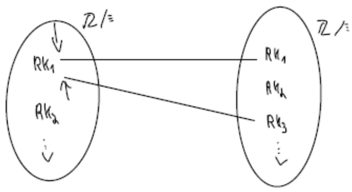
$[2] = \{0,2\}$

$[3] = \{-1,3\}$

(4.3) (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass [a] ⊕ [b] := [a + b] für alle x, y ∈ Z nicht wohldefiniert bzw. nicht unabhängig vom Repräsentanten ist. Hinweis: Nutzen Sie dazu die Äquivalenzklassen [0] und [1].

Zu zeigen ist, dass ⊕ nicht rechtseindeutig ist, also dass folgender Fall auftritt:



$[2]=[0]=\{0,2\}$

$[1]=\{1\}$

[z.z. $[0]\oplus[1] \neq [2]\oplus[1]$]

Es gilt:

$[0]\oplus[1] = [0+1] = [1] \neq [3] = [2+1] = [2]\oplus[1]$.

Da dies der Fall ist obwohl $[0]=[2]$, ist ⊕ nicht unabhängig vom Repräsentanten definiert.

<u>Aufgabe 9</u> (6 Punkte)

Gegeben sei die Äquivalenzrelation ≡ auf ℤ, die durch a ≡ b :⇔ |a| = |b| definiert wird. Zeigen Sie, dass die Relation f := {([a]≡ ,|a|) | a ∈ ℤ} auf (ℤ/≡) x ℤ eine Abbildung ist.

Erinnerung: $\mathbb{Z}/{\equiv} := \{[a]_\equiv \mid a \in \mathbb{Z}\}$

<u>Bew.:</u> [z.z. f ist Abbildung, d.h. f linkstotal $\wedge$ f rechtseindeutig]

[z.z. f linkstotal, d.h. $\forall [a]_\equiv \in \mathbb{Z}/{\equiv}\ \exists z \in \mathbb{Z}: ([a]_\equiv, z) \in f$]

Sei $[a]_\equiv \in \mathbb{Z}/{\equiv}$. Nach Def. „$\mathbb{Z}/{\equiv}$" gilt $a \in \mathbb{Z}$. Nach Def. Betrag gilt $|a| \in \mathbb{Z}$.

Setze also $z := |a| \in \mathbb{Z}$. Es gilt nach der Abbildungsvorschrift:

$f([a]_\equiv) = |a| = z$. //

[z.z. f rechtseindeutig, d.h. $\forall ([a]_\equiv, |a|), ([b]_\equiv, |b|) \in f: [a]_\equiv = [b]_\equiv \Rightarrow |a| = |b|$]

Seien $([a]_\equiv, |a|), ([b]_\equiv, |b|) \in f$. Es gelte: $[a]_\equiv = [b]_\equiv$. [z.z. $|a| = |b|$]

Nach Def „$\equiv$" und der Def. von ÄK folgt aus $[a]_\equiv = [b]_\equiv$, dass $|a| = |b|$. //