Lösungsvorschläge zu Aufgabenblatt 4

(Verbände und Äquivalenzrelationen)

Aufgabe 4.1

Betrachte $\mathbb{N}$ ausgestattet mit der "teilt"-Ordnung.

(a) Bestimmen Sie $\inf\{a, b\}$ und $\sup\{a, b\}$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $T(n) := \{k \in \mathbb{N} \mid k|n\} \subseteq M$ die Menge aller Teiler von n. Zeigen Sie, dass $T(n)$ ein Verband ist.

Hinweis: *Es wird ggf. Schulwissen über elementare Zahlentheorie benötigt.*

Lösungsskizze

Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\inf\{a, b\} = \mathrm{ggT}(a, b)$ (größter gemeinsamer Teiler von a und b) und $\sup\{a, b\} = \mathrm{kgV}(a, b)$ (kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b). Tatsächlich folgt dies unmittelbar aus der allgemeinen Definition (sofern bekannt):

Die Zahl $g \in \mathbb{N}$ ist größter gemeinsamer Teiler von a und b genau dann, wenn folgendes gilt:

(1) $g|a$ und $g|b$ (d.h. g ist untere Schranke von $\{a, b\}$, und

(2) Ist $c \in \mathbb{N}$ ein weiterer gemeinsamer Teiler von a und b, gilt also $c|a$ und $c|b$, so folgt $c|g$ (d.h. g ist **größte** untere Schranke von $\{a, b\}$.

Die Zahl $k \in \mathbb{N}$ ist kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b genau dann, wenn folgendes gilt:

(1) $a|k$ und $b|k$ (d.h. k ist obere Schranke von $\{a, b\}$, und

(2) Ist $c \in \mathbb{N}$ ein weiteres gemeinsames Vielfaches von a und b, gilt also $a|c$ und $b|c$, so folgt $k|c$ (d.h. k ist **kleinste** obere Schranke von $\{a, b\}$.

(b) Dies folgt unmittelbar aus (a) und der Definition eines Verbands.

Aufgabe 4.2

Definiere auf der Menge $M := \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (-1, -1), (0, -1), (0, -2)\}$ die Relation

$$(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 \quad \text{für alle } (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $(0, 0), (1, 0)$ und $(1, 1)$.

(c) Notieren Sie die Menge $M/\equiv$ explizit.

(d) Geben Sie ein Repräsentantensystem an.

Lösung

(a) Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in M$.

$\equiv$ *ist reflexiv:* Es gilt $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2$, also gilt nach Definition $(x_1, x_2) \equiv (x_1, x_2)$.

$\equiv$ *ist symmetrisch:* Es gelte $(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2)$. Dann gilt $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$, also auch $y_1^2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2$, also gilt nach Definition $(y_1, y_2) \equiv (x_1, x_2)$.

$\equiv$ *ist transitiv:* Es gelte $(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \equiv (z_1, z_2)$. Dann gilt $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$ und $y_1^2 + y_2^2 = z_1^2 + z_2^2$, also auch $x_1^2 + x_2^2 = z_1^2 + z_2^2$ und damit gilt nach Definition auch $(x_1, x_2) \equiv (z_1, z_2)$.

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
[(0,0)] &= \{(x_1, x_2) \in M \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \{(0,0)\}, \\
[(1,0)] &= \{(x_1, x_2) \in M \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} = \{(1,0), (0,1), (0,-1)\}, \\
[(1,1)] &= \{(x_1, x_2) \in M \mid x_1^2 + x_2^2 = 2\} = \{(1,1), (-1,-1)\}.
\end{aligned}$$

(c) Es gilt:

$$M/\!\equiv \; = \; \big\{\{(0,0)\}, \{(1,0), (0,1), (0,-1)\}, \{(1,1), (-1,-1)\}, \{(0,-2)\}\big\}.$$

(d) Ein Vertretersystem ist z.B. $V = \{(0,0), (1,0), (1,1), (0,-2)\}$.

Aufgabe 4.3

Definiere auf der Menge $M := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Relation

$$(a, b) \equiv (c, d) :\Leftrightarrow a + d = b + c \quad \text{für alle } (a, b), (c, d) \in M.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $(1, 1), (1, 2)$ und $(2, 1)$.

Anmerkung: *Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\!\equiv$ lässt sich über ein geeignetes Repräsentantensystem mit den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ identifizieren.*

Lösung

(a) Seien $(a, b), (c, d), (e, f) \in M$.

$\equiv$ *ist reflexiv:* Es gilt $a + b = b + a$, also ist $(a, b) \equiv (a, b)$.

$\equiv$ *ist symmetrisch:* Es gelte $(a, b) \equiv (c, d)$. Dann gilt $a + d = b + c$, also auch $c + b = d + a$, also nach Definition auch $(c, d) \equiv (a, b)$.

$\equiv$ *ist transitiv:* Es gelte $(a, b) \equiv (c, d)$ und $(c, d) \equiv (e, f)$. Dann gilt $a+d = b+c$ und $c+f = d+e$, also auch

$$(a + f) + (c + d) = (a + d) + (c + f) = (b + c) + (d + e) = (b + e) + (c + d).$$

Subtrahieren von $c + d$ auf beiden Seiten liefert $a + f = b + e$, also gilt nach Definition auch $(a, b) \equiv (e, f)$.

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
[(1,1)] &= \{(a,b) \in M \mid a+1 = b+1\} = \{(a,b) \in M \mid b = a\} = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{N}\}, \\
[(1,2)] &= \{(a,b) \in M \mid a+2 = b+1\} = \{(a,b) \in M \mid b = a+1\} = \{(a,a+1) \mid a \in \mathbb{N}\}, \\
[(2,1)] &= \{(a,b) \in M \mid a+1 = b+2\} = \{(a,b) \in M \mid b = a-1\} = \{(a,a-1) \mid a \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.4
Es sei M eine nichtleere Menge, und es sei $\mathcal{Z} \subseteq P(M)\backslash\{\varnothing\}$ eine Zerlegung von M, das heißt, es gelte:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{Z}} A = M \quad \text{und} \quad \forall\, A, B \in \mathcal{Z} :\ A \cap B = \varnothing \ \vee\ A = B.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$x \equiv y :\Leftrightarrow\ \exists\, A \in \mathcal{Z} :\ \{x,y\} \subseteq A \qquad \text{für alle } x, y \in M$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird, für die gilt $M/{\equiv} = \mathcal{Z}$.

Lösung

Seien $x, y, z \in M$.

$\equiv$ *ist reflexiv:* Wegen $\bigcup_{A \in \mathcal{Z}} A = M$ existiert ein $A \in \mathcal{Z}$ mit $x \in A$, also folgt auch $\{x,x\} = \{x\} \subseteq A$ und damit $x \equiv x$ nach Definition.

$\equiv$ *ist symmetrisch:* Es gelte $x \equiv y$. Dann existiert ein $A \in \mathcal{Z}$ mit $\{x,y\} \subseteq A$. Wegen $\{x,y\} = \{y,x\}$ folgt dann auch $\{y,x\} \subseteq A$, also $y \equiv x$ nach Definition.

$\equiv$ *ist transitiv:* Es gelte $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Dann existiert ein $A \in \mathcal{Z}$ mit $\{x,y\} \subseteq A$, und es existiert ein $B \in \mathcal{Z}$ mit $\{y,z\} \subseteq B$. Insbesondere folgt $y \in A \cap B$, also $A \cap B \neq \varnothing$. Nach Voraussetzung folgt hieraus aber bereits $A = B$[1]. Also ist auch $z \in B = A$ und damit $\{x,z\} \subseteq A$, also gilt $x \equiv z$ nach Definition.

Es bleibt zu zeigen: $M/{\equiv} = \mathcal{Z}$.

Sei dazu $x \in M$. Dann gibt es ein $A \in \mathcal{Z}$ mit $x \in A$. Dann gilt aber schon $[x] = A$: Für alle $y \in M$ gilt nämlich

$$y \in [x] \Leftrightarrow y \equiv x \Leftrightarrow \{x,y\} \subseteq B \text{ für ein } B \in \mathcal{Z}.$$

Da aber bereits $x \in A$ ist und die Mengen in $\mathcal{Z}$ disjunkt sind, folgt

$$y \in [x] \Leftrightarrow y \in A, \quad \text{also } [x] = A.$$

Damit folgt

$$M/{\equiv} = \{[x] \mid x \in M\} \subseteq \{A \mid A \in \mathcal{Z}\} = \mathcal{Z}.$$

Sei nun umgekehrt $A \in \mathcal{Z}$. Da $A \neq \varnothing$ ist, finden wir ein $x \in A$, und wie eben gezeigt folgt dann $A = [x] \in M/{\equiv}$. Also gilt auch $\mathcal{Z} \subseteq M/{\equiv}$.

[1] Man beachte: Die Aussage $A \cap B = \varnothing \ \vee\ A = B$ ist äquivalent zu $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A = B$