Aufgabe 1 (17 Punkte)

Mengenlehre

Seien A, B und C drei beliebige Mengen. Betrachten sie die sogenannte Bell'sche „Ungleichung“[1]

$$A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$$

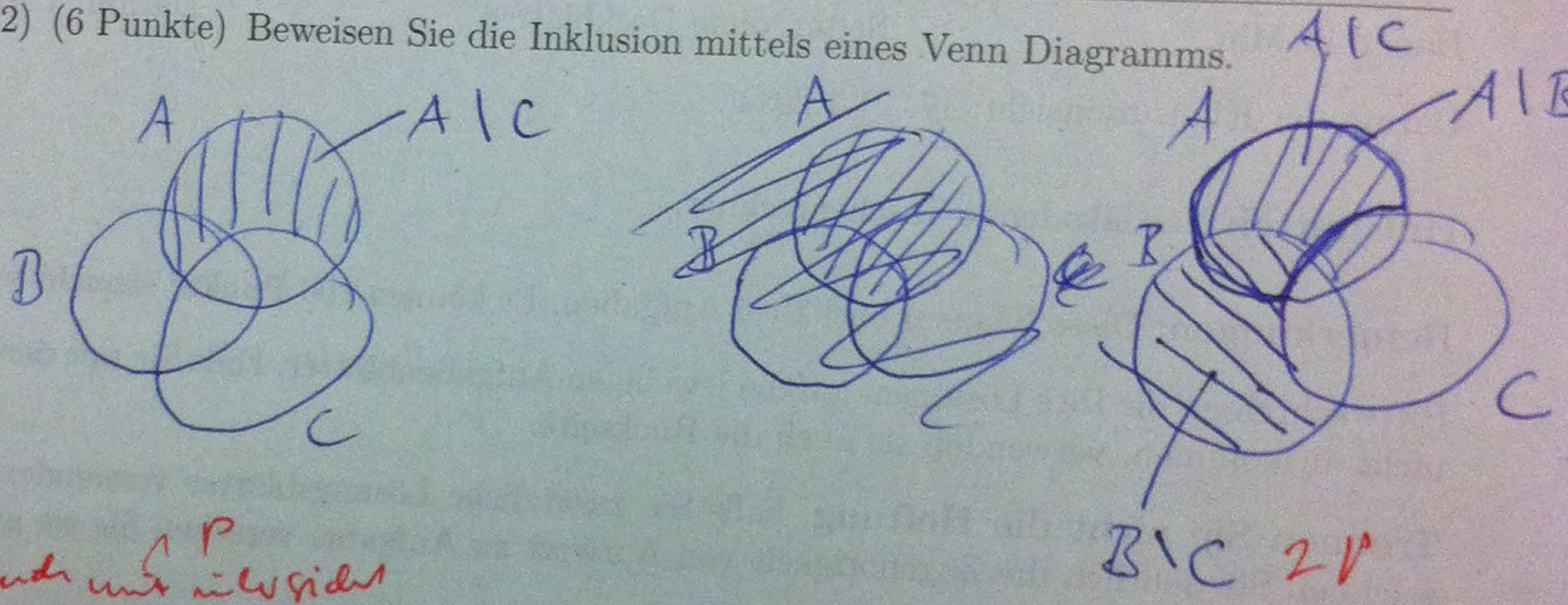
(1.1) (3 Punkte) Geben Sie die formalen Definitionen der Mengendifferenz, Vereinigung und Teilmenge an.

1P $A \setminus C = \{x \mid x \in A \wedge x \notin C\}$

1P $A \cup B = \{x \mid x \in A \cup x \in B\}$

1P $A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x \in A : x \in B$

(1.2) (6 Punkte) Beweisen Sie die Inklusion mittels eines Venn Diagramms.



2P

6P
für beide und 1P Übersicht

(1.3) (2 Punkte) Warum ist ein Venn Diagramm für eine derartige Aussage ein gültiger Beweis?

Weil eine vollständige Fallentscheidung gemacht wird.

wichtig

[1]Nicht klausurrelevant: Diese von John Bell 1964 verwendete Beziehung hat für die Quantenphysik weitreichende Konsequenzen. Die Tatsache, dass Messungen von Quantenzuständen die Ungleichung **nicht** erfüllen, beweist, dass der Zufallscharakter von Messungen von Quantenzuständen nicht auf fehlenden Daten beruht, sondern dass das Ergebnis einer Messung tatsächlich vorher nicht feststeht. Einsteins berühmte Aussage „Gott würfelt nicht.“ wird widerlegt.

(1.4) (6 Punkte) Beweisen Sie die Aussage mit einem formalen Beweis. Tipp: Verwenden Sie eine Fallunterscheidung für $x \in B \vee x \notin B$ und den Satz Vereinigung ist Obermenge.

Zu zeigen $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

Sei $x \in A \setminus C$ beliebig. Nach Def $\setminus$ folgt

$x \in A$ und

$x \notin C$

1. Fall $x \in B$

Dann ist $x \in B \setminus C$ und wegen Vereinig ist Obermenge $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

2. Fall $x \notin B$

Dann ist $x \in A \setminus B$ und wegen Vereinig ist Obermenge $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

In jedem Fall $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ wzbw.

Aufgabe 2 (27 Punkte)

(2.1) (7 Punkte) Geben Sie eine formale Definition der Fakultätsfunktion $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ mittels vollständiger Induktion.

$0! = 1$ −2 den Anfang

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : (n+1)! = (n+1)n!$ −2 den Quant.

(2.2) (20 Punkte) Beweisen Sie durch vollständige Induktion $\sum_{k=0}^{n}(k \cdot k!) = (n+1)! - 1$

Tipp: „Ergänzen“ Sie zunächst die Aufgabenstellung.

−2 $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

1 Induktionsanfang $(n=0)$

LS $\sum_{k=0}^{0} k \cdot k! = 0 \cdot 0! = 0$

RS $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$ ✓

LS = RS ✓ −2 fallsweise nicht passend

2 Induktionsschluss

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest

2.1 Ind.vor.

$\sum_{k=0}^{n} k k! = (n+1)! - 1$

Quantoren fehlen zur Totalverlust

2.2 Induktionsbeh.

✗ $\sum_{k=0}^{n+1} k k! = ((n+1)+1)! - 1$

2.3 Induktionsschritt

−8 ohne Teil

$\sum_{k=0}^{n+1} k k! = \sum_{k=0}^{n} k k! + \sum_{k=n+1}^{n+1} k \cdot k! \overset{2.1}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$

ausklammern $= (n+1)!(1 + n+1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1$

−5 ohne Prüfung $= (n+2)! - 1$ ☒

Aufgabe 3 (31 Punkte)

(3.1) (8 Punkte) Sei $\sqsubseteq$ eine Ordnungsrelation in der Menge M. Geben Sie die formale Definition für größte und maximale Elemente und obere Schranken und Suprema einer Teilmenge $A \subseteq M$ an.

g größtes E. von A $\Leftrightarrow g \in A \wedge \forall x \in A : x \sqsubseteq g$ 2-2

m maximales E von A $\Leftrightarrow m \in A \wedge \neg \exists x \in A : m \sqsubseteq x \wedge m \neq x$

$\Leftrightarrow m \in A \wedge \forall x \in A : m \sqsubseteq x \Rightarrow m = x$

s obere Schranke von A $\Leftrightarrow s \in M \wedge \forall x \in A : x \sqsubseteq s$

s Supremum $\Leftrightarrow$ s kleinste obere Schranke

$\Leftrightarrow \forall x \in A : x \sqsubseteq s \wedge$

$\forall os \in M : [\forall x \in A : x \sqsubseteq os] \Rightarrow s \sqsubseteq os$

nicht Pflicht

(3.2) (8 Punkte) Beweisen Sie die Aussage: Sei $\sqsubseteq$ eine Ordnungsrelation in der Menge M und $A \subseteq M$ beliebig. A hat höchstens ein größtes Element.

Seien g_1, g_2 größte E. von A. Dann gilt $g_1, g_2 \in A$

und (*) $\forall x \in A : x \sqsubseteq g_1$ und (**) $\forall x \in A : x \sqsubseteq g_2$

Daher gilt $g_2 \sqsubseteq g_1$ da (*) und $g_2 \in A$ und [illegible]

$g_1 \sqsubseteq g_2$ da (**) und $g_1 \in A$.

Wegen der Asymmetrie von $\sqsubseteq$ folgt

$g_1 = g_2$ wzbw.

Damit hat man als Lösung

− 8 falls mit 7 multipliziert wurde

$x = -58 \cdot 8 = -464 \equiv_{1547} 1083$

<u>Probe</u>: $560 \cdot 1083 = 606480 \equiv_{1547} 56$ ✓

Zusatz: Weitere Lösung $1547 = 7 \cdot 221$

1) $1083 + 2 \cdot 221 = 1525$
2) $1083 + 221 = 1304$
3) 1083
4) $1083 - 221 = 862$
5) $1083 - 2 \cdot 221 = 641$
6) $1083 - 3 \cdot 221 = 420$
7) $1083 - 4 \cdot 221 = 199$

nicht gefragt.

Viel Erfolg

(3.3) (9 Punkte) Beweisen Sie die Aussage: Sei $\sqsubseteq$ eine Ordnungsrelation in der Menge und $A \subseteq M$ beliebig. Wenn $g \in A$ größtes Element ist, dann ist es auch Supremum von A

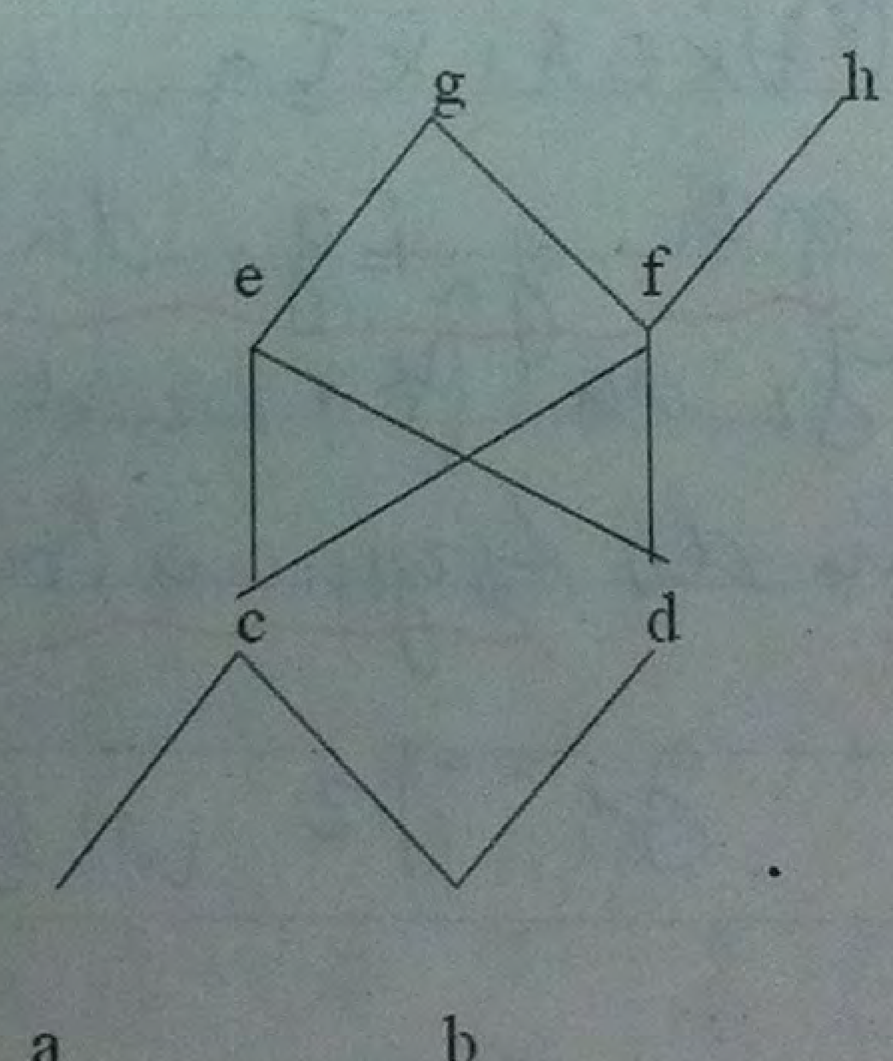
Sei $g \in A$ größtes E. von A. Da $\forall x \in A: x \sqsubseteq g$ folgt x ist obere Schranke von A

Sei OS eine beliebige Obere Schranke von A, dann gilt: $\forall x \in A: x \sqsubseteq OS$. Da $g \in A$ ist folgt $g \sqsubseteq OS$. g ist also kleiner als alle Oberen Schranke und damit kleinste obere Schranke

g ist obere Schranke 3 P

g ist kleinste obere Schranke +6 P

(3.4) (6 Punkte) Durch das folgende Hasse Diagramm sei eine Ordnungsrelation in der Menge $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ gegeben.



Bestimmen Sie obere Schranken, Supremum und obere Grenzen der Menge $\emptyset$.

obere Schranken von $\emptyset$: a, b, c, d, e, f, g, h

obere Grenzen: a, b

Supremum von $\emptyset$: gibt es nicht.

Zahlbeispiel, falls nicht vielts

Aufgabe 4 (25 Punkte)

(4.1) (4 Punkte) Verbalisieren Sie die Aussage

$$\forall a, b \in M : \exists x \in M : a \circ x = b$$

Tipp: Nutzen Sie hierfür die Begriffe Zeilen/Spalten und Verknüpfungstafel.

In jeder Zeile der Verknüpfungstafel kommt jedes Element mindestens ein mal vor.

Kein Punkt für wörtliche Übersetzung der Quantoren.

(4.2) (5 Punkte) Geben Sie durch Angabe einer Verknüpfungstafel ein Beispiel für eine algebraische Struktur über der Menge $M = \{0, 1\}$ an, für die

$$\forall a, b \in M : \exists x \in M : a \circ x = b$$

wahr ist, aber

$$\forall a, b \in M : \exists x \in M : x \circ a = b$$

falsch.

A)

	0	1
0	0	1
1	0	1

2 Abzug falls Zeilen oder Spalten vertauscht

oder

	0	1
0	1	0
1	1	0

(4.3) (5 Punkte) Ist die von Ihnen angegebene Verknüpfung assoziativ?

Ohne Begründung keine Punkte.

A) Ja, da für alle a, b $a \circ b = b$ folgt für alle $a, b, c \in M$

$(a \circ b) \circ c = c = b \circ c = (a \circ b) \circ c$

B) Nein, da $0 \circ (0 \circ 1) = 0 \circ 0 = 1$

$(0 \circ 0) \circ 1 = 1 \circ 1 = 0$.

(4.4) (11 Punkte) Ist die Restklassengleichung $[560]_{1547} \otimes [x]_{1547} = [56]_{1547}$ lösbar? Wenn ja, geben Sie mindestens eine Lösung an.

Euklid

$1547 = 2 \cdot 560 + 427$

$560 = 1 \cdot 427 + 133$

$427 = 3 \cdot 133 + 28$

$133 = 4 \cdot 28 + 21$

$28 = 1 \cdot 21 + \underline{\underline{7}}$ ggT $(1547, 560)$

$21 = 3 \cdot 7$

Da 56 ein Vielfaches von 7 ist, ist die Gl. lösbar.

Sollte als Ergebnis dastehen

$7 = 28 - 21 = 28 - (\cancel{4 \cdot 28}\ 133 - 4 \cdot 28)$

$= 5 \cdot 28 - 133$

$= 5(427 - 3 \cdot 133) - 133$

$= 5 \cdot 427 - 16 \cdot 133$

$= 5 \cdot 427 - 16(560 - 427)$

$= 21 \cdot 427 - 16 \cdot 560$

$= 21(1547 - 2 \cdot 560) - 16 \cdot 560$

$= 21 \cdot 1547 - 58 \cdot 560$