NORDAKADEMIE
HOCHSCHULE DER WIRTSCHAFT

Klausur
Mathematik 1. und 2. Semester
I06

Prof. Dr. Zimmermann

Matrikelnummer: ____________

Die Klausur ist Bestandteil der Bachelorprüfung im Sinne der Prüfungsordnung. Die Bearbeitungszeit ist 120 min. Handys, Taschen, Rucksäcke, Unterlagen etc. legen Sie bitte deutlich außerhalb Ihrer Reichweite (z.B. im hinteren Teil des Raumes) ab. Bei versuchter Täuschung wird die Klausur mit mangelhaft bewertet.

Zugelassene Hilfsmittel: Nordakademie Taschenrechner.

Überprüfen Sie die Anzahl der Seiten. Liegen Ihnen 7 Seiten (ohne Titelseite) vor?

Diese Klausur enthält 7 Aufgaben. Es können 100 Punkte erreicht werden. Zu Bestehen der Klausur benötigen Sie 50 Punkte.

Bitte schreiben Sie Ihre Matrikelnummer aber **nicht** Ihren Namen auf dieses Blatt und auf jeden Antwortbogen. Nummerieren Sie die Antwortbögen und kennzeichnen Sie die Zugehörigkeit ihrer Antworten zu den Aufgaben.

Schreiben Sie leserlich.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	Summe:
Punktzahl:	7	12	22	18	11	11	19	100
Davon erreicht:								

Datum: ____________ Note: ________ Unterschrift: ____________

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Schreiben Sie w für „wahr" oder f für „falsch" hinter die Aufgabe. Bewertung: Fehlende Antworten werden als falsch bewertet.

1. $\{1\} \in \{1, \{1,2\}\}$
2. $\{1\} \subseteq \{1, \{1,2\}\}$
3. $\{1\} \subsetneq \{1, \{1,2\}\}$
4. $\{1\} \not\subseteq \{1, \{1,2\}\}$
5. $1 \in \{1, \{1,2\}\}$
6. $\emptyset \in \{1, \{1,2\}\}$
7. $\emptyset \not\subseteq \{1, \{1,2\}\}$
8. $\emptyset \subsetneq \{1, \{1,2\}\}$
9. $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{1,2\}\}$
10. $\emptyset \in \{\emptyset, \{1,2\}\}$

Lösung:

1. $\{1\} \in \{1, \{1,2\}\}$ F
2. $\{1\} \subseteq \{1, \{1,2\}\}$ W
3. $\{1\} \subsetneq \{1, \{1,2\}\}$ W
4. $\{1\} \not\subseteq \{1, \{1,2\}\}$ F
5. $1 \in \{1, \{1,2\}\}$ W
6. $\emptyset \in \{1, \{1,2\}\}$ F
7. $\emptyset \not\subseteq \{1, \{1,2\}\}$ F
8. $\emptyset \subsetneq \{1, \{1,2\}\}$ W
9. $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{1,2\}\}$ W
10. $\emptyset \in \{\emptyset, \{1,2\}\}$ W

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Betrachten Sie die Aussage:

Seien S, T beliebige Mengen. Dann gilt: $S \subseteq S \cap T \Rightarrow S \subseteq T$.

(2.1) (4 Punkte) Geben Sie die formalen Definitionen von $\subseteq$ und $\cap$ wieder.

Lösung:
$S \subseteq T \Leftrightarrow \forall x \in S : x \in T$
$S \cap T = \{x | x \in S \wedge x \in T\}$

(2.2) (8 Punkte) Beweisen Sie die Aussage.

Bewertung: Die Aussage ist ein Teil eines besprochenen Satzes. Ihre Lösung **darf** aber nicht mehr beweisen, als gefordert.

Lösung:

Seien S, T zwei beliebige Mengen mit $S \subseteq S \cap T$. Wir sollen Zeigen $S \subseteq T$.

Sei dazu $x \in S$ beliebig aber fest. Nach der Voraussetzung $S \subseteq S \cap T$ und der Definition von $\subseteq$ gilt $x \in S \cap T$. Nach der Definition von $S \cap T$ folgt $x \in S \wedge x \in T$. Mit dem natürliche Schluss „und-aus" folgt $x \in T$.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

(3.1) (7 Punkte) Wir definieren Zahlen g_n für alle $n \in \mathbb{N}$ durch:

$$g_1 = 1$$
$$g_n = \begin{cases} g_{n/2} & : n \text{ gerade} \\ g_{3n+1} & : n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Berechnen Sie $g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7$

Lösung:

- $g_2 = g_1 = 1$
- $g_3 = g_{10} = g_5 = g_{16} = g_8 = g_4 = g_2 = 1$
- $g_4 = 1$ siehe oben
- $g_5 = 1$ siehe oben
- $g_6 = g_3 = 1$ siehe oben
- $g_7 = g_{22} = g_{11} = g_{34} = g_{17} = g_{52} = g_{26} = g_{13} = g_{40} = g_{20} = g_{10} = 1$ siehe oben

Warum handelt es sich nicht um eine Definition durch vollständige Induktion? Benennen Sie die Ursache des Problems.

Lösung:

Bei der Definition durch vollständige Induktion berechnet sich der Wert eines $n+1$ sten Elements aus dem Wert für das Vorgängerelement, oder den Vorgängerelementen. Bei der obigen Definition ist das für ungerade Zahlen aber nicht der Fall.

(3.2) (15 Punkte) Die Fibonacci Zahlen sind die Folge von Zahlen f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, die den Bedingungen genügen:

1. $f_0 = 1$ und $f_1 = 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}_2 : f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Hinweis: Die verwendeten Mengen sind: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_2 = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$$

Tipp: „Päzisieren" Sie zunächst die Aufgabenstellung.

Lösung:

Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang n=0
   Linke Seite: $\sum_{k=0}^{0} f_k = f_0 = 1$
   Rechte Seite: $f_2 + 1 = 2 - 1 = 1.$
2. Induktionsschluss
   Sein $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.
   (a) Induktionsvoraussetzung
   $\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$
   (b) Induktionsbehauptung
   $\sum_{k=0}^{n+1} f_k = f_{(n+1)+2} - 1$
   (c) Induktionsschritt
   $\sum_{k=0}^{n+1} f_k = \sum_{k=0}^{n} f_k + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$

Aufgabe 4 (18 Punkte)

(4.1) (2 Punkte) Was versteht man unter einem Prädikat?

Lösung:
Ein n-stelliges Prädikat ist ein Konstrukt, das je n Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens einen Wahrheitswert zuordnet.

(4.2) (4 Punkte) Was ist eine existentielle Generalisierung? Geben Sie ein Beispiel.

Lösung:

Eine existentielle Generalisierung ist eine Aussage in der der unbestimmte Artikel „ein“ eine Generalisierung einleitet. Beispiel. „Ein Hund frisst gerne Knochen“. Es handelt sich hier alle nicht um eine Existenzaussage, wie man aufrund des Wortes „ein“ zunächst annehmen könnte, sondern um eine Allaussage. Ein ist also hier keine Zahlwort.

(4.3) (8 Punkte) Benutzen Sie als Betrachtungsbereiche die Menge S der Studenten der Nordakademie und die Menge P der Prüfungen. Wir haben ein zweistelliges Prädikat, das Bestehen einer Prüfung: „· besteht ·“. Formulieren Sie folgende Aussagen mit Quantoren. Achten Sie darauf, dass keine Quantor negiert vorkommt.

1. Alle Studenten bestehen eine Prüfung.
2. Es gibt einen Studenten, der alle Prüfungen besteht.
3. Wenigstens ein Student besteht wenigstens eine Prüfung nicht.
4. Es gibt eine Prüfung, die alle Studenten bestehen.
5. Es gibt eine Prüfung, die kein Student besteht.
6. Niemand hat jemals irgendeine Prüfung bestanden.

Lösung:

1. $\forall s \in S\ \exists p \in P : s\ \mathit{besteht}\ p$.
2. $\exists s \in S\ \forall p \in P : s\ \mathit{besteht}\ p$.
3. $\exists p \in P\ \exists s \in S : \neg(s\ \mathit{besteht}\ p)$. oder $\exists s \in S\ \exists p \in P : \neg(s\ \mathit{besteht}\ p)$.
4. $\exists p \in P\ \forall s \in S : s\ \mathit{besteht}\ p$.
5. $\exists p \in P\ \forall s \in S : \neg(s\ \mathit{besteht}\ p)$.
6. $\forall p \in P\ \forall s \in S : \neg(s\ \mathit{besteht}\ p)$. oder $\forall s \in S\ \forall p \in P : \neg(s\ \mathit{besteht}\ p)$.

(4.4) (4 Punkte) Negieren Sie die Aussage: Alle Marsmännchen sind Mitglieder des Deutschen Bundestages. Schreiben Sie die Aussage und deren Negation mit Quantoren. Welche der Aussagen sind wahr und welche falsch?

Lösung:

Sei M die Menge aller Marsmännchen und B die Menge aller Mitglieder des deutschen Bundestages.

$$\forall x \in M : x \in B$$

Negation:

$$\exists x \in M : x \notin B$$

Da es keine Marsmännchen gibt, ist die zweite Aussage falsch und die erste richtig.

Aufgabe 5 (11 Punkte)
Themengebiet Relationen.

(5.1) (3 Punkte) Geben Sie die formalen Definitionen für eine Äquivalenzrelation in der Menge M und für Äquivalenzklassen.

Lösung:

$R \subseteq M \times M$ ist Äquivalenzrelation, wenn und nur wenn

1. $\forall x \in M : (x, x) \in R$ (Reflexivität)
2. $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (Symmetrie)
3. $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (Transitivität)

Für beliebiges $x \in M$ ist $[x]_R = \{y | (y, x) \in R\}$

(5.2) (8 Punkte) Sei $m \in \mathbb{N}$ ein fester Modulus. Welche der folgenden Definitionen ist sinnvoll?

- $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [a]_m \otimes [b]_m = [a \times b]_m$
- $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [a]_m < [b]_m = a < b$

Begründen Sie mit einem Beweis/Beispiel.

Lösung:

Die erste Definition ist sinnvoll, weil sie vom Repräsentanten unabhängig ist. Um die Unabhängigkeit von den Repräsentanten zu beweisen, seien zwei ganze Zahlen $a, a' \in \mathbb{Z}$ gegeben, die dieselbe Restklasse repräsentieren, also $[a]_m = [a']_m$. Ferner seien die Zahlen $b, b' \in \mathbb{Z}$ so, dass $[b]_m = [b']_m$. Wir müssen beweisen, dass $[a * b]_m = [a' * b']_m$ ist. Nach der Voraussetzung gibt es ganze Zahlen $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, so dass $a - a' = q_1 * m$ und $b - b' = q_2 * m$. Dann gilt:

$a*b-(a'*b') = a*b-a'*b+a'*b-a'*b' = (a-a')*b+a'*(b-b') = q_1*m*b+a'*q_2*m = (q_1 * b + a' * q_2) * m$

Die zweite Definition ist nicht sinnvoll, da sie nicht unabhängig vom Repräsentanten ist:

Beispiel: Es ist $[0]_5 = [5]_5$ und somit $[0]_5 < [5]_5$ sowohl wahr, denn $0 < 5$ trifft zu wie falsch: $[5]_5 < [0]_5$ trifft nicht zu da $5 < 0$ nicht wahr ist.

Themengebiet Abbildungen

Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen und $F : M_1 \to M_2$, $G : M_2 \to M_3$ beliebige Abbildungen.

Aufgabe 6 (11 Punkte)

(6.1) (3 Punkte) Wie ist der Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen? Bewertung: Fehlende Antworten werden als falsch bewertet.

- Damit $F \circ G$ injektiv ist, ist notwendig, dass F injektiv ist.
- Damit $F \circ G$ injektiv ist, ist hinreichend, dass F injektiv ist.
- Damit $F \circ G$ injektiv ist, ist notwendig und hinreichend, dass F injektiv ist.

Lösung:

- Damit $F \circ G$ injektiv ist, ist notwendig, dass F injektiv ist. Wahr
- Damit $F \circ G$ injektiv ist, ist hinreichend, dass F injektiv ist. Falsch
- Damit $F \circ G$ injektiv ist, ist notwendig und hinreichend, dass F injektiv ist. Falsch

(6.2) (8 Punkte) Beweisen Sie die Aussage: Wenn $F \circ G$ injektiv ist, dann ist F injektiv.

Lösung:

Seien F, G wie in der Aufgabe beschrieben, insbesondere $F \circ G$ injektiv. Wir müssen zeigen: $\forall x_1, x_2 \in M_1, y \in M_2 : (x_1, y) \in F \wedge (x_2, y) \in F \Rightarrow x_1 = x_2$.

Sei dazu $x_1, x_2 \in M_1$ und $y \in M_2$ beliebig mit $(x_1, y) \in F \wedge (x_2, y) \in F$. Da G linkstotal ist, gibt es es ein $z \in M_3$, so dass $(y, z) \in G$. Nach der Definition der Verkettung von Relationen gilt $(x_1, z) \in F \circ G$ und $(x_2, z) \in F \circ G$. Aus der Injektivität von $F \circ G$ folgt nun $x_1 = x_2$.

Aufgabe 7 (19 Punkte)

Themengebiet Gruppen

(7.1) (6 Punkte) Geben Sie die Definition einer Gruppe wieder.

Lösung:

Eine algebraische Struktur $(G, \circ)$ heißt Gruppe , wenn gilt:

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (Assoziativgesetz)
2. Es gibt ein $e \in G$ (neutrales Element von G) mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $e \circ a = a$ für alle $a \in G$, (linksneutrales Element)
   (b) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$ mit $a' \circ a = e$.

(7.2) (9 Punkte) Beweisen Sie die folgende Aussage:

Eine algebraische Struktur $(G, \circ)$ die folgende Gesetze erfüllt

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in G$. (Assoziativität)

2. (a) Die Gleichung $a \circ x = b$ für jedes $a, b \in G$ ist mit einem Element $x \in G$ lösbar.

   (b) Die Gleichung $y \circ a = b$ für jedes $a, b \in G$ ist mit einem Element $y \in G$ lösbar.

ist eine Gruppe.

Lösung:

Zu zeigen ist, dass G eine Gruppe ist, also dass G die Definition der Gruppe erfüllt. (1) gilt zweifelsohne. Es bleibt also (2) zu zeigen. Wir wählen uns nun ein a_0 (G darf also nicht leer sein). Dann gibt es ein $e \in G$, so dass die Gleichung $e \circ a_0 = a_0$ erfüllt ist. Nun wählen wir uns ein beliebiges $a \in G$ und dazu ein c, so dass $a_0 \circ c = a$. Dann ist $e \circ a = e \circ a_0 \circ c = a_0 \circ c = a$.

185/186 a.L.

Nun beweisen wir (2b). Laut (2 Gleichungsvariante b) lässt sich zu jeder Gleichung $d \circ a = b$ für zwei vorgegebene a, b ein d finden, so dass die Gleichung $d \circ a = b$ erfüllt ist. Insbesondere lässt sich ein d zur Gleichung $d \circ a = e$ finden (da ja $e \in G$). Dieses d ist damit das verlangte linksinverse Element zu a.

(7.3) (4 Punkte) Wieviele inverse Elemente zu 27 gibt es in der in der Gruppe

$$(\mathbb{Z}/127 \setminus \{[0]_{127}\}, \otimes)$$

Lösung:

Da es in einer Gruppe immer genau ein inverses Element gibt: eins.

Viel Erfolg