Lösungsvorschläge zu Aufgabenblatt 7

(Algebraische Strukturen und Verknüpfungen)

Aufgabe 7.1

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ definiere $\max(a, b) := \sup\{a, b\}$.

(a) Begründen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \max)$ eine algebraische Struktur ist.

(b) Gelten Kommutativ- und/oder Assoziativgesetz in $(\mathbb{Z}, \max)$?

(c) Welche Existenz- und/oder Eindeutigkeitssätze gelten in $(\mathbb{Z}, \max)$?

Lösung

(a) Hier ist nur zu bemerken, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ auch wieder $\max(a, b) \in \mathbb{Z}$ gilt.

(b) Es gelten Kommutativ- und Assoziativgesetz, dann nach den Rechenregeln für Supremum (vgl. Kapitel Verbände) gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$\max(a, b) = \sup\{a, b\} = \max(b, a),$$

und

$$\max(\max(a, b), c) = \sup\{\sup\{a, b\}, c\} = \sup\{a, b, c\} = \sup\{a, \sup\{b, c\}\} = \max(a, \max(b, c)).$$

(c) Es gelten weder Existenz- noch Eindeutigkeitssätze. Da die algebraische Struktur $(\mathbb{Z}, \max)$ kommutativ ist, reicht es, jeweils ein einseitiges Beispiel anzugeben.

Gegenbeispiel für Existenzsatz: Setze $a := 1$ und $b := 0$, dann gibt es kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $\max(a, x) = 0$, da immer $\max(a, b) \geqslant 1$ ist.

Gegenbeispiel für Eindeutigkeitssatz: Setze $a := b := 1$. Für $x_1 := 1$ und $x_2 := 0$ gilt dann $\max(a, x_1) = \max(1, 1) = 1 = b$ und $\max(a, x_2) = \max(1, 0) = 1 = b$. Also sind x_1 und x_2 zwei verschiedene Lösungen der Gleichung $\max(a, x) = b$.

Aufgabe 7.2

Geben Sie durch Angabe einer Verknüpfungstafel ein Beispiel für eine algebraische Struktur an, für die "$\forall a, b \in M\ \exists x \in M : a \circ x = b$" wahr ist, aber "$\forall a, b \in M\ \exists x \in M : x \circ a = b$" falsch ist.

Lösung

Ein mögliches Beispiel ist $M := \{0, 1\}$ mit der Verknüpfung $a \circ b := b$ für alle $a, b \in M$. Die zugehörige Verknüpfungstafel lautet:

$\circ$	0	1
0	0	1
1	0	1

Für alle $a, b \in M$ wird dann die Gleichung $a \circ x = b$ durch $x := b$ gelöst, hingegen besitzt z.B. die Gleichung $x \circ 1 = 0$ keine Lösung $x \in M$.

Aufgabe 7.3

Es sei X eine mindestens 2-elementige Menge und $M := P(X \times X)$ die Menge aller Relationen auf M. Bezeichne mit "$\circ$" die Verkettung von Relationen, also $R \circ S := SR$ für alle $R, S \in M$. Gilt in der algebraischen Struktur $(M, \circ)$ ein Existenz- und/oder Eindeutigkeitssatz?

Lösung

Es gelten weder Existenz- noch Eindeutigkeitssätze. Da $(M, \circ)$ nicht kommutativ ist, müssen wir insgesamt 4 Aussagen zeigen, nämlich dass weder ein rechts- noch linksseitiger Existenz- oder Eindeutigkeitssatz gilt. Dazu fixieren wir zwei Elemente $a, b \in X$ mit $a \neq b$ und geben damit jeweils Gegenbeispiele an.

Gegenbeispiel für Existenzsätze: Setze $S := \{(a,a)\}$ und $T := \{(a,a),(b,b)\}$. Dann gibt es kein $R \in M$ mit $R \circ S = T$, denn nach Definition von S ist sicher $(b,b) \notin R \circ S$ für alle $R \in M$. Außerdem gibt es kein $R \in M$ mit $R \circ S = T$, denn nach Definition von S ist sicher auch $(b,b) \notin S \circ R$ für alle $R \in M$. Also gilt keiner der beiden Existenzsätze.

Gegenbeispiel für rechtsseitigen Eindeutigkeitssatz: Setze $T := \{(a,a)\}$ und $S := \{(a,a),(b,a)\}$. Für $R_1 := \{(a,a)\}$ und $R_2 := \{(a,a),(a,b)\}$ gilt dann $S \circ R_1 = T$ und $S \circ R_2 = T$, beide sind also Lösungen der Gleichung $S \circ S = T$. Es gilt also kein rechtsseitiger Eindeutigkeitssatz.

Gegenbeispiel für linksseitigen Eindeutigkeitssatz: Setze $T := \{(a,a)\}$ und $S := \{(a,a),(a,b)\}$. Für $R_1 := \{(a,a)\}$ und $R_2 := \{(a,a),(b,a)\}$ gilt dann $R_1 \circ S = T$ und $R_2 \circ S = T$, beide sind also Lösungen der Gleichung $x \circ S = T$. Es gilt also kein linksseitiger Eindeutigkeitssatz.