Mathe Übungen für Klausur 1. Semester

Zimmermann

1. Mengenlehre

a) Welche der folgenden Mengen ist korrekt?

1. $\{x|x \text{ ist natürliche Zahl} \geq 1\}$
2. $\{x| \text{ Marsmännchen }\}$
3. $\{x|x \text{ ist Marsmännchen }\}$
4. $\{x \in \mathbb{N}|x^2 + 1 > 0\}$

b) Welche der Aussagen ist richtig?

1. $\{1\} \in \{1, 2, 3, 4\}$
2. $\{5\} \notin \{x|x \text{ ist natürliche Zahl} < 5\}$
3. $2 \in \{x|x \text{ ist gerade Primzahl}\}$
4. $\text{Brauer} \in \{x|x \text{ ist Informatik Dozent an der Nordakadmie}\}$
5. $\{2, 3\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
6. $2 \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. $\{1\} \in \{1, \{1, 2\}\}$
2. $\{1\} \subseteq \{1, \{1, 2\}\}$
3. $\{1\} \subsetneq \{1, \{1, 2\}\}$
4. $\{1\} \not\subseteq \{1, \{1, 2\}\}$
5. $1 \in \{1, \{1, 2\}\}$
6. $\emptyset \in \{1, \{1, 2\}\}$
7. $\emptyset \not\subseteq \{1, \{1, 2\}\}$
8. $\emptyset \subsetneq \{1, \{1, 2\}\}$
9. $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{1, 2\}\}$
10. $\emptyset \in \{\emptyset, \{1, 2\}\}$

d) Zählen Sie die Elemente der Potenzmenge der folgenden Mengen auf:

1. $M = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $M = \{\{1, 2\}, 1\}$
3. $M = \{\{1, 2\}, \emptyset\}$

e) Berechnen Sie:

1. $\{1, \{1,2\}\} \cup \{2, \{2,1\}\}$
2. $\{\emptyset, \{1,2\}\} \cap \{2, \{2,3\}\}$
3. $\{1, \{1,2\}\} \setminus \{2, \{2,1\}\}$
4. $\{1, \{1,2\}\} \setminus \{\emptyset\}$
5. $\{1, \{1,2\}\} \Delta \{2, \{2,1\}\}$
6. $\{1, \{1,2\}\} \Delta \emptyset$
7. $\emptyset \Delta \emptyset$

f) Beweisen Sie den Satz „Vereinigung ist Obermenge“

g) Beweisen Sie den Satz „Charakterisierung Teilmenge durch Vereinigung“

h) Beweisen Sie $A \cup B = B \cup A$

2. Prädikatenlogik

a) Bestimmen Sie, ob es sich bei den folgenden sprachlichen Konstrukten um au Aussagenlogische/prädikatenlogische Aussagen/Aussagenformen handelt.

1. wahr $\vee$ falsch
2. Das Ulmer Münster steht in Münster
3. Das Ulmer Münster steht in x
4. Wenn das Ulmer Münster in x steht, dann liegt x an der Donau
5. (Das Ulmer Münster steht in x) $\Rightarrow$ (x liegt an der Donau)
6. (Das Ulmer Münster steht in x) $\Rightarrow$ (y liegt an der Donau)
7. $wahr \vee x$
8. (Das Ulmer Münster steht in x) $\Rightarrow x$

b) Definieren Sie für die folgenden Behauptungen in natürlicher Sprache Prädikate und schreiben Sie sie als eingeschränkte und uneingeschränkte Generalisierungen. Machen Sie eine Aussagen zum Wahrheitsgehalt.

1. Alle Nordakademiedozenten sind lieb.
2. Alle Nordakademiedozenten lieben alle Nordakademiestudenten.
3. Männer sterben an Herzinfarkt.
4. Männer bestechen durch ihr Geld und ihre Lässigkeit.
5. Männer lieben Autos. Benutzen Sie ein einstelliges Prädikat.
6. Männer lieben Autos. Benutzen Sie ein zweistelliges Prädikat.
7. Alle Marsmännchen sind Mitglieder im deutschen Bundestag.

c) Handelt es sich bei den folgenden Konstrukten um Aussagen oder um Aussagenformen?

1. $\forall x \in \mathbb{N} : x > y$
2. $\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : (x+y)^2 > 3 * x$
3. $\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x > 10 \Rightarrow (x+y)^2 > 127$
4. $\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x > 10 \Rightarrow y + x > 20$
5. $\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : y * x > 20 * z$

d) Die Firma Contor Bräu ist Hersteller jeder Menge Biermarken. Sie beschäftigt eine Menge Mitarbeiter in einer Menge Abteilungen. Seien:

$M = \{m | m$ ist Mitarbeiter der Firma Cantor Bräu $\}$

$A = \{a | a$ ist Abteilung der Firma Cantor Bräu $\}$

$B = \{b | b$ ist Biermarke der Firma Cantor Bräu $\}$

Betrachten Sie die folgenden Aussagen der Geschäftsleitung.

1. Unsere Mitarbeiter sind glücklich. Ergänzen Sie den Quantor:
   ....$m \in M$: m ist glücklich.
2. Jeder Mitarbeiter stellt mindestens eine Biermarke her. Ergänzen Sie den Lückentext durch geeignete Quantoren:
   ....$m \in M$: ....$b \in B$: m stellt b her
   Negieren Sie diese Aussage:
   .... : m stellt b nicht her
   und formulieren Sie daraus einen deutschen Satz.
3. Können Sie auch die Aussage „Jede Abteilung hat eine Biermarke, die ihre Mitarbeiter herstellen" mit Quantoren formulieren?
   .... m arbeitetIn a .... m stellt b her

4. Formulieren Sie die umgangssprachlichen Aussagen „Ein Mitarbeiter arbeitet in einer Abteilung". „Ein Mitarbeiter stellt zwei Biermarken her." Achten Sie auf die Betonung!

e) Die Firma Fränkelbräu ist eine andere global vertretene Brauerei. Sie K die Menge aller Kunden, R die Menge der Vertriebsregion und V die Menge der Vertriebsmitarbeiter. Übertragen Sie die folgenden Aussagen der Vertriebsleiters Adolf Abraham Haveli Fränkel in prädikatenlogische Ausdrücke mit Quantoren. Folgende Prädikate sollen verwendet werden:

- **Kunde gehört zu Vetriebsregion**
- **Vertriebsmitarbeiter betreut Kunde**

1. Alle Kunden sind einer Vertriebsregion zugeordnet.
2. Jeder Vertriebsmitarbeiter betreut in wenigstens einer Region alle Kunden.
3. Ein Kunde wird von einem Vertriebsmitarbeiter betreut.
4. Manche Kunden werden von mehr als einem Vertriebsmitarbeiter betreut.

Negieren Sie die zweite Aussage und schreiben Sie sie so, dass keine Quantoren negiert vorkommen.

3.Vollständige Induktion

a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

b) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1) = n^2$

c) $\forall n \in \mathbb{N} : (1+p)^n \geq 1 + n \cdot p$

d) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n^3 - n$ ist durch 3 teilbar.

e) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n} (k \cdot k!) = (n+1)! - 1$

f) $\forall n \in \mathbb{N}_2 : f_n \geq 2^{n/2}$

g)

Nahe Verwandte der Fibonacci Zahlen f_n sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch folgende rekursive Definition festgelegt:

- $f_0 = 2 \quad f_1 = 3$
- $\forall n \in \mathbb{N} : f_{n+1} = 3 \cdot f_n - 2 \cdot f_{n-1}$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : f_n = 2^n + 1$$

h)

(3.1) (15 Punkte) Sei f_n, $n \in \mathbb{N}_0$ eine Folge von Zahlen, die den Bedingungen genügt:

1. $f_0 = 1$ und $f_1 = 3$
2. $\forall n \in \mathbb{N}_2 : f_n = 2f_{n-1} + 3f_{n-2}$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $f_n = 3^n$
Hinweise: $\mathbb{N}_2 = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$. „Präzisieren“ Sie zunächst die Aufgabenstellung.

Albert – Boolesche Algebra

a)

Ist $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie?

a) $F_1 := (x_0 \to x_1) \to (x_0 \to x_1)$.

b) $F_2 := x_0 \to ((x_0 \to x_1) \to x_1)$.

Anmerkung: "$A := B$" bedeutet "A wird durch B definiert".

b) Schaltungen

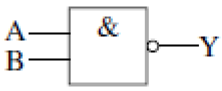
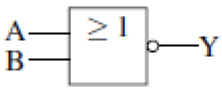
a) Stellen Sie ein OR-Gatter ausschließlich durch Verwendung von NAND-Gattern dar.

b) Stellen Sie ein NOR-Gatter ausschließlich durch Verwendung von NAND-Gattern dar.

c) Stellen Sie ein AND-Gatter ausschließlich durch Verwendung von NOR-Gattern dar.

d) Stellen Sie ein NAND-Gatter ausschließlich durch Verwendung von NOR-Gattern dar.

Sie dürfen jeweils mehrere NANDS, NORs verwenden. Geben Sie als Lösung die logische Formel an. (Sie können optional auch jeweils ein Schaltbild zeichnen.)

	Symbol nach IEC 60617-12 (DIN 40900)	Funktion
NAND		$Y = \overline{AB}$
NOR		$Y = \overline{A+B}$

c) Vereinfachen

Vereinfachen Sie die folgenden Formeln:

a) $AB + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}$

b) $ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$

c) $AC + \bar{C}B + \bar{A}C + \bar{B}$
(Hinweis: Versuchen Sie eine Umwandlung, die die Formel b) ergibt. Dann können Sie wie bei b) fortfahren.)

d)

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Varianten des Distributivgesetzes für $\leftrightarrow$ und $\not\leftrightarrow$ falsch sind.

a) $((x+y) \not\leftrightarrow (y+z)) \leftrightarrow ((x \not\leftrightarrow y) + z)$

b) $((xy) \leftrightarrow (yz)) \leftrightarrow ((x \leftrightarrow y)z)$

e) KDNF/KKNF

Eine boolesche Funktion $\lambda : B^3 \to B, \quad y = \lambda(x_0, x_1, x_2)$ mit $B := \{0,1\}$ sei durch die folgende Wertetabelle beschrieben:

x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

a) Stellen Sie sowohl die KDNF als auch die KKNF für λ auf.

b) Stellen Sie auch die KDNF und die KKNF für die negierte Funktion $\bar{\lambda}$ auf. (Die negierte Funktion $\bar{\lambda}$ liefert $\bar{y}$.)

f) KV-Diagramm

Gegeben sei ein Schaltgatter, das vier Eingänge (x_0, x_1, x_2, x_3) und zwei Ausgänge (y_1, y_2) hat. Das Schaltverhalten ist durch die folgende Wertetabelle dargestellt.

x_3	x_2	x_1	x_0	y_1	y_2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0

a) Geben Sie eine Darstellung als KDNF.

b) Wie lautet das dazugehörige KV-Diagramm?

c) Falls Minimierung schon besprochen: Welche minimalen DNFs können Sie aus dem KV-Diagramm ablesen?

g)

Gegeben sind die beiden folgenden Ausdrücke:

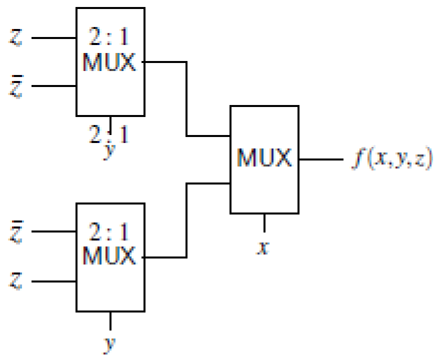
1. $x_0x_2 + \bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_0x_1\bar{x}_2 + x_0\bar{x}_1x_2$
2. $x_0x_1 + \bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_0x_1\bar{x}_2 + x_0\bar{x}_1x_2$

a) Sind die beiden Ausdrücke äquivalent? Wie können Sie diese Frage sofort beantworten?

b) Beweisen Sie die Äquivalenz auch mittels Umformung oder zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass beide Ausdrücke nicht äquivalent sind.

h) Multiplexer

Welche Schaltfunktion f wird mit folgender Schaltung implementiert? (Geben Sie eine Formel an.)



i)

Die durch die folgende Wertetabelle definierte Schaltfunktion soll mit 2:1 Multiplexern realisiert werden.

Index	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1	Y
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	1	0	0	
5	0	0	1	0	1	
6	0	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	1
8	0	1	0	0	0	1
9	0	1	0	0	1	
10	0	1	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	1
12	0	1	1	0	0	
13	0	1	1	0	1	
14	0	1	1	1	0	
15	0	1	1	1	1	1
16	1	0	0	0	0	
17	1	0	0	0	1	
18	1	0	0	1	0	
19	1	0	0	1	1	
20	1	0	1	0	0	
21	1	0	1	0	1	
22	1	0	1	1	0	
23	1	0	1	1	1	1
24	1	1	0	0	0	1
25	1	1	0	0	1	1
26	1	1	0	1	0	1
27	1	1	0	1	1	
28	1	1	1	0	0	
29	1	1	1	0	1	
30	1	1	1	1	0	1
31	1	1	1	1	1	1

a) Stellen Sie das Schaltbild auf.

b) Wie lautet die minimale Darstellung der Funktion?

j) Resolutionskalkül

Gegeben sei die folgende Schaltfunktion $\lambda(v,x,y,z)$. Zeigen Sie mittels des Resolutionskalküls, dass λ immer 1 ausgibt.

$$\lambda(v,x,y,z) = x\bar{y} + \bar{x}z + \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \bar{v} + xy + \bar{x} \cdot v \cdot \bar{z}.$$

k) Resolutionskalkül

Beweisen Sie mittels des Resolutionskalküls, dass $\lambda \leftrightarrow 1$, wobei $\lambda = \bar{x}_0\bar{x}_1 + x_0x_2 + x_1\bar{x}_2 + x_0\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_0x_1x_2$.

l) Resolutionskalkül

Zeigen Sie mittels des Resolutionskalküls, dass die folgende Formel eine Tautologie ist:

$$(x_1x_2 \leftrightarrow \bar{x}_3) + (x_2 \not\leftrightarrow x_0x_1) + (x_3 \leftrightarrow x_2).$$

Lösungen:

1. Mengenlehre

a)

1. Die erste Definition ist korrekt
2. Die Laufvariable x wird in der definierenden Eigenschaft nicht verwendet. Deshalb ist das keine korrekt definierte Menge.
3. Auch wenn Sie fest davon überzeugt sind, dass es keine Marsmännchen gibt, ist diese Menge korrekt definiert.
4. Auch diese Definition ist zulässig. Es stört nicht, dass $x^2 + 1 > 0$ immer richtig ist.

b)

1. Diese Aussage ist falsch. Es gilt aber: $1 \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Diese Aussage ist wahr.
3. Diese Aussage ist wahr.
4. Diese Aussage ist wahr.
5. Diese Aussage ist falsch. Aber auch die Aussagen $2 \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ und $3 \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ sind beide falsch!
6. Die Aussage ist falsch. Es gilt auch nicht $\{2\} \in \{\{1, 2\}, \{3.4\}\}$.

c)

1. Die Aussage ist falsch.
2. Die Aussage ist wahr.
3. Die Aussage ist wahr.
4. Die Aussage ist falsch. Siehe 2.
5. Die Aussage ist wahr. Vergleiche 1.
6. Diese Aussage ist falsch.
7. Diese Aussage ist falsch. Vergleiche 8.
8. Die Aussage ist wahr.
9. Die Aussage ist wahr.
10. Die Aussage ist wahr.

d)

1. $P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
2. $P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, \{1, 2\}\}\}$
3. $P(M) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1, 2\}\}\}$

e)

1. $\{1, 2, \{1, 2\}\}$
2. $\emptyset$
3. $\{1\}$
4. $\{1, \{1, 2\}\}$
5. $\{1, 2\}$
6. $\{1, \{1, 2\}\}$
7. $\emptyset$ Die Menge $\{1, 2, \{1, 2\}\}$ ist disjunkt zum Ergebnis 2 und 7.

f)

Lösung 2.6.4: Seien S, T beliebige Mengen. Wir müssen zeigen, dass $T \subseteq S \cup T$. Sei dazu $x \in T$ beliebig. Da schon $x \in T$ wahr ist, muss auch $x \in S \vee x \in T$ wahr sein. Nach der Definition des Duchschnitts ist $x \in S \cap T$.

g)

Lösung 2.6.5: Seien S, T beliebige Mengen. Um die Äquivalenz zu zeigen, beweisen wir die zwei Folgerungen:

1. $S \subseteq T \Rightarrow S \cup T = T$

   Wir haben als Voraussetzung $S \subseteq T$. Nach der Definition der Mengengleichheit haben wir zwei Aussage zu beweisen:

   a) Jedes Element von $S \cup T$ ist auch Element von T. Und
   b) Jedes Element von T ist Element von $S \cup T$.

   Zum Beweis der ersten Teilaussage sei $x \in T \cap S$ beliebig. Nach der Definition der Vereinigung bedeutet dies $x \in S \vee x \in T$. Nun müssen wir eine Fallunterscheidung machen. Wenn $x \in S$ ist, können wir die Voraussetzung $S \subseteq T$ anwenden, um zu schließen, dass $x \in T$ sein muss. Im anderen Fall gilt $x \in T$. Egal welcher Fall eintritt, $x \in T$ muss richtig sein. Damit ist dann auch die erste Teilaussage bewiesen .

   Die zweite Teilaussage ist genau die Aussage der vorherigen Aufgabe.

2. $S \subseteq T \Leftarrow S \cup T = T$

   Jetzt haben wir die Voraussetzung $S \cup T = T$. Wir müssen zeigen: $S \subseteq T$. Sei dazu $x \in S$ beliebig. Da schon $x \in S$ wahr ist, ist sicher $x \in S \vee x \in T$ wahr und damit nach der Definition des Durchschnitts $x \in S \cap T$. Da $S \cap T = T$ vorausgesetzt wurde, folgt nach der Definition der Mengengleichheit $x \in T$. Das war aber für die Teilmengeneigenschaft zu zeigen.

h)

Um eine Mengengleichheit zu beweisen muss laut Definition 2.4.1 gezeigt werden, dass „Jedes Element von $A \cup B$ auch Element von $B \cup A$ ist“ und „Jedes Element von $B \cup A$ auch Element von $A \cup B$ ist“. Wir zeigen zuerst die erste Teilaussage: Sei dazu $x \in A \cup B$ beliebig. Nach der Definition der Vereinigung bedeutet das, dass $x \in A \vee x \in B$ wahr ist. Wegen der Vertauschbarkeit der Operanden von „$\vee$“ (Kommutativgesetz von $\vee$) folgt, dass $x \in B \vee x \in A$. Wendet man ein zweites Mal die Definition von $\cup$ an, so erhält man: $x \in B \cup A$. Die zweite Teilaussage beweist man genauso. **q.e.d.**

2. Prädikatenlogik

a)

1. aussagenlogische Aussage
2. prädikatenlogische Aussage
3. prädikatenlogische Aussageform (freie prädikatenlogische Variable x)
4. prädikatenlogische Aussageform (freie prädikatenlogische Variable x)
5. prädikatenlogische Aussageform (freie prädikatenlogische Variable x)
6. prädikatenlogische Aussageform (freie prädikatenlogische Variablen x,y)
7. aussagenlogigische Aussageform (freie aussagenlogische Variable x)
8. Murks, das x sowohl prädikatenlogische als auch aussagenlogische Variable sein müsste.

b)

1. Uneingeschränkte Schreibweise:

   $$\forall x : x \text{ ist Nordakademiedozent } \Rightarrow x \text{ ist lieb}$$

   Eingeschränkte Schreibweise: Sei $D = \{x | x \text{ ist Nordakademiedozent}\}$.

   $$\forall x \in D : x \text{ ist lieb}$$

   Diese Aussage ist selbstverständlich wahr :-).

2. Uneingeschränkte Schreibweise:

   $$\forall x : \forall y : (x \text{ ist Nordakademiedozent } \wedge y \text{ ist Nordakademiestudent}) \Rightarrow x \text{ ist liebt } y$$

   Bitte beachten Sie die Klammersetzung.
   Eingeschränkte Schreibweise: Sei $D = \{x | x \text{ ist Nordakademiedozent}\}$ und $S = \{x | x \text{ ist Nordakademiestudent}\}$

   $$\forall x \in D : \forall y \in S : x \text{ ist liebt } y$$

   Da Ihnen die Dozenten der Nordakademie nichts böses wollen, ist diese Aussage auch wahr, zumindest können wir uns das einbilden.

3. Uneingeschränkte Schreibweise:

   $$\forall x : x \text{ ist Mann } \Rightarrow x \text{ stirbt an Herzinfarkt}$$

   Eingeschränkte Schreibweise: Sei $M = \{x | x \text{ ist Mann}\}$.

   $$\forall x \in M : x \text{ stirbt an Herinfarkt}$$

   Da zum Beispiel Caesar nicht an Herzinfarkt gestorben ist, ist diese Aussage falsch.

4. Uneingeschränkte Schreibweise:

   $$\forall x : x \text{ ist Mann } \Rightarrow (x \text{ besticht durch sein Geld } \wedge x \text{ besticht durch eine Lässigkeit})$$

   Bitte achten Sie auf die Klammersetzung.
   Eingeschränkte Schreibweise: Sei $M = \{x | x \text{ ist Mann}\}$.

   $$\forall x \in M : x \text{ besticht durch sein Geld } \wedge x \text{ besticht durch eine Lässigkeit}$$

5. Uneingeschränkte Schreibweise:

   $$\forall x : x \text{ ist Mann } \Rightarrow x \text{ liebt Autos}$$

   Eingeschränkte Schreibweise: Sei $M = \{x | x \text{ ist Mann}\}$.

   $$\forall x \in M : x \text{ liebt Autos}$$

   Vermutlich ist diese Aussage falsch, denn Männer lieben zwar schnelle Autos, aber eher nicht alle Autos.

6. Uneingeschränkte Schreibweise:

   $$\forall x : \forall y : (x \text{ ist Mann } \wedge y \text{ ist Auto }) \Rightarrow x \text{ liebt } y$$

   Eingeschränkte Schreibweise: Sei $M = \{x | x \text{ ist Mann}\}$ und $A = \{a | a \text{ ist Auto}\}$.

   $$\forall x \in M : \forall y \in A : x \text{ liebt } y$$

7. Uneingeschränkte Schreibweise:

   $$\forall x : x \text{ ist Marsmännchen } \Rightarrow x \text{ ist im Deutschen Bundestag}$$

   Eingeschränkte Schreibweise: Sei $M = \{x | x \text{ ist Marsmännchen}\}$.

   $$\forall x \in M : x \text{ ist im Deutschen Bundestag}$$

   Die Aussage ist mit Sicherheit wahr.

c)

1. Aussageform
2. Aussage
3. Aussage
4. Aussage
5. Aussageform

d)

1. $\forall m \in M : m$ ist glücklich.
2. a) $\forall m \in M : \exists b \in B : m$ stellt b her.
   b) $\exists m \in M : \forall b \in B : m$ stellt b nicht her.
   c) „Es gibt einen Mitarbeiter, der alle Biermarken nicht herstellt.“ oder „Es gibt einen Mitarbeiter, der keine Biermarke herstellt.“
3. $\forall a \in A : \exists b \in B : \forall m \in M : m$ arbeitetIn $a \Rightarrow m$ stellt b her.
4. a) Offensichlich wird durch „Ein Mitarbeiter“ eine existenzielle Generalisierung eingeleitet. Alles andere würde keinen Sinn machen. Also: $\forall m \in M : \exists a \in A :$ m arbeitetIn a
   b) „Ein Mitarbeiter“ ist hier eine Partikularisierung. $\exists m \in M : \exists b_1 \in B : \exists b_2 \in B : m$ stellt b_1 her $\wedge$ m stellt b_2 her $\wedge$ $b_1 \neq b_2$

e)

1. $\forall k \in K\ \exists r \in R : k$ gehört zu r
2. $\forall v \in V\ \exists r \in R\ \forall k \in K :\ k$ gehört zu $r \Rightarrow v$ betreut k
3. $\forall k \in K\ \exists v \in V :\ v$ betreut k
4. $\exists k \in K\ \exists v_1 \in V\ \exists v_2 \in V :\ v_1 \neq v_2 \quad \wedge \quad v_1$ betreut $k \quad \wedge \quad v_2$ betreut k

Die Negation der zweiten Aussage ist:

$\exists v \in V\ \forall r \in R\ \exists k \in K :\ k$ gehört zu $r \wedge \neg(v$ betreut $k)$

3. Vollständige Induktion

a)

1. Induktionsanfang: Richtigkeit der Aussage P(1):

   Wir haben zu zeigen, dass die Formel für $n = 1$ richtig ist. Dazu rechnen wir einfach beide Seiten aus:

   Linke Seite $n = 1$ eingesetzt: $\sum_{k=1}^{1} k = 1$

   Rechte Seite $n = 1$ eingesetzt: $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

   Die Übereinstimmung der beiden Seiten zeigt, dass der Induktionsanfang richtig ist. (vgl Peano Axiom 5 Unterpunkt (a))

2. Induktionsschluss: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

   Wir nehmen uns ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ her und haben zu zeigen, dass aus der Gültigkeit von P(n) die Gültigkeit von P(n+1) folgt. (vgl. P5 b). Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, formulieren wir die Voraussetzung noch einmal ausführlich:

   2.1 Induktionsvoraussetzung: $P(n)$

   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

   2.2 Induktionsbehauptung: $P(n+1)$

   $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}$$

   2.3 Induktionsschritt: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Wir zeigen $P(n+1)$ als eine Kette von Gleichungen:

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) && (4.1)\\ &= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) && (4.2)\\ &= \frac{n\cdot(n+1) + 2\cdot(n+1)}{2} && (4.3)\\ &= \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} && (4.4)\\ &= \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2} && (4.5)\end{aligned}$$

B)

1. Induktionsanfang: Richtigkeit der Aussage P(1):

   Wir haben zu zeigen, dass die Formel für $n = 1$ richtig ist. Dazu rechnen wir einfach beide Seiten aus:

   Linke Seite $n = 1$ eingesetzt: $\sum_{k=1}^{1}(2\cdot k - 1) = 2\cdot 1 - 1 = 1$

   Rechte Seite $n = 1$ eingesetzt: $1^2 = 1$

Die Übereinstimmung der beiden Seiten zeigt, dass der Induktionsanfang richtig ist. (vgl Peano Axiom 5 Unterpunkt (a))

2. Induktionsschluss: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

   Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest.

   2.1 Induktionsvoraussetzung: $P(n)$

   $$\sum_{k=1}^{n}(2 \cdot k - 1) = n^2$$

   2.2 Induktionsbehauptung: $P(n+1)$

   $$\sum_{k=1}^{n+1}(2 \cdot k - 1) = (n+1)^2$$

   2.3 Induktionsschritt: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Wir zeigen $P(n+1)$ als eine Kette von Gleichungen:

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2 \cdot k - 1) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(2 \cdot k - 1)\right) + 2 \cdot (n+1) - 1 \\ &= n^2 + (2 \cdot n + 2) - 1) \\ &= n^2 + 2 \cdot n + 1 \\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

   In dieser Kette gilt die erste Gleichheit, weil die Summe bis $n+1$ aufgesplittet werden kann in die Summe bis n und den $n+1$ sten Summanden. Dies ist der Induktionstrick.
   Die zweite Gleichheit gilt, weil wir hier die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Die anderen Gleichungen sind elementare Umformungen. Bitte beachten Sie, dass dies genau die Aussage ist, wenn man für die freie Variable n den Wert $n+1$ einsetzt.

c)

Sei $p > -1$ eine beliebige reelle Zahl.

Behauptung: Es soll bewiesen werden $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

$\forall n \in \mathbb{N} : (1+p)^n \geq 1 + n \cdot p$

1. Induktionsanfang: wir beweisen $P(1)$

Linke Seite: $(1+p)^1 = 1+p$

Rechte Seite: $1 + 1 \cdot p = 1 + p$

Die linke Seite ist „$\geq$" als die rechte Seite, deshalb ist der Induktionsanfang fertig.

2. Induktionsschluss: wir beweisen $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

   Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest.

   2.1 Induktionsvoraussetzung: $P(n)$
   $(1+p)^n \geq 1 + n \cdot p$

   2.2 Induktionsbehauptung: $P(n+1)$
   $(1+p)^{(n+1)} \geq 1 + (n+1) \cdot p$

   2.3 Induktionsschritt: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
   Leider können wir, wenn wir mit Ungleichungen arbeiten, die „linke Seite ausrechnen/rechte Seite ausrechnen Technik" nicht vorteilhaft verwenden. Deshalb müssen wir eine Kette von Ungleichungen hinschreiben:

$$\begin{aligned}
(1+p)^{(n+1)} &= (1+p)^n \cdot (1+p) && (4.1)\\
&\geq (1+n\cdot p)\cdot(1+p) && (4.2)\\
&= 1 + n\cdot p + p + n \cdot p^2 && (4.3)\\
&= 1 + (n+1)p + n\cdot p^2 \\
&\geq 1 + (n+1)\cdot p && (4.4)
\end{aligned}$$

d)

Beweis:
Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n^3 - n$ ist durch 3 teilbar.

1. Induktionsanfang: $P(0)$

   $0^3 - 0 = 0$ ist durch 3 teilbar.

2. Induktionsschluss:

   Sei dazu $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.

   2.1 Induktionsvoraussetzung: $P(n)$

   $$n^3 - n \text{ ist durch 3 teilbar.}$$

   2.2 Induktionsbehauptung: $P(n+1)$

   $$(n+1)^3 - (n+1) \text{ ist durch 3 teilbar.}$$

   2.3 Induktionsschritt: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

   $$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1) && (4.1) \\ &= \underbrace{n^3 - n}_{(3)} + \underbrace{3 \cdot (n^2 + n)}_{(4)} && (4.2) \end{aligned}$$

   Der Induktionstrick ist das Anwenden der binomischen Formel (1) und das Sortieren der Terme in (2), so dass die Induktionsvoraussetzung angewendet werden kann: Nach der Induktionsvoraussetzung ist nämlich (3) durch 3 teilbar und dass (4) ein Vielfaches von 3 ist, ist auch die Summe von (3) und (4) durch 3 teilbar.[1]

e)

Beweis:
Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n}(k \cdot k!) = (n+1)! - 1$

1. Induktionsanfang: $P(0)$
   Linke Seite: $\sum_{k=0}^{0}(k \cdot k!) = 0 \cdot 0! = 0$
   Rechte Seite: $(0+1)! - 1 = 1! - 1 = 0$
2. Induktionsschluss: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$
   Sei dazu $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.

   2.1 Induktionsvoraussetzung: $P(n)$
   $\sum_{k=0}^{n}(k \cdot k!) = (n+1)! - 1$

   2.2 Induktionsbehauptung: $P(n+1)$
   $\sum_{k=0}^{(n+1)}(k \cdot k!) = ((n+1)+1)! - 1$

   2.3 Induktionsschritt: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(k \cdot k!) &= \left(\sum_{k=0}^{n}(k \cdot k!)\right) + (n+1) \cdot (n+1)! && (4.1)\\
&= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! && (4.2)\\
&= ((n+1)+1) \cdot (n+1)! - 1 && (4.3)\\
&= ((n+1)+1)! - 1 && (4.4)
\end{aligned}$$

   Das Aufsplitten der Summe ist der bekannte Trick, der in (1) angewendet wurde. Dabei wurde gleich der Wert $n+1$ für k in den Ausdruck $k \cdot k!$ eingesetzt. (2) ist das Anwenden der Induktionsvoraussetzung. (3) klammert den Term $(n+1)!$ aus und (4) verwendet die Definition der Fakultät für $n+1$ an der Stelle von n. Wie Sie erkennen ergänzen sich Definition und Beweis hervorragend.

f)

Beweis:
Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}_2 : f_n \geq 2^{n/2}$

1. Induktionsanfang: Wir zeigen die Aussage für $n = 2$.
   Linke Seite: $f_2 = 2$
   Rechte Seite: $2^{2/2} = 2$
2. Induktionsschluss:
   Sei dazu $n \in \mathbb{N}_2$ beliebig aber fest.

   2.1 Induktionsvoraussetzung:
   $f_n \geq 2^{n/2}$

2.2 Induktionsbehauptung:

$f_{n+1} \geq 2^{(n+1)/2}$

2.3 Induktionsschritt:

$$\begin{array}{lcll} f_{n+1} & = & f_n + f_{n-1} & \text{Definition Fibonacci Zahlen} \\ & \geq & 2^{n/2} + 2^{(n-1)/2} & \text{Induktionsvoraussetzung} \\ & = & 2^{n/2} + 2^{n/2} \cdot 2^{-1/2} & \text{Potenzrechengesetze} \\ & = & 2^{n/2}(1 + 1/\sqrt{2}) & \text{Ausklammern} \\ & \geq & 2^{n/2}\sqrt{2} & (1 + 1/\sqrt{2}) \geq \sqrt{2} \\ & = & 2^{(n+1)/2} & \end{array}$$

q.e.d.

Aber halt, der obige Beweis hat eine Lücke. In der zweiten Zeile des Induktionsschrittes verwenden wir die Induktionsvoraussetzung für f_n **und** für f_{n-1}. Das ist ohne weiteres nicht zulässig. Schließlich haben wir uns große Mühe gegeben, die Voraussetzung sauber hinzuschreiben. Ist der Beweis nun falsch? Streng genommen ja. allerdings können wir ihn mit einem kleinen Trick reparieren. Wir modifizieren die Behauptung so, dass zwei Ausagen als Induktionsvoraussetzung zur Verfügung stehen.

g)

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}: \; f_n = 2^n + 1 \;\wedge\; f_{n-1} = 2^{n-1} + 1$

1. Induktionsanfang

   LS: $f_1 = 3$ RS: $2^1 + 1 = 3$

   LS: $f_0 = 2$ RS: $2^0 + 1 = 2$

2. Induktionsschritt

   Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

a) Induktionsvoraussetzung

   $f_n = 2^n + 1 \;\wedge\; f_{n-1} = 2^{n-1} + 1$

b) Induktionsbehauptung

   $f_{n+1} = 2^{n+1} + 1 \;\wedge\; f_n = 2^n + 1$

c) Induktionsschluss

   Da der zweite Teil der Behauptung schon in der Voraussetzung vorkommt, muss nur der erste Teil gezeigt werden. Es gilt:

   $f_{n+1} \stackrel{rek.Def.}{=} 3 \cdot f_n - 2 \cdot f_{n-1} \stackrel{IV}{=} 3(\cdot 2^n + 1) - 2 \cdot (2^{n-1} + 1) = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^{n-1} + 1 = 3 \cdot 2^n - 2^n + 1 = 2 \cdot 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1$

h)

Lösung:

Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; f_n = 3^n \wedge f_{n-1} = 3^{n-1}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang n=1

   Linke Seite: $f_1 = 3$ und $f_0 = 1$

   Rechte Seite: $3^1 = 3$ und $3^0 = 1$.

2. Induktionsschluss

   Sein $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest.

   (a) Induktionsvoraussetzung
   $f_n = 3^n \wedge f_{n-1} = 3^{n-1}$

   (b) Induktionsbehauptung
   $f_{n+1} = 3^{n+1} \wedge f_n = 3^n$

   (c) Induktionsschritt Der zweite Teil der Induktionsbehauptung ist gleich dem ersten Teil der Induktionsvoraussetzung. Deshalb braucht dafür nichts mehr beweisen werden.
   Zum ersten Teil $f_{n+1} = 2f_n + 3f_{n-1} = 2 * 3^n + 3 * 3^{n-1} = 2 * 3^n + 3^n = 3 * 3^n = 3^{n+1}$

Albert - Boolesche Algebra

a)

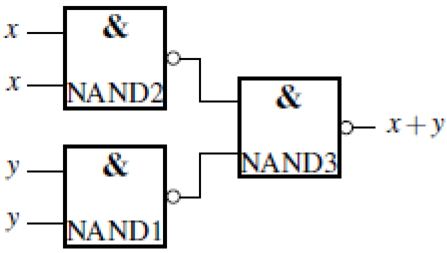
Es handelt sich um eine Tautologie wie die folgenden Umformungen zeigen.

$$\begin{aligned}
F_1 &:= (x_0 \to x_1) \to (x_0 \to x_1) \\
&= (\overline{x_0 \to x_1}) + (x_0 \to x_1) \\
&= w \\
F_2 &:= x_0 \to ((x_0 \to x_1) \to x_1) \\
&= \bar{x}_0 + ((\overline{\bar{x}_0 + x_1}) + x_1) \\
&= \overline{\bar{x}_0 + x_1} + \bar{x}_0 + x_1 \\
&= w
\end{aligned}$$

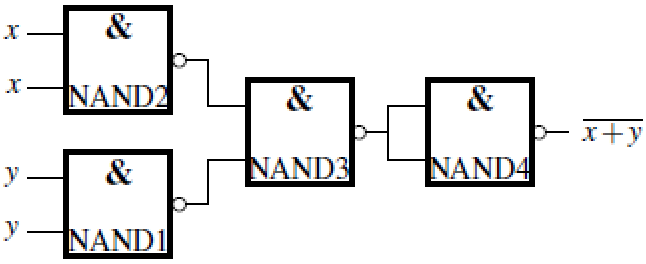
Somit gilt: $F_1 = w = F_2$.

B)

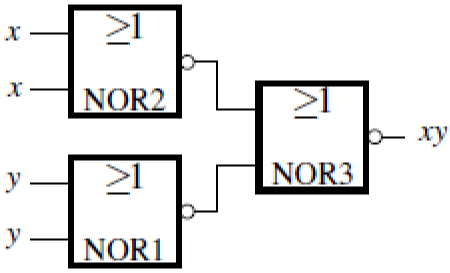
a) Stellen Sie ein OR-Gatter ausschließlich durch Verwendung von NAND-Gattern dar.
Mit $\overline{\overline{xx} \cdot \overline{yy}} \leftrightarrow x + y$ lässt sich die Schaltung mit drei NAND-Gattern realisieren.



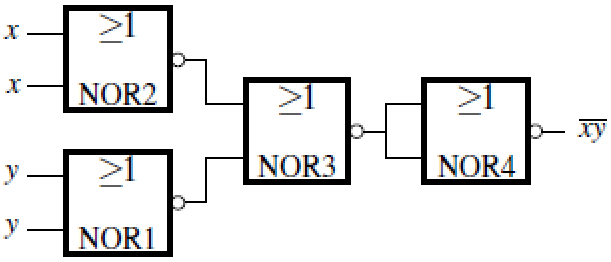
b) Stellen Sie ein NOR-Gatter ausschließlich durch Verwendung von NAND-Gattern dar.
Mit $\overline{\overline{\overline{xx}\cdot\overline{yy}}\cdot\overline{\overline{xx}\cdot\overline{yy}}} \leftrightarrow \overline{x+y}$ lässt sich die Schaltung mit vier NAND-Gattern realisieren.



c) Stellen Sie ein AND-Gatter ausschließlich durch Verwendung von NOR-Gattern dar.
Mit $\overline{\overline{x+x}+\overline{y+y}} \leftrightarrow xy$ lässt sich die Schaltung mit drei NOR-Gattern realisieren.



d) Stellen Sie ein NAND-Gatter ausschließlich durch Verwendung von NOR-Gattern dar.
Mit $\overline{\overline{\overline{\overline{x+x}+\overline{y+y}}+\overline{\overline{x+x}+\overline{y+y}}}} \leftrightarrow \overline{xy}$ lässt sich die Schaltung mit vier NOR Gattern realisi
ren.



c)

a) $AB+\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+A\bar{B} \leftrightarrow (AB+A\bar{B})+(\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B) \leftrightarrow A(B+\bar{B})+\bar{A}(\bar{B}+B) \leftrightarrow A+\bar{A} \leftrightarrow 1$

b) $ABC+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}$
$\leftrightarrow (ABC+AB\bar{C})+(\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)+(A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C)+(\bar{A}BC+\bar{A}B\bar{C})$
$\leftrightarrow AB+\bar{A}\bar{B}+A\bar{B}+\bar{A}B \leftrightarrow (AB+A\bar{B})+(\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B)$
$\leftrightarrow A+\bar{A} \leftrightarrow 1$

c) Lösung über ein Erweitern aller Terme auf drei Variablen, so dass sich der Fall b) ergibt:

$AC+\bar{C}B+\bar{A}C+\bar{B}$
$\leftrightarrow (ABC+A\bar{B}C)+(AB\bar{C}+\bar{A}B\bar{C})+(\bar{A}BC+\bar{A}\bar{B}C)+(A+\bar{A})\bar{B}(C+\bar{C})$
$\leftrightarrow ABC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
$\leftrightarrow ABC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
Dann weiter wie bei b.

Oder kürzer:

$AC+\bar{C}B+\bar{A}C+\bar{B} \leftrightarrow (AC+\bar{A}C)+\bar{C}B+\bar{B} \leftrightarrow C+\bar{C}B+\bar{B} \leftrightarrow C(B+\bar{B})+\bar{C}B+\bar{B}$
$\leftrightarrow CB+C\bar{B}+\bar{C}B+\bar{B} \leftrightarrow (CB+\bar{C}B)+C\bar{B}+\bar{B} \leftrightarrow (C+\bar{C})B+C\bar{B}+\bar{B}$
$\leftrightarrow B+C\bar{B}+\bar{B} \leftrightarrow (B+\bar{B})+C\bar{B} \leftrightarrow 1+C\bar{B} \leftrightarrow 1$

d)

Auch bei dieser Aufgabe lohnt es sich nachzudenken und nicht einfach stur zu rechnen:

a) Gegenbeispiel: $x=1, y=1, z=1$
   1.) Linke Seite: $((x+y) \not\leftrightarrow (y+z)) \leftrightarrow (1 \not\leftrightarrow 1) \leftrightarrow 0.$
   2.) Rechte Seite: $((x \not\leftrightarrow y)+z) \leftrightarrow ((1 \not\leftrightarrow 1)+1)) \leftrightarrow 1.$

b) Gegenbeispiel: $x=1, y=0, z=0$
   1.) Linke Seite: $((xy) \leftrightarrow (yz)) \leftrightarrow (0 \leftrightarrow 0) \leftrightarrow 1.$
   2.) Rechte Seite: $((x \leftrightarrow y)z) \leftrightarrow ((1 \leftrightarrow 0)0) \leftrightarrow 0.$

e)

a) Stellen Sie sowohl die KDNF als auch die KKNF für λ auf.

$$KDNF_\lambda = \bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2+x_0\bar{x}_1\bar{x}_2+\bar{x}_0x_1\bar{x}_2$$
$$KKNF_\lambda = (\bar{x}_0+\bar{x}_1+x_2)(x_0+x_1+\bar{x}_2)(\bar{x}_0+x_1+\bar{x}_2)(x_0+\bar{x}_1+\bar{x}_2)(\bar{x}_0+\bar{x}_1+\bar{x}_2)$$

b) Stellen Sie auch die KDNF und die KKNF für die negierte Funktion $\bar{\lambda}$ auf. (Die negierte Funktion $\bar{\lambda}$ liefert $\bar{y}$.)

$$KDNF_{\bar{\lambda}} = x_0x_1\bar{x}_2+\bar{x}_0\bar{x}_1x_2+x_0\bar{x}_1x_2+\bar{x}_0x_1x_2+x_0x_1x_2$$
$$KKNF_{\bar{\lambda}} = (x_0+x_1+x_2)(\bar{x}_0+x_1+x_2)(x_0+\bar{x}_1+x_2)$$

f)

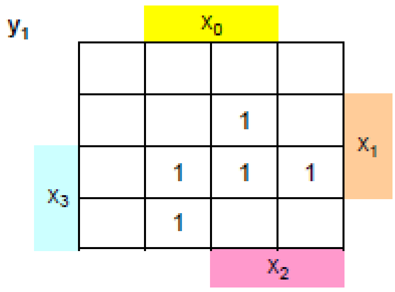
a) Die KDNF-Darstellungen lauten:

(1) $y_1 = \bar{x}_3 x_2 x_1 x_0 + x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 + x_3 \bar{x}_2 x_1 x_0 + x_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 + x_3 x_2 x_1 x_0$

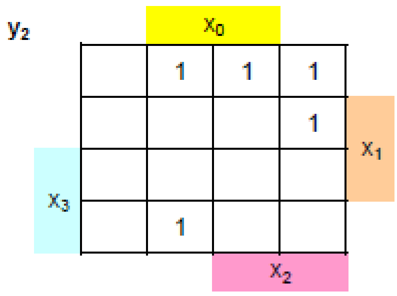
(2) $y_2 = \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 + \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 + \bar{x}_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 + x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0$

b) Für jede Ausgangsvariable gibt es ein KV-Diagramm:

(1) KV-Diagramm für y_1:



(2) KV-Diagramm für y_2:



g)

a) Ja. Beide Formeln unterscheiden sich nur im ersten Term. Daraus ist aber nicht abzuleiten, dass beide Formeln nicht übereinstimmen. Man kann das sofort sehen, indem man für beide Formeln das zugehörige KV-Diagramm aufstellt und beide auf Übereinstimmung prüft:

(1) KV-Diagramm für $x_0 x_2 + \bar{x}_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_0 x_1 \bar{x}_2 + x_0 \bar{x}_1 x_2$:

	x_0	x_0		
1		1		
	1	1		x_1
		x_2	x_2	

(2) KV-Diagramm für $x_0x_1 + \bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_0x_1\bar{x}_2 + x_0\bar{x}_1x_2$:

	x_0	x_0		
1		1		
	1	1		x_1
		x_2	x_2	

b) Umformung: Formel 1.) $\rightarrow$ Formel 2.

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_0x_1\bar{x}_2 + x_0\bar{x}_1x_2 + x_0x_2 \\
\leftrightarrow\ &\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_0x_1\bar{x}_2 + x_0\bar{x}_1x_2 + x_0x_2(\bar{x}_1 + x_1) \\
\leftrightarrow\ &\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_0x_1\bar{x}_2 + x_0\bar{x}_1x_2 + x_0\bar{x}_1x_2 + x_0x_1x_2 \\
\leftrightarrow\ &\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_0x_1\bar{x}_2 + x_0x_1\bar{x}_2 + x_0\bar{x}_1x_2 + x_0x_1x_2 \\
\leftrightarrow\ &\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_0x_1\bar{x}_2 + x_0\bar{x}_1x_2 + x_0x_1
\end{aligned}
$$

h)

Die Ausgabe ist schnell aufgeschrieben:

kurz:

x	y	Ausgabe: $f(x,y,z)$
0	0	z
0	1	$\bar{z}$
1	0	$\bar{z}$
1	1	z

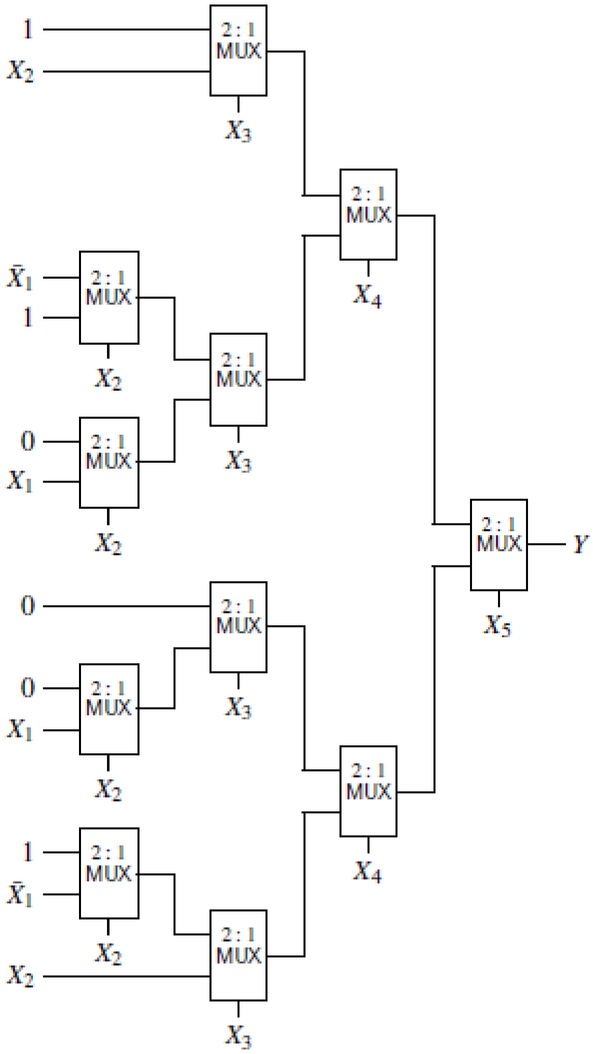
lang:

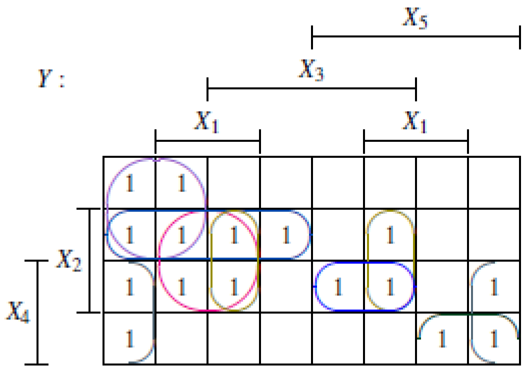
x	y	z	Ausgabe: $f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Daraus ergibt sich sofort die zugehörige DNF:

$$f(x,y,z) = \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z + \bar{x}\cdot y\cdot\bar{z} + x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} + x\cdot y\cdot z$$

i)


1
X2
2 : 1 MUX
X3
X̄1
1
X2
0
X1
X2
2 : 1 MUX
X3
X4
2 : 1 MUX
X5
Y
0
0
X1
X2
1
X̄1
X2
X2
X3
X3
X4



Man erhält daraus die minimale DNF:
$Y = X_2\bar{X}_4\bar{X}_5 + X_1X_2X_3 + \bar{X}_3\bar{X}_4\bar{X}_5 + \bar{X}_1\bar{X}_3X_4 + X_1X_2\bar{X}_5 + \bar{X}_2\bar{X}_3X_4X_5 + X_2X_3X_4X_5$

(Wenn Sie üben wollen: Prüfen Sie, ob man durch andere Wahl der Zusammenfassung, die Kosten noch weiter minimieren kann.)

j)

Mittels Resolution kann man nur zeigen, ob eine Formel eine Kontradiktion ist, d. h. es ist die Negation $\overline{\lambda(v,x,y,z)}$ zu nehmen. Dazu muss die Formel als KNF vorliegen.

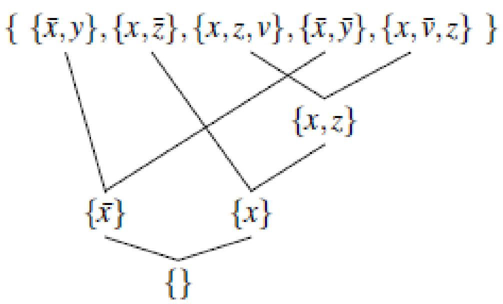
Umformung zur KNF:

$$\overline{\lambda(v,x,y,z)} = \overline{x\bar{y} + \bar{x}z + \bar{x}\cdot\bar{z}\cdot\bar{v} + xy + \bar{x}\cdot v\cdot\bar{z}} = (\bar{x}+y)(x+\bar{z})(x+z+v)(\bar{x}+\bar{y})(x+\bar{v}+z)$$

Somit hat man die Klauseldarstellung:

$$\{\ \{\bar{x},y\},\{x,\bar{z}\},\{x,z,v\},\{\bar{x},\bar{y}\},\{x,\bar{v},z\}\ \}$$

Mittels Resolution ergibt sich daraus die leere Klausel, d. h. $\overline{\lambda(v,x,y,z)}$ ist unerfüllbar, somit $\lambda(v,x,y,z)$ eine Tautologie: Die Schaltfunktion gibt immer 1 aus:



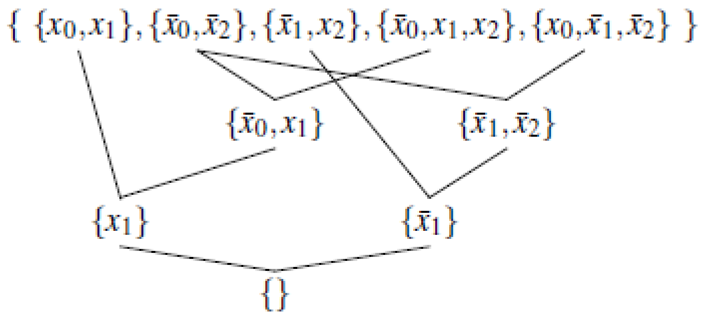
Die leere Klausel ist ableitbar, somit die Klauselmenge unerfüllbar und folglich $\lambda \leftrightarrow 1$.

k)

Zu zeigen ist, dass die Negation niemals erfüllbar ist, d.h. $\bar{\lambda} \leftrightarrow 0$:

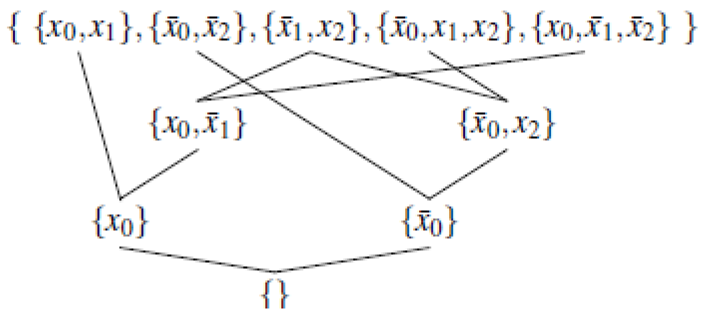
$\bar{\lambda} = (x_0 + x_1)(\bar{x}_0 + \bar{x}_2)(\bar{x}_1 + x_2)(\bar{x}_0 + x_1 + x_2)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2)$

Mengenschreibweise und Resolutionen:



Die leere Klausel ist ableitbar, somit die Klauselmenge unerfüllbar und folglich $\lambda \leftrightarrow 1$.

Eine andere mögliche Lösung ist:



l)

Genau dann, wenn die Formel eine Tautologie ist, ist die Negation eine Antinomie, d.h. immer falsch. Das wird gezeigt.

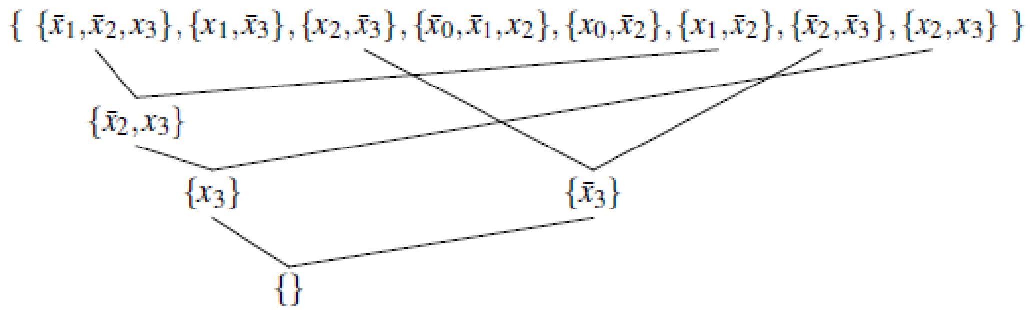
Negation:

$$\overline{(x_1x_2 \leftrightarrow \bar{x}_3) + (x_2 \not\leftrightarrow x_0x_1) + (x_3 \leftrightarrow x_2)}$$
$$\leftrightarrow \overline{(x_1x_2\bar{x}_3 + \overline{x_1x_2}x_3) + (x_0x_1\bar{x}_2 + \overline{x_0x_1}x_2) + (x_2x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3)}$$
$$\leftrightarrow (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)(x_1x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + x_2)(x_0x_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_2 + x_3)$$
$$\leftrightarrow (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + x_2)(x_0 + \bar{x}_2)(x_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_2 + x_3)$$

Man hat somit die Klauselmenge

$$\{ \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3\}, \{x_1, \bar{x}_3\}, \{x_2, \bar{x}_3\}, \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_2\}, \{x_0, \bar{x}_2\}, \{x_1, \bar{x}_2\}, \{\bar{x}_2, \bar{x}_3\}, \{x_2, x_3\} \}$$

und die Resolutionen sind:



In dieser Ableitung wurden die 2.,4. und 5. Klausel nicht verwendet, was aber an der Aussage nichts ändert, da die Klauseln ja mit UND verknüpft sind.

Da die leere Klausel ableitbar ist, ist die ursprüngliche Formel somit als Tautologie nachgewiesen.