Lösungsvorschläge zu Aufgabenblatt 2

(Eigenschaften von Relationen)

Aufgabe 2.1

Sei $M = \{a, b, c\}$. Geben Sie ein Beispiel für eine Relation $R \subseteq M \times M$ an, die reflexiv, aber weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist.

Lösung

Ein mögliches Beispiel:

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (c, a)\}$$

Aufgabe 2.2

Es seien R und S Relationen auf der Menge M. Zeigen Sie: Ist R oder S antisymmetrisch, so auch $R \cap S$.

Lösung

Es sei R oder S antisymmetrisch. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass R antisymmetrisch ist (ansonsten vertausche die Rollen von R und S).

Sei $(x, y) \in M \times M$ mit $(x, y) \in R \cap S$ und $(y, x) \in R \cap S$. Dann gilt insbesondere $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$. Da R antisymmetrisch ist, folgt $x = y$.

Aufgabe 2.3

Ist die Vereinigung zweier reflexiver (resp. symmetrischer, antisymmetrischer, transitiver) Relationen auf einer Menge M stets selbst wieder reflexiv (resp. symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv)? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein einfaches Gegenbeispiel.

Lösung

- Die Vereinigung zweier reflexiver Relationen ist wieder reflexiv: Seien R, S reflexive Relationen auf M. Sei $x \in M$. Da R reflexiv ist, gilt $(x, x) \in R \subseteq R \cup S$, also auch $(x, x) \in R \cup S$.

- Die Vereinigung zweier symmetrischer Relationen ist wieder symmetrisch: Seien R, S symmetrische Relationen auf M. Sei $(x, y) \in R \cup S$. Dann gilt $(x, y) \in R$ oder $(x, y) \in S$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $(x, y) \in R$ ist (ansonsten vertausche die Rollen von R und S). Da R symmetrisch ist, folgt $(y, x) \in R \subseteq R \cup S$, also auch $(y, x) \in R \cup S$.

- Die Vereinigung zweier antisymmetrischer Relationen ist i.a. nicht wieder antisymmetrisch: Für ein Gegenbeispiel betrachte $M := \{1, 2\}, R := \{(1, 2)\}$ und $S := \{(2, 1)\}$. Dann sind R und S antisymmetrisch, aber $R \cup S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ist nicht antisymmetrisch.

- Die Vereinigung zweier transitiver Relationen ist i.a. nicht wieder transitiv: Für ein Gegenbeispiel betrachte $M := \{1, 2, 3\}, R := \{(1, 2)\}$ und $S := \{(2, 3)\}$. Dann sind R und S transitiv, aber $R \cup S = \{(1, 2), (2, 3)\}$ ist nicht transitiv.

Aufgabe 2.4
Ist die Komposition zweier reflexiver (resp. symmetrischer, antisymmetrischer, transitiver) Relationen auf der Menge M stets selbst wieder reflexiv (resp. symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv)? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein einfaches Gegenbeispiel.

Lösung

- Die Komposition zweier reflexiver Relationen ist wieder reflexiv: Seien R, S reflexive Relationen auf M. Sei $x \in M$. Da R und S reflexiv sind, gilt $(x, x) \in R$ und $(x, x) \in S$, also ist nach Definition der Verkettung auch $(x, x) \in RS$.

- Die Komposition zweier symmetrischer Relationen ist i.a. nicht wieder symmetrisch: Für ein Gegenbeispiel betrachte $M := \{1, 2, 3\}, R := \{(1, 2), (2, 1)\}$ und $S := \{(2, 3), (3, 2)\}$. Dann sind R und S symmetrisch, aber $RS = \{(1, 3)\}$ ist nicht symmetrisch.

- Die Komposition zweier antisymmetrischer Relationen ist i.a. nicht wieder antisymmetrisch: Für ein Gegenbeispiel betrachte $M := \{1, 2, 3, 4\}, R := \{(1, 2), (4, 3)\}$ und $S := \{(2, 4), (3, 1)\}$. Dann sind R und S antisymmetrisch, aber $RS = \{(1, 4), (4, 1)\}$ ist nicht antisymmetrisch.

- Die Komposition zweier transitiver Relationen ist i.a. nicht wieder transitiv: Wir können hierzu dasselbe Gegenbeispiel wie zuvor wählen. Betrachte $M := \{1, 2, 3, 4\}, R := \{(1, 2), (4, 3)\}$ und $S := \{(2, 4), (3, 1)\}$. Dann sind R und S transitiv, aber $RS = \{(1, 4), (4, 1)\}$ ist nicht transitiv, da $(1, 1) \notin RS$.

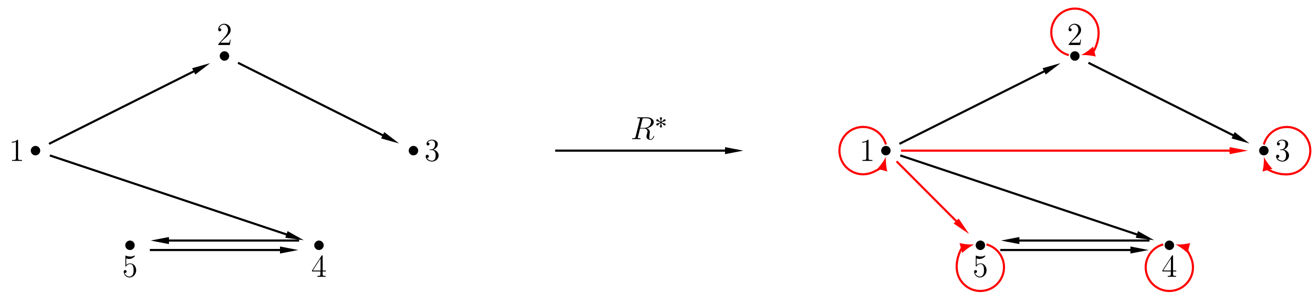
Aufgabe 2.5
Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und die Relation

$$R := \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (4, 5), (5, 4)\} \subseteq M \times M.$$

(a) Stellen Sie die Relation R als Pfeildiagramm dar.

(b) Bestimmen Sie die transitiv-reflexive Hülle R^*.

Wir stellen zunächst die Relation R als Pfeildiagramm dar, und ergänzen dieses so, dass wir das Pfeildiagramm der transitiv-reflexiven Hülle erhalten. Dies kann in einer Grafik oder zwei getrennten erfolgen:



Wir erhalten

$$R^* = R \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (1, 5)\}.$$