

Programa de Especialización en Econometría Aplicada

Centro de Formación Continua -UNI

Modelo Probit Ordenado

Clase 1

Edinson Tolentino
MSc Economics

email: edinson.tolentino@gmail.com

Twitter: @edutoleraymondi

Universidad Nacional de Ingeniería

23 de noviembre de 2024



- 1 Introducción
- 2 Modelo Probit Ordenado
- 3 Método de Estimación
- 4 Efectos Marginales

Introducción



Introducción



- **McFadden** ganador del Nobel en Economía en el 2000, por diseñar métodos para comprender los comportamientos económicos de las economías familiares y los individuos.



Introducción



- **McFadden** ganador del Nobel en Economía en el 2000, por diseñar métodos para comprender los comportamientos económicos de las economías familiares y los individuos.
- Labor desempeñada en métodos econométricos estudiando los patrones de comportamiento en elecciones **discretas** de los individuos cuando realizan una decisión.

Introducción



- **McFadden** ganador del Nobel en Economía en el 2000, por diseñar métodos para comprender los comportamientos económicos de las economías familiares y los individuos.
- Labor desempeñada en métodos econométricos estudiando los patrones de comportamiento en elecciones **discretas** de los individuos cuando realizan una decisión.
- Su trabajo provee una fundamentación teórica relacionada a los modelos logit para la teoría de elección comunmente usada por la Psicología.

Introducción



- **McFadden** ganador del Nobel en Economía en el 2000, por diseñar métodos para comprender los comportamientos económicos de las economías familiares y los individuos.
- Labor desempeñada en métodos econométricos estudiando los patrones de comportamiento en elecciones **discretas** de los individuos cuando realizan una decisión.
- Su trabajo provee una fundamentación teórica relacionada a los modelos logit para la teoría de elección comunmente usada por la Psicología.
- **McFadden** compartio el premio en campos del conocimiento micro-econometricos con el estadounidense **Heckman**

Modelo Probit Ordenado



Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto multiple pero diferente al modelo Multinomiales Logisticos

Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto multiple pero diferente al modelo Multinomiales Logisticos
- La variable dependiente toma un número de valores finitos y discretos que contienen información ordinal.

Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto múltiple pero diferente al modelo Multinomiales Logísticos
- La variable dependiente toma un número de valores finitos y discretos que contienen información ordinal.
 - Encuestas de Opinión

Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto multiple pero diferente al modelo Multinomiales Logísticos
- La variable dependiente toma un número de valores finitos y discretos que contienen información ordinal.
 - Encuestas de Opinion
 - 1 Totalmente de acuerdo

Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto multiple pero diferente al modelo Multinomiales Logísticos
- La variable dependiente toma un número de valores finitos y discretos que contienen información ordinal.
 - Encuestas de Opinion
 - 1 Totalmente de acuerdo
 - 2 De acuerdo

Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto multiple pero diferente al modelo Multinomiales Logísticos
- La variable dependiente toma un número de valores finitos y discretos que contienen información ordinal.
 - Encuestas de Opinion
 - 1 Totalmente de acuerdo
 - 2 De acuerdo
 - 3 Desacuerdo

Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto multiple pero diferente al modelo Multinomiales Logísticos
- La variable dependiente toma un número de valores finitos y discretos que contienen información ordinal.
 - Encuestas de Opinion
 - 1 Totalmente de acuerdo
 - 2 De acuerdo
 - 3 Desacuerdo
 - 4 Totalmente en desacuerdo

Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto múltiple pero diferente al modelo Multinomiales Logísticos
- La variable dependiente toma un número de valores finitos y discretos que contienen información ordinal.
 - Encuestas de Opinión
 - 1 Totalmente de acuerdo
 - 2 De acuerdo
 - 3 Desacuerdo
 - 4 Totalmente en desacuerdo
- Dado y_i^* representa una variable latente (no observable) que captura el nivel de satisfacción del i^{th} individuo.

Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto múltiple pero diferente al modelo Multinomiales Logísticos
- La variable dependiente toma un número de valores finitos y discretos que contienen información ordinal.
 - Encuestas de Opinión
 - 1 Totalmente de acuerdo
 - 2 De acuerdo
 - 3 Desacuerdo
 - 4 Totalmente en desacuerdo
- Dado y_i^* representa una variable latente (no observable) que captura el nivel de satisfacción del i^{th} individuo.
- El punto de partida de los modelos multinomiales ordenados es el tratamiento de la variable latente (no observada), que a diferencia de nuestra variable dependiente real, es continua:

Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto múltiple pero diferente al modelo Multinomiales Logísticos
- La variable dependiente toma un número de valores finitos y discretos que contienen información ordinal.
 - Encuestas de Opinión
 - 1 Totalmente de acuerdo
 - 2 De acuerdo
 - 3 Desacuerdo
 - 4 Totalmente en desacuerdo
- Dado y_i^* representa una variable latente (no observable) que captura el nivel de satisfacción del i^{th} individuo.

- El punto de partida de los modelos multinomiales ordenados es el tratamiento de la variable latente (no observada), que a diferencia de nuestra variable dependiente real, es continua:

$$y_i^* = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon_i$$

$$y_i^* = x_i' \beta + \varepsilon_i$$

Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto múltiple pero diferente al modelo Multinomiales Logísticos
- La variable dependiente toma un número de valores finitos y discretos que contienen información ordinal.
 - Encuestas de Opinión
 - 1 Totalmente de acuerdo
 - 2 De acuerdo
 - 3 Desacuerdo
 - 4 Totalmente en desacuerdo
- Dado y_i^* representa una variable latente (no observable) que captura el nivel de satisfacción del i^{th} individuo.

- El punto de partida de los modelos multinomiales ordenados es el tratamiento de la variable latente (no observada), que a diferencia de nuestra variable dependiente real, es continua:

$$y_i^* = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon_i$$

$$y_i^* = x_i' \beta + \varepsilon_i$$

- Sin embargo, la variable que observamos es categórica y ordenada

Modelo Probit Ordenado



- Este es un modelo de producto múltiple pero diferente al modelo Multinomiales Logísticos
- La variable dependiente toma un número de valores finitos y discretos que contienen información ordinal.
 - Encuestas de Opinión
 - 1 Totalmente de acuerdo
 - 2 De acuerdo
 - 3 Desacuerdo
 - 4 Totalmente en desacuerdo
- Dado y_i^* representa una variable latente (no observable) que captura el nivel de satisfacción del i^{th} individuo.

- El punto de partida de los modelos multinomiales ordenados es el tratamiento de la variable latente (no observada), que a diferencia de nuestra variable dependiente real, es continua:

$$y_i^* = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon_i$$

$$y_i^* = x_i' \beta + \varepsilon_i$$

- Sin embargo, la variable que observamos es categórica y ordenada

$$y^* = \begin{cases} 1 & ; si \quad \alpha_0 = -\infty \leq y_i^* \leq \alpha_1 \\ 2 & ; si \quad \alpha_1 \leq y_i^* \leq \alpha_2 \\ \vdots & \\ J & ; si \quad \alpha_{j-1} \leq y_i^* < \alpha_j = +\infty \end{cases}$$

Modelo Probit Ordenado



Modelo Probit Ordenado



- El modelo de producto en base a la satisfacción puede ser expresado como:

$$y_i^* = X_i\beta + u_i \sim N(0, 1)$$

- Este es asumido tal que y_i es relativo a y_i^* como sigue:

Modelo Probit Ordenado



- El modelo de producto en base a la satisfacción puede ser expresado como:

$$y_i^* = X_i\beta + u_i \sim N(0, 1)$$

- Este es asumido tal que y_i es relativo a y_i^* como sigue:

$$y_i = 1 \text{ [no - del - todo - satisfecho] si } -\infty < y_i^* < \theta_0$$

Modelo Probit Ordenado



- El modelo de producto en base a la satisfacción puede ser expresado como:

$$y_i^* = X_i\beta + u_i \sim N(0, 1)$$

- Este es asumido tal que y_i es relativo a y_i^* como sigue:

$$y_i = 1 \text{ [no - del - todo - satisfecho] si } -\infty < y_i^* < \theta_0$$

$$y_i = 2 \text{ [poco - satisfecho] si } \theta_0 \leq y_i^* < \theta_1$$

Modelo Probit Ordenado



- El modelo de producto en base a la satisfacción puede ser expresado como:

$$y_i^* = X_i\beta + u_i \sim N(0, 1)$$

- Este es asumido tal que y_i es relativo a y_i^* como sigue:

$$y_i = 1 \text{ [no - del - todo - satisfecho] si } -\infty < y_i^* < \theta_0$$

$$y_i = 2 \text{ [poco - satisfecho] si } \theta_0 \leq y_i^* < \theta_1$$

$$y_i = 3 \text{ [muy - satisfecho] si } \theta_1 < y_i^* < \theta_2$$

Modelo Probit Ordenado



- El modelo de producto en base a la satisfacción puede ser expresado como:

$$y_i^* = X_i\beta + u_i \sim N(0, 1)$$

- Este es asumido tal que y_i es relativo a y_i^* como sigue:

$$y_i = 1 \text{ [no - del - todo - satisfecho] si } -\infty < y_i^* < \theta_0$$

$$y_i = 2 \text{ [poco - satisfecho] si } \theta_0 \leq y_i^* < \theta_1$$

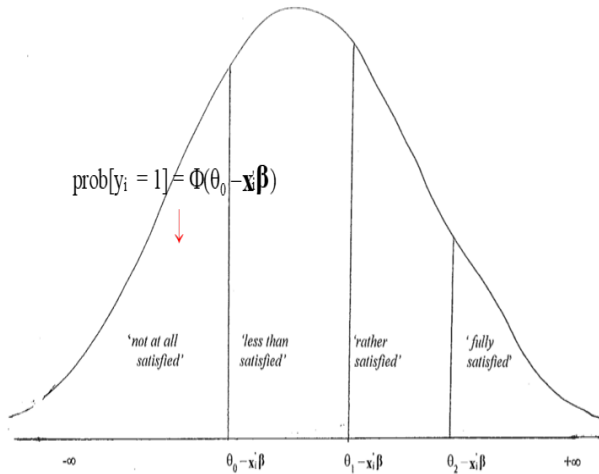
$$y_i = 3 \text{ [muy - satisfecho] si } \theta_1 < y_i^* < \theta_2$$

$$y_i = 4 \text{ [totalmente - satisfecho] si } \theta_2 < y_i^* < +\infty$$

Modelo Probit Ordenado



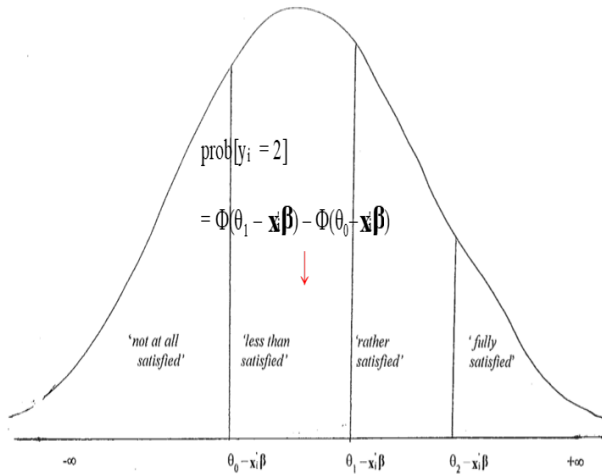
Figure 4:1 The Ordered Probit Model



Modelo Probit Ordenado



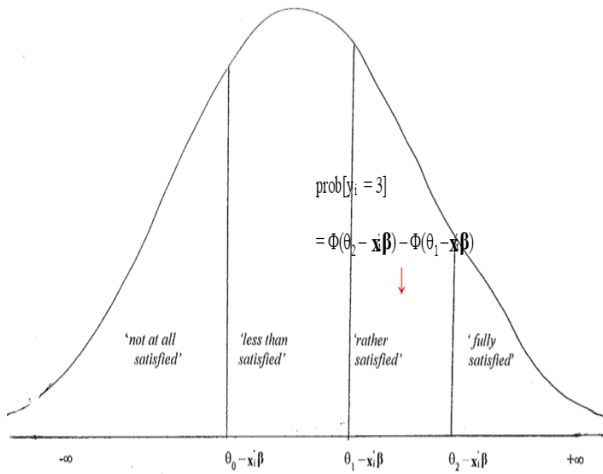
Figure 4:1 The Ordered Probit Model



Modelo Probit Ordenado



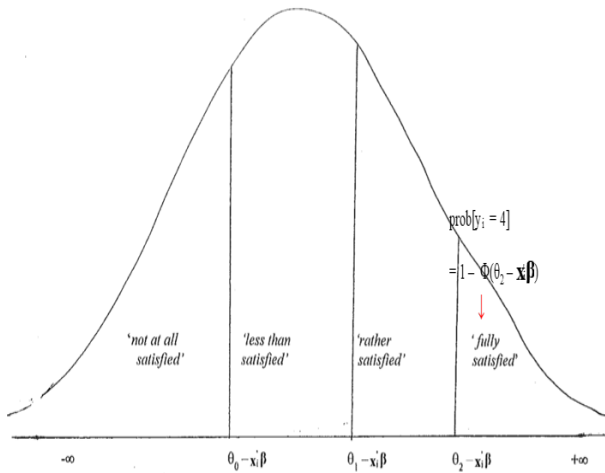
Figure 4:1 The Ordered Probit Model



Modelo Probit Ordenado



Figure 4:1 The Ordered Probit Model



Modelo Probit Ordenado



Modelo Probit Ordenado



- Por tanto, al juntar y relacionar las probabilidades (usando una función de distribución normal estandar)

Modelo Probit Ordenado



- Por tanto, al juntar y relacionar las probabilidades (usando una función de distribución normal estandar)

$$Prob[y_i = 1] = \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$$

Modelo Probit Ordenado



- Por tanto, al juntar y relacionar las probabilidades (usando una función de distribución normal estandar)

$$Prob[y_i = 1] = \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$$

$$Prob[y_i = 2] = \Phi(\theta_1 - X_i\beta) - \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$$

Modelo Probit Ordenado



- Por tanto, al juntar y relacionar las probabilidades (usando una función de distribución normal estandar)

$$Prob[y_i = 1] = \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$$

$$Prob[y_i = 2] = \Phi(\theta_1 - X_i\beta) - \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$$

$$Prob[y_i = 3] = \Phi(\theta_2 - X_i\beta) - \Phi(\theta_1 - X_i\beta)$$

Modelo Probit Ordenado



- Por tanto, al juntar y relacionar las probabilidades (usando una función de distribución normal estandar)

$$Prob[y_i = 1] = \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$$

$$Prob[y_i = 2] = \Phi(\theta_1 - X_i\beta) - \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$$

$$Prob[y_i = 3] = \Phi(\theta_2 - X_i\beta) - \Phi(\theta_1 - X_i\beta)$$

$$Prob[y_i = 4] = 1 - \Phi(\theta_2 - X_i\beta)$$

Modelo Probit Ordenado



- Por tanto, al juntar y relacionar las probabilidades (usando una función de distribución normal estandar)

$$Prob[y_i = 1] = \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$$

$$Prob[y_i = 2] = \Phi(\theta_1 - X_i\beta) - \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$$

$$Prob[y_i = 3] = \Phi(\theta_2 - X_i\beta) - \Phi(\theta_1 - X_i\beta)$$

$$Prob[y_i = 4] = 1 - \Phi(\theta_2 - X_i\beta)$$

- Donde $\Phi(\cdot)$ es el CDF (función de distribución acumulada) para la distribución normal

Modelo Probit Ordenado: método de estimación



Modelo Probit Ordenado: método de estimación



- En general, las probabilidades pueden ser escritas como:

Modelo Probit Ordenado: método de estimación



- En general, las probabilidades pueden ser escritas como:

$$Prob[y_j = j] = \Phi(\theta_j - X_i\beta) - \Phi(\theta_{j-1} - X_i\beta)$$

Modelo Probit Ordenado: método de estimación



- En general, las probabilidades pueden ser escritas como:

$$Prob[y_j = j] = \Phi(\theta_j - X_i\beta) - \Phi(\theta_{j-1} - X_i\beta)$$

- Para $j = 0, \dots, J$ productos

Modelo Probit Ordenado: método de estimación



- En general, las probabilidades pueden ser escritas como:

$$Prob[y_j = j] = \Phi(\theta_j - X_i\beta) - \Phi(\theta_{j-1} - X_i\beta)$$

- Para $j = 0, \dots, J$ productos
- La función de Log-likelihood se expresa como:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^3 \delta_{ij} \log_e \left[\Phi(\theta_j - X_i'\beta) - \Phi(\theta_{j-1} - X_i'\beta) \right]$$

- Donde $\delta_{ij} = 1$ si i^{th} individuo esta dentro de la j^{th} categoria y 0 otro caso.
- Se procede en la estimación a través del algoritmo de **Newton-Raphson**

Probit Ordenado: efectos marginales



Probit Ordenado: efectos marginales



- Dado la primera categoría:

$$Prob[y_i = 1] = \Phi(\theta_0 - X_i' \beta)$$

Probit Ordenado: efectos marginales



- Dado la primera categoria:

$$Prob[y_i = 1] = \Phi(\theta_0 - X_i' \beta)$$

- Si se toma la derivada respecto a X_k :

$$\frac{\partial Prob[y = 1]}{\partial X_k} = -\phi(\theta_0 - X_i \beta) \times \beta_k$$

Probit Ordenado: efectos marginales



- Dado la primera categoría:

$$Prob[y_i = 1] = \Phi(\theta_0 - X_i' \beta)$$

- Si se toma la derivada respecto a X_k :

$$\frac{\partial Prob[y = 1]}{\partial X_k} = -\phi(\theta_0 - X_i \beta) \times \beta_k$$

- El efecto marginal puede entonces ser calculado como el valor promedio de X

Probit Ordenado: efectos marginales



- Dado la primera categoría:

$$Prob[y_i = 1] = \Phi(\theta_0 - X_i' \beta)$$

- Si se toma la derivada respecto a X_k :

$$\frac{\partial Prob[y = 1]}{\partial X_k} = -\phi(\theta_0 - X_i \beta) \times \beta_k$$

- El efecto marginal puede entonces ser calculado como el valor promedio de X
- $\Phi(\cdot)$: Función de densidad de probabilidad acumulada
- $\phi(\cdot)$: Función de densidad de probabilidad

Probit Ordenado: efectos marginales



Probit Ordenado: efectos marginales



- Si $Prob[y = 2] = \Phi(\theta_1 - X_i\beta) - \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$
- El efecto marginal sera:

Probit Ordenado: efectos marginales



- Si $Prob[y = 2] = \Phi(\theta_1 - X_i\beta) - \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$
- El efecto marginal sera:

$$\frac{\partial Prob[y = 2]}{\partial X_k} = [\phi(\theta_0 - X_i\beta) - \phi(\theta_1 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

Probit Ordenado: efectos marginales



- Si $Prob[y = 2] = \Phi(\theta_1 - X_i\beta) - \Phi(\theta_0 - X_i\beta)$
- El efecto marginal sera:

$$\frac{\partial Prob[y = 2]}{\partial X_k} = [\phi(\theta_0 - X_i\beta) - \phi(\theta_1 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

- El efecto marginal puede entonces puede ser calculado como el valor promedio de X

Probit Ordenado: efectos marginales



Probit Ordenado: efectos marginales



- Finalmente si $Prob[y = 4] = 1 - \Phi(\theta_2 - X_i\beta)$
- El efecto marginal sera:

Probit Ordenado: efectos marginales



- Finalmente si $Prob[y = 4] = 1 - \Phi(\theta_2 - X_i\beta)$
- El efecto marginal sera:

$$\frac{\partial Prob[y = 4]}{\partial X_k} = [\phi(\theta_2 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

Probit Ordenado: efectos marginales



- Finalmente si $Prob[y = 4] = 1 - \Phi(\theta_2 - X_i\beta)$
- El efecto marginal sera:

$$\frac{\partial Prob[y = 4]}{\partial X_k} = [\phi(\theta_2 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

- El efecto marginal puede entonces puede ser calculado como el valor promedio de X

Probit Ordenado: efectos marginales



Probit Ordenado: efectos marginales



- El efecto marginal para cada caso de las cuatro categorías sera:

Probit Ordenado: efectos marginales



- El efecto marginal para cada caso de las cuatro categorías sera:
- El signo del efecto marginal es predecible proveniente del signo del coeficiente del probit ordenado

$$\frac{\partial \text{Prob}[y = 1]}{\partial x_k} = -\phi(\theta_0 - X_i\beta) \times \beta_k$$

Probit Ordenado: efectos marginales



- El efecto marginal para cada caso de las cuatro categorías sera:
- El signo del efecto marginal es predecible proveniente del signo del coeficiente del probit ordenado

$$\frac{\partial Prob[y = 1]}{\partial x_k} = -\phi(\theta_0 - X_i\beta) \times \beta_k$$

- Los signos de estos dos efectos marginales intermedios no pueden ser determinados provenientes de los coeficientes del modelo probit ordenado

$$\frac{\partial Prob[y = 2]}{\partial x_k} = [\phi(\theta_0 - X_i\beta) - \phi(\theta_1 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

Probit Ordenado: efectos marginales



- El efecto marginal para cada caso de las cuatro categorías sera:
- El signo del efecto marginal es predecible proveniente del signo del coeficiente del probit ordenado

$$\frac{\partial Prob[y = 1]}{\partial x_k} = -\phi(\theta_0 - X_i\beta) \times \beta_k$$

- Los signos de estos dos efectos marginales intermedios no pueden ser determinados provenientes de los coeficientes del modelo probit ordenado

$$\frac{\partial Prob[y = 2]}{\partial x_k} = [\phi(\theta_0 - X_i\beta) - \phi(\theta_1 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

$$\frac{\partial Prob[y = 3]}{\partial x_k} = [\phi(\theta_1 - X_i\beta) - \phi(\theta_2 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

Probit Ordenado: efectos marginales



- El efecto marginal para cada caso de las cuatro categorías sera:
- El signo del efecto marginal es predecible proveniente del signo del coeficiente del probit ordenado

$$\frac{\partial \text{Prob}[y = 1]}{\partial x_k} = -\phi(\theta_0 - X_i\beta) \times \beta_k$$

- Los signos de estos dos efectos marginales intermedios no pueden ser determinados provenientes de los coeficientes del modelo probit ordenado

$$\frac{\partial \text{Prob}[y = 2]}{\partial x_k} = [\phi(\theta_0 - X_i\beta) - \phi(\theta_1 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

$$\frac{\partial \text{Prob}[y = 3]}{\partial x_k} = [\phi(\theta_1 - X_i\beta) - \phi(\theta_2 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

- El signo del efecto marginal es tambien predecible proveniente del signo del coeficiente del probit ordenado

$$\frac{\partial \text{Prob}[y = 1]}{\partial x_k} = \phi(\theta_2 - X_i\beta) \times \beta_k$$

Probit Ordenado: efectos marginales



Probit Ordenado: efectos marginales



- Existe una ambigüedad cuando se usa el signo en el **coeficiente estimado del probit ordenado** para inferir el signo en los efectos marginales, dado los casos que no sean las categorías de resultado más baja y más alta.

Probit Ordenado: efectos marginales



- Existe una ambigüedad cuando se usa el signo en el **coeficiente estimado del probit ordenado** para inferir el signo en los efectos marginales, dado los casos que no sean las categorías de resultado más baja y más alta.
- Esto permite el hecho que los efectos marginales de las categorías intermedias están basados sobre la diferencia entre los valores **estimados de dos densidades**

$$\frac{\partial \text{Prob}[y = 2]}{\partial X_k} = [\phi(\theta_0 - X_i\beta) - \phi(\theta_1 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

Probit Ordenado: efectos marginales



- Existe una ambigüedad cuando se usa el signo en el **coeficiente estimado del probit ordenado** para inferir el signo en los efectos marginales, dado los casos que no sean las categorías de resultado más baja y más alta.
- Esto permite el hecho que los efectos marginales de las categorías intermedias están basados sobre la diferencia entre los valores **estimados de dos densidades**

$$\frac{\partial Prob[y = 2]}{\partial X_k} = [\phi(\theta_0 - X_i\beta) - \phi(\theta_1 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

- La magnitud de los valores de estas dos densidades (color rojo) no puede ser conocida a priori

Probit Ordenado: efectos marginales



- Existe una ambigüedad cuando se usa el signo en el **coeficiente estimado del probit ordenado** para inferir el signo en los efectos marginales, dado los casos que no sean las categorías de resultado más baja y más alta.
- Esto permite el hecho que los efectos marginales de las categorías intermedias están basados sobre la diferencia entre los valores **estimados de dos densidades**

$$\frac{\partial \text{Prob}[y = 2]}{\partial X_k} = [\phi(\theta_0 - X_i\beta) - \phi(\theta_1 - X_i\beta)] \times \beta_k$$

- La magnitud de los valores de estas dos densidades (color rojo) no puede ser conocida a priori
- Por tanto, ni el signo , ni la magnitud del efecto marginal puede ser inferida