Конспект лекций
по математическому анализу

(2й семестр 2018-2019 учебного года)

Лекторы:
Булатов В. И.

Техническое обеспечение:
3-я группа

Версия 2.0
Дата сборки: 27 июня 2019 г.

Минск, 2019

Теорема 1.1 (неравенство Коши-Буняковского). *В любом линейном евклидовом пространстве P над полем $\mathbb{R}$ выполняется* неравенство Коши-Буняковского

$$(\langle x, y\rangle)^2 \leqslant (\langle x, x\rangle) \cdot (\langle y, y\rangle) \tag{1.1}$$

Доказательство. Для произвольного $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим скалярную функцию

$$f(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle \geqslant 0$$

Используя линейность скалярного произведения, имеем

$$f(t) = at^2 + 2bt + c,$$

где

$$\begin{aligned} a &= \langle y, y\rangle \geqslant 0 \\ b &= \langle x, y\rangle \\ c &= \langle x, x\rangle \end{aligned}$$

Если $a = 0$, то есть $\langle y, y\rangle = 0$, то $y = \vec{0}$; в этом случае справа получаем 0, а слева — тоже 0, т. е. выполнено (1.1).

Пусть $a > 0$. В этом случае имеем квадратичную функцию $f(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. График этой функции — парабола, ветви которой направлены вверх. Поэтому дискриминант данной функции должен быть неположительным:

$$D = (2b)^2 - 4ac \leqslant 0 \iff b^2 \leqslant ac \iff (1.1) \qquad \square$$

Следствие (неравенство Минковского). *В линейном евклидовом пространстве P для любых $x, y \in P$ справедливо* неравенство Минковского

$$\sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle} \tag{1.2}$$

Доказательство. Во-первых, отметим, что в силу аксиомы неотрицательности скалярного произведения подкоренные выражения (1.2) неотрицательны. Далее, используя линейность скалярного произведения и неравенство Коши-Буняковского (1.1), получаем:

$$\sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle} \leqslant \left[\langle x, y\rangle \leqslant |\langle x, y\rangle| \overset{(1.1)}{\leqslant} \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle}\right] \leqslant$$
$$\sqrt{\left(\sqrt{\langle x, x\rangle}\right)^2 + 2\sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} + \left(\sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

$\square$

Теорема 1.2 (о нормировании линейного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$). *Любое линейное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с произвольным скалярным произведением нормируется с помощью естественной нормы*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{1.7}$$

Доказательство. Во-первых, отметим, что (1.7) корректно определена в силу неотрицательности подкоренного выражения. Во-вторых, проверим выполнимость всех аксиом нормы:

а) $\|x\| = 0 \iff \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0 \implies x = \vec{0}$ (в силу неотрицательности скалярного произведения)

б) Из линейности и симметричности скалярного произведения получаем

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|\lambda x\| \overset{(1.7)}{=} \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \dots = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x\rangle} \overset{(1.7)}{=} |\lambda| \, \|x\|$$

в) Используя неравенство Минковского, имеем

$$\|x + y\| \overset{(1.7)}{=} \sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \overset{(1.2)}{\leqslant} \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle} \overset{(1.7)}{=} \|x\| + \|y\|$$

□

Теорема 1.3 (о метризируемости произвольного линейного нормированного пространства $\mathbb{R}^n$). *Любое линейное нормированное пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой* (1.6) *метризируется с помощью естественного расстояния*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Доказательство. В силу аксиомы неотрицательности нормы, во-первых, имеем $\rho(x, y) = \|x - y\| \geqslant 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ и, во-вторых, получаем

$$\rho(x, y) = 0 \overset{(1.9)}{\iff} \|x - y\| = 0 \iff x = y$$

Далее, используя аксиомы нормы, имеем

$$\rho(x, y) \overset{(1.9)}{=} \|-(y - x)\| = |-1| \, \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x).$$

В силу неравенства треугольника для нормы для

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \implies \rho(x, y) \overset{(1.9)}{=} \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| \overset{(1.9)}{=} \rho(x, z) + \rho(z, y)$. □

Лемма 2.1 (N-лемма сходимости n-мерных последовательностей)**.** *Если*

$\exists N = const \geqslant 0$ *такое, что* $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \nu_\varepsilon \in \mathbb{R} \mid \forall k \geqslant \nu_\varepsilon \Longrightarrow \rho(M_k, M_0) \leqslant N\varepsilon$, *то* $M_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} M_0$.

Теорема 2.2 (критерий сходимости n-мерных последовательностей)**.** *Последовательность* $M_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$, *сходится в линейном метрическом пространстве* $(\mathbb{R}^n, d)$ *с евклидовой метрикой* d *к точке* $M_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ *тогда и только тогда, когда*

$$x_{kj} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_{0j}, \quad \forall j = \overline{1, n}. \tag{2.2}$$

Доказательство.

- : Пусть $M_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} M_0$.

Тогда, используя евклидово расстояние

$$d(M_k, M_0) = \sqrt{\sum_{j=0}^{n} (x_{kj} - x_{0j})^2},$$

получаем, что

$$d(M_k, M_0) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu \in \mathbb{R} \mid \forall k \geqslant \nu \implies d(M_k, M_0) \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда, учитывая, что для произвольного фиксированного $j = \overline{1, n}$ имеем

$$|x_{kj} - x_{0j}| \leqslant \sqrt{(x_{k1} - x_{01})^2 + (x_{k2} - x_{02})^2 + \cdots + (x_{kj} - x_{0j})^2 + \cdots + (x_{kn} - x_{0n})^2} = d(M_k, M_0)$$

получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \nu \in \mathbb{R} \mid \forall k \geqslant \nu \implies |x_{kj} - x_{0j}| \leqslant d(M_k, M_0) \leqslant \varepsilon,$$

то есть выполняется (2.2).

- : Пусть для каждого фиксированного $j = \overline{1, n}$ выполняется (2.2). Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \nu_j \in \mathbb{R} \mid \forall k \geqslant \nu_j \implies |x_{kj} - x_{0j}| \leqslant \varepsilon$$

Выбирая $\nu = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(\nu_i)$, получаем, что для $\forall k \geqslant \nu \implies |x_{kj} - x_{0j}| \leqslant \varepsilon$ и

$$d(M_k, M_0) \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \max(x_{kj} - x_{0j})^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{n},$$

Т. е. $\exists N = \sqrt{n} \geqslant 0$ такое, что $d(M_k, M_0) \leqslant N\varepsilon$, а значит, по N-лемме сходимости n-мерных последовательностей, имеем:

$$M_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} M_0.$$

□

Теорема 2.3 (критерий Гейне)**.** *Для того, чтобы* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} p_0$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall M_k \in D$ *— последовательности Гейне точки* $M_0 \in \mathbb{R}^n \implies$

$$f(M_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} p_0 \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

- $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} p_0$ по определению означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \geqslant 0, \quad \forall x \in \dot{V}(x_0),\ d(x, x_0) \leqslant \delta \implies |f(x) - p_0| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть M_k — последовательность Гейне точки M_0, т. е.

$$M_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} M_0 \iff \forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{R} \mid \forall k \geqslant \nu \implies d(M_k, x_0) \leqslant \tilde{\varepsilon} \tag{2.5}$$

Возьмём в (2.5) $\tilde{\varepsilon} = \delta$. Тогда получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{R} \mid \forall k \geqslant \nu \implies d(M_k, x_0) \leqslant \tilde{\varepsilon} = \delta \implies f(M_k) - p_0 \leqslant \varepsilon,$$

откуда $f(M_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} p_0$.

- Положим, что это неверно, тогда:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta \geqslant 0 \quad \exists x \in \dot{V}(x_0),\ \text{т. ч. } d(x, x_0) \leqslant \delta,\ \text{и } |f(x) - p_0| > \varepsilon_0, \tag{2.6}$$

т. е. для $\delta = \frac{1}{n}$ получаем, что

$$\exists x \left(\frac{1}{n} \right) : \delta = \frac{1}{n} \implies d\left(x \left(\frac{1}{n} \right), x_0 \right) \leqslant \delta.$$

При $n \to \infty$ имеем $\delta \to 0$ и $d\left(x\left(\frac{1}{n}\right), x_0\right) \to 0$. Отсюда имеем $x\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x_0$, т. е. последовательность $y_n = x(\frac{1}{n})$ – последовательность Гейне. Но тогда

$$\forall \varepsilon_0 > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{R} \mid \forall k \geqslant \nu \implies |f(y_k) - p_0| \leqslant \varepsilon_0,$$

что противоречит (2.6). □

Теорема 2.4 (о непрерывности композиции ФНП). *Если n функций $g_k(t)$, $k=\overline{1,n}$ от m переменных $t=(t_1,\ldots,t_m)\in D(g)\subset\mathbb{R}^m$ непрерывны в точке $t_0=(t_{01},\ldots,t_{0m})\in D(g)$, где $g=(g_1,\ldots,g_n)$, а $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ непрерывна в точке $x_0=g(t_0)\in D(f)$, то, в случае существования композиции*

$$h(t)=f(g(t))=f(g_1(t),g_2(t),\ldots,g_n(t)) \tag{2.11}$$

сложная функция (2.11) *будет непрерывна в точке* $t_0\in D(g)$.

Доказательство.Раз $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,\ \forall x\in D(f)\ d(x,x_0)\leqslant\delta\implies|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon.$$

Но в то же время, по числу $\widetilde{\varepsilon}=\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$ имеем

$$\exists\widetilde{\delta_k}>0,\ \forall t\in D(g)\ d(t,t_0)\leqslant\widetilde{\delta_k}\implies|g_k(t)-g_k(t_0)|\leqslant\frac{\delta}{\sqrt{n}},\quad k=\overline{1,n}.$$

Выбирая $\widetilde{\delta}=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\widetilde{\delta_k}\right\}$, имеем:

$$\forall t\in D(g)\ d(t,t_0)\leqslant\widetilde{\delta}\implies|g_k(t)-g_k(t_0)|\leqslant\frac{\delta}{\sqrt{n}},\quad k=\overline{1,n}.$$

Но тогда, учитывая, что $x=g(t)$, $x_0=g(t_0)$, получаем

$$d(x,x_0)=d(g(t),g(t_0))=d\left((g_1(t),\ldots,g_n(t)),(g_1(t_0),\ldots,g_n(t_0))\right)=$$
$$=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(g_k(t)-g_k(t_0)\right)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta^2}{n}}=\delta.$$

Также имеем, что $h(t)=f(g(t))$ и $|h(t)-h(t_0)|=|f(g(t))-f(g(t_0))|=|f(x)-f(x_0)|$, а значит,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\widetilde{\delta}>0,\ \forall t\in D(h)\ d(t,t_0)\leqslant\widetilde{\delta}\implies|h(t)-h(t_0)|\leqslant\varepsilon,$$

что означает непрерывность $h(t)$ в точке t_0.

(*Небольшое примечание:* в последней формуле $\widetilde{\delta}$ берётся из условия непрерывности g_k, построенной по числу $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$, где δ строится по произвольному ε из условия непрерывности f).

Следствие (о пределе композиции ФНП). *Пусть* $\exists \lim\limits_{t \to t_0} g_k(t) = p_k$, $\forall k = \overline{1, n}$; $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$, $t = (t_1, \ldots, t_m) \in D(g) \subset \mathbb{R}^m$, *а* $t_0 = (t_{01}, \ldots, t_{0m})$ *— предельная точка для* $D(g)$. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0 = (p_1, \ldots, p_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, *то в случае существования композиции* $h(t) = f(g(t))$ *имеем*

$$\exists \lim_{t \to t_0} h(t) = \lim_{t \to t_0} f(g(t)) = [f \text{ — непрерывна}] = f(\lim_{t \to t_0} g(t)) = \begin{bmatrix} x = g(t) \underset{t \to t_0}{\to} x_0 \\ x_0 = (p_1, \ldots, p_n) \end{bmatrix} =$$

$$= f(p_1, \ldots, p_n) = f(x_0).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть доопределённую по непрерывности функцию

$$G(t) = \begin{cases} g(t), & t \neq t_0 \\ x_0, & t = t_0 \end{cases}.$$

Функция $G(t)$ непрерывна, так как $\exists \lim\limits_{t \to t_0} G(t) = [t \neq t_0] = \lim\limits_{t \to t_0} g(t) = x_0 = G(t_0)$.

Применяя предыдущую теорему для композиции непрерывных функций, т. к. $\forall t \neq t_0 \implies G(t) = g(t)$, то

$$H(t) = f(G(t)) = f(g(t)) = h(t),$$

поэтому

$$\exists \lim_{t \to t_0} h(t) = \lim_{t \to t_0} H(t) = H(t_0) = f(G(t_0)) = f(x_0).$$

□

Теорема 2.5 (о промежуточном значении непрерывной на связном множестве ФНП). *Пусть* $f \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *— связное множество, то есть множество, у которого две любые точки можно соединить гладкой линией* $l \subset D$. *Если* $f(x)$ *принимает на* D *значения* u_1, u_2,*то есть* $\exists a, b \in D : u_1 = f(a)$, $u_2 = f(b)$, *то тогда* $u = f(x)$ *принимает на* D *все промежуточные значения между* u_1 *и* u_2.

Доказательство. Соединим произвольные $a, b \in D$ гладкой линией $l \subset D$, заданной параметрически

$$l : x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in D,$$

где любая $x_k(t)$ непрерывна на промежутке с концами t_1 и t_2, $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$. Для сложной функции $h(t) = f(x(t))$, являющейся непрерывной Ф1П от $t \implies$

$$h(t_1) = f(x(t_1)) = f(a) = u_1,$$
$$h(t_2) = f(x(t_2)) = f(b) = u_2.$$

По теореме о множестве значений непрерывной Ф1П получим:

$$\forall u_0, \text{ расположенного между } u_1 \text{ и } u_2, \ \exists \ t_0, \text{ расположенное между } t_1 \text{ и } t_2 :$$

$$f(x(t_0)) = h(t_0) = u_0 \implies \exists x_0 = x(t_0) \in D : f(x_0) = u_0.$$

□

Следствие (о прохождении непрерывной ФНП через ноль)**.** *Если* $f(x)$ *непрерывна на связном множестве* $D \subset \mathbb{R}^n$ *и* $\exists a, b \in D : f(a) \cdot f(b) < 0$, *то* $\exists x_0 \in D : f(x_0) = 0$.

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и для Ф1П и следует из того, что если $u_1 = f(a)$ и $u_2 = f(b)$ удовлетворяют условию $u_1 u_2 < 0$, то они разных знаков. Тогда по теореме о промежуточных значениях для $u_0 = 0$, лежащего между u_1 и u_2 получим:

$$\exists x_0 \in D : f(x_0) = u_0 = 0.$$

□

Теорема 2.6 (Вейерштрасс)**.** *Если* $f(x)$ *непрерывна на компакте* $D \subset \mathbb{R}^n$ *(ограниченном замкнутом множестве), то* $\exists\ x, x \in D$:

$$\begin{cases} \min f(x) = f(\overline{x}), & x \in D, \\ \max f(x) = f(\widetilde{x}), & x \in D \end{cases}$$

Доказательство. Докажем для max от противного.

Пусть $M = \sup\limits_{x \in D} f(x)$ (напомню, что супремум, в отличии от максимума, всегда существует). Предположим, что $M = +\infty$. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in D \implies y_n = f(x_n) \geqslant n.$$

Так как D — компакт, т. е. ограниченное множество, то для него справедлив принцип выбора, а именно, из поледовательности (x_n) можно выбрать сходящуюся (x_{n_i}) к $x_0 \in D$ (x_0 лежит в D, т. к. D — замкнутое множество), $y_{n_i} = f\left(x_{n_i}\right) \geqslant n_i$.

Но тогда, переходя к пределу и используя непрерывность $f(x)$ получаем:

$$f(x_0) = \lim_{x_{n_i} \to x_0} f\left(x_{n_i}\right) \geqslant \lim_{n_i \to \infty} n_i = \infty.$$

Противоречие с тем, что $f(x)$ непрерывна в x_0.

Значит, $M \in \mathbb{R}$. Пусть теперь $\nexists x \in D\colon f(x) = M$. Тогда рассмотрим функцию

$$f_0(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Т. к. $M = \sup\limits_{x \in D} f(x)$, то $M > f(x)\ \forall x \in D$ (так как мы предполагаем, что нет x такого, что $f(x) = M$), а значит, $f_0(x) > 0$. Более того, f_0 непрерывна на D, т. к. и числитель, и знаменатель являются непрерывными, а знаменатель не обращается в ноль $\forall x \in D$.

Но тогда $\exists M_0 = \sup_{x \in D} f_0(x) \in \mathbb{R}$ (по доказанному выше). Т. о. получаем:

$$f_0(x) \leqslant M_0 \iff M - f(x) \geqslant \frac{1}{M_0} \iff f(x) \leqslant M - \frac{1}{M_0},$$

что означает, что M не является супремумом $f(x)$ на D. Противоречие.

Аналогично доказывается утверждение для min.

Как и для Ф1П определена *равномерно непрерывная* ФНП.

Теорема 2.7 (Кантор). *Если $f(x)$ непрерывна на компакте $D \subset \mathbb{R}^n$, то $f(x)$ — равно-мерно непрерывна на D.*

Упражнение. Доказать теорему самостоятельно, воспользовавшись схемой доказательства для Ф1П.

Ответ на упражнение. Предположим, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на D, что значит,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0\ \exists \widetilde{x}, \overline{x} \in D, d(\widetilde{x}, \overline{x}) \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x)| > \varepsilon.$$

Возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$. Для них получим последовательности $\widetilde{x}_n$, $\overline{x}_n$. Так как D — ограниченное и замкнутое множество, то из последовательности $(\widetilde{x}_n, \overline{x}_n)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(\widetilde{x}_{n_k}, \overline{x}_{n_k})$ к $(x_0, x_1) \in D^2$. Используя то, что

$$d(\widetilde{x}_{n_k}, \overline{x}_{n_k}) \leqslant \frac{1}{n_k}$$

и то, что $d(x, y)$ — непрерывная ФНП, то, переходя к пределу при $n_k \to \infty$, получаем $d(x_0, x_1) = 0 \iff x_1 = x_0$.

Перейдём теперь в неравенстве

$$|f(\widetilde{x}_{n_k}) - f(\overline{x}_{n_k})| > \varepsilon$$

к пределу при $n_k \to \infty$, воспользуемся непрерывностью Ф1П $|t|$ и непрерывностью $f(x)$ на D:

$$\varepsilon = \lim_{n_k \to \infty} \varepsilon \leqslant \left| \lim_{n_k \to \infty} f(\widetilde{x}_{n_k}) - \lim_{n_k \to \infty} f(\overline{x}_{n_k}) \right| = \left| f\left(\lim_{n_k \to \infty} \widetilde{x}_{n_k} \right) - f\left(\lim_{n_k \to \infty} \overline{x}_{n_k} \right) \right| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

откуда получаем, что $\varepsilon \leqslant 0$. Противоречие.

Теорема 3.1 (достаточное условие дифференцируемости ФНП)**.** *Пусть $f(x)$ определена в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Если её частные производные первого порядка в некоторой окрестности $V(M_0) \subset D$ точки M_0 существуют и непрерывны, то $f(x)$ дифференцируема в M_0.*

Доказательство. Для простоты рассмотрим Ф2П $f(x, y)$ и $M_0(a, b) \in D$.

Пусть существуют непрерывные частные производные $f'_x(M_0)$ и $f'_y(M_0)$ в M_0. Придавая M_0 произвольное приращение $\Delta M(\Delta x,\, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$ так, чтобы $M_0 + \Delta M \in V(M_0)$, и считая дополнительно, что $(a + \Delta x, b) \in V(M_0)$, для Ф1П

$$g(t) = f(t, b), h(\tau) = f(a + \Delta x, \tau)$$

имеем

$$\Delta g(a) = g(a + \Delta x) - g(a) = f(a + \Delta x, b) - f(a, b)$$
$$\Delta h(b) = h(b + \Delta y) - h(b) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b)$$

По формуле Лагранжа конечных приращений получаем:

1. $\exists \theta_1 \in\,]0; 1[\implies \Delta g(a) = g'_t(a + \theta_1 \Delta x)\Delta x = f'_x(a + \theta_1 \Delta x, b)\Delta x$
2. $\exists \theta_2 \in\,]0; 1[\implies \Delta h(b) = h'_\tau(b + \theta_2 \Delta y)\Delta y = f'_y(a + \Delta x, b + \theta_2 \Delta y)\Delta y$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\Delta f(a, b) = \Delta g(a) + \Delta h(b) = f'_x(a + \theta_1 \Delta x, b)\Delta x + f'_y(a + \Delta x, b + \theta_2 \Delta y)\Delta y = \\ &= f'_x(a, b)\Delta x + f'_y(a, b)\Delta y + \alpha, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$\begin{cases} \alpha = A\Delta x + B\Delta y, \\ A = f'_x(a + \theta_1 \Delta x, b) - f'_x(a, b), \\ B = f'_y(a + \Delta x, b + \theta_2 \Delta y) - f'_y(a, b). \end{cases}$$

Осталось показать, что

$$\alpha = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \text{ при } \Delta x \to 0, \Delta y \to 0. \tag{3.9}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$|\alpha| = |A\Delta x + B\Delta y| \leqslant \sqrt{(A^2 + B^2)(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

Также в силу непрерывности производных f'_x и f'_y и ограниченности θ_1 и θ_2 имеем:

$$f'_x(a + \theta_1 \Delta x, b) \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} f'_x(a, b) \implies A \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} 0$$

$$f'_y(a + \Delta x, b + \theta_2 \Delta y) \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} f'_y(a, b) \implies B \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} 0$$

Из этого следует, что (3.9) верно, т. к.

$$\left| \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leqslant \sqrt{A^2 + B^2} \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} 0$$

Из (3.8) и (3.9) получаем дифференцируемость $f(x, y)$ в $M_0(a, b)$. $\square$

Теорема 3.2 (о дифференцировании сложных ФНП). *Пусть $g_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ — функции, определённые на $G \subset \mathbb{R}^m$ и непрерывно дифференцируемые в некоторой окрестности точки $t_0 \in G$.*

Пусть также $f(x)$ — функция, определённая на $D \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируемая в соответствующей окрестности точки $x_0 = (g_1(t_0), g_2(t_0), \dots, g_n(t_0)) \in D$.

Тогда если существует композиция $h(t) = f(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$, то она также является непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности t_0, причём

$$\frac{\partial h(t_0)}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g_i(t_0)}{\partial t_j},\ \ j = \overline{1, m}$$

Доказательство. В силу непрерывной дифференцируемости $f(x)$ в x_0 на соответствущем приращении $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\Delta f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \Delta x_j + \alpha, \text{ где } \alpha = o(|\Delta x|). \tag{3.10}$$

В силу непрерывной дифференцируемости $g_k(t)$ в t_0 на соответствущем приращении $\Delta t \in \mathbb{R}^m$ имеем

$$\Delta g_k(t_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k(t_0)}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta_k, \text{ где } \beta_k = o(|\Delta t|), k = \overline{1, n}. \tag{3.11}$$

Для $h(t) = f(g(t))$, где $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$, в $t_0 \in G \subset \mathbb{R}^m$ имеем

$$\Delta h(t_0) = h(t_0 + \Delta t) - h(t_0) = f(g(t_0 + \Delta t)) - f(g(t_0)) =$$

$$= f\big((g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)) + g(t_0)\big) - f(g(t_0))$$

В силу непрерывности $g_k(t)$ имеем $g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) = \Delta g(t_0) = \Delta x \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$, и, значит,

$$\Delta h(t_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$$

Из (3.10) следует
$$\Delta h(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \Delta x_j + \alpha.$$
В силу (3.11) и того, что $dx_j = \Delta g_j(t_0)$, имеем
$$\Delta h(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j(t_0)}{\partial t_k} \Delta t_k + \beta_j \right) + \alpha =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g_j(t_0)}{\partial t_k} \Delta t_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \beta_j + \alpha =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial h(t_0)}{\partial t_k} \Delta t_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \beta_j + \alpha.$$
Пусть $\gamma = \alpha + \beta$, где $\beta = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \beta_j$. Тогда:
$$\Delta h(t_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial h(t_0)}{\partial t_k} \Delta t_k + \gamma. \tag{3.12}$$
Для доказательства теоремы осталось лишь показать, что $\gamma = o(|\Delta t|)$.

- Во-первых, $\alpha = o(|\Delta x|)$. Во-вторых:
$$|\Delta x_k| = |\Delta g_k(t_0)| = \left| \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k(t_0)}{\partial t_j} \Delta t_j + o(|\Delta t|) \right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial g_k(t_0)}{\partial t_j} \right| |\Delta t_j| + |o(|\Delta t|)| \leqslant$$
$$\leqslant [\text{нер-во Коши-Буняковского}] \leqslant \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial g_k(t_0)}{\partial t_j} \right)^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \Delta t_j^2 \right)} + |o(|\Delta t|)| =$$
$$= \left[c = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial g_k(t_0)}{\partial t_j} \right)^2 = const \geqslant 0 \right] = \sqrt{c}\, |\Delta t| + |o(|\Delta t|)| =$$
$$= |\Delta t| \cdot \left(\sqrt{c} + \left| \frac{o(|\Delta t|)}{|\Delta t|} \right| \right) = |\Delta t| \cdot O(1).$$
Мы получили, что при $\Delta t \neq 0 \quad \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta t} \right| \leqslant O(1)$, следовательно, $\frac{\Delta x_k}{|\Delta t|} = O(1)$ для всех $k = \overline{1, n}$. Тогда также выполняется:
$$\frac{|\Delta x|}{|\Delta t|} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\Delta x_k}{|\Delta t|} \right)^2} = O(1)$$
Отсюда получаем:
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha}{|\Delta t|} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\alpha}{|\Delta x|} \cdot \frac{|\Delta x|}{|\Delta t|} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} o(1) \cdot O(1) = 0$$
Т. е. $\alpha = o(|\Delta t|)$.

- Аналогично

$$|\beta| = \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j}\beta_j\right| \leqslant \text{ [нер-во Коши-Буняковского] } \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j}\right)^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)} = O(1)\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n} o(|\Delta t|)^2} = O(1)\cdot o(|\Delta t|)$$

(*Примечание редактора:* отметим, что $\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} o(|\Delta t|)^2} = |o(|\Delta t|)| = o(|\Delta t|)$, что лучше проверить для себя).

Значит, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\beta|}{|\Delta t|} \leqslant 0$, т. е.$\beta = o(|\Delta t|)$.

Из двух пунктов выше получаем $\gamma = \alpha + \beta = o(|\Delta t|)$, что в сочетании с (3.12) даёт доказательство теоремы. $\square$

Следствие (инвариантность формы 1-го дифференциала ФНП)**.** *Для $h(t) = f(g(t))$ в случае непрерывно дифференцируемых $f(x), g(t)$, где $x = g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)) \in D \subset \mathbb{R}^n$, а $t = (t_1, t_2, \ldots t_m) \in G \subset \mathbb{R}^m$ имеем*

$$dh = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial h(t)}{\partial t_j}dt_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx_i,$$

где dt_j — приращение независимой переменной $t_j, j = \overline{1,m}$, а $dx_i = dg_i(t)$ – дифференциал $g_i(t), i = \overline{1,n}$.

Доказательство. В случае независимой переменной $t = (t_1, \ldots, t_m)$ из определения дифференциала следует:

$$dh = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial h(t)}{\partial t_j}\Delta t_j = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial h(t)}{\partial t_j}dt_j$$

Для $x_i = g_i(t)$ имеем:

$$dh = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial h(t)}{\partial t_j}dt_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial g_i(t)}{\partial t_j}dt_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_i(t)}{\partial t_j}dt_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx_i$$

$\square$

Теорема 3.3 (о равенстве смешанных производных второго порядка ФНП)**.** *Если ФНП $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема в некоторой окрестности внутренней точки $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in D$ и имеет непрерывные смешанные производные $u''_{x_i x_j}(x_0)$, $u''_{x_j x_i}(x_0)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, то тогда выполняется*

$$u''_{x_i x_j} = u''_{x_j x_i} \tag{3.13}$$

Доказательство. Для простоты ограничимся Ф2П $u = f(x, y)$, где $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, у которой существуют непрерывные смешанные производные второго порядка u''_{xy} и u''_{yx} в некоторой окрестности $V(M_0) \subset D$ внутренней точки $M_0 = (a, b) \in D$.

Выбирая произвольное приращение $(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$ так, чтобы $(a + \Delta x, b + \Delta y) \in V(M_0)$, и считая, что при этом $(a + \Delta x, b) \in V(M_0)$, $(a, b + \Delta y) \in V(M_0)$, рассмотрим выражение

$$F = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b) - f(a, b + \Delta y) + f(a, b). \tag{3.14}$$

При указанных выше предположениях (3.14) корректно определено для достаточно малых Δx, Δy.

Для фиксированных допустимых Δy для функции $g(t) = f(t, b + \Delta y) - f(t, b)$ в точке $t = a$ на приращении Δx имеем

$$\Delta g(a) = g(a + \Delta x) - g(a) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b) - f(a, b + \Delta y) + f(a, b) = F.$$

Далее, применяя формулу Лагранжа конечных приращений для функции одной переменной, получаем, что $\exists \Theta_1 \in]0; 1[$ такое, что

$$F = \Delta g(a) = g'_t(a + \Theta_1 \Delta x) \Delta x = (f'_x(a + \Theta_1 \Delta x, b + \Delta y) - f'_x(a + \Theta_1 \Delta x, b)) \Delta x. \tag{3.15}$$

Фиксируя дальше Δx и Θ_1 для Ф1П $h(\tau) = f'_x(a + \Theta_1 \Delta x, \tau)$ на соответствующем приращении Δy в точке $\tau = b$ получаем

$$\Delta h(b) = h(b + \Delta y) - h(b) = f'_x(a + \Theta_1 \Delta x, b + \Delta y) - f'_x(a + \Theta_1 \Delta x, b). \tag{3.16}$$

Поэтому

$$F \overset{(3.15),(3.16)}{=} \Delta h(b) \Delta x \tag{3.17}$$

Применяя снова формулу Лагранжа конечных приращений для Ф1П в точке $\tau = b$ на приращении Δy имеем $\exists \Theta_2 \in \,]0;1[$ такое, что

$$\begin{gathered} \Delta h(b) = h'_\tau \left(b + \Theta_2 \Delta y\right) \Delta y = f''_{xy} \left(a + \Theta_1 \Delta x, b + \Theta_2 \Delta y\right) \Delta y \implies \\ \implies F \overset{(3.17)}{=} f''_{xy} \left(A\right) \Delta x \Delta y, \end{gathered} \tag{3.18}$$

$$A = \left(a + \Theta_1 \Delta x, b + \Theta_2 \Delta y\right) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\overset{\Theta_1, \Theta_2 = O(1)}{\longrightarrow}} M_0 \left(a, b\right) \tag{3.19}$$

Аналогично показывается, что если действовать в другом порядке, то $\exists \Theta_3, \Theta_4 \in \,]0;1[$ такие, что

$$F = f''_{yx} \left(B\right) \Delta y \Delta x \tag{3.20}$$

$$B = \left(a + \Theta_3 \Delta x, b + \Theta_4 \Delta y\right) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\overset{\Theta_3, \Theta_4 = O(1)}{\longrightarrow}} M_0 \left(a, b\right) \tag{3.21}$$

Сравнение (3.18) и (3.20) для $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ даёт равенство

$$f''_{xy} \left(A\right) \Delta x \Delta y = f''_{yx} \left(B\right) \Delta y \Delta x \implies f''_{xy} \left(A\right) = f''_{yx} \left(B\right).$$

Отсюда, используя непрерывность рассматриваемых смешанных производных и в силу (3.19), (3.21), получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy} \left(A\right) \overset{(3.19)}{=} f''_{xy} \left(M_0\right) \overset{(3.21)}{=} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx} \left(B\right).$$

$\square$

3.5 Формула Тейлора для ФНП

Рассмотрим ФНП $u = f(x), x = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, являющуюся $(m+1)$ раз непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности $V(x_0)$ внутренней точки $x_0 \in D$. Рассматривая произвольные $\forall \Delta x \in \mathbb{R}^n$ такие, что $(x_0 + t\Delta x) \in V(x_0) \quad \forall t \in [0,1]$, рассмотрим $F(t) = f(x_0 + t\Delta x)\,,\ t \in [0,1]$. Имеем

$$\begin{cases} F(0) = f(x_0)\,, \\ F(1) = f(x_0 + \Delta x)\,; \end{cases} \implies \Delta F(0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)\,.$$

Из того, что $F(t)$ является Ф1П, то, используя формулу Тейлора в дифференциалах для Ф1П, получаем

$$\Delta F(0) = \Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k F(0)}{k!} + R_m.$$

Отсюда, учитывая, что $d^k F(0) = d^k f(x_0)\,, k = \overline{1,m}$ (доказывается по индукции), имеем

$$\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + R_m.$$

Для остаточного члена R_m в форме Лагранжа имеем

$$R_m = \frac{d^{m+1} f\left(x_0 + \Theta \Delta x\right)}{(m+1)!}, \;\; \exists \Theta \in \left]0, 1\right[.$$

В результате получили формулу Тейлора-Лагранжа для ФНП:

$$\Delta f\left(x_0\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f\left(x_0\right)}{k!} + \frac{d^{m+1} f\left(x_0 + \Theta \Delta x\right)}{(m+1)!}, \Theta \in \left]0, 1\right[.$$

Аналогичным образом из соответствующей формулы Тейлора-Пеано для Ф1П выводится формула Тейлора-Пеано для ФНП:

$$\Delta f\left(x_0\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f\left(x_0\right)}{k!} + o\left(|dx|^m\right), \text{ где } |dx| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

В дальнейшем, эту формулу будем использовать при исследовании ФНП на экстремум.

Теорема 4.1 (необходимое условие ЛЭФНП). *Пусть ФНП*

$$\begin{cases} u = f(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n; \end{cases}$$

дифференцируема в некоторой окрестности $V(x_0) \subset D$ внутренней точки $x_0 \in D$. Если эта x_0 является экстремальной для $f(x)$, то x_0 — стационарная точка для $f(x)$, т. е.

$$df(x_0) = 0. \tag{4.1}$$

Доказательство. Придавая точке $x_0 \in V(x_0) \subset D$ произвольное приращение $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы $(x_0 + \Delta x) \in V(x_0)$, наряду с общим приращением функции $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, рассмотрим для фиксированного $k = \overline{1, n}$ соответствующее специальное приращение $\Delta_k x = \left(0, \dots, 0, \underbrace{\Delta x_k}_{k\text{-е место}}, 0, \dots, 0\right)$, для которого $(x_0 + \Delta_k x) = (x_{01}, \dots, x_{0,k-1}, x_{0k} + \Delta x_k, x_{0,k+1}, \dots, x_{0n}) \in V(x_0)$.

В результате получим соответствующие специальные приращения рассматриваемой функции по k-й координате $\Delta_k f(x_0) = f(x_0 + \Delta_k x) - f(x_0)$. Если x_0 — точка локального минимума (максимума) для $f(x)$, то $\Delta f(x_0) \geqslant 0$ $\big(\Delta f(x_0) \leqslant 0\big)$, откуда следует, что $\Delta_k f(x_0) \geqslant 0$ $\big(\Delta_k f(x_0) \leqslant 0\big)$, т. е. точка $t_k = x_{0k}$ будет точкой локального минимума (максимума) Ф1П $F_k(t) = f(x_{01}, \dots, x_{0,k-1}, t, x_{0,k+1}, \dots, x_{0n})$, так как здесь

$$\Delta F_k(t_k) = F_k(x_{0k} + \Delta t) - F(x_{0k}) = \Delta_k f(x_0) \geqslant 0.$$

Используя далее необходимое условие локального экстремума Ф1П получим, что точка $t_k = x_{0k}$ является для $F_k(t)$ стационарной, т. е.

$$F_k'(t_k) = 0.$$

Отсюда, учитывая, что

$$F_k'(t_k) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k},\ k = \overline{1, n},$$

имеем

$$df(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k}}_{=0} dx_k = 0. \qquad \square$$

Лемма 4.2 (оценка знакопостоянной КФ)**.** *Если КФ* (4.2) *является знакопостоянной, то*

$$\exists C_0 = const > 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^n,\ |h| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2} = 1 \implies |\Phi(h)| \geqslant C_0. \tag{4.5}$$

Доказательство. Во-первых, множество $h \in \mathbb{R}^n$, для которых $|h| = 1$, представляет собой n-мерную единичную сферу $S = S_1(\vec{0})$ радиуса $R = 1$ с центром в начале координат $\vec{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Эта сфера является ограниченным замкнутым множеством в $\mathbb{R}^n$, т. е. компактом, поэтому, в силу непрерывности функции $|\Phi(h)|$ на компакте $S \subset \mathbb{R}^n$, по теореме Вейерштрасса, получили достижимость, например, минимального значения на S, т. е.

$$\exists h_0 \in S \implies C_0 = \min_{h \in S} |\Phi(h)| = |\Phi(h_0)| \geqslant 0.$$

В данном случае, так как $h_0 \in S$, то $|h_0| = 1 \implies h_0 \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, поэтому, в силу знакопостоянства рассматриваемой КФ получили её невырожденность,
а поэтому $\Phi(h_0) \neq 0 \Longrightarrow C_0 = |\Phi(h_0)| > 0$. □

Теорема 4.3 (достаточное условие локального экстремума ФНП)**.** *Если у дважды непрерывно дифференцируемой ФНП $u = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ в некоторой окрестности $V(x_0) \subset D$ внутренней стационарной точки $x_0 \in D$ второй дифференциал* (4.6) *является знакопостоянной квадратичной формой относительно dx_k, $k = \overline{1, n}$, то стационарная точка x_0 будет точкой локального экстремума ФНП. При этом если квадратичная форма* (4.6) *положительно определена, то стационарная точка x_0 является точкой локального минимума. Если* (4.6) *является отрицательно определённой квадратичной формой, то x_0 является точкой локального максимума $f(x)$.*

Доказательство. Для внутренней стационарной точки $x_0 = (x_1,\ x_2,\ .\ .\ .\ ,\ x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим произвольное приращение $\Delta x = (\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ .\ .\ .\ ,\ \Delta x_n)$ такое, что $x_0 + \Delta x \in V(x_0) \subset D$, где $f(x_0)$ дважды непрерывно дифференцируема. Далее, по формуле Тейлора-Пеано для ФНП, имеем

$$\begin{gathered} \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2} + o(|dx|^2), \\ |dx| = \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2} = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2} = |\Delta x|. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Учитывая, что в квадратичной форме (4.6) $\forall dx_k = \Delta x_k,\ k = \overline{1,n}$, в случае, когда $\Delta x \neq \vec{0}$, получаем

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0) \overset{(4.7)}{=} [df(x_0) = 0] = \frac{d^2 f(x_0)}{2} + o(|\Delta x|^2) \overset{(4.6)}{=} \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j + o(|\Delta x|^2) = \\ = \left(\frac{1}{2}\Phi(h) + o(1)\right)\cdot |\Delta x|^2,\end{aligned} \tag{4.8}$$

где

$$\forall h_k = \frac{\Delta x_k}{|\Delta x|},\ k = \overline{1,n},\ \ \Phi(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j. \tag{4.9}$$

Для рассматриваемых $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ имеем $|h| = \left|\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\right| = \frac{|\Delta x|}{|\Delta x|} = 1$, т. е. $\forall h \in S_1(\vec{0})$ — единичная сфера с центром в нуле. Если квадратичная форма (4.6) знакопостоянна, то знакопостоянной будет также и (4.9), поэтому в силу леммы об оценке знакопостоянной квадратичной формы, $\exists C_0 = const > 0$ такая, что $|\Phi(h)| \overset{(4.9)}{\geqslant} C_0 > 0$.

Рассмотрим для простоты случай положительно определённой квадратичной формы (4.6), значит, (4.9). В этом случае $\Phi(h) = |\Phi(h)|$. Отсюда для достаточно малых приращений $\Delta x \neq 0$ в силу (4.8) будем иметь $\Delta f(x_0) \overset{(4.8)}{\geqslant} \frac{1}{2}(C_0 + o(1))|\Delta x|^2 \geqslant 0$. То есть $\Delta f(x_0) \geqslant 0$ в соответствующей окрестности стационарной точки x_0, а значит, в этом случае $x_0 = x_{\min}$. Аналогично рассматривается случай, когда (4.6) является отрицательно определённой, и $x_0 = x_{\max}$. $\square$

Теорема 5.1 (об однозначной разрешимости ФУ). *Пусть задана функция от* $(n+1)$ *переменной* $F(x, u)$, *непрерывная относительно* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ *в соответствующих окрестностях* $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, $u_0 \in I \subset \mathbb{R}$, *причём* $F(x_0, u_0) = 0$. *Если* $F(x, u)$ *непрерывно дифференцируема по* u, *а также*

$$F'_u(x_0, u_0) \neq 0, \tag{5.4}$$

то тогда ФУ (5.1) *с начальным условием* (5.2) *имеет единственное решение* $u = u(x)$ *в некоторой окрестности* $V(x_0) \subset D$*, удовлетворяющее*

$$u(x_0) = u_0. \tag{5.5}$$

Доказательство. Из условия (5.4) в силу непрерывности F'_u в соответствующих окрестностях x_0, u_0 следует, что F'_u сохраняет один и тот же знак в рассматриваемых окрестностях (по теореме о стабилизации знака непрерывных ФНП). Без ограничения общности будем считать, что $\exists \delta > 0 : \ \forall u \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \subset I \implies F'_u(x_0, u) > 0$. В этом случае Ф1П строго возрастает на $[u_0 - \delta, u_0 + \delta]$. Из этого, в силу (5.2), $F(x_0, u_0 - \delta) < 0$ и $F(x_0, u_0 + \delta) > 0$.

Отсюда, в силу непрерывности $F(x, u)$ по переменной x, по теореме о стабилизации знака непрерывных ФНП, уменьшив при необходимости $\delta > 0$, т. е. сузив I, получаем, что $\exists V(x_0) \subset D$, что $\forall x \in V(x_0) \Longrightarrow F(x, u_0 - \delta) < 0$, $F(x, u_0 + \delta) > 0$. Отсюда по теореме о промежуточных значениях ФНП следует, что $\forall$ ix $x \in V(x_0)$ $\exists!$ $u \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta]$ такое, что $u = u(x)$ удовлетворяет (5.3). При этом в силу строгой монотонности $F(x, u)$ по u будет также выполняться (5.5) в силу начального условия (5.2). □

Теорема 5.2 (о дифференцировании неявных ФНП)**.** *Пусть наряду со всеми условиями предыдущей теоремы дополнительно функция* $F(x, u)$ *непрерывно дифференцируема по* x*. Тогда ФУ* (5.1) *с начальным условием* (5.2) *также разрешимо, и его единственное решение в соответствующих окрестностях рассматриваемых точек* $x_0 \in D, u_0 \in I$ *будет удовлетворять начальному условию* $u(x_0) = u_0$*, а также будет дифференцируемо в этой точке по* x*, а частные производные полученной ФНП* $u = u(x)$ *в соответствующих окрестностях* x_0, u_0 *находятся по формуле*

$$u'_{x_k} = -\frac{F'_{x_k}(x, u)}{F'_u(x, u)}. \tag{5.6}$$

Теорема 5.3 (об однозначной разрешимости СФУ)**.** *Пусть функции* $F_k(x,u)$, $k=\overline{1,m}$ *от* $(n+m)$ *переменных* $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D\subset\mathbb{R}^n$, $u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)\in G\subset\mathbb{R}^m$ *непрерывны по* x *и по* u *в некоторых окрестностях точек* $x_0=(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n})\in D\subset\mathbb{R}^n$, $u_0=(u_{01},u_{02},\ldots,u_{0m})\in G\subset\mathbb{R}^m$. *Если выполнено начальное условие*

$$F_k(x_0,u_0)=\vec{0},\ k=\overline{1,m}, \tag{5.12}$$

то, в случае непрерывной дифференцируемости

$$F=(F_1,F_2,\ldots,F_m)\in\mathbb{R}^m \tag{5.13}$$

по $u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)\in\mathbb{R}^m$, *если якобиан* $I(x,u)=\det\frac{\partial F(x,u)}{\partial u}$ *рассматриваемой СФУ* $F(x,u)=\vec{0}$ *в точке* (x_0,u_0) *удовлетворяет условию*

$$I(x_0,u_0)\neq 0, \tag{5.14}$$

тогда система (5.7) *будет иметь в соответствующих окрестностях точек* x_0 *и* u_0 *единственное решение, т. е.* $\exists! u=u(x)$, *удовлетворяющая начальному условию* $u(x_0)=u_0$.

Доказательство. Доказательство проведём, используя ММИ (метод математической индукции).

Во-первых, при $m=1$ СФУ (5.7) даёт ФУ (5.1), для которого теорема об однозначности решения уже доказана.

Во-вторых, предполагая, что теорема доказана при $m=k,\ k\in\mathbb{N}$, рассмотрим случай $m=k+1$.

Из условия (5.14) в силу правила Лапласа вычисления определителя разложением по какой-либо строке (столбцу) следует, что в силу (5.14) в точках $x_0,\ u_0$ хотя бы один из миноров k-ого порядка рассматриваемого якобиана ненулевой. Без ограничения общности (перестановкой строк, столбцов) считаем, что этот минор k-ого порядка

$$I_0=\frac{\partial(F_1,F_2,\ldots,F_k)}{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_k)}(x_0,y_0)\neq 0 \tag{5.15}$$

является главным угловым минором матрицы Якоби рассматриваемой СФУ. Тогда, во-первых, в силу индуктивного предположения, при $m=k$ СФУ

$$\begin{cases} F_i(x,v,u_{k+1})=0, \\ i=\overline{1,k} \end{cases} \tag{5.16}$$

для fix u_{k+1} однозначно разрешена относительно $v = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$, т. е. $\exists! v = v\left(x, u_{k+1}\right)$, удовлетворяющее (5.16) в соответствующих окрестностях рассматриваемых точек, и при этом выполнено начальное условие $v(x_0) = v(x_0, u_{0,k+1}) = v_0$.

В силу разрешимости (5.16) получаем

$$F_i(x, v(x, u_{k+1}), u_{k+1}) \equiv 0 \quad \forall i = \overline{1, k}. \tag{5.17}$$

Дифференцируя равенства по u_{k+1} как сложные функции, получаем

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial u_{k+1}} + \frac{\partial F_i}{\partial u_{k+1}} \equiv 0 \quad \forall i = \overline{1, k}. \tag{5.18}$$

При подстановке v в $(k+1)$-е уравнение системы получим ФУ вида

$$H(x, u_{k+1}) = 0, \tag{5.19}$$

где

$$H(x, u_{k+1}) = F_{k+1}\left(x, v(x, u_{k+1}), u_{k+1}\right). \tag{5.20}$$

(5.19) определяет некоторую функцию

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_{k+1}(x) \\ u_{k+1}(x_0) = u_{0,k+1}. \end{cases} \tag{5.21}$$

Осталось показать, что (5.20) с начальным условием (5.21) имеет единственное решение относительно u_{k+1} в рассматриваемых окрестностях начальных точек. Для этого, в силу теоремы об однозначной разрешимости ФУ достаточно проверить, что

$$\left.\frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}}\right|_{\left(x_0, u_{0,k+1}\right)} \neq 0. \tag{5.22}$$

Дифференцируя функцию (5.20) по u_{k+1} в точках x_0 и u_0 (по правилу дифференцирования сложной функции), получаем

$$\frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial v_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial u_{k+1}} + \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_{k+1}}. \tag{5.23}$$

Но тогда

$$I(x_0, u_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_{k+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_{k+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_{k+1}} \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix} \text{прибавляем } (k+1)\text{-му столбцу} \\ \text{линейную комбинацию предыдующих} \end{matrix}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \sum_{j=1}^k \frac{\partial F_1}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial u_{k+1}} + \frac{\partial F_1}{\partial u_{k+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \sum_{j=1}^k \frac{\partial F_2}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial u_{k+1}} + \frac{\partial F_2}{\partial u_{k+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_2} & \cdots & \sum_{j=1}^k \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial u_{k+1}} + \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_{k+1}} \end{vmatrix} \overset{(5.17),(5.23)}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= [\text{правило Лапласа}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial u_1} & \frac{\partial F_k}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial u_k} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2k+2} \cdot \frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}} = \frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}} \cdot I_0,$$

причем в силу (5.15) $I_0 \neq 0$. Также по условию теоремы $I(x_0, u_0) \neq 0$. Но раз

$$I(x_0, u_0) = \frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}} \cdot I_0 \neq 0,$$

то тогда

$$\frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}} \neq 0,$$

и поэтому для полученного ФУ выполнены все условия однозначной разрешимости ФУ и, значит, $\exists! u_{k+1} = u_{k+1}(x)$, удовлетворяющее, во-первых, начальному условию $u_{k+1} = u_{0,k+1}$ и, во-вторых, после подстановки заданной функции в $v = v(x, u_{k+1})$ получим функцию, которая удовлетворяет на рассматриваемом этапе соответствующим условиям. При этом для $u = u(x)$ выполнено начальное условие $u(x_0) = u_0$. $\square$

Теорема 5.4 (признак функциональной независимости системы функций). *Пусть функции $f_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $V(x_0) \subset D$, внутренней точки $x_0 \in D$. Если для матрицы Якоби* (5.25) *в точке* $x_0 \Longrightarrow$

$$\operatorname{rank} A = m, \tag{5.26}$$

то тогда рассматриваемая функциональная система является независимой в $V(x_0)$.

Доказательство. От противного:

Пусть для рассматриваемой функциональной системы (ФС) выполнено (5.26) в точке x_0, но эта система зависима в $V(x_0) \subset D$.

Из (5.26) $\Longrightarrow$ хотя бы один минор m-ого порядка матрицы Якоби в точке x_0 ненулевой.

Предположим, что таким минором является якобиан

$$I_0 = \frac{\partial\,(f_1, \ldots, f_m)}{\partial\,(x_1, \ldots, x_m)} = \det \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}\right|_{x_0} \neq 0 \tag{5.27}$$

Из предположения зависимости ФУ в силу равенства (5.24), $\exists f_j = H(f_1, \ldots, f_{j-1}, f_{j+1}, \ldots, f_m)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. После последовательного дифференцирования по $x_1, \ldots, x_n$ в точке x_0 получим:

$$\frac{\partial f_j(x_0)}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial t_{j-1}} \cdot \frac{\partial f_{j-1}(x_0)}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial t_{j+1}} \cdot \frac{\partial f_{j+1}(x_0)}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial t_m} \cdot \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_i},\ i = \overline{1, m}, \tag{5.28}$$

где $H = H\,(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_m)$ — функция $(m-1)$ переменной.

Если вместо j-ой строки в якобиане (5.27) подставить равенство (5.28), то эта j-ая строка будет линейной комбинацией строк с соответствующими коэффициентами. А тогда по свойствам определителя, используемый минор I_0 будет нулевым, что противоречит (5.27).

Поэтому исходное предположение неверно. □

Функция Лагранжа

Недостатком предыдущего метода является то, что используемые переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ неравноправны между собой, т. к. x_k, $k = \overline{1, n}$ — независимые переменные, а y_j, $j = \overline{1, m}$, зависимы и должны быть выражены через x_k за счет уравнения связи. Чтобы уравновесить эти переменные между собой, Лагранж расширил число переменных и добавил к ним множество $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_m \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1, \ m}$, с помощью которых на рассматриваемой ФНП и уравнении связи строится *функция Лагранжа*:

$$L(x, y) = f(x, y) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k F_k(x, y) \tag{6.10}$$

Вопросы для подготовки к коллоквиуму

1. Пространство $\mathbb{R}^n$. Расстояние в $\mathbb{R}^n$. Неравенство Буняковского.
2. Последовательности в $\mathbb{R}^n$. Сходимость. Основной критерий сходимости.
3. Функции n переменных (ф. n п.). Предел. Критерий Гейне. Повторные пределы.
4. Непрерывность ф. n п. Непрерывность композиции.
5. Основные теоремы о свойствах непрерывных ф. n п.
6. Непрерывность по одной переменной. Равномерная непрерывность ф. n п. Теорема Кантора.
7. Дифференцируемость ф. n п. Частные производные (ЧП).
8. Необходимые условия дифференцируемости. Достаточные условия дифференцируемости.
9. Дифференцируемость композиции. ЧП сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.
10. Производные старших порядков. Теорема Шварца о равенстве смешанных производных.
11. Дифференциалы. Оператор d.
12. Формула Тейлора.
13. Теорема о неявной функции. Дифференцирование неявной функции.
14. Системы функциональных уравнений (СФУ). Теорема об однозначной разрешимости СФУ. Алгоритм дифференцирования.
15. Задача о локальном экстремуме. Необходимые условия. Достаточные условия для ф. 2 п.
16. Достаточные условия локального экстремума ф. n п.
17. Зависимость функций. Признак независимости. Признак зависимости.
18. Условный экстремум. Сведение к безусловному. Функция Лагранжа.
19. Алгоритм решения задачи на условный экстремум. Глобальный экстремум.
20. Квадратичные формы. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.