

Computational Geometry - Abgabe 3

1st Bartolovic Eduard
Hochschule München
München, Deutschland
eduard.bartolovic0@hm.edu

I. BASIS BENTLEY-OTTMANN ALGORITHMUS

Zu Beginn werden alle Start und Endpunkte aller Strecken $L_{InputStrecken}$ in eine EventQueue Q_{Event} eingefügt. Diese EventQueue ist eine PriorityQueue die intern die Events auf der X-Achse und Eventtyp sortiert. *START* Events haben bei gleichem X Wert Vorrang. *END* Events sind immer zuletzt dran. Die PriorityQueue ist als ein Heap implementiert. Die Operationen besitzen deshalb auch die Komplexität [1]:

- add: $\mathcal{O}(\log(n))$
- poll: $\mathcal{O}(1)$

Relevante Strecken liegen in der Sweepline T_{Sweep} . Für die Sweepline T_{Sweep} wird als Datenstruktur eine Baum basierend auf einer Rot-Schwarz-Baum Implementierung verwendet. Dieser hat die Komplexität [2]:

- add: $\mathcal{O}(\log(n))$
- remove: $\mathcal{O}(\log(n))$
- contains: $\mathcal{O}(\log(n))$
- get: $\mathcal{O}(\log(n))$

Es gibt im regulären Bentley-Ottmann Algorithmus 3 Events (*START*, *END*, *INTERSECTION*). Zu Beginn liegen nur *START* und *END* Events in Q_{Event} .

Nun wird nacheinander ein Event aus Q_{Event} genommen. Dieses Event wird je nach Typ behandelt.

Das Event *START* fügt das neue Segment S_{new} in die Sweepline T_{Sweep} ein. Es wird überprüft ob ein Segment über oder unter S_{new} liegt. Sollte dies der Fall sein wird überprüft ob diese sich mit S_{new} schneiden. Bei einem gefundenen Schnittpunkten wird ein neues *INTERSECTION* Event in T_{Sweep} eingefügt.

Bei einem *END* Event endet ein Segment S_{old} . Es wird überprüft ob ein Segment über und unter S_{old} liegt. Sollten diese existieren dann wird überprüft ob diese sich schneiden. Bei einem gefundenen Schnittpunkten wird ein neues *INTERSECTION* Event in Q_{Event} eingefügt. S_{old} wird aus der Sweepline T_{Sweep} entfernt.

Bei einem *INTERSECTION* Event schneiden sich die zwei Segmente s und t. Dabei werden die Positionen von s und t in T_{Sweep} getauscht. Nach dem werden die Segmente r und u, die möglicherweise unmittelbar unter bzw. über t und s liegen nach Schnittpunkten untersucht. Gefundene Schnittpunkte werden der Ereigniswarteschlange hinzugefügt.

II. SCHNITTPUNKT ZWISCHEN 2 GERADEN

Da es nicht reicht nur zu Wissen das zwei geraden einen Schnittpunkt haben sondern es auch nötig ist auch dessen

genaue Position zu kennen musste ein neuer Algorithmus entwickelt werden.

Hierfür wurde erstmal überprüft ob der Start- oder Endpunkt $p1, q1$ der Strecke $s1$ identisch zu einem der Punkt $p2$ oder $q2$ der Strecke $s2$ ist. Sollte dies der Fall sein wird direkt der gemeinsame Punkt zurückgegeben.

Nun werden die beiden Strecken als Geraden behandelt. So kann man mit der Geradengleichung den Schnittpunkt der zwei Geraden berechnen.

Es besteht die Möglichkeit das der Schnittpunkt S nicht existiert da beide Geraden parallel zu einander sind. In diesem Fall wären x und y von S unendlich. In diesem Fall wird ein `Optional.empty()` zurückgegeben. Da der Schnittpunkt S über die Geradengleichung berechnet worden ist kann es sein das dieser sich auf den Geraden von $s1$ und $s2$ befindet aber nicht auf der Strecke $s1$ oder $s2$. Deshalb muss überprüft werden ob sich der Punkt in der Bounding Box der beiden Strecken befindet. Sollte dies bei beiden der Fall sein dann ist dies der korrekte Schnittpunkt.

Um numerische Fehler zu reduzieren wird bei Horizontalen und Vertikalen Strecken
+++++

III. PROBLEME FÜR DEN ALGORITHMUS

Der Algorithmus hat Probleme wenn folgende Voraussetzungen nicht erfüllt sind:

- 1) x-Koordinaten der Schnitt- und Endpunkte sind paarweise verschieden
- 2) Länge der Segmente > 0
- 3) nur echte Schnittpunkte
- 4) keine Linien parallel zur y-Achse
- 5) keine Mehrfach Schnittpunkte
- 6) keine überlappenden Segment

IV. BEHANDLUNG DER SONDERFÄLLE

In meiner Implementierung werden alle Sonderfälle behandelt.

A. Nur echte Schnittpunkte

Meine Implementierung unterstützt auch unechte Schnittpunkte. Hierfür wurde vor allem die Sweepline angepasst. So wird die gewöhnliche Sweepline Implementierung die nur aus einem Baum T_{Sweep} mit Strecken besteht mit einer

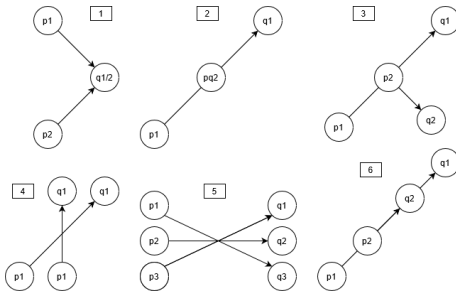


Abbildung 1. Problemfälle für den Standard Bentley Ottman algorithmus

Funktionalität ergänzt die ähnlich wie bei Buckets bei einem Hashset funktioniert. So wird bei START Events überprüft ob die Position des Startpunktes in T_{Sweep} bereits existiert. Sollte dies der Fall sein wird das Segment einfach zusätzlich in den Knoten eingefügt. Der Schlüssel der Knoten ist der aktuelle Y-Wert.

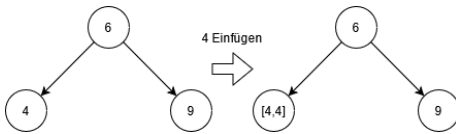


Abbildung 2. Einfügen in die Sweepline mit Kollision

Leider müssen werden jedes mal wenn die Sweepline bewegt wird die Elemente in T_{Sweep} zu neu sortiert werden. T_{Sweep} neu zu sortieren bedarf $\mathcal{O}(n * \log(n))$. Theoretisch müsste es möglich sein dies zu vermeiden in dem immer nur die Nachbar verglichen werden. Dies ist aber sehr komplex da bei Neusortierungen die Buckets mit neu sortiert werden müssen. Ich bin überzeugt das es auch ohne kompletter Neusortierung gehen müsste. Der Aufwand dafür ist aber extrem hoch. Es reicht nicht aus immer nur die direkten Nachbarn zu betrachten da potentiell weiter entfernte Strecken auch noch in Betracht kommen können. Deshalb muss neben den direkten Nachbarn noch weiter überprüft werden bis man sicher gehen kann das diese sich nicht schneiden können.

B. X-Koordinaten der Schnitt- und Endpunkte sind paarweise identisch

Dieses Problem ist ein Teilproblem des vorherigen Problems und damit schon gelöst. So wird beim einfügen neuer Strecken überprüft ob bereits andere Segmente an diesem Punkt liegen. Sollte dies der Fall sein werden wird dieser Punkt entsprechend der Anzahl der Segmente als Schnittpunkte in die Output Liste eingefügt. Außerdem immer wenn ein Schnittpunkt gefunden wird welcher direkt auf der Sweepline T_{Sweep} liegt wird dieser ohne ein *INTERSECTION* Event zu generieren der Outputliste hinzugefügt.

C. Linien parallel zur Y-Achse

Für Linien die zur Y-Achse gehören wurden in ein neues *VERTICALLINE* Event erschaffen. So werden keine *Start* und

END Event in die Eventqueue Q_{Event} eingefügt sondern nur das *VERTICALLINE* Event. Vertikale Strecken schneiden sich mit allen Strecken, die aktuell die Sweepline zwischen dem Start- und Endpunkt der vertikalen Strecke schneiden. So muss nicht die gesamte Sweepline T_{Sweep} untersucht werden sondern nur ein Teilbaum. Das gilt selbstverständlich auch für

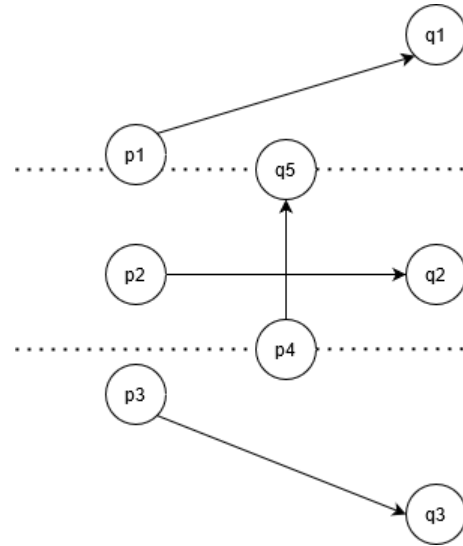


Abbildung 3. Suche nach Schnittpunkten mit Vertikalen Strecken in einem eingeschränkten Bereich

anderen Vertikalen Strecken an aktueller X-Stelle. Deshalb wird eine vertikale Strecke auch an einem *VERTICALLINE* Event in die Sweepline T_{Sweep} eingefügt. Sie werden aber nicht in den Baum eingefügt sondern in eine separate Liste für vertikale Segmente. Sobald die Sweepline verschoben wird werden alle vertikalen Strecken aus der Liste entfernt.

D. Länge der Segmente gleich 0

Elemente der Länge 0 werden einfach als vertikale Segmente behandelt.

E. Mehrfach Schnittpunkte

Mehrfach Schnittpunkte wurden behandelt. Hierfür wird die oben beschriebene Baumstruktur der Sweepline T_{Sweep} genutzt. So wird an einem *INTERSECTION* Event in der SweepLine gesucht ob an der Stelle weitere Segmente durchlaufen. Sollte dies der Fall sein wird werden direkt die korrekte menge an Schnittpunkten der Outputliste hinzugefügt. Wichtig ist aber das der Fall in der Abbildung 4 betrachtet wird. Hier muss an dem Schnittpunkt der höchste und niedrigste Segment gefunden werden und mit den benachbarten Strecken abgeglichen werden.

F. Überlappende Segmente

Auch dieses Problem ist auch ein Teilproblem der nur echten Schnittpunkte. Dies kann aber noch mehr Probleme bereiten als das nur Überlappungen in einzelnen Punkten. Wichtig ist das die Funktion die Schnittpunkte zwischen

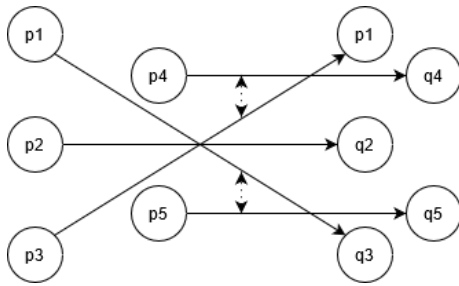


Abbildung 4. Problemfälle mit überlappenden Elementen

2 Strecken findet in der Lage ist trotz Überlappung einen Schnittpunkt findet. Da eigentlich überlappende Segmente unendlich viele Schnittpunkte hat wird einfach der untere linke Punkt gewählt.

Die wichtigsten Fälle sind in Abbildung 2 abgebildet:

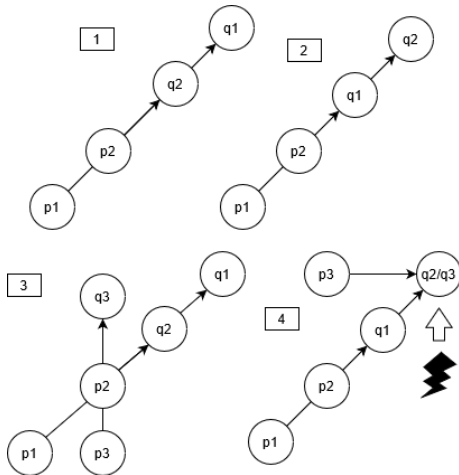


Abbildung 5. Problemfälle mit überlappenden Elementen

Schwierig ist vor allem der Fall 4. Hier muss am Startpunkt p_3 der Schnittpunkt q_2/q_3 gefunden werden. Dazu müssen die Strecken 1 und 2 welche beide gleich weit unter Strecke 3 liegen überprüft werden.

V. GENAUIGKEIT

Ein Problem des Bentley Ottmann Verfahrens ist es das Schnittpunkte die sehr nah aneinander liegen Probleme verursachen können. Wichtig ist das die Berechnungen eine hohe Genauigkeit aufweisen. So liegen Schnittpunkte teilweise nur 4 Nachkommastellen auseinander.

VI. KOMPLEXITÄT

Die Komplexität ist abhängig vom Input. So gibt es normalerweise $2n + k$ Events, wobei n die Anzahl der Segmente und k die Anzahl der Schnittpunkten entspricht. Wobei bei Sonderfälle die Anzahl geringer ausfallen kann. Da bei vertikalen Strecken nur ein Punkt in die Eventqueue eingefügt wird. Das selbe gilt auch für Schnittpunkte die in einem Startpunkt

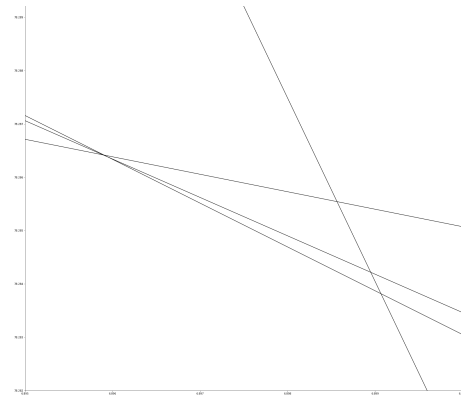


Abbildung 6. Sehr nah liegende Schnittpunkte

liegen und keinen neuen Eintrag in die EventQueue bekommen. So gilt für m nicht vertikale Strecken, s Schnittpunkte ohne Überschneidungen mit anderen Events und v vertikalen Strecken:

$$2n + k \geq 2m + s + v$$

Die Komplexität des Sortierens der Eventqueue beträgt $\mathcal{O}((2m + v) * \log(2m + v))$ was trotzdem $\mathcal{O}(n * \log(n))$ entspricht.

Operationen in die EventQueue und der Sweepeline haben die Komplexität $\mathcal{O}(\log(m))$. Allerdings wird bei jedem bewegen der Sweepeline die Sweepeline neu berechnet. Dies resultiert leider in $\mathcal{O}(m * \log(m))$.

Zusammengefasst kann man den Aufwand wie folgt beschreiben:

$$\mathcal{O}(m * \log(m)) + m * \mathcal{O}(m * \log(m))$$

Datei	BF S C	BF S L	BF P C	BF P L	BO
s_1000_1	18	20	37	57	57
s_1000_10	13	13	1	2	14
s_10000_1	1263	1423	136	128	43
s_100000_1	111624	121718	8712	8825	45893

Tabelle I
LAUFZEITEN DER ALGORITHMEN

VII. PERFORMANCE

- 1) **BF S C:** BruteForce, SingleThread, nur Anzahl Schnittpunkte
 - 2) **BF S L:** BruteForce, SingleThread, Liste von Schnittpunkten
 - 3) **BF P C:** BruteForce, MultiThread, nur Anzahl Schnittpunkte
 - 4) **BF P L:** BruteForce, MultiThread, Liste von Schnittpunkten
 - 5) **BO:** Bentley-Ottmann, Liste von Schnittpunkten
- Auch noch test mit 4Kerner?

VIII. DURCHSCHNITTICHE SWEEPLINEGRÖSSE

Die durchschnittliche Füllgrad und die Anzahl der Verschiebungen der Sweepline beeinflusst die Performance maßgeblich. Die Anzahl der Schnittpunkte beeinflusst meistens auch die Anzahl der Verschiebungen der Sweepline. Dies kann man gut sehen wenn man die Zeiten in der oberen Tabelle mit der Abbildung 7 vergleicht.

LITERATUR

- [1] <https://docs.oracle.com/javase/8/docs/api/java/util/PriorityQueue.html>
[2] <https://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/java/util/TreeMap.html>

IX. ANHANG

Berechnung der Fläche eines Bundeslandes:

```
public double calculateArea(){
    double sum = 0;
    for(Polygon p : areas){
        boolean isInside = false;
        for(Polygon p2 : areas){
            //Check if Hole
            if(!p.equals(p2) && p.isPolygonInside(p2)){
                isInside = true;
                break;
            }
        }
        if(isInside)
            sum -= Math.abs(p.calculateArea());
        else
            sum += Math.abs(p.calculateArea());
    }
    return sum;
}
```

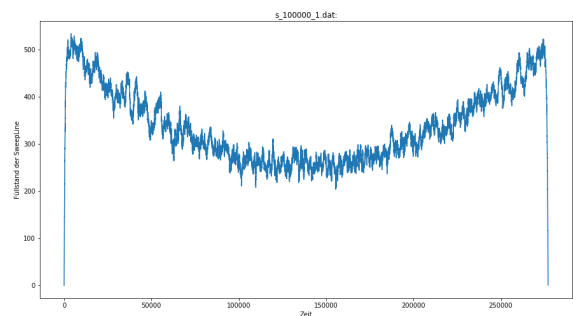
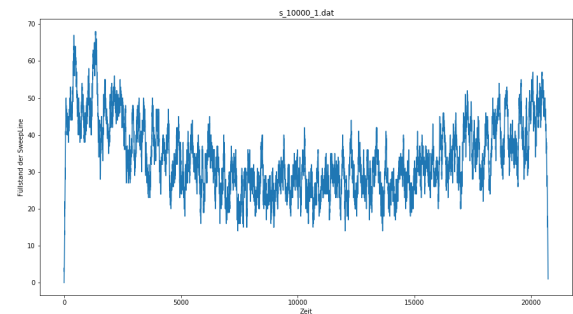
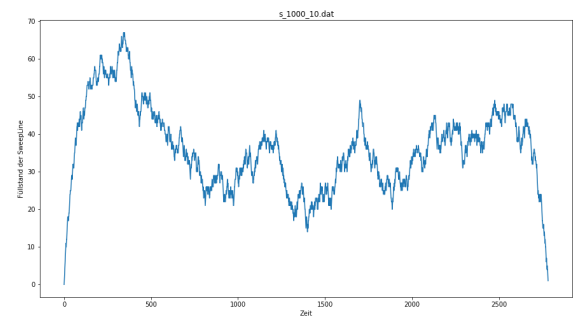
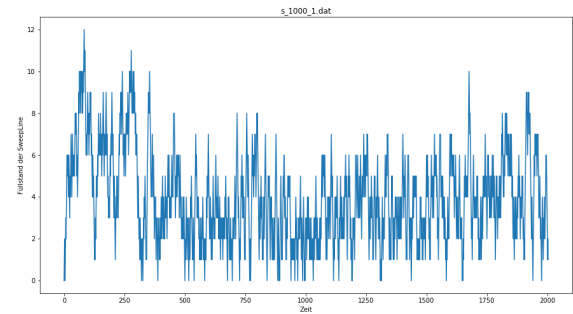


Abbildung 7. Füllstand der Sweepline über die Zeit