Iluminarea scenelor

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2024 - 2025

Modele de iluminare - generalități

Un model de iluminare face referire la:

(a) elemente luate în considerare

(b) parametri corespunzători elementelor de la (a)

(c) modul în care sunt “agregate” elementele de la (a)

Modelele de iluminare mai sunt numite modele de reflexie (*reflection models*) sau modele de umbrire (*shading models*). Cele mai comune modele de iluminare sunt denumite *ADS models*.

Observație geometrică fundamentală

Context. Fie O un punct și d_0 o semidreaptă cu originea în acel punct. Considerăm o semidreaptă variabilă d cu originea în O; fie θ unghiul dintre semidreptele d_0 și d. Este utilă o funcție depinzând de θ care să fie descrescătoare pe $[0^\circ, 90^\circ]$. Un exemplu de funcție care verifică această proprietate este funcția **cosinus**.

(i) Funcția cos este descrescătoare pe $[0^\circ, 90^\circ]$.

(ii) Valoarea funcției poate fi calculată folosind produsul scalar (*dot product*). Astfel, fie $\mathbf{v}_0$ și $\mathbf{v}$ vectori directori pentru d_0, respectiv d. Are loc relația

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}_0\| \, \|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}_0\| \, \|\mathbf{v}\|}.$$

(iii) Pe intervalul $[0^\circ, 90^\circ]$ funcția cos ia valori în intervalul $[0, 1]$. Prin ridicare la putere se poate controla modul în care funcția descrește.

Modelul de iluminare

RGB sau RGBA

$$
\begin{aligned}
\text{color} = \; & \text{emission} + \\
& \text{ambient}_{\text{light model}} * \text{ambient}_{\text{material}} + \\
& \sum_{i=0}^{N-1} \text{attenuation factor}_i \cdot \text{spotlight effect}_i \cdot \\
& (\text{ambient term} + \text{diffuse term} + \text{specular term})_i,
\end{aligned} \tag{1}
$$

termenul legat de emisie

termen ambiental, independent de existenta unor surse de lumină

unde N este numărul surselor de lumină.

N termeni, fiecare pt. o sursă de lumină

Ecuația (1) este implementată în shader (de vârfuri sau de fragment).

Termenul de emisie și termenul ambiental

- *Emission*: este ceea ce “emite” vârful respectiv (util pentru surse de lumină).

Termenul de emisie și termenul ambiental

- *Emission*: este ceea ce “emite” vârful respectiv (util pentru surse de lumină).
- *Ambiental:* nu există surse de lumină, este doar efectul unei luminozități de fond.

Termenul de emisie și termenul ambiental

- *Emission*: este ceea ce "emite" vârful respectiv (util pentru surse de lumină).
- *Ambiental:* nu există surse de lumină, este doar efectul unei luminozități de fond.
- $\mathrm{ambient}_{\mathrm{light\ model}} * \mathrm{ambient}_{\mathrm{material}}$. **Operația $*$ este dată de înmulțirea pe componente.**
- Exemplu:

$$(0.2, 0.4, 0.8) * (0.6, 0.7, 0.5) =$$

$$= (0.12, 0.28, 0.4).$$

Pentru o sursă de lumină i

$$\overset{\text{iv}}{\text{attenuation factor}}_i \cdot \overset{\text{v}}{\text{spotlight effect}}_i \cdot$$

$$(\underset{\text{i}}{\text{ambient term}} + \underset{\text{ii}}{\text{diffuse term}} + \underset{\text{iii}}{\text{specular term}})_i$$

(i) Componenta ambientală

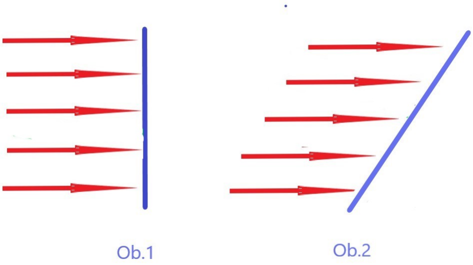
Termenul ambiental corespunzător unei surse de lumină este

$$\text{ambient term} = \text{ambient}_{\text{light}} * \text{ambient}_{\text{material}}.$$

Teoretic, $\text{ambient}_{\text{light}}, \text{ambient}_{\text{material}}$ sunt coduri RGB(A). Practic, este posibil ca acestea să fie și scalari.

(ii) Reflexia difuză (diffuse term)

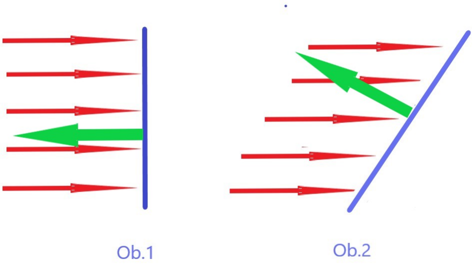
Are legătură cu geometria scenei, lumina reflectată depinde și de incidența luminii asupra obiectelor.



Relevant: unghiul dintre direcția incidentă a luminii și suprafață, de fapt dintre direcția incidentă a luminii și **normala** (în fiecare punct) la suprafață.

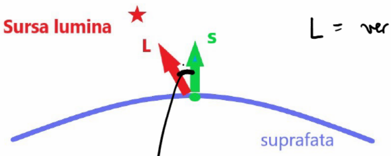
(ii) Reflexia difuză (diffuse term)

Are legătură cu geometria scenei, lumina reflectată depinde și de incidența luminii asupra obiectelor.



Relevant: unghiul dintre direcția incidentă a luminii și suprafață, de fapt dintre direcția incidentă a luminii și **normala** (în fiecare punct) la suprafață.

(ii) Reflexia difuză (diffuse term)



s = vector normal la suprafață

L = versor al vectorului din vârf către sursa de lumina

θ = unghiul dintre L și s

Lumina reflectată este legată de cos θ

$$\cos\theta = \frac{\langle L, s\rangle}{\underbrace{\|L\|}_{=1}\cdot\underbrace{\|s\|}_{=1}} = \langle L, s\rangle = L\cdot s = \mathrm{dot}(L,s)$$

(produs scalar)

L, s : vectori de normă 1

... apoi se realizează înm. cu diffuse

(ii) Reflexia difuză (diffuse term)

Reflexia difuză pentru o sursă de lumină este descrisă de

$$\text{diffuse term} = \begin{cases} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}) \cdot \text{diffuse}_{\text{light}} * \text{diffuse}_{\text{material}}, & \text{dacă } \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} > 0 \\ 0, & \text{dacă } \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} \leq 0, \end{cases}$$

unde $\mathbf{L}$ este vectorul unitar orientat de la vârf la sursa de lumină (în cazul surselor direcționale este opusul direcției acesteia, normat), iar $\mathbf{s}$ este normala la suprafață în vârful considerat. Cazul $\mathbf{L} \cdot \mathbf{s} < 0$ corespunde situației în care sursa de lumină este în spatele obiectului.

(ii) Reflexia difuză (diffuse term)

- Comentariu legat de “vector spre sursa de lumină”. **Sursele de lumină:**

(ii) Reflexia difuză (diffuse term)

- Comentariu legat de “vector spre sursa de lumină”. **Sursele de lumină:**
  - punctuale (bec, lanternă, etc.),

(ii) Reflexia difuză (diffuse term)

- Comentariu legat de "vector spre sursa de lumină". **Sursele de lumină:**
  - punctuale (bec, lanternă, etc.),
  - direcționale (Soare, alte corpuri cerești) - de fapt orice sursă de lumină situată la o distanță foarte mare de scenă, în raport cu proporțiile scenei.

(ii) Reflexia difuză (diffuse term)

- Comentariu legat de "vector spre sursa de lumină". **Sursele de lumină:**
  - punctuale (bec, lanternă, etc.),
  - direcționale (Soare, alte corpuri cerești) - de fapt orice sursă de lumină situată la o distanță foarte mare de scenă, în raport cu proporțiile scenei.
- Dacă se lucrează cu `vec4`, atunci distincția se poate face la nivelul celei de-a patra componente:

(ii) Reflexia difuză (diffuse term)

- Comentariu legat de "vector spre sursa de lumină". **Sursele de lumină:**
  - punctuale (bec, lanternă, etc.),
  - direcționale (Soare, alte corpuri cerești) - de fapt orice sursă de lumină situată la o distanță foarte mare de scenă, în raport cu proporțiile scenei.
- Dacă se lucrează cu `vec4`, atunci distincția se poate face la nivelul celei de-a patra componente:
  - `1.0` pentru surse punctuale;

(ii) Reflexia difuză (diffuse term)

- Comentariu legat de "vector spre sursa de lumină". **Sursele de lumină:**
  - punctuale (bec, lanternă, etc.),
  - direcționale (Soare, alte corpuri cerești) - de fapt orice sursă de lumină situată la o distanță foarte mare de scenă, în raport cu proporțiile scenei.
- Dacă se lucrează cu `vec4`, atunci distincția se poate face la nivelul celei de-a patra componente:
  - `1.0` pentru surse punctuale;
  - `0.0` pentru surse direcționale.

(ii) Reflexia difuză (diffuse term)

Dacă se lucrează cu vec3:

- sursă punctuală : poziția în $\mathbb{R}^3$. vec3 LightPos

Light Pos

- vârful/fragment : vec3 Pos

$$\boxed{L = \frac{LightPos - Pos}{\|LightPos - Pos\|}}$$

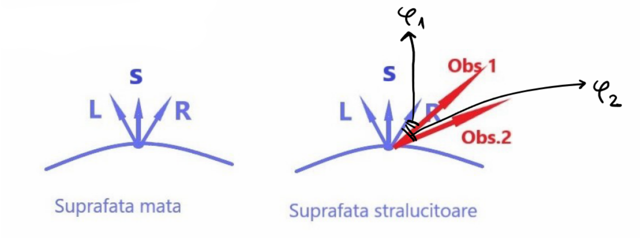
Pos (Vârf/Fragment)

- sursă direcțională : direcția vec3 d

d -d

$$\boxed{L = \frac{-d}{\|d\|}}$$

(iii) Reflexia speculară



R = versor pentru direcția de reflexie a luminii ("direcție ideală")
φ = unghiul format de **R** cu versorul spre observator **Obs**.
În desen $\varphi_1 < \varphi_2$, adică Obs1 vede "mai bine" lumina reflectată decât Obs2.
Factorul care descrie atenuarea este $(\cos\varphi)^{\mathrm{shininess}}$, unde $\mathrm{shininess}$ este o proprietate de material.
În unele implementări poate fi înlocuit cu unghiul dintre vectorul **H** (*halfway*) și normala **s** la suprafață.

(iii) Reflexia speculară

Astfel, sunt posibile două implementări pentru reflexia speculară:

1. [Phong, 1973] Folosind unghiul dintre versorul spre observator **Obs** și versorul **R** pentru direcția de reflexie a luminii.

$$\text{specular term} = \begin{cases} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{Obs})^{\text{shininess}} \cdot \text{specular}_{\text{light}} * \text{specular}_{\text{material}}, & \text{dacă } \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} > 0 \\ 0, & \text{dacă } \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} \leq 0. \end{cases}$$

2. [Blinn, 1977] Folosind unghiul dintre normala la suprafață **s** și vectorul $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{L} + \mathbf{Obs}}{\|\mathbf{L} + \mathbf{Obs}\|}$, unde **Obs** este versorul determinat de vârful considerat și poziția observatorului și **L** este versor al vectorului din vârf către sursa de lumină.

$$\text{specular term} = \begin{cases} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{s})^{\text{shininess}} \cdot \text{specular}_{\text{light}} * \text{specular}_{\text{material}}, & \text{dacă } \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} > 0 \\ 0, & \text{dacă } \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} \leq 0, \end{cases}$$

(iv) Coeficientul de atenuare

Pentru o sursă (punctuală) fixată factorul de atenuare (attenuation factor) se calculează cu formula

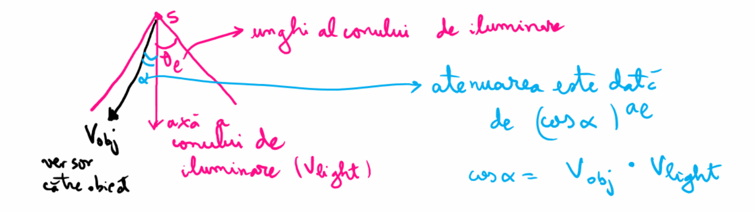
$$\text{attenuation factor} = \frac{1}{a_0 + a_1 d + a_2 d^2},$$

unde d este distanța de la sursa de lumină la vârful/fragmentul considerat (d=dist(`Pos, LightPos`)).

(v) Efectul de tip spot

- Efectul de tip spot **pentru o sursă punctuală S** este cuantificat de factorul

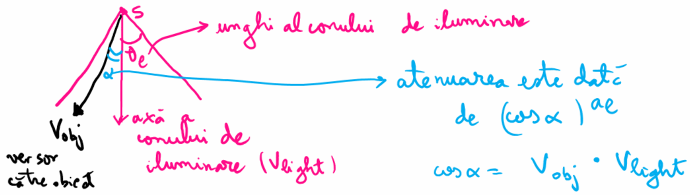
$$\text{spotlight effect} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \theta_l = 180^0 \\ 0, & \text{dacă } \mathbf{v}_{\text{obj}} \cdot \mathbf{v}_{\text{light}} < \cos\theta_l, \\ (\mathbf{v}_{\text{obj}} \cdot \mathbf{v}_{\text{light}})^{a_l}, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$



(v) Efectul de tip spot

- Efectul de tip spot **pentru o sursă punctuală S** este cuantificat de factorul

$$\text{spotlight effect} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \theta_l = 180^0 \\ 0, & \text{dacă } \mathbf{v}_{\text{obj}} \cdot \mathbf{v}_{\text{light}} < \cos\theta_l, \\ (\mathbf{v}_{\text{obj}} \cdot \mathbf{v}_{\text{light}})^{a_l}, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

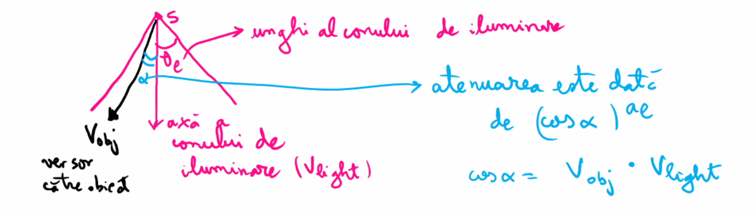


- Elementele definitorii: (i) $\mathbf{v}_{\text{light}}$ este un versor al axei conului de iluminare; (ii) θ_l este unghiul care definește conul de iluminare (deschiderea acestuia); (iii) a_l este coeficientul de atenuare, care caracterizează cum descrește intensitatea luminii prin îndepărtarea de axa conului.

(v) Efectul de tip spot

- Efectul de tip spot **pentru o sursă punctuală S** este cuantificat de factorul

$$\text{spotlight effect} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \theta_l = 180^0 \\ 0, & \text{dacă } \mathbf{v}_{\text{obj}} \cdot \mathbf{v}_{\text{light}} < \cos\theta_l, \\ (\mathbf{v}_{\text{obj}} \cdot \mathbf{v}_{\text{light}})^{a_l}, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$



- Elementele definitorii: (i) $\mathbf{v}_{\text{light}}$ este un versor al axei conului de iluminare; (ii) θ_l este unghiul care definește conul de iluminare (deschiderea acestuia); (iii) a_l este coeficientul de atenuare, care caracterizează cum descrește intensitatea luminii prin îndepărtarea de axa conului.
- Cu $\mathbf{v}_{\text{obj}}$ este vectorul unitar orientat de la sursa de lumină la obiectul iluminat.

Coduri sursă

- `09_01_iluminare.cpp`: aplicarea iluminării în cazul unui cub, modelul de iluminare este implementat în shader-ul de fragment.

Coduri sursă

- `09_01_iluminare.cpp`: aplicarea iluminării în cazul unui cub, modelul de iluminare este implementat în shader-ul de fragment.
- `09_02_model_iluminare.cpp`: aplicarea iluminării în cazul unui cub, (i) modelul de iluminare este implementat atât în shader-ul de vârfuri cât și în shader-ul de fragment, (ii) normalele pot fi calculate atât la nivel de vârfuri, cât și la nivelul fețelor.

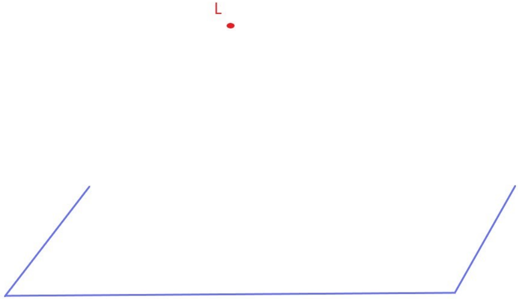
Coduri sursă

- `09_01_iluminare.cpp`: aplicarea iluminării în cazul unui cub, modelul de iluminare este implementat în shader-ul de fragment.
- `09_02_model_iluminare.cpp`: aplicarea iluminării în cazul unui cub, (i) modelul de iluminare este implementat atât în shader-ul de vârfuri cât și în shader-ul de fragment, (ii) normalele pot fi calculate atât la nivel de vârfuri, cât și la nivelul fețelor.
- `09_03_iluminare_sfera.cpp`: aplicarea iluminării pentru sferă

Coduri sursă

- `09_01_iluminare.cpp`: aplicarea iluminării în cazul unui cub, modelul de iluminare este implementat în shader-ul de fragment.
- `09_02_model_iluminare.cpp`: aplicarea iluminării în cazul unui cub, (i) modelul de iluminare este implementat atât în shader-ul de vârfuri cât și în shader-ul de fragment, (ii) normalele pot fi calculate atât la nivel de vârfuri, cât și la nivelul fețelor.
- `09_03_iluminare_sfera.cpp`: aplicarea iluminării pentru sferă
- Detalii despre codurile sursă se găsesc în fișierul info_labs.pdf.

Umbre - problematizare: elementele relevante

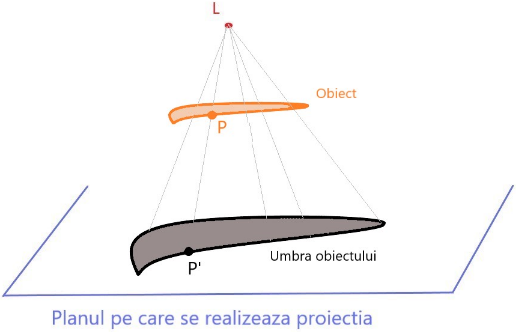


Planul pe care se realizeaza proiectia

Cadru: L: sursa de lumină (punctuală) : $L = (x_L, y_L, z_L)$

planul pe care se realizează proiecția : $Ax + By + Cz + D = 0$

Problematizare - elementele relevante



Cadru: L: sursa de lumină (punctuală) : $L = (x_L, y_L, z_L)$

planul pe care se realizează proiecția : $Ax + By + Cz + D = 0$

Dat P (vârf al obiectului) $\xrightarrow[\text{umbrei}]{\text{trsf.}}$ P' (pct. al umbrei)

Ce este umbra? Etape pentru calcul

- **Umbra unui obiect $\mathcal{O}$:** imaginea lui $\mathcal{O}$ printr-o aplicație (transformare) v. **Scop:** determinarea aplicației v, de fapt a matricei 4×4 asociate, M_v (de explicat modul în care sunt transformate punctele).

Ce este umbra? Etape pentru calcul

- **Umbra unui obiect $\mathcal{O}$:** imaginea lui $\mathcal{O}$ printr-o aplicație (transformare) υ. **Scop:** determinarea aplicației υ, de fapt a matricei 4×4 asociate, M_υ (de explicat modul în care sunt transformate punctele).
- Fie $P = (x_P, y_P, z_P)$ un vârf (punct) al obiectului. Sunt determinate coordonatele lui P' (proiecția perspectivă / centrală a lui P pe plan), în funcție de coordonatele lui P. Acest punct este dat de intersecția dintre dreapta PL și planul π (se presupune că există, dacă LP este paralelă cu planul, nu există umbra...). **Etape:**

Ce este umbra? Etape pentru calcul

- **Umbra unui obiect $\mathcal{O}$:** imaginea lui $\mathcal{O}$ printr-o aplicație (transformare) υ. **Scop:** determinarea aplicației υ, de fapt a matricei 4×4 asociate, M_υ (de explicat modul în care sunt transformate punctele).
- Fie $P = (x_P, y_P, z_P)$ un vârf (punct) al obiectului. Sunt determinate coordonatele lui P' (proiecția perspectivă / centrală a lui P pe plan), în funcție de coordonatele lui P. Acest punct este dat de intersecția dintre dreapta PL și planul π (se presupune că există, dacă LP este paralelă cu planul, nu există umbra...). **Etape:**
  - Reprezentarea dreptei PL

Ce este umbra? Etape pentru calcul

- **Umbra unui obiect $\mathcal{O}$:** imaginea lui $\mathcal{O}$ printr-o aplicație (transformare) υ. **Scop:** determinarea aplicației υ, de fapt a matricei 4×4 asociate, M_{υ} (de explicat modul în care sunt transformate punctele).
- Fie $P = (x_P, y_P, z_P)$ un vârf (punct) al obiectului. Sunt determinate coordonatele lui P' (proiecția perspectivă / centrală a lui P pe plan), în funcție de coordonatele lui P. Acest punct este dat de intersecția dintre dreapta PL și planul π (se presupune că există, dacă LP este paralelă cu planul, nu există umbra...). **Etape:**
  - Reprezentarea dreptei PL
  - Determinarea coordonatelor punctului de intersecție

Ce este umbra? Etape pentru calcul

- **Umbra unui obiect $\mathcal{O}$:** imaginea lui $\mathcal{O}$ printr-o aplicație (transformare) υ. **Scop:** determinarea aplicației υ, de fapt a matricei 4×4 asociate, M_υ (de explicat modul în care sunt transformate punctele).
- Fie $P = (x_P, y_P, z_P)$ un vârf (punct) al obiectului. Sunt determinate coordonatele lui P' (proiecția perspectivă / centrală a lui P pe plan), în funcție de coordonatele lui P. Acest punct este dat de intersecția dintre dreapta PL și planul π (se presupune că există, dacă LP este paralelă cu planul, nu există umbra...). **Etape:**
  - Reprezentarea dreptei PL
  - Determinarea coordonatelor punctului de intersecție
  - Trecerea la coordonate omogene și scrierea în coordonate omogene

Ce este umbra? Etape pentru calcul

- **Umbra unui obiect $\mathcal{O}$:** imaginea lui $\mathcal{O}$ printr-o aplicație (transformare) υ. **Scop:** determinarea aplicației υ, de fapt a matricei 4×4 asociate, M_υ (de explicat modul în care sunt transformate punctele).
- Fie $P = (x_P, y_P, z_P)$ un vârf (punct) al obiectului. Sunt determinate coordonatele lui P' (proiecția perspectivă / centrală a lui P pe plan), în funcție de coordonatele lui P. Acest punct este dat de intersecția dintre dreapta PL și planul π (se presupune că există, dacă LP este paralelă cu planul, nu există umbra...). **Etape:**
  - Reprezentarea dreptei PL
  - Determinarea coordonatelor punctului de intersecție
  - Trecerea la coordonate omogene și scrierea în coordonate omogene
  - Determinarea matricei 4×4

Reprezentarea dreptei PL

Ecuațiile dreptei PL

$$\frac{x - x_L}{x_P - x_L} = \frac{y - y_L}{y_P - y_L} = \frac{z - z_L}{z_P - z_L} \stackrel{NOT}{=} \theta \qquad \Leftrightarrow$$

Reprezentarea dreptei PL

Ecuațiile dreptei PL

$$\frac{x - x_L}{x_P - x_L} = \frac{y - y_L}{y_P - y_L} = \frac{z - z_L}{z_P - z_L} \stackrel{NOT}{=} \theta \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_L + \theta(x_P - x_L) \\ y = y_L + \theta(y_P - y_L) \\ z = z_L + \theta(z_P - z_L) \end{cases}, \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Reprezentarea dreptei PL

Ecuațiile dreptei PL

$$\frac{x - x_L}{x_P - x_L} = \frac{y - y_L}{y_P - y_L} = \frac{z - z_L}{z_P - z_L} \overset{NOT}{=} \theta \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_L + \theta(x_P - x_L) \\ y = y_L + \theta(y_P - y_L) \\ z = z_L + \theta(z_P - z_L) \end{cases}, \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Semnificație: a da un punct de pe dreapta PL este echivalent cu a da o valoare θ

Determinarea coordonatelor punctului de intersecție

Ecuația planului este $Ax + By + Cz + D = 0$. Pentru a determina intersecția dintre dreaptă și plan (presupunem că există!) determinăm valoarea θ_0 pentru care este verificată ecuația planului, altfel spus pentru care avem

$$0 = A[x_L + \theta_0(x_P - x_L)] + B[y_L + \theta_0(y_P - y_L)] + C[z_L + \theta_0(z_P - z_L)] + D$$

Determinarea coordonatelor punctului de intersecție

Ecuația planului este $Ax + By + Cz + D = 0$. Pentru a determina intersecția dintre dreaptă și plan (presupunem că există!) determinăm valoarea θ_0 pentru care este verificată ecuația planului, altfel spus pentru care avem

$$0 = A[x_L + \theta_0(x_P - x_L)] + B[y_L + \theta_0(y_P - y_L)] + C[z_L + \theta_0(z_P - z_L)] + D$$

Prin calcul direct se obține

$$\theta_0 = \frac{Ax_L + By_L + Cz_L + D}{A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P)}$$

Determinarea coordonatelor punctului de intersecție

Ecuația planului este $Ax + By + Cz + D = 0$. Pentru a determina intersecția dintre dreaptă și plan (presupunem că există!) determinăm valoarea θ_0 pentru care este verificată ecuația planului, altfel spus pentru care avem

$$0 = A[x_L + \theta_0(x_P - x_L)] + B[y_L + \theta_0(y_P - y_L)] + C[z_L + \theta_0(z_P - z_L)] + D$$

Prin calcul direct se obține

$$\theta_0 = \frac{Ax_L + By_L + Cz_L + D}{A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P)}$$

Am presupus tacit că $A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P) \neq 0$. Care este interpretarea geometrică a condiției de egalitate?

Determinarea coordonatelor punctului de intersecție

Ecuația planului este $Ax + By + Cz + D = 0$. Pentru a determina intersecția dintre dreaptă și plan (presupunem că există!) determinăm valoarea θ_0 pentru care este verificată ecuația planului, altfel spus pentru care avem

$$0 = A[x_L + \theta_0(x_P - x_L)] + B[y_L + \theta_0(y_P - y_L)] + C[z_L + \theta_0(z_P - z_L)] + D$$

Prin calcul direct se obține

$$\theta_0 = \frac{Ax_L + By_L + Cz_L + D}{A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P)}$$

Am presupus tacit că $A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P) \neq 0$. Care este interpretarea geometrică a condiției de egalitate?

Cunoscând θ_0, prin înlocuire, se găsesc coordonatele lui P'

Coordonatele punctului de intersecție

$$x_{P'} = x_L + \theta_0(x_P - x_L) =$$
$$= x_L + \frac{Ax_L + By_L + Cz_L + D}{A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P)} \cdot (x_P - x_L) =$$

Coordonatele punctului de intersecție

$$x_{P'} = x_L + \theta_0(x_P - x_L) =$$

$$= x_L + \frac{Ax_L + By_L + Cz_L + D}{A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P)} \cdot (x_P - x_L) =$$

$$\dots\dots$$

Coordonatele punctului de intersecție

$$x_{P'} = x_L + \theta_0(x_P - x_L) =$$

$$= x_L + \frac{Ax_L + By_L + Cz_L + D}{A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P)} \cdot (x_P - x_L) =$$

$$\ldots\ldots$$

$$= \frac{x_P(By_L + Cz_L + D) - y_P Bx_L - z_P Cx_L - Dx_L}{(Ax_L + By_L + Cz_L) - (Ax_P + By_P + Cz_P)}$$

Analog

$$y_{P'} = \frac{-x_P Ay_L + y_P(Ax_L + Cz_L + D) - z_P Cy_L - Dy_L}{(Ax_L + By_L + Cz_L) - (Ax_P + By_P + Cz_P)}$$

$$z_{P'} = \frac{-x_P Az_L - y_P Bz_L + z_P(Ax_L + By_L + D) - Dz_L}{(Ax_L + By_L + Cz_L) - (Ax_P + By_P + Cz_P)}$$

Coordonatele punctului de intersecție

$$x_{P'} = x_L + \theta_0(x_P - x_L) =$$

$$= x_L + \frac{Ax_L + By_L + Cz_L + D}{A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P)} \cdot (x_P - x_L) =$$

$$\cdots\cdots$$

$$= \frac{x_P(By_L + Cz_L + D) - y_P Bx_L - z_P Cx_L - Dx_L}{(Ax_L + By_L + Cz_L) - (Ax_P + By_P + Cz_P)}$$

Analog

$$y_{P'} = \frac{-x_P Ay_L + y_P(Ax_L + Cz_L + D) - z_P Cy_L - Dy_L}{(Ax_L + By_L + Cz_L) - (Ax_P + By_P + Cz_P)}$$

$$z_{P'} = \frac{-x_P Az_L - y_P Bz_L + z_P(Ax_L + By_L + D) - Dz_L}{(Ax_L + By_L + Cz_L) - (Ax_P + By_P + Cz_P)}$$

Observați că x_P, y_P, z_P apar la numitor, deci aplicația $P \mapsto P'$ nu este una liniară/afină. Pe de altă parte, numitorul este același. Atât numitorul, cât și numărătorii sunt liniari în x_P, y_P, z_P.

Trecerea la coordonate omogene

Putem scrie, folosind toate cele 4 coordonate:

$$\begin{bmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \\ z_{P'} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{numarator(x_{P'})}{numitorul\ \ comun} \\ \frac{numarator(y_{P'})}{numitorul\ \ comun} \\ \frac{numarator(z_{P'})}{numitorul\ \ comun} \\ 1 \end{bmatrix} \overset{coord.\ omog.}{=} \begin{bmatrix} numarator(x_{P'}) \\ numarator(y_{P'}) \\ numarator(z_{P'}) \\ numitorul\ \ comun \end{bmatrix}$$

Trecerea la coordonate omogene

Putem scrie, folosind toate cele 4 coordonate:

$$
\begin{bmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \\ z_{P'} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{numarator(x_{P'})}{numitorul\ \ comun} \\ \frac{numarator(y_{P'})}{numitorul\ \ comun} \\ \frac{numarator(z_{P'})}{numitorul\ \ comun} \\ 1 \end{bmatrix} \overset{coord.\ omog.}{=} \begin{bmatrix} numarator(x_{P'}) \\ numarator(y_{P'}) \\ numarator(z_{P'}) \\ numitorul\ \ comun \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} x_P(By_L + Cz_L + D) & -y_P Bx_L & -z_P Cx_L & -Dx_L \\ -x_P Ay_L & +y_P(Ax_L + Cz_L + D) & -z_P Cy_L & -Dy_L \\ -x_P Az_L & -y_P Bz_L & +z_P(Ax_L + By_L + D) & -Dz_L \\ -x_P A & -y_P B & -z_P C & +(Ax_L + By_L + Cz_L) \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix},
$$

Trecerea la coordonate omogene

Concluzie:

$$\begin{bmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \\ z_{P'} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P(By_L + Cz_L + D) & -y_P Bx_L & -z_P Cx_L & -Dx_L \\ -x_P Ay_L & +y_P(Ax_L + Cz_L + D) & -z_P Cy_L & -Dy_L \\ -x_P Az_L & -y_P Bz_L & +z_P(Ax_L + By_L + D) & -Dz_L \\ -x_P A & -y_P B & -z_P C & +(Ax_L + By_L + Cz_L) \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinarea matricei 4×4

$$M = \begin{pmatrix} By_L + Cz_L + D & -Bx_L & -Cx_L & -Dx_L \\ -Ay_L & Ax_L + Cz_L + D & -Cy_L & -Dy_L \\ -Az_L & -Bz_L & Ax_L + By_L + D & -Dz_L \\ -A & -B & -C & Ax_L + By_L + Cz_L \end{pmatrix}.$$

Umbra este realizată pe un plan de ecuație $z + D = 0$
$(A = B = 0;\ C = 1)$.

$$M = \begin{pmatrix} z_L + D & 0 & -x_L & -Dx_L \\ 0 & z_L + D & -y_L & -Dy_L \\ 0 & 0 & D & -Dz_L \\ 0 & 0 & -1 & z_L \end{pmatrix}$$