Cálculo Numérico: Lista de Exercícios 7 ~~6~~

Integração Numérica e Métodos Numéricos para PVI

Integração Numérica

1. Seja n um número inteiro. A fórmula de Newton-Cotes para a integração numérica é dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{1}$$

onde $x_i = a + ih$, $i = 0, 1 \cdots, n$, com $h = (b-a)/n$, são os pontos de integração e w_i é o peso associado ao ponto x_i, calculado pela expressão

$$w_i = \int_a^b l_i(x)\,dx$$

onde $l_i(x)$ é o polinômio de Lagrange de grau n associado ao ponto x_i. Calcular os pesos w_i e montar, por extenso, a expressão (1) para:

a) $n = 1$ (Fórmula do Trapézio)

b) $n = 2$ (Fórmula de Simpson)

c) $n = 3$ (Resp: $I = (3h/8)[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$)

d) $n = 4$ (Resp: $I = (2h/45)[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$)

2. Sabemos que

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Utilizando oito dígitos significativos e as fórmulas de Newton-Cotes do exercício anterior, calcule uma aproximação para $\ln 2$, e o erro relativo cometido, com

a) $n = 1$, $h = 1$ (Resp: $I = 0,75$, $e_r = 8,2\%$)

b) $n = 2$, $h = 1/2$ (Resp: $I = 0,69444444$, $e_r = 0,19\%$)

c) $n = 3$, $h = 1/3$ (Resp: $I = 0,69937500$, $e_r = 0,09\%$)

d) $n = 4$, $h = 1/4$ (Resp: $I = 0,69317460$, $e_r = 0,004\%$)

3. Compare os resultados do exercício (2) com o obtido pelo cálculo de $\ln 2$ utilizando:

a) Quadratura gaussiana com dois pontos. (Resp: $I = 0,69230769$, $e_r = 0,12\%$)

b) Quadratura gaussiana com três pontos. (Resp: $I = 0,69312169$, $e_r = 0,0037\%$)

4. Monte uma tabela com os resultados dos exercícios (2) e (3), indicando o maior grau de polinômio que cada método é capaz de integrar exatamente. Ordene os resultados por ordem de precisão.

5. Quantos subintervalos devem ser usados no cálculo de

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

para que a aproximação tenha erro menor que 10^{-4} nos casos:

a) Fórmula dos trapézios. (Resp: $n_t = 41$)

b) Fórmula de Simpson. (Resp: $n_s = 6$)

6. Considere a função $f(x)$ dada pela tabela:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	5	1	5	35

a) Avalie $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$ usando a fórmula de Simpson.

b) Se os valores tabelados são de um polinômio de grau 3, o que pode ser afirmado sobre o erro cometido na aproximação de I pela fórmula de Simpson?

7. Calcule as integrais a seguir usando as regras do trapézio e de Simpson repetidas, com quatro subdivisões de $[a, b]$. Compare os resultados:

(a) $\int_1^2 e^x dx$

(b) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

(c) $\int_2^{14} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

8. Encontre um delimitante (o menor que for capaz) para o erro das aproximações obtidas no exercício (7). Além disso, determine com quantas subdivisões do intervalo poderíamos esperar obter erros menores do que 10^{-5}.

9. Considere as integrais:

a) $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

b) $I = \int_1^3 \sqrt{x} dx$.

Estime I por Quadratura Gaussiana com 2 e 3 pontos.

10. Deduza a fórmula de integração da forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_0 f(-0.5) + w_1 f(0) + w_2 f(0.5)$$

que integre exatamente polinômios de grau ≤ 2.

Método Numéricos para PVI: Método de Euler

11. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = & 2t^3 - 2ty(t) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

resolva-o para $t \in [0, 0.3]$ usando o método de Euler com $h = 0.15$ e $h = 0.1$.

12. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = & ty(t) - y^2(t) + 1 \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

para $t \in [0, 0.2]$ e $h = 0.05$ usando o método de Euler.

13. O problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = & 3 \\ y(1) = & 6 \end{cases}$$

tem como solução exata $y(x) = 3x + 3$. Usando o método de Euler, determine $y(7)$ com $h = 2$. Era de se esperar tal concordância mesmo com h grande? Por quê?

Referências

[1] FRANCO, Neide Bertoldi: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2006)

[2] CAMPOS, Frederico Ferreira: Algoritmos Numéricos. Editora LTC (2007)

[3] RUGGIERO, M.A.G., LOPES, V.L.: Cálculo Numérico, aspectos teóricos e práticos. Makron Books (1997)

[4] ATKINSON, Kendall: Elementary Numerical Analysis. second edition, John Wiley & Sons (1993)