Nome: ______________________________

Atenção:

i. Confira os dados da prova. Prova à lápis ou caneta. Assinar todas as folhas de caneta.
ii. Mostre todos os passos do desenvolvimento e **justifique suas respostas**.
iii. **Não é permitido consulta** a nenhum material ou equipamento, exceto uma calculadora.
iv. Use arredondamento com **quatro casas decimais**, quando necessário.

---

1. (25 Pontos) Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 & = 13 \\ x_1 + 5x_2 + ax_3 & = 6 + a \\ 2x_1 + 3x_2 + 102x_3 & = 107 \end{cases}$$

onde a é um número real qualquer que deverá ser definido,

(a) Verifique sobre quais condições o método de Jacobi converge. Explicite uma relação envolvendo a para que o método convirja.

(b) Escolha um valor para a que satisfaça a restrição encontrada em (a).

(c) Escreva a fórmula de iteração e realize duas iterações usando $x^0 = [1/2, 1/2, 1/2]^T$.

(d) Calcule o erro na norma do máximo entre as aproximações x^1 e x^2.

2. (25 Pontos) Considere os pontos $x_0 = 0.2,\ x_1 = 0.4,\ x_2 = 0.6$ e que os valores de uma função $f(x)$ nesses pontos são dados respectivamente por: $f(x_0) = 8,\ f(x_1) = 10,\ f(x_2) = 15$.

(a) Determine o polinômio de grau ≤ 2 na forma de Lagrange.

(b) Escreva o sistema de equações lineares cuja solução resulta nos coeficientes a_0, a_1 e a_2 do polinômio interpolador $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

(c) É possível afirmar que o polinômio do item (a) é igual ao que seria obtido na letra (b) a partir da solução do sistema? Justifique.

3. (25 Pontos) Considere a função $f(x) = e^x + \sin(x)$ e os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1$.

a) Determine o polinômio interpolador de grau 2 usando a forma de Newton.

b) Calcule um limitante superior para o erro cometido no ponto $x = 0.7$. Use a seguinte fórmula para o limitante superior do erro

$$|E_n(x)| \leq \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}, \quad \text{onde} \quad M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$$

c) Calcule o erro cometido ao aproximar o valor de f no ponto $x = 0.7$.

4. (25 Pontos) Determine utilizando o método da decomposição LU com pivotamento parcial e considerando a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

(a) a decomposição $PA = LU$ (utilize o vetor p para saber as trocas de linhas realizadas);

(b) resolva o sistema $Ax = b$ onde o vetor é dado por $b = [3, 10, 18]^T$;

(c) calcule o determinante da matriz através dos fatores L e U;

(d) comente de forma sucinta quais as vantagens de utilizar a decomposição LU com pivotamento em comparação à versão do método sem pivotamento. Considere um cenário mais geral em que o método é implementado e executado em um computador.

Fórmulas

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\ u_{kj}, \quad i \leq j$$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\ u_{kj} \right) \Big/ u_{jj}, \quad i > j$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{PAx} = \mathbf{LUx} = \mathbf{Pb}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{GG}^T$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{LD}^{1/2}$$

$$g_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2}\ , \quad i = 1 : n$$

$$g_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} g_{jk}}{g_{jj}}\ , \quad i = j+1 : n, \quad j = 1 : n$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \ldots y_n L_n(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &\quad + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \\ P_{n+1}(x) &= P_n(x) + f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}](x - x_0) \ldots (x - x_n) \end{aligned}$$

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \text{com } \xi \in (x_0, x_n)$$

$$|E_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \max_{x \in [x_0, xn]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

$$|E_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \max |\text{diferenças divididas de ordem n+1}|$$

$$|E_n(x)| \leq \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}, \quad \text{onde} \quad M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$$