DCC008 - Cálculo Numérico

Equações Não-Lineares

Bernardo Martins Rocha

Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Juiz de Fora
bernardomartinsrocha@ice.ufjf.br

Conteúdo

- Introdução
- Localização de raízes
- Método da bisseção
- Método da falsa posição
- Método do ponto fixo
- Método de Newton-Raphson
- Método da secante
- Métodos para raízes últiplas
- Conclusões e comparações

Introdução

Vamos considerar agora métodos para resolver equações não-lineares. Dada uma função não-linear escalar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, procuramos o valor de x para o qual

$$f(x) = 0$$

No caso vetorial onde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, o problema consiste em encontrar o vetor $\mathbf{x}$ tal que todas as componentes de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ são iguais a zero simultaneamente.

Introdução

Vamos considerar agora métodos para resolver equações não-lineares. Dada uma função não-linear escalar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, procuramos o valor de x para o qual

$$f(x) = 0$$

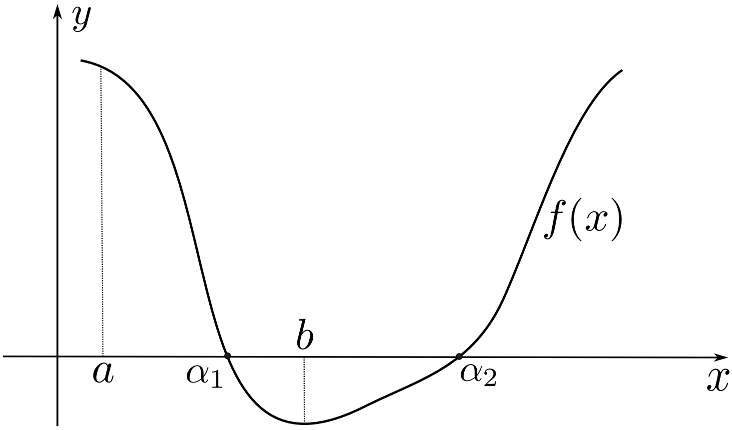
No caso vetorial onde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, o problema consiste em encontrar o vetor $\mathbf{x}$ tal que todas as componentes de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ são iguais a zero simultaneamente.

Exemplos

$$f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 + 0.25 \\ -x_1 + x_2^2 + 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Introdução



Introdução

Para polinômios de grau até quatro, suas raízes podem ser calculadas através de uma expressão fechada, como por exemplo no caso de uma função quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De forma geral, não podemos encontrar os zeros de uma função através de uma expressão fechada. Portanto, para encontrar os zeros de uma função temos que recorrer a *métodos aproximados*.

Introdução

Para polinômios de grau até quatro, suas raízes podem ser calculadas através de uma expressão fechada, como por exemplo no caso de uma função quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De forma geral, não podemos encontrar os zeros de uma função através de uma expressão fechada. Portanto, para encontrar os zeros de uma função temos que recorrer a *métodos aproximados*.

Em alguns casos, os zeros das funções podem ser números complexos:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Iremos trabalhar apenas com as raízes reais.

Considere a seguinte equação:

$$C = \frac{M}{r}\left[1 - (1+r)^{-n}\right]$$

onde C é o capital, M é a mensalidade, r é a taxa de juros por cada período (expressa como uma fração) e n é o número de anos.

Uma pessoa pode pagar uma mensalidade de 1250 reais. Se pretende contrair um empréstimo de 10000 reais a 10 anos, qual é a taxa que poderá suportar?

$$C = 10000,\ M = 1250,\ n = 10 \quad \Rightarrow \quad 10000 = \frac{1250}{r}[1 - (1+r)^{-10}]$$

$$f(r) = 10000 - \frac{1250}{r}[1 - (1+r)^{-10}] = 0$$

A seguinte equação pode ser usada para calcular o nível de concentração de oxigênio c em um rio, em função da distância x, medida a partir do local de descarga de poluentes:

$$c(x) = 10 - 20(e^{-0.2x} - e^{-0.75x})$$

Calcule a distância para a qual o nível de oxigênio desce para o valor 5. Pretende-se resolver $c(x) = 5$. Podemos escrever como $c(x) - 5 = 0$, isto é

$$10 - 20(e^{-0.2x} - e^{-0.75x}) - 5 = 0$$

O problema se resume a encontrar x tal que $f(x) = 0$.

Outros exemplos!

Introdução

Definição (Zero)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função dada, um ponto* $\alpha \in [a, b]$ *é um zero (ou raiz) de* f *se* $f(\alpha) = 0$*.*

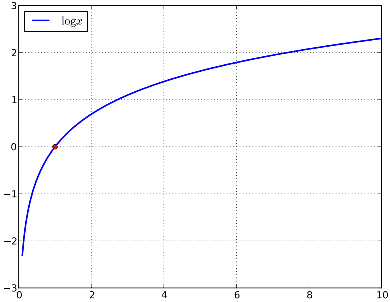
Introdução

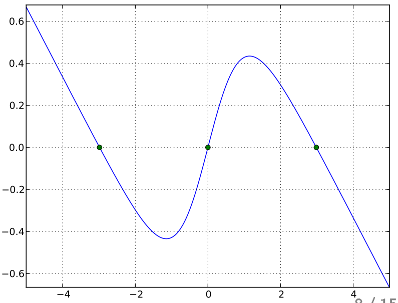
Definição (Zero)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função dada, um ponto $\alpha \in [a, b]$ é um zero (ou raiz) de f se $f(\alpha) = 0$.

Exemplo

Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ e considere as seguintes funções $f(x) = \log(x)$ e $f(x) = tanh(x) - x/3$.





Introdução

Definição (Multiplicidade)

Um ponto $\alpha \in [a, b]$ *é uma raiz de multiplicidade* m *da equação* $f(x) = 0$ *se* $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ *e* $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$*.*

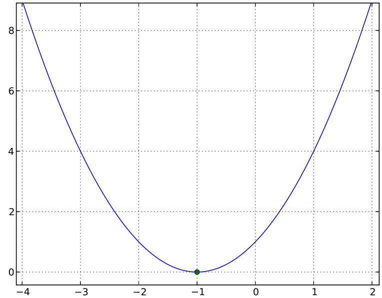
Introdução

Definição (Multiplicidade)

Um ponto $\alpha \in [a, b]$ *é uma raiz de multiplicidade* m *da equação* $f(x) = 0$ *se* $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ *e* $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$*.*

Exemplo

Seja $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Nesse caso temos $\alpha = -1$ com multiplicidade $m = 2$, pois $f'(x) = 2(x+1)$ e assim temos que $f(-1) = 0$ e $f'(-1) = 0$.



Métodos para raízes de equações

Os métodos numéricos que vamos estudar geralmente podem ser divididos em duas etapas:

1. Localização das raízes
   - Encontrar o intervalo $[a, b]$ que contenha apenas uma raiz.

Métodos para raízes de equações

Os métodos numéricos que vamos estudar geralmente podem ser divididos em duas etapas:

1. Localização das raízes
   - Encontrar o intervalo $[a, b]$ que contenha apenas uma raiz.
2. Refinamento da aproximação
   - A partir de uma aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$, gerar uma sequência $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ que convirja para a raiz exata α de $f(x) = 0$.

Métodos para raízes de equações

Os métodos numéricos que vamos estudar geralmente podem ser divididos em duas etapas:

1. Localização das raízes
   - Encontrar o intervalo $[a, b]$ que contenha apenas uma raiz.
2. Refinamento da aproximação
   - A partir de uma aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$, gerar uma sequência $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ que convirja para a raiz exata α de $f(x) = 0$.

Alguns métodos não precisam de um prévio isolamento de cada raiz, necessitam apenas de uma aproximação inicial x_0 (ou mais de uma, as vezes). Entretanto, boa parte deles precisa que a raiz esteja confinada em um intervalo e que ela seja única.

Isolamento das raízes

Teorema (1)

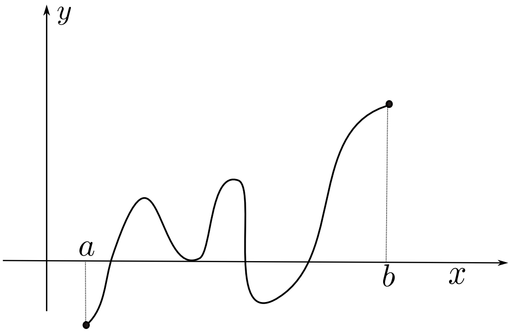
Seja $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f(a)f(b) < 0$*, então existe* ***pelo menos*** *um ponto* $x \in [a, b]$*, tal que* $f(x) = 0$*.*

Isolamento das raízes

Teorema (1)

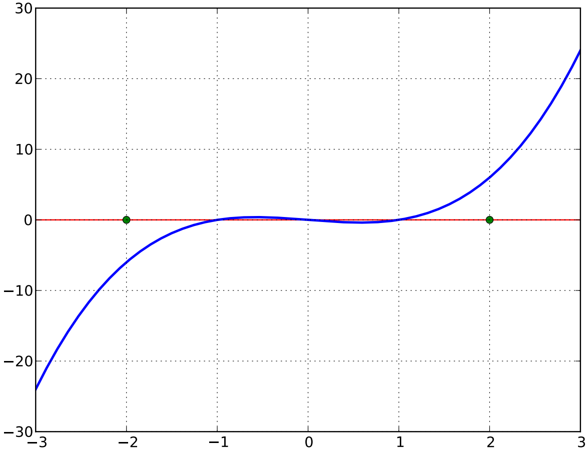
Seja $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f(a)f(b) < 0$*, então existe **pelo menos** um ponto* $x \in [a, b]$*, tal que* $f(x) = 0$*.*

Geometricamente, o teorema diz que qualquer gráfico de uma função contínua que começa abaixo do eixo horizontal e termina acima deste, deve cruzar este eixo em algum ponto.



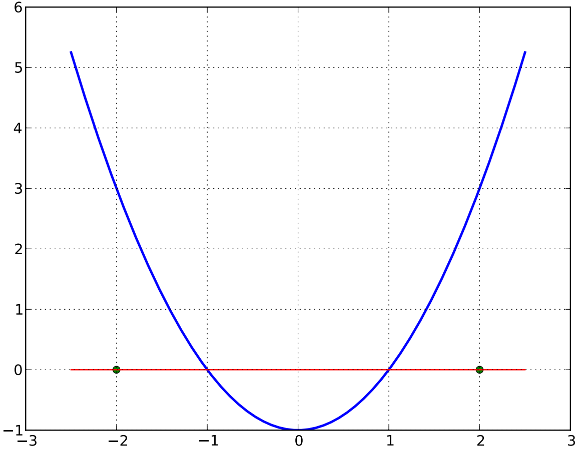
Isolamento das raízes

- $f(x) = x^3 - x$, $a = -2$, $b = 2$
  - f é contínua
  - $f(a) = -6$, $f(b) = 6$, sinais opostos
  - **3 raízes no intervalo** $[a, b]$**!!!**



Isolamento das raízes

- $f(x) = x^2 - 1, \ a = -2, \ b = 2$
  - f é contínua
  - $f(a) = (b) = 2$, mesmo sinal!
  - Hipótese do teorema não satisfeita! Entretanto, existem raízes.

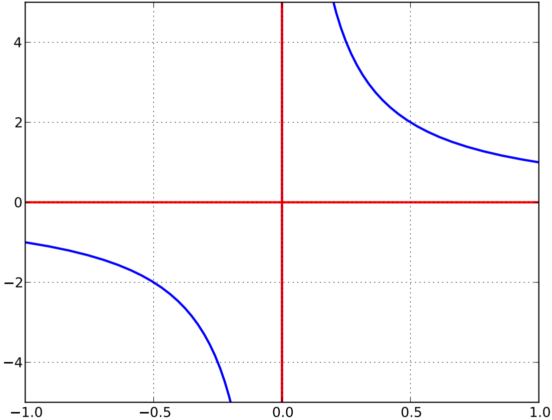


Isolamento das raízes

- $a = -1,\ b = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ \text{indef.}, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- $f(a) = -1,\ f(b) = 1$, sinais opostos
- f é discontínua!
- De fato, não existem raízes!



Isolamento das raízes

Exemplo

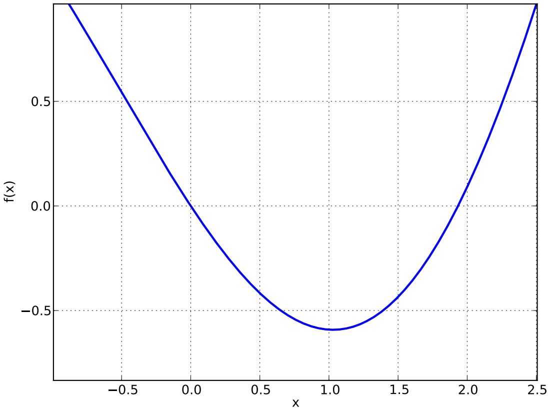
Como encontrar o intervalo da raiz positiva da seguinte equação $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin(x) = 0$.

Isolamento das raízes

Exemplo

Como encontrar o intervalo da raiz positiva da seguinte equação $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin(x) = 0.$

Solução do Exemplo

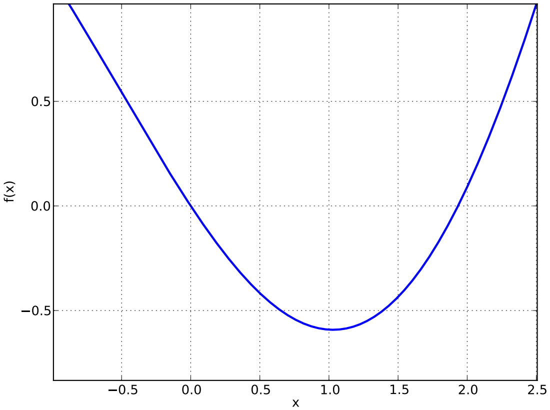


Isolamento das raízes

Exemplo

Como encontrar o intervalo da raiz positiva da seguinte equação $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin(x) = 0$.

Solução do Exemplo



Inspeção visual
$\Rightarrow \alpha \in [1.5, 2.0]$

Isolamento das raízes

Solução do Exemplo - (cont.)

Outra possibilidade é fazer uma tabela de valores de $f(x)$, e usar o Teorema (1)

x	$\left(\frac{x}{2}\right)^2$	$\sin(x)$	$f(x)$
1.6	0.64	0.996	< 0
1.7	0.72	0.991	< 0
1.8	0.81	0.974	< 0
1.9	0.90	0.946	< 0
2.0	1.00	0.909	> 0

Assim fica claro que existe pelo menos uma raiz em $[1.9, 2.0]$.

$\square$

Isolamento das raízes

Solução do Exemplo - (cont.)

Outra possibilidade é fazer uma tabela de valores de $f(x)$, e usar o Teorema (1)

x	$(\frac{x}{2})^2$	$\sin(x)$	$f(x)$
1.6	0.64	0.996	< 0
1.7	0.72	0.991	< 0
1.8	0.81	0.974	< 0
1.9	0.90	0.946	< 0
2.0	1.00	0.909	> 0

Assim fica claro que existe pelo menos uma raiz em $[1.9, 2.0]$.
$\square$

Atenção!

Na hora de fazer suas contas na calculadora, sempre calcule as funções trigonométricas com argumento x em radianos.

Isolamento das raízes

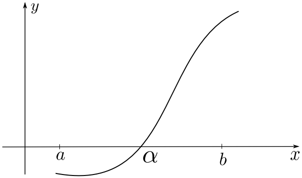
Teorema (2)

Sob as hipóteses do Teorema 1, se $f'(x)$ existir e $f'(x)$ ***preservar*** *o sinal em $[a, b]$ então o intervalo contém um único zero de $f(x)$.*

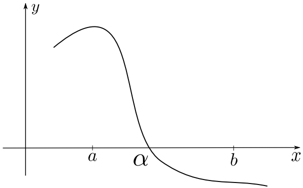
Isolamento das raízes

Teorema (2)

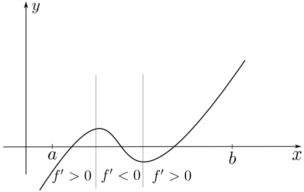
Sob as hipóteses do Teorema 1, se $f'(x)$ existir e $f'(x)$ ***preservar*** *o sinal em $[a,b]$ então o intervalo contém um único zero de $f(x)$.*



$f'(x) > 0, \ \forall x \in [a,b]$



$f'(x) < 0, \ \forall x \in [a,b]$



$f'(x)$ não preserva o sinal

Isolamento das raízes

Exemplo

Seja $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$ para $x \geq 0$.
Logo, tabelando os valores da função temos

x	$\sqrt{x}$	$5e^{-x}$	$f(x)$
0.0	0.0	5.0	< 0
1.0	1.0	1.83	< 0
2.0	1.41	0.67	> 0
3.0	1.73	0.24	> 0

Logo sabemos que existe pelo menos uma raiz no intervalo $[1, 2]$.

Isolamento das raízes

Exemplo

Seja $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$ para $x \geq 0$.
Logo, tabelando os valores da função temos

x	$\sqrt{x}$	$5e^{-x}$	$f(x)$
0.0	0.0	5.0	< 0
1.0	1.0	1.83	< 0
2.0	1.41	0.67	> 0
3.0	1.73	0.24	> 0

Logo sabemos que existe pelo menos uma raiz no intervalo $[1, 2]$.
Entretanto, o Teorema 2 nos garante que existe uma única raiz pois

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} > 0, \quad \forall x > 0$$

Isolamento das raízes

Uma outra alternativa é rearranjar a equação $f(x)$ dada como $g(x) = h(x)$, de tal forma que os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ sejam mais fáceis de serem traçados do que o de f.

As raízes da equação original são dadas pelos pontos onde o gráfico de g intercepta o gráfico de h.

Isolamento das raízes

Uma outra alternativa é rearranjar a equação $f(x)$ dada como $g(x) = h(x)$, de tal forma que os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ sejam mais fáceis de serem traçados do que o de f.

As raízes da equação original são dadas pelos pontos onde o gráfico de g intercepta o gráfico de h.

Exemplo

$f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1 = 0$

Isolamento das raízes

Uma outra alternativa é rearranjar a equação $f(x)$ dada como $g(x) = h(x)$, de tal forma que os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ sejam mais fáceis de serem traçados do que o de f.

As raízes da equação original são dadas pelos pontos onde o gráfico de g intercepta o gráfico de h.

Exemplo

$f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1 = 0$
Podemos rearranjar $f(x)$ como

$$\rightarrow (x+1)^2 e^{(x^2-2)} = 1$$

Isolamento das raízes

Uma outra alternativa é rearranjar a equação $f(x)$ dada como $g(x) = h(x)$, de tal forma que os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ sejam mais fáceis de serem traçados do que o de f.

As raízes da equação original são dadas pelos pontos onde o gráfico de g intercepta o gráfico de h.

Exemplo

$f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1 = 0$
Podemos rearranjar $f(x)$ como

$$\rightarrow (x+1)^2 e^{(x^2-2)} = 1$$

$$\rightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{e^{(x^2-2)}}$$

Isolamento das raízes

Uma outra alternativa é rearranjar a equação $f(x)$ dada como $g(x) = h(x)$, de tal forma que os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ sejam mais fáceis de serem traçados do que o de f.

As raízes da equação original são dadas pelos pontos onde o gráfico de g intercepta o gráfico de h.

Exemplo

$f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1 = 0$
Podemos rearranjar $f(x)$ como

$$\begin{aligned}
&\to (x+1)^2 e^{(x^2-2)} = 1 \\
&\to (x+1)^2 = \frac{1}{e^{(x^2-2)}} \\
&\to (x+1)^2 = e^{(2-x^2)}
\end{aligned}$$

Isolamento das raízes

Uma outra alternativa é rearranjar a equação $f(x)$ dada como $g(x) = h(x)$, de tal forma que os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ sejam mais fáceis de serem traçados do que o de f.

As raízes da equação original são dadas pelos pontos onde o gráfico de g intercepta o gráfico de h.

Exemplo

$f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1 = 0$
Podemos rearranjar $f(x)$ como

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow (x+1)^2 e^{(x^2-2)} = 1 \\
&\rightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{e^{(x^2-2)}} \\
&\rightarrow (x+1)^2 = e^{(2-x^2)} \\
&\rightarrow g(x) = h(x)
\end{aligned}
$$

Isolamento das raízes

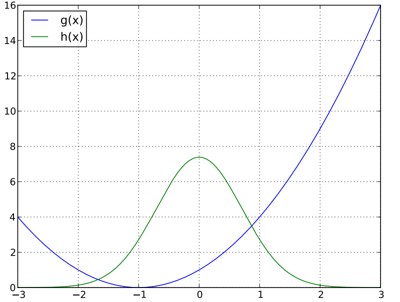
Uma outra alternativa é rearranjar a equação $f(x)$ dada como $g(x) = h(x)$, de tal forma que os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ sejam mais fáceis de serem traçados do que o de f.

As raízes da equação original são dadas pelos pontos onde o gráfico de g intercepta o gráfico de h.

Exemplo

$f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1 = 0$
Podemos rearranjar $f(x)$ como

$$\rightarrow (x+1)^2 e^{(x^2-2)} = 1$$
$$\rightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{e^{(x^2-2)}}$$
$$\rightarrow (x+1)^2 = e^{(2-x^2)}$$
$$\rightarrow g(x) = h(x)$$



Refinamento

Se o intervalo $[a, b]$ para o qual queremos procurar uma raiz de $f(x)$ já está isolado, o próximo passo consiste em gerar iterativamente uma sequência de aproximações $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ cada vez melhores que convirja para a raiz α.

Refinamento

Se o intervalo $[a, b]$ para o qual queremos procurar uma raiz de $f(x)$ já está isolado, o próximo passo consiste em gerar iterativamente uma sequência de aproximações $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ cada vez melhores que convirja para a raiz α.

Antes de estudarmos como os métodos geram as aproximações, precisamos decidir como que uma dada aproximação no passo k é suficientemente próxima da raiz exata?

Para isso precisamos definir um critério de parada que determina quando terminar o processo iterativo.

Critério de parada

Na prática a sequência é interrompida quando seus valores satisfizerem a pelo menos um dos seguintes critérios:

$$\boxed{|x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon}$$

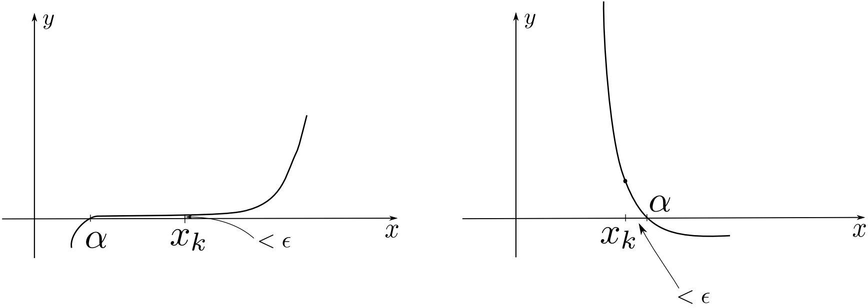
$$\boxed{\left|\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}\right| \leq \epsilon}$$

$$\boxed{|f(x_k)| \leq \epsilon}$$

onde ϵ é a precisão/tolerância fornecida como parâmetro para o processo iterativo.

Critério de parada

As vezes não é possível atender a todos os critérios ao mesmo tempo.



$$|f(x_k)| < \epsilon$$
$$|\alpha - x_k| > \epsilon$$

$$|\alpha - x_k| < \epsilon$$
$$|f(x_k)| > \epsilon$$

Método da bissecção

A idéia fundamental do método da bissecção consiste em usar repetidamente o Teorema 1. O método subdivide o intervalo $[a, b]$ ao meio a cada iteração e seleciona o subintervalo que contem a raiz.

De acordo com o Teorema 1, o subintervalo que contem a raiz é aquele em que $f(x)$ tem sinais opostos nos extremos. A cada passo o intervalo é dividido ao meio:

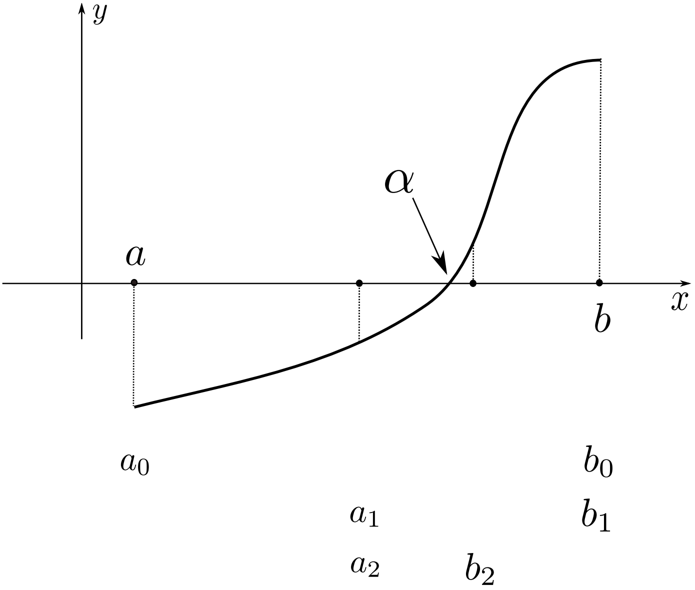
$$m = \frac{a + b}{2}$$

então o novo intervalo será aquele que contém a raiz:

- $[a, m]$, se $f(a)f(m) < 0$
- $[m, b]$, caso contrário

A busca continua até que o **critério de parada** escolhido seja satisfeito considerando m como aproximação para a raiz.

Método da bissecção



Método da bisseção

Seja a_k e b_k os extremos do intervalo no passo k e seja ainda x_k o ponto médio e uma aproximação para a raiz.

A cada iteração o método calcula o ponto médio do intervalo

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Método da bisseção

Seja a_k e b_k os extremos do intervalo no passo k e seja ainda x_k o ponto médio e uma aproximação para a raiz.

A cada iteração o método calcula o ponto médio do intervalo

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Podemos considerar $f(x_k) \neq 0$, caso contrário teríamos encontrado a raiz.

Sendo assim o método agora calcula $f(x_k)$ e decide o novo subintervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ da seguinte forma

$$\text{se } f(a_k)f(x_k) \begin{cases} < 0, & \text{então } a_{k+1} = a_k \quad e \quad b_{k+1} = x_k \\ > 0, & \text{então } a_{k+1} = x_k \quad e \quad b_{k+1} = b_k \end{cases}$$

Método da bisseção

Exemplo

O método da bissecção aplicado à equação $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin(x) = 0$ com intervalo inicial $[1.5, 2.0]$, gera a seguinte sequência de aproximações:

Método da bisseção

Exemplo

O método da bissecção aplicado à equação $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin(x) = 0$ com intervalo inicial $[1.5, 2.0]$, gera a seguinte sequência de aproximações:

Solução

k	a	b	x_k	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_k)$
0	1.5	2.0	1.75	-0.4349	0.0907	-0.2184
1	1.75	2.0	1.875	-0.2184	0.0907	-0.0752
2	1.875	2.0	1.9375	-0.0752	0.0907	0.0050
3	1.875	1.9375	1.90625	-0.0752	0.0050	-0.0358
4	1.90625	1.9375	1.921875	-0.0358	0.0050	-0.0156
5	1.921875	1.9375	1.929688	-0.0156	0.0050	-0.0054
6	1.929688	1.9375	**1.933594**	-0.0054	0.0050	-0.0002

□

Método da bisseção

Algoritmo

entrada: função $f(x)$ contínua e tal que $f(a)f(b) < 0$ em $[a, b]$
precisao ϵ

$k = 0$;
enquanto *critério de parada não for satisfeito* **faça**
  $x_k = \frac{(a+b)}{2}$;
  se $f(a)f(x_k) < 0$ **então**
    $b = x_k$;
  senão
    $a = x_k$;
  fim-se
fim-enquanto
retorne x_k;

Método da bisseção

Intervalo

Se conhecemos apenas $a < \alpha$, podemos determinar um intervalo que contém a raiz e que possa ser usado pelo método da bisecção da seguinte forma.

Método da bisseção

Intervalo

Se conhecemos apenas $a < \alpha$, podemos determinar um intervalo que contém a raiz e que possa ser usado pelo método da bisecção da seguinte forma. Escolhemos um passo inicial de tamanho h e nessa etapa calculamos

$$f(a+h), f(a+2h), f(a+4h), \ldots$$

Método da bisseção

Intervalo

Se conhecemos apenas $a < \alpha$, podemos determinar um intervalo que contém a raiz e que possa ser usado pelo método da bisecção da seguinte forma. Escolhemos um passo inicial de tamanho h e nessa etapa calculamos

$$f(a+h), f(a+2h), f(a+4h), \ldots$$

isto é, dobramos o passo até que um valor da função seja encontrado tal que

$$f(a)f(a+2^k h) < 0$$

Nesse ponto, temos uma raiz cercada em um intervalo, a qual pode ser usada como ponto de partida pelo método da Bisecção.

Método da bisseção

Algoritmo - Busca Intervalo

entrada: função $f(x)$, x_{min}, x_{max}, n
saída: intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$

$dx = (x_{max} - x_{min})/n$;
$a = x_{min}$;
$i = 0$;
enquanto $i < n$ **faça**
  $i = i + 1$;
  $b = a + dx$;
  se $f(a)f(b) < 0$ **então**
    retorne a,b;
  fim-se
  $a = b$;
fim-enquanto

Análise do método da bissecção

A cada iteração k a raiz α de $f(x) = 0$ está no intervalo $[a_k, b_k]$. Temos assim a seguinte relação para o erro

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k)$$

Análise do método da bissecção

A cada iteração k a raiz α de $f(x) = 0$ está no intervalo $[a_k, b_k]$. Temos assim a seguinte relação para o erro

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k)$$

O tamanho do intervalo $(b_k - a_k)$ no passo k pode ser escrito como

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \ldots = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Análise do método da bissecção

A cada iteração k a raiz α de $f(x) = 0$ está no intervalo $[a_k, b_k]$. Temos assim a seguinte relação para o erro

$$|\alpha - x_k| \leq \tfrac{1}{2}(b_k - a_k)$$

O tamanho do intervalo $(b_k - a_k)$ no passo k pode ser escrito como

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \ldots = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Portanto, o erro no passo k satisfaz

$$\boxed{|\alpha - x_k| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}}$$

onde $a_0 = a$ e $b_0 = b$.

Análise do método da bissecção

Uma propriedade interessante do método da bissecção é que a convergência é **garantida** se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$ e se $\alpha \in [a, b]$.

Também é possível determinar o número de iterações que serão necessárias para calcular a raiz com uma certa precisão ϵ.

Isto é, queremos encontrar o inteiro k tal que:

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} \leq \epsilon$$

ou seja, quantas iterações são necessárias para que o erro entre a aproximação x_k da raiz α seja menor do que ϵ.

Análise do método da bissecção

Encontrar k tal que:

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} \leq \epsilon$$

portanto

$$\begin{aligned}
\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} &\leq \epsilon \\
\frac{b_0 - a_0}{\epsilon} &\leq 2^{k+1} \\
\log_2\left(2^{k+1}\right) &\geq \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right) \\
k + 1 &\geq \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{k \geq \frac{\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right)}{\ln\left(2\right)} - 1}$$

Análise do método da bissecção

Exemplo

Qual o número de iterações necessárias para encontrar uma aproximação para a raiz de $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin(x)$ no intervalo $[1.5, 2.0]$ com uma precisão $\epsilon = 10^{-5}$?

Solução

Precisamos encontrar k que satisfaz

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{2-1.5}{10^{-5}}\right)}{\ln(2)} - 1 \approx 15.61 - 1 = 14.61$$

Portanto, como k deve ser inteiro, temos que depois de 15 iterações o método atinge a precisão de 10^{-5} como desejado.

$\square$

Ordem de convergência

É importante definir com qual rapidez a sequência de aproximações $\{x_0, x_1, \ldots\}$ converge para a raiz exata α.

Ordem de convergência

É importante definir com qual rapidez a sequência de aproximações $\{x_0, x_1, \ldots\}$ converge para a raiz exata α.

Definição (Ordem de convergência)

Uma sequência $\{x_n | n \geq 0\}$ é dita convergir com ordem $p \geq 1$ para um ponto α se

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p, \quad n \geq 0$$

para uma constante $c > 0$.

Ordem de convergência

É importante definir com qual rapidez a sequência de aproximações $\{x_0, x_1, \ldots\}$ converge para a raiz exata α.

Definição (Ordem de convergência)

Uma sequência $\{x_n | n \geq 0\}$ *é dita convergir com ordem* $p \geq 1$ *para um ponto* α *se*

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p, \quad n \geq 0$$

para uma constante $c > 0$*.*

Sendo $c < 1$, dizemos que :

- se $p = 1$: convergência linear
- se $1 < p < 2$: convergência super-linear
- se $p = 2$: convergência quadrática

Ordem de convergência

Na prática o que isso significa?

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p$$

Ordem de convergência

Na prática o que isso significa?

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p$$

Exemplo de convergência

- Linear: $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \dots$ com $c = 10^{-1}$

Ordem de convergência

Na prática o que isso significa?

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p$$

Exemplo de convergência

- Linear: $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \ldots$ com $c = 10^{-1}$
- Linear: $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, \ldots$ com $c = 10^{-2}$

Ordem de convergência

Na prática o que isso significa?

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p$$

Exemplo de convergência

- Linear: $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \dots$ com $c = 10^{-1}$
- Linear: $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, \dots$ com $c = 10^{-2}$
- Super-linear: $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-8}, \dots$

Ordem de convergência

Na prática o que isso significa?

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p$$

Exemplo de convergência

- Linear: $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \ldots$ com $c = 10^{-1}$
- Linear: $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, \ldots$ com $c = 10^{-2}$
- Super-linear: $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-8}, \ldots$
- Quadrática: $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}, \ldots$

Ordem de convergência do método da bissecção

Sendo assim para o método da bissecção fica claro que a partir de

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$$

concluimos que a ordem de convergência para o método da bissecção é linear pois $p = 1$ e que a constante é $c = \frac{1}{2}$.

Isto é

$$\frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|\alpha - x_k|} \leq \frac{1}{2}$$

que nos diz que em média o erro cai pela metade a cada iteração do método.

Exemplo

Utilize a implementação para resolver o problema exemplo com a seguinte equação:

$$C = \frac{M}{r}[1 - (1 + r)^{-n}]$$

com $C = 10000$, $M = 1250$, $n = 10$.

Sendo assim:

- Determine o intervalo $[a, b]$ que contenha a raiz da equação
- Usando esse intervalo, encontre a raiz de forma aproximada usando o método da bisecção com uma precisão 0.000001.

Conteúdo

- Aula passada
  - Introdução e definições
  - Isolamento das raízes
  - Método da bisseção
- Aula de hoje
  - Método da falsa posição
  - Método do ponto fixo

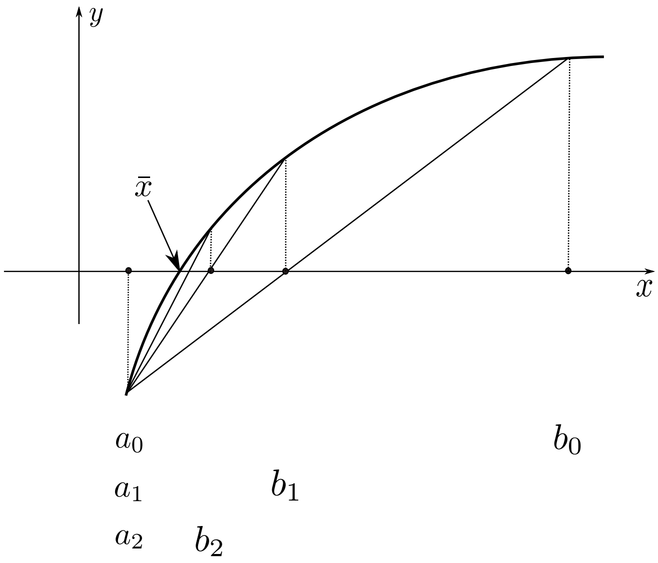
Método da falsa posição

No método da bissecção a cada iteração calculamos o ponto médio do intervalo como aproximação para a raiz e então decidimos qual o próximo intervalo a continuar a busca pela raiz.

No método da falsa posição a aproximação para a raiz é dada pelo ponto x_k escolhido como sendo o zero da reta que passa pelos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$.

De forma análoga ao método da bissecção a cada iteração o método encontra um intervalo que contem a raiz e continua o processo de busca nesse intervalo.

Método da falsa posição



Método da falsa posição

A equação da reta que passa pelos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ é dada por

$$\boxed{g(x) = mx + n} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow f(a) = ma + n \\ &\Rightarrow f(b) = mb + n \end{aligned}$$

Método da falsa posição

A equação da reta que passa pelos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ é dada por

$$\boxed{g(x) = mx + n} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow f(a) = ma + n \\ &\Rightarrow f(b) = mb + n \end{aligned}$$

$$f(b) - f(a) = mb - ma \quad \Rightarrow \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Método da falsa posição

A equação da reta que passa pelos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ é dada por

$$\boxed{g(x) = mx + n} \qquad \Rightarrow f(a) = ma + n$$

$$\Rightarrow f(b) = mb + n$$

$$f(b) - f(a) = mb - ma \quad \Rightarrow \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} b + n \quad \Rightarrow \quad n = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] b$$

Método da falsa posição

A equação da reta que passa pelos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ é dada por

$$\boxed{g(x) = mx + n} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow f(a) = ma + n \\ &\Rightarrow f(b) = mb + n \end{aligned}$$

$$f(b) - f(a) = mb - ma \quad \Rightarrow \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} b + n \quad \Rightarrow \quad n = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] b$$

Assim

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} b$$

$$\boxed{g(x) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)}$$

Método da falsa posição

Queremos encontrar x tal que $g(x) = 0$, logo

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 0 \\
\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b &= 0
\end{aligned}
$$

Método da falsa posição

Queremos encontrar x tal que $g(x) = 0$, logo

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b &= 0 \\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(b) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b \end{aligned}$$

Método da falsa posição

Queremos encontrar x tal que $g(x) = 0$, logo

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 0 \\
\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b &= 0 \\
\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b \\
\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b - f(b)
\end{aligned}
$$

Método da falsa posição

Queremos encontrar x tal que $g(x) = 0$, logo

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 0 \\
\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b &= 0 \\
\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(b) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b \\
\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b - f(b) \\
x &= b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}
\end{aligned}
$$

Método da falsa posição

Queremos encontrar x tal que $g(x) = 0$, logo

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 0 \\
\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b &= 0 \\
\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b \\
\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b - f(b) \\
x &= b - f(b)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} \\
x &= \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}
\end{aligned}
$$

Método da falsa posição

Queremos encontrar x tal que $g(x) = 0$, logo

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 0 \\
\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b &= 0 \\
\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b \\
\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b - f(b) \\
x &= b - f(b)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} \\
x &= \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}
\end{aligned}
$$

Portanto no passo k calculamos a próxima aproximação x_k usando

$$
x_k = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}
$$

Método da falsa posição

Sendo assim, dado um intervalo $[a, b]$, o método da falsa posição pode ser descrito pelo seguinte processo:

1. calcule o ponto de interseção x_k da reta que passa por $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ com o eixo x usando

$$\boxed{x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}}$$

2. selecione um novo intervalo para continuar com a busca
3. o novo intervalo será dado por
    - $[a_k, x_k]$, se $f(a_k)f(x_k) < 0$
    - $[x_k, b_k]$, caso contrário
4. o processo continua até satisfazer o critério de parada

Método da falsa posição

Algoritmo

entrada: função f contínua em $[a, b]$, intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, precisao ϵ e número máximo de iterações $maxit$

```
xold = b;
para k de 1 até maxit faça
    x = (a f(b) − b f(a)) / (f(b) − f(a));
    se abs(x-xold) < ε então
        retorne x;
    fim-se
    xold = x;
    se f(a)f(x) < 0 então
        b = x;
    senão
        a = x;
    fim-se
fim-para
```

Método da falsa posição

Exemplo

Encontrar o zero de $f(x) = (x/2)^2 - \sin(x)$ usando o seguinte intervalo $[a, b] = [1.5, 2]$.

Use $|f(x_k)| < \epsilon$ como critério de parada para $\epsilon = 0.0001$.

Método da falsa posição

Exemplo

Encontrar o zero de $f(x) = (x/2)^2 - \sin(x)$ usando o seguinte intervalo $[a, b] = [1.5, 2]$.

Use $|f(x_k)| < \epsilon$ como critério de parada para $\epsilon = 0.0001$.

Solução

k	a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$
0	1.5	2.0	1.913731	-4.349950e-01	9.070e-02	-2.618006e-02
1	1.913731	2.0	1.933054	-2.618006e-02	9.070e-02	-9.243996e-04
2	1.933054	2.0	1.933730	-9.243996e-04	9.070e-02	-3.193009e-05
3	1.933730	2.0	1.933753	-3.193009e-05	9.070e-02	-1.102069e-06
4	1.933753	2.0	1.933754	-1.102069e-06	9.070e-02	-3.903695e-08

O método termina com $x = 1.933754$ como aproximação para o zero desta função. $\square$

Método da falsa posição

Convergência

Não iremos apresentar a análise de convergência do método da falsa posição.

Entretanto, cabe dizer que se as condições do método forem satisfeitas, isto é, se

- $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$ e
- $f(a)f(b) < 0$

então o método apresenta convergência de primeira ordem.

Mais detalhes em no livro **"Algoritmos Numéricos"** do Frederico F. Campos.

Método do ponto fixo

Para encontrar a raiz da equação

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

onde f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ que procuramos a raiz, iremos expressar a equação (1) da seguinte forma:

$$x = \phi(x) \tag{2}$$

de forma que a solução de (2) também seja solução de (1). Para qualquer função $\phi(x)$, qualquer solução de (2) é chamada de **ponto fixo** de $\phi(x)$.

Sendo assim temos a seguinte equivalência: problema de determinar o zero de $f(x) \rightarrow$ problema de determinar o ponto fixo de $\phi(x)$.

Método do ponto fixo

Exemplo

Seja $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Podemos escrever

Método do ponto fixo

Exemplo

Seja $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Podemos escrever

a) $x = x^2 - 2$

Método do ponto fixo

Exemplo

Seja $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Podemos escrever

a) $x = x^2 - 2$

b) $x = \sqrt{2 + x}$

Método do ponto fixo

Exemplo

Seja $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Podemos escrever

a) $x = x^2 - 2$

b) $x = \sqrt{2 + x}$

c) $x = 1 + \frac{2}{x}$

Método do ponto fixo

Exemplo

Seja $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Podemos escrever

a) $x = x^2 - 2$
b) $x = \sqrt{2 + x}$
c) $x = 1 + \frac{2}{x}$
d) $x = \frac{x^2+2}{2x-1}$

Método do ponto fixo

Exemplo

Seja $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Podemos escrever

a) $x = x^2 - 2$

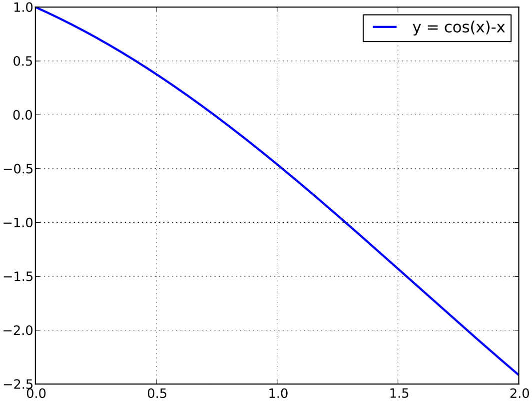
b) $x = \sqrt{2+x}$

c) $x = 1 + \frac{2}{x}$

d) $x = \frac{x^2+2}{2x-1}$

Existem diversas formas de expressar $f(x) = 0$ como um **problema de ponto fixo** da forma $x = \phi(x)$, entretanto veremos que nem todas são satisfatórias para nossos objetivos.

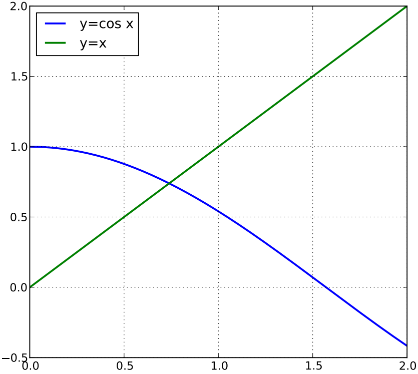
Método do ponto fixo

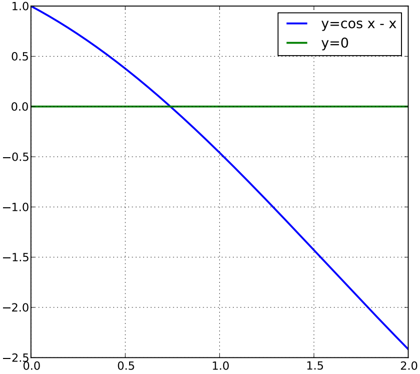


Problemas:

- **Zero de função: qual o valor de x tal que $f(x) = 0$?**
- Ponto fixo: qual o valor de x tal que $x = \phi(x)$?

Método do ponto fixo





Problemas:

- Zero de função: qual o valor de x tal que $f(x) = 0$?
- **Ponto fixo: qual o valor de x tal que $x = \phi(x)$?**

Método do ponto fixo

Iremos considerar que:

Método do ponto fixo

Iremos considerar que:

- estas curvas se interceptam (existe pelo menos 1 solução)

Método do ponto fixo

Iremos considerar que:

- estas curvas se interceptam (existe pelo menos 1 solução)
- $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas no intervalo $[a, b]$

Método do ponto fixo

Iremos considerar que:

- estas curvas se interceptam (existe pelo menos 1 solução)
- $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas no intervalo $[a, b]$

Seja x_0 uma aproximação inicial para α. O método do ponto fixo obtem aproximações sucessivas x_k para α, usando o seguinte processo iterativo

$$\boxed{x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots}$$

Método do ponto fixo

Iremos considerar que:

- estas curvas se interceptam (existe pelo menos 1 solução)
- $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas no intervalo $[a, b]$

Seja x_0 uma aproximação inicial para α. O método do ponto fixo obtem aproximações sucessivas x_k para α, usando o seguinte processo iterativo

$$\boxed{x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots}$$

Ou seja, dado uma aproximação x_k, calculamos o valor de $\phi(x_k)$ como aproximação para a raiz. Em seguida usamos esse valor como próximo argumento para a <u>função de iteração</u> $\phi(x)$.

Repetimos o processo até que o critério de parada seja satisfeito.

Método do ponto fixo

Exemplo

Resolver $x^2 - x - 2 = 0$ com a função de iteração $x = \sqrt{2 + x}$ usando $x_0 = 2.5$. Econtrar a raiz $\alpha = 2$.

Método do ponto fixo

Exemplo

Resolver $x^2 - x - 2 = 0$ com a função de iteração $x = \sqrt{2+x}$ usando $x_0 = 2.5$. Econtrar a raiz $\alpha = 2$.

Solução

Pelo método do ponto fixo: $x_{k+1} = \phi(x_k)$, para $k = 0, 1, \ldots$ e, portanto

$$x_1 = \phi(x_0) = \sqrt{2+2.5} = \sqrt{4.5} = 2.12132$$
$$x_2 = \phi(x_1) = \sqrt{2+2.12132} = \sqrt{4.12132} = 2.030103$$
$$x_3 = \phi(x_2) = \sqrt{2+2.030103} = \sqrt{4.030103} = 2.007511, \quad \ldots$$

Método do ponto fixo

Exemplo

Resolver $x^2 - x - 2 = 0$ com a função de iteração $x = \sqrt{2+x}$ usando $x_0 = 2.5$. Econtrar a raiz $\alpha = 2$.

Solução

Pelo método do ponto fixo: $x_{k+1} = \phi(x_k)$, para $k = 0, 1, \ldots$ e, portanto

$$x_1 = \phi(x_0) = \sqrt{2 + 2.5} = \sqrt{4.5} = 2.12132$$
$$x_2 = \phi(x_1) = \sqrt{2 + 2.12132} = \sqrt{4.12132} = 2.030103$$
$$x_3 = \phi(x_2) = \sqrt{2 + 2.030103} = \sqrt{4.030103} = 2.007511, \quad \ldots$$

Método do ponto fixo

Exemplo

Resolver $x^2 - x - 2 = 0$ com a função de iteração $x = \sqrt{2+x}$ usando $x_0 = 2.5$. Econtrar a raiz $\alpha = 2$.

Solução

Pelo método do ponto fixo: $x_{k+1} = \phi(x_k)$, para $k = 0, 1, \ldots$ e, portanto

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phi(x_0) = \sqrt{2 + 2.5} = \sqrt{4.5} = 2.12132 \\
x_2 &= \phi(x_1) = \sqrt{2 + 2.12132} = \sqrt{4.12132} = 2.030103 \\
x_3 &= \phi(x_2) = \sqrt{2 + 2.030103} = \sqrt{4.030103} = 2.007511, \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Método do ponto fixo

Exemplo

Resolver $x^2 - x - 2 = 0$ com a função de iteração $x = \sqrt{2+x}$ usando $x_0 = 2.5$. Econtrar a raiz $\alpha = 2$.

Solução

Pelo método do ponto fixo: $x_{k+1} = \phi(x_k)$, para $k = 0, 1, \ldots$ e, portanto

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phi(x_0) = \sqrt{2+2.5} = \sqrt{4.5} = 2.12132 \\
x_2 &= \phi(x_1) = \sqrt{2+2.12132} = \sqrt{4.12132} = 2.030103 \\
x_3 &= \phi(x_2) = \sqrt{2+2.030103} = \sqrt{4.030103} = 2.007511, \quad \ldots
\end{aligned}
$$

As aproximações x_k convergem para a $\alpha = 2$. Entretanto, para certas escolhas da função de iteração $\phi(x)$ o processo iterativo diverge.

□

Método do ponto fixo

Exemplo

Considere o mesmo problema do exemplo anterior, entretanto agora com o seguinte esquema de ponto fixo: $x = x^2 - 2$ com $x_0 = 2.5$ como aproximação inicial.

Método do ponto fixo

Exemplo

Considere o mesmo problema do exemplo anterior, entretanto agora com o seguinte esquema de ponto fixo: $x = x^2 - 2$ com $x_0 = 2.5$ como aproximação inicial.

Solução

$$x_1 = \phi(x_0) = x_0^2 - 2 = 6.25 - 2 = 4.25$$

Método do ponto fixo

Exemplo

Considere o mesmo problema do exemplo anterior, entretanto agora com o seguinte esquema de ponto fixo: $x = x^2 - 2$ com $x_0 = 2.5$ como aproximação inicial.

Solução

$$x_1 = \phi(x_0) = x_0^2 - 2 = 6.25 - 2 = 4.25$$
$$x_2 = \phi(x_1) = x_1^2 - 2 = 18.0625 - 2 = 16.0625$$

Método do ponto fixo

Exemplo

Considere o mesmo problema do exemplo anterior, entretanto agora com o seguinte esquema de ponto fixo: $x = x^2 - 2$ com $x_0 = 2.5$ como aproximação inicial.

Solução

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phi(x_0) = x_0^2 - 2 = 6.25 - 2 = 4.25 \\
x_2 &= \phi(x_1) = x_1^2 - 2 = 18.0625 - 2 = 16.0625 \\
x_3 &= \phi(x_2) = x_2^2 - 2 = 258.00 - 2 = 256.00 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Método do ponto fixo

Exemplo

Considere o mesmo problema do exemplo anterior, entretanto agora com o seguinte esquema de ponto fixo: $x = x^2 - 2$ com $x_0 = 2.5$ como aproximação inicial.

Solução

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phi(x_0) = x_0^2 - 2 = 6.25 - 2 = 4.25 \\
x_2 &= \phi(x_1) = x_1^2 - 2 = 18.0625 - 2 = 16.0625 \\
x_3 &= \phi(x_2) = x_2^2 - 2 = 258.00 - 2 = 256.00 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

que como vemos diverge rapidamente da raiz procurada.

□

Método do ponto fixo

Vamos analisar graficamente o que acontece com cada uma das opções, isto é, se o método converge ou diverge para cada escolha de $\phi(x)$.

Método do ponto fixo

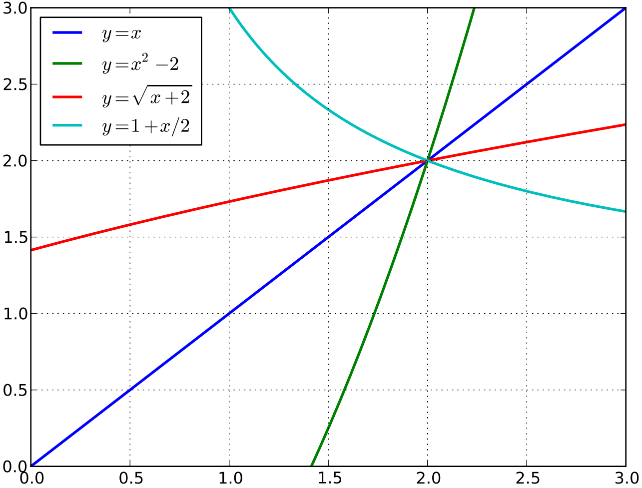
Vamos analisar graficamente o que acontece com cada uma das opções, isto é, se o método converge ou diverge para cada escolha de $\phi(x)$.

No que segue

- a seta vertical corresponde à avaliação da função em um ponto
- a seta horizontal apontando para $y = x$ indica que o resultado da avaliação anterior é usado como entrada para a próxima

Método do ponto fixo

Para $f(x) = x^2 - x - 2$ e para as funções de iteração $\phi(x)$ listadas anteriormente, graficamente temos



Método do ponto fixo

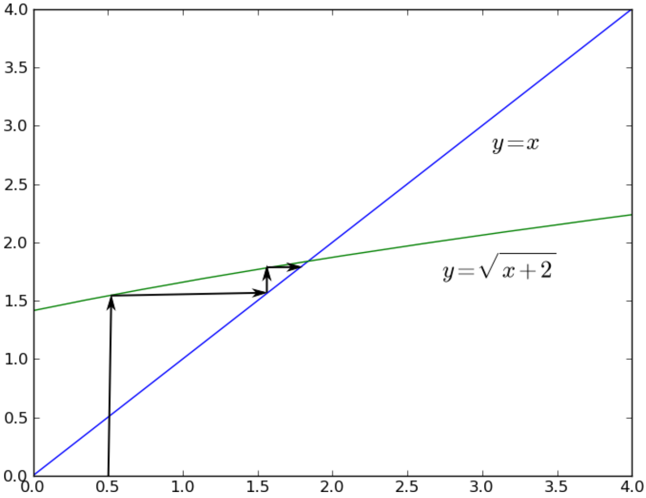


Figura: O método do ponto fixo **converge** para $x = \sqrt{x+2}$.

Método do ponto fixo

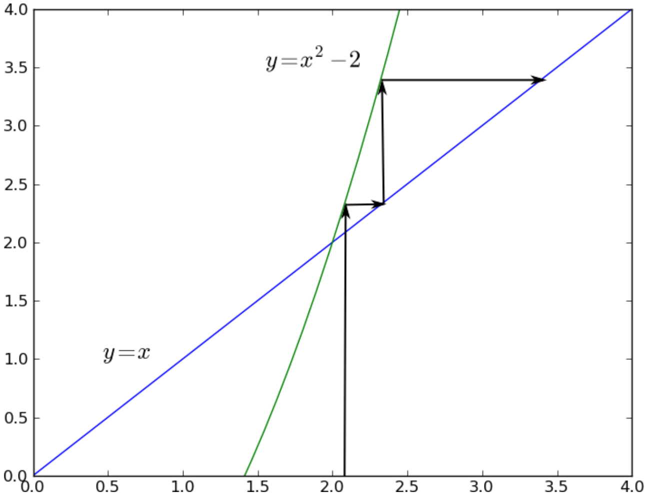


Figura: O método do ponto fixo **diverge** para $x = x^2 - 2$.

Método do ponto fixo

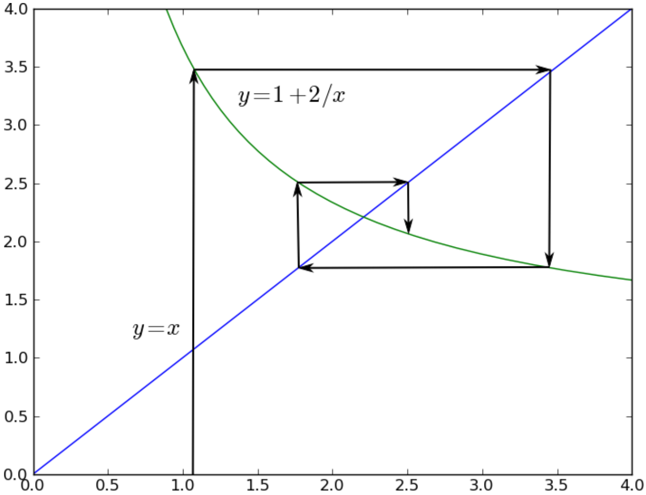


Figura: O método do ponto fixo **converge** para $x = 1 + x/2$.

Método do ponto fixo

Algoritmo

entrada: função de iteração $\phi(x)$,
aproximação inicial x_0,
precisão ϵ
número máximo de iterações $maxit$

para k *de* 1 *até* $maxit$ **faça**
    $x_1 = \phi(x_0)$;
    se *abs*$(x_1 - x_0) < \epsilon$ **então**
        retorne x_1 ;
    fim-se
    $x_0 = x_1$;
fim-para

Método do ponto fixo

Iremos estudar agora as condições suficientes que a função de iteração $\phi(x)$ deve satisfazer para garantir a convergência do método do ponto fixo. Para a demonstração do Teorema do método do ponto fixo, iremos antes apresentar resultados importantes que serão usados na sua prova.

Método do ponto fixo

Iremos estudar agora as condições suficientes que a função de iteração $\phi(x)$ deve satisfazer para garantir a convergência do método do ponto fixo. Para a demonstração do Teorema do método do ponto fixo, iremos antes apresentar resultados importantes que serão usados na sua prova.

Teorema (TVM - Teorema do Valor Médio)

Se f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe pelo menos um ponto ξ entre a e b, tal que:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Método do ponto fixo

Iremos estudar agora as condições suficientes que a função de iteração $\phi(x)$ deve satisfazer para garantir a convergência do método do ponto fixo. Para a demonstração do Teorema do método do ponto fixo, iremos antes apresentar resultados importantes que serão usados na sua prova.

Teorema (TVM - Teorema do Valor Médio)

Se f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe pelo menos um ponto ξ entre a e b, tal que:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Teorema

*Seja f uma função real **contínua** na vizinhança de x_0. Se $f(x_0) \neq 0$, então $f(x) \neq 0$ para todo x numa vizinhança pequena de x_0.*

Método do ponto fixo

Teorema (Ponto fixo)

Seja $\phi(x)$ *uma função contínua com* $\phi'(x)$ *contínua num intervalo fechado* $I = (\alpha - h, \alpha + h)$*, cujo centro* α *é a solução de* $x = \phi(x)$*.*

Seja $x_0 \in I$ *e seja* M *um limitante em* I *para* $\phi'(x)$*, isto é,*

$$|\phi'(x)| \leq M < 1.$$

Então:

a) *a iteração* $x_{k+1} = \phi(x_k)$*,* $k = 0, 1, \ldots$ *pode ser executada indefinidamente, pois* $x_k \in I, \forall k$*;*

b) $|x_k - \alpha| \rightarrow 0$*.*

Método do ponto fixo

Prova

Vamos mostrar primeiro que o item a) é válido e depois iremos mostrar que b) também é válido.

a) *Para provar que $x_k \in I, \forall k$, iremos usar* ***indução matemática****.*

Método do ponto fixo

Prova

Vamos mostrar primeiro que o item a) é válido e depois iremos mostrar que b) também é válido.

a) *Para provar que $x_k \in I, \forall k$, iremos usar* ***indução matemática****.*

i) *Por hipótese $x_0 \in I$.*

Método do ponto fixo

Prova

Vamos mostrar primeiro que o item a) é válido e depois iremos mostrar que b) também é válido.

a) *Para provar que $x_k \in I, \forall k$, iremos usar **indução matemática**.*

i) *Por hipótese $x_0 \in I$.*

ii) *Supomos que $x_0, x_1, \ldots, x_k \in I$.*

Método do ponto fixo

Prova

Vamos mostrar primeiro que o item a) é válido e depois iremos mostrar que b) também é válido.

a) *Para provar que $x_k \in I, \forall k$, iremos usar* ***indução matemática****.*

i) *Por hipótese $x_0 \in I$.*

ii) *Supomos que $x_0, x_1, \ldots, x_k \in I$.*

iii) *Vamos mostrar que $x_{k+1} \in I$.*
Temos

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha)$$

Método do ponto fixo

Prova

Vamos mostrar primeiro que o item a) é válido e depois iremos mostrar que b) também é válido.

a) *Para provar que $x_k \in I, \forall k$, iremos usar* ***indução matemática****.*

i) *Por hipótese $x_0 \in I$.*

ii) *Supomos que $x_0, x_1, \ldots, x_k \in I$.*

iii) *Vamos mostrar que $x_{k+1} \in I$.*
Temos

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha)$$

Pelo TVM temos

$$\phi(x_k) - \phi(\alpha) = \phi'(\xi_k)(x_k - \alpha) = x_{k+1} - \alpha$$

onde ξ_k está entre x_k e α.

Método do ponto fixo

Prova (cont.)

Tomando o módulo segue que:

$$\begin{aligned}|x_{k+1} - \alpha| &= |\phi'(\xi_k)(x_k - \alpha)| \\ &= |\phi'(\xi_k)||x_k - \alpha|\end{aligned}$$

Método do ponto fixo

Prova (cont.)

Tomando o módulo segue que:

$$
\begin{aligned}
|x_{k+1} - \alpha| &= |\phi'(\xi_k)(x_k - \alpha)| \\
&= |\phi'(\xi_k)||x_k - \alpha|
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução: $x_k \in I \Rightarrow \xi_k \in I$.
E ainda como $|\phi'(x)| \leq M < 1$ *em* I *temos*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq M|x_k - \alpha|$$

Método do ponto fixo

Prova (cont.)

Tomando o módulo segue que:

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - \alpha| &= |\phi'(\xi_k)(x_k - \alpha)| \\ &= |\phi'(\xi_k)||x_k - \alpha| \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução: $x_k \in I \Rightarrow \xi_k \in I$.
E ainda como $|\phi'(x)| \leq M < 1$ *em* I *temos*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq M|x_k - \alpha|$$

Como $M < 1$, *temos que* $x_{k+1} \in I$.

E assim concluimos que $x_k \in I$ *para todo* k.

Prova (cont.)

b) *Pelo item a), temos que*

$$
\begin{aligned}
|x_k - \alpha| \leq M|x_{k-1} - \alpha| &\leq M^2|x_{k-2} - \alpha| \\
&\leq \ldots \leq M^k|x_0 - \alpha|
\end{aligned}
$$

Método do ponto fixo

Prova (cont.)

b) *Pelo item a), temos que*

$$\begin{aligned} |x_k - \alpha| \leq M|x_{k-1} - \alpha| &\leq M^2|x_{k-2} - \alpha| \\ &\leq \ldots \leq M^k|x_0 - \alpha| \end{aligned}$$

como $M < 1$, *aplicando o limite*

$$\lim_{k\to\infty} M^k \to 0 \quad \Rightarrow \quad |x_k - \alpha| \to 0$$

Método do ponto fixo

Prova (cont.)

b) *Pelo item a), temos que*

$$\begin{aligned}|x_k - \alpha| \leq M|x_{k-1} - \alpha| &\leq M^2|x_{k-2} - \alpha| \\ &\leq \ldots \leq M^k|x_0 - \alpha|\end{aligned}$$

como $M < 1$, aplicando o limite

$$\lim_{k\to\infty} M^k \to 0 \quad \Rightarrow \quad |x_k - \alpha| \to 0$$

Ou seja, $\{x_k\}$ converge para a raiz α.

□

Método do ponto fixo

Algumas observações sobre o resultado do Teorema:

- Se $|\phi'(\alpha)| < 1$, então existe um intervalo $I \subseteq [a, b]$ centrado em α que satisfaz as condições do Teorema do ponto fixo. Portanto, a iteração $x_{k+1} = \phi(x_k)$ irá **convergir**.
- Se $|\phi'(\alpha)| > 1$, então a iteração $x_{k+1} = \phi(x_k)$ irá **divergir**.
- Se $|\phi'(\alpha)| = 1$, nada pode ser dito a respeito da convergência do método.
- Fica a partir da demonstração do item b), que quanto menor for o valor de M, mais rápida será a convergência de $\{x_k\}$ para α.

Método do ponto fixo

Exemplo

O método do ponto fixo converge para $f(x) = x^2 - x - 2$ no intervalo $I = [1.5, 2.5]$ usando $\phi(x) = \sqrt{x+2}$?

Exemplo

O método do ponto fixo converge para $f(x) = x^2 - x - 2$ no intervalo $I = [1.5, 2.5]$ usando $\phi(x) = \sqrt{x+2}$?

Solução

Derivando $\phi(x)$ tem-se: $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$.
Para mostrar que o MP converge, precisamos encontrar um limitante M para $\phi'(x)$ tal que $M < 1$, isto é

$$\max_{x \in I} |\phi'(x)| = \max_{x \in I} \left| \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right| = 0.267 < 1$$

Portanto, nessas condições, o Teorema do Ponto fixo garante a convergência do método.
□

Exemplo

O método do ponto fixo converge para $f(x) = x^2 - x - 2$ no intervalo $I = [1.5, 2.5]$ usando $x = x^2 - 2$?

Método do ponto fixo

Exemplo

O método do ponto fixo converge para $f(x) = x^2 - x - 2$ no intervalo $I = [1.5, 2.5]$ usando $x = x^2 - 2$?

Solução

Derivando $\phi(x)$ tem-se

$$\phi(x) = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad \phi'(x) = 2x$$

Assim temos que $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas. Entretanto

$$\max_{x \in I} |\phi'(x)| = \max_{x \in I} |2x| > 1$$

que nos mostra que o método do ponto fixo não converge para essa escolha da função de iteração $\phi(x)$. De fato, o método diverge (como visto anteriormente).

$\square$

Ordem de convergência do método do ponto fixo

Do Teorema temos que

$$x_{k+1} - \alpha = \phi'(\xi_k)(x_k - \alpha)$$

para algum ξ_k entre x_k e α. Logo

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = |\phi'(\xi_k)| \leq M$$

E portanto pela def. de ordem de convergência

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq M|x_k - \alpha|$$

temos que $p = 1$ e dizemos então que a convergência do MPF é linear.

E ainda, o erro em qualquer iteração é proporcional ao erro da iteração anterior e a constante de proporcionalidade é dada por $\phi'(\xi_k)$.

Método do ponto fixo

Exemplo - Aula

Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são $\alpha_1 = 0.5$ e $\alpha_2 = 2$. Considere os processos iterativos:

a) $x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}$

b) $x_{k+1} = \frac{2x_k^2+2}{5}$

Qual dos dois processos você utilizaria para obter a raiz α_1? Porque?

Método do ponto fixo

Exemplo - Aula

Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são $\alpha_1 = 0.5$ e $\alpha_2 = 2$. Considere os processos iterativos:

a) $x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}$

b) $x_{k+1} = \frac{2x_k^2+2}{5}$

Qual dos dois processos você utilizaria para obter a raiz α_1? Porque?

Solução do Exemplo

Para a) temos que

$$\phi(x) = \left(\tfrac{5x}{2} - 1\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \phi'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{5x_k}{2}-1}}\frac{5}{2}$$

$$|\phi'(\alpha_1)| = \frac{5}{4\sqrt{\frac{5\cdot 0.5}{2} - 1}} = 2.5 > 1$$

Método do ponto fixo

Solução do Exemplo - (cont.)

Para b) temos que

$$\phi(x) = \frac{2x^2 + 2}{5} \quad \Rightarrow \quad \phi'(x) = \frac{4x}{5}$$
$$|\phi'(\alpha_1)| = \frac{4(0.5)}{5} = \frac{2}{5} = 0.4 < 1$$

Temos então que $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas e se x_0 for suficientemente próximo de α_1, então o processo b) irá convergir, e portanto este é mais adequado para encontrar a raiz.
□

Método do ponto fixo

Exemplo - Aula

Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Considere a seguinte função de iteração $x = \phi(x) = \frac{x^3+3}{9}$. Queremos encontrar a raiz de $f(x) = 0$ no intervalo $[0, 1]$. O método irá convergir?

Método do ponto fixo

Exemplo - Aula

Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Considere a seguinte função de iteração $x = \phi(x) = \frac{x^3+3}{9}$. Queremos encontrar a raiz de $f(x) = 0$ no intervalo $[0, 1]$. O método irá convergir?

Solução do Exemplo

Temos que $\phi'(x) = \frac{x^2}{3}$, e portanto temos que $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas.

Método do ponto fixo

Exemplo - Aula

Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Considere a seguinte função de iteração $x = \phi(x) = \frac{x^3+3}{9}$. Queremos encontrar a raiz de $f(x) = 0$ no intervalo $[0, 1]$. O método irá convergir?

Solução do Exemplo

Temos que $\phi'(x) = \frac{x^2}{3}$, e portanto temos que $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas. Verificamos agora que

$$|\phi'(x)| = \left|\frac{x^2}{3}\right| < 1, \forall x \in [0, 1]$$

E assim concluimos que o método irá convergir. Podemos verificar tomando $x_0 = 0.25$ e usando uma precisão $\epsilon = 0.001$.

Método do ponto fixo

Solução do Exemplo - (cont.)

Na primeira iteração temos

$$x_1 = \frac{0.25^3 + 3}{9} = \frac{0.015625 + 3}{9} = 0.335069$$

$$f(x_1) = x_1^3 - 9x_1 + 3 = 0.037618 - 3.015621 + 3 = 0.021997 > \epsilon$$

Método do ponto fixo

Solução do Exemplo - (cont.)

Na primeira iteração temos

$$x_1 = \frac{0.25^3 + 3}{9} = \frac{0.015625 + 3}{9} = 0.335069$$
$$f(x_1) = x_1^3 - 9x_1 + 3 = 0.037618 - 3.015621 + 3 = 0.021997 > \epsilon$$

Mais uma iteração

$$x_2 = \frac{0.335069^3 + 3}{9} = 0.337513$$
$$f(x_2) = x_2^3 - 9x_2 + 3 = 0.038447 - 3.037617 + 3 = 0.00083 < \epsilon$$

Como o critério de parada $|f(x_2)| < \epsilon$ foi satisfeito, terminamos o processo com $x_2 = 0.337513$ como aproximação para a raiz.

Método do ponto fixo

Solução do Exemplo - (cont.)

Se tomarmos outra aproximação inicial $x_0 = 0.5$ mais distante da raiz temos os seguintes passos:

k	x_k	$f(x_k)$
0	0.5	-1.375
1	0.34722	-0.83137
2	0.33798	-0.0032529
3	0.33762	-0.00012219

□

Método do ponto fixo

Exemplo

Considere as seguintes funções:

a) $\phi_1(x) = 2x - 1$

b) $\phi_2(x) = x^2 - 2x + 2$

Qual delas você escolheria para obter a raiz 1, utilizando o processo iterativo $x_{k+1} = \phi(x_k)$? Exiba a sequência gerada com sua escolha tomando $x_0 = 1.2$.

Método do ponto fixo

Exemplo

Considere as seguintes funções:

a) $\phi_1(x) = 2x - 1$

b) $\phi_2(x) = x^2 - 2x + 2$

Qual delas você escolheria para obter a raiz 1, utilizando o processo iterativo $x_{k+1} = \phi(x_k)$? Exiba a sequência gerada com sua escolha tomando $x_0 = 1.2$.

Solução do Exemplo

Temos que $\phi_1(x)$ e $\phi_1'(x)$ são contínuas pois

$$\phi_1(x) = 2x - 1, \quad \phi_1'(x) = 2$$

Método do ponto fixo

Exemplo

Considere as seguintes funções:

a) $\phi_1(x) = 2x - 1$

b) $\phi_2(x) = x^2 - 2x + 2$

Qual delas você escolheria para obter a raiz 1, utilizando o processo iterativo $x_{k+1} = \phi(x_k)$? Exiba a sequência gerada com sua escolha tomando $x_0 = 1.2$.

Solução do Exemplo

Temos que $\phi_1(x)$ e $\phi_1'(x)$ são contínuas pois

$$\phi_1(x) = 2x - 1, \quad \phi_1'(x) = 2$$

Mas $|\phi_1'(x)| = 2 > 1, \quad \forall x$ próximo de $\alpha = 1$.

Método do ponto fixo

Solução do Exemplo - (cont.)

Por outro lado

$$\phi_2(x) = x^2 - 2x + 2, \quad \phi_2'(x) = 2x - 2$$
$$|\phi_2'(x)| = |2x - 2| < 1$$

Solução do Exemplo - (cont.)

Por outro lado

$$\phi_2(x) = x^2 - 2x + 2, \quad \phi_2'(x) = 2x - 2$$
$$|\phi_2'(x)| = |2x - 2| < 1$$

de onde temos

$$-1 < 2x - 2 < 1$$
$$1 < 2x < 3$$
$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

Método do ponto fixo

Solução do Exemplo - (cont.)

Por outro lado

$$\phi_2(x) = x^2 - 2x + 2, \quad \phi_2'(x) = 2x - 2$$
$$|\phi_2'(x)| = |2x - 2| < 1$$

de onde temos

$$\begin{aligned} -1 < 2x - 2 < 1 \\ 1 < 2x < 3 \\ \tfrac{1}{2} < x < \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Portanto $|\phi_2'(x)| < 1$ se e somente se $x \in I = [0.5, 1.5]$. Como $\phi_2(x)$ e $\phi_2'(x)$ são contínuas, tomando uma aproximação inicial $x_0 \in I$, temos a convergência do método garantida.
$\square$

Método do ponto fixo

Exemplo

Vamos rever o caso $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Temos os seguinte esquema, que já vimos que converge para $x = \sqrt{2+x}$. Vamos usar $x_0 = 2.5$, então

Método do ponto fixo

Exemplo

Vamos rever o caso $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Temos os seguinte esquema, que já vimos que converge para $x = \sqrt{2 + x}$. Vamos usar $x_0 = 2.5$, então

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phi(x_0) = 2.121320 \\
x_2 &= \phi(x_1) = 2.030104 \\
x_3 &= \phi(x_2) = 2.007512 \\
x_4 &= \phi(x_3) = 2.001877 \\
x_5 &= \phi(x_4) = 2.000469 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Método do ponto fixo

Exemplo

Vamos rever o caso $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Temos os seguinte esquema, que já vimos que converge para $x = \sqrt{2 + x}$. Vamos usar $x_0 = 2.5$, então

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phi(x_0) = 2.121320 \\
x_2 &= \phi(x_1) = 2.030104 \\
x_3 &= \phi(x_2) = 2.007512 \\
x_4 &= \phi(x_3) = 2.001877 \\
x_5 &= \phi(x_4) = 2.000469 \\
\ldots
\end{aligned}
$$

Vejamos agora o seguinte esquema

$$x = x - \frac{x^2 - x - 2}{2x - 1}$$

Método do ponto fixo

Exemplo

Usando o esquema

$$x = x - \frac{x^2 - x - 2}{2x - 1}$$

com $x_0 = 2.5$ obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi(x_0) = 2.062500 \\ x_2 &= \phi(x_1) = 2.001250 \\ x_3 &= \phi(x_2) = 2.000001 \\ &\dots \end{aligned}$$

de onde concluimos que o esquema converge, e ainda, de forma muito mais rápida que o esquema anterior. Porque? Que função de iteração é essa?

Conteúdo

- Aula passada
  - Método do ponto fixo
- Aula de hoje
  - Método de Newton
  - Método da secante

Método de Newton

Na aula anterior estudamos o método do ponto fixo que expressa $f(x) = 0$ na forma

$$x = \phi(x)$$

Método de Newton

Na aula anterior estudamos o método do ponto fixo que expressa $f(x) = 0$ na forma

$$x = \phi(x)$$

Uma forma geral de escrever $\phi(x)$ é

$$\phi(x) = x + A(x)f(x) \tag{3}$$

para qualquer $A(x)$ tal que $A(\alpha) \neq 0$. Vamos estudar agora o método de Newton que é uma das técnicas mais populares para se determinar raízes de equações não lineares.

Método de Newton

Na aula anterior estudamos o método do ponto fixo que expressa $f(x) = 0$ na forma

$$x = \phi(x)$$

Uma forma geral de escrever $\phi(x)$ é

$$\phi(x) = x + A(x)f(x) \tag{3}$$

para qualquer $A(x)$ tal que $A(\alpha) \neq 0$. Vamos estudar agora o método de Newton que é uma das técnicas mais populares para se determinar raízes de equações não lineares.

Existem diversas formas de se deduzir o método de Newton

1. método de ponto fixo
2. interpretação geométrica
3. série de Taylor

Método de Newton

No MPF vimos que

- se $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ forem contínuas e se $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I$, então o método irá convergir
- a convergência será mais rápida quanto menor for $|\phi'(\alpha)|$.

Método de Newton

No MPF vimos que

- se $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ forem contínuas e se $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I$, então o método irá convergir
- a convergência será mais rápida quanto menor for $|\phi'(\alpha)|$.

A idéia do método de Newton, quando visto como um MPF, é tentar garantir e acelerar a convergência do MPF escolhendo a função de iteração $\phi(x)$ de tal forma que $\phi'(\alpha) = 0$.

Partindo da forma geral de $\phi(x)$ dada em (3), queremos encontrar a função $A(x)$ tal que $\phi'(\alpha) = 0$.

Método de Newton

No MPF vimos que

- se $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ forem contínuas e se $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I$, então o método irá convergir
- a convergência será mais rápida quanto menor for $|\phi'(\alpha)|$.

A idéia do método de Newton, quando visto como um MPF, é tentar garantir e acelerar a convergência do MPF escolhendo a função de iteração $\phi(x)$ de tal forma que $\phi'(\alpha) = 0$.

Partindo da forma geral de $\phi(x)$ dada em (3), queremos encontrar a função $A(x)$ tal que $\phi'(\alpha) = 0$. Derivando

$$\phi(x) = x + A(x)f(x)$$

obtemos

$$\phi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

Método de Newton

No MPF vimos que

- se $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ forem contínuas e se $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I$, então o método irá convergir
- a convergência será mais rápida quanto menor for $|\phi'(\alpha)|$.

A idéia do método de Newton, quando visto como um MPF, é tentar garantir e acelerar a convergência do MPF escolhendo a função de iteração $\phi(x)$ de tal forma que $\phi'(\alpha) = 0$.

Partindo da forma geral de $\phi(x)$ dada em (3), queremos encontrar a função $A(x)$ tal que $\phi'(\alpha) = 0$. Derivando

$$\phi(x) = x + A(x)f(x)$$

obtemos

$$\phi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

avaliando em $x = \alpha$ temos

$$\phi'(\alpha) = 1 + A'(\alpha)\underbrace{f(\alpha)}_{=0} + A(\alpha)f'(\alpha)$$

Método de Newton

Assim

$$\phi'(\alpha) = 1 + A(\alpha)f'(\alpha)$$

Método de Newton

Assim

$$\phi'(\alpha) = 1 + A(\alpha)f'(\alpha)$$

Como queremos que $\phi'(\alpha) = 0$, fazemos

$$1 + A(\alpha)f'(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}, \quad \text{com } f'(\alpha) \neq 0$$

Método de Newton

Assim

$$\phi'(\alpha) = 1 + A(\alpha)f'(\alpha)$$

Como queremos que $\phi'(\alpha) = 0$, fazemos

$$1 + A(\alpha)f'(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}, \quad \text{com } f'(\alpha) \neq 0$$

Tomando

$$A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

Método de Newton

Assim

$$\phi'(\alpha) = 1 + A(\alpha)f'(\alpha)$$

Como queremos que $\phi'(\alpha) = 0$, fazemos

$$1 + A(\alpha)f'(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}, \quad \text{com } f'(\alpha) \neq 0$$

Tomando

$$A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

temos

$$\phi(x) = x + A(x)f(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Método de Newton

Assim

$$\phi'(\alpha) = 1 + A(\alpha)f'(\alpha)$$

Como queremos que $\phi'(\alpha) = 0$, fazemos

$$1 + A(\alpha)f'(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}, \quad \text{com } f'(\alpha) \neq 0$$

Tomando

$$A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

temos

$$\phi(x) = x + A(x)f(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

e assim o processo iterativo do método de Newton fica definido como

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots}$$

Método de Newton

Assim dada $f(x) = 0$, obtemos a função de iteração

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

que é tal que $\phi'(\alpha) = 0$, pois

$$\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Método de Newton

Assim dada $f(x) = 0$, obtemos a função de iteração

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

que é tal que $\phi'(\alpha) = 0$, pois

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\ &= \frac{f'(x)^2 - f'(x)f'(x) + f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\end{aligned}$$

Método de Newton

Assim dada $f(x) = 0$, obtemos a função de iteração

$$\phi(x) = x - \tfrac{f(x)}{f'(x)}$$

que é tal que $\phi'(\alpha) = 0$, pois

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\
&= \frac{f'(x)^2 - f'(x)f'(x) + f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\
&= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}
\end{aligned}$$

Método de Newton

Assim dada $f(x) = 0$, obtemos a função de iteração

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

que é tal que $\phi'(\alpha) = 0$, pois

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\
&= \frac{f'(x)^2 - f'(x)f'(x) + f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\
&= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}
\end{aligned}$$

como $f(\alpha) = 0$, isto implica que $\phi'(\alpha) = 0$, desde que $f'(\alpha) \neq 0$, como queríamos.

Método de Newton

Interpretação geométrica

Antes de estudarmos exemplos, algoritmo e convergência, vejamos as outras deduções do método.

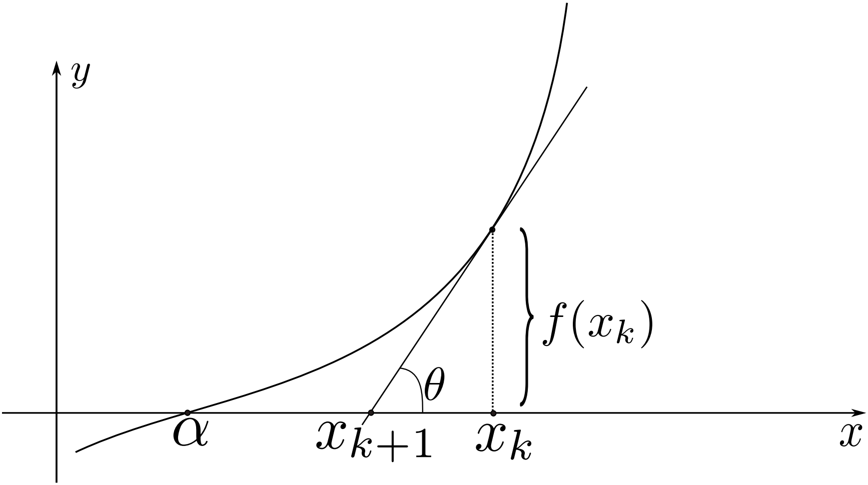
Iremos apresentar o método de Newton agora sob o ponto de vista geométrico. Seja x_k uma aproximação para a raiz α de $f(x) = 0$.

O valor de x_{k+1} é obtido graficamente traçando-se pelo ponto $(x_k, f(x_k))$ a reta tangente à curva $y = f(x)$.

O ponto de interseção da reta tangente com o eixo dos x, determina o valor de x_{k+1}.

Método de Newton

Interpretação geométrica



Método de Newton

Interpretação geométrica

Assim temos

$$\tan(\theta) = f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

Método de Newton

Interpretação geométrica

Assim temos

$$\tan(\theta) = f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$
$$\Rightarrow f'(x_k)(x_k - x_{k+1}) = f(x_k)$$

Assim temos

$$
\begin{aligned}
\tan(\theta) = f'(x_k) &= \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} \\
&\Rightarrow f'(x_k)(x_k - x_{k+1}) = f(x_k) \\
&\Rightarrow x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}
\end{aligned}
$$

Método de Newton

Interpretação geométrica

Assim temos

$$\begin{aligned}
\tan(\theta) = f'(x_k) &= \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} \\
&\Rightarrow f'(x_k)(x_k - x_{k+1}) = f(x_k) \\
&\Rightarrow x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
&\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}
\end{aligned}$$

Método de Newton

Interpretação geométrica

Assim temos

$$
\begin{aligned}
\tan(\theta) = f'(x_k) &= \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} \\
&\Rightarrow f'(x_k)(x_k - x_{k+1}) = f(x_k) \\
&\Rightarrow x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
&\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}
\end{aligned}
$$

Vejamos agora a dedução através de série de Taylor.

Método de Newton

Série de Taylor

Vamos deduzir o método de Newton usando série de Taylor em torno do ponto $a = x_k$.

Método de Newton

Série de Taylor

Vamos deduzir o método de Newton usando série de Taylor em torno do ponto $a = x_k$. Assim temos

$$f(x) = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k) + R_1(x)$$

onde, como visto anteriormente, $R_1(x) = \frac{x-x_k}{2} f''(c_{x_k})$, com c_{x_k} entre x_k e x.

Vamos deduzir o método de Newton usando série de Taylor em torno do ponto $a = x_k$. Assim temos

$$f(x) = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k) + R_1(x)$$

onde, como visto anteriormente, $R_1(x) = \frac{x-x_k}{2} f''(c_{x_k})$, com c_{x_k} entre x_k e x. Avaliando a expressão anterior em $x = \alpha$ e desprezando o termo do erro, temos

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_k) + (\alpha - x_k)f'(x_k) &\approx 0 \\ (\alpha - x_k) &\approx -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ \alpha &\approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

De onde definimos o método como

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Método de Newton

Exemplo

Usando o método de Newton, determine a menor raiz positiva da equação $f(x) = 4\cos(x) - e^x = 0$ com erro inferior a $\epsilon = 10^{-2}$. Use o seguinte critério de parada $|x_{k+1} - x_k|/|x_{k+1}|$.

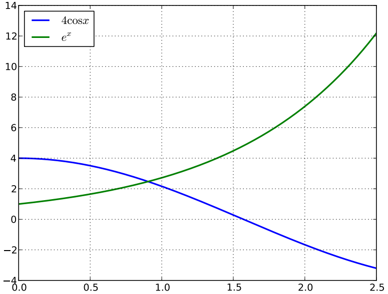
Método de Newton

Exemplo

Usando o método de Newton, determine a menor raiz positiva da equação $f(x) = 4\cos(x) - e^x = 0$ com erro inferior a $\epsilon = 10^{-2}$. Use o seguinte critério de parada $|x_{k+1} - x_k|/|x_{k+1}|$.

Solução do Exemplo

Vamos fazer um gráfico para analisar e escolher um valor inicial para aproximar a raiz. Seja $y_1 = 4\cos(x)$ e $y_2 = e^x$.



Método de Newton

Solução do Exemplo - (cont.)

Do gráfico, escolhemos $x_0 = 1$ como chute inicial. Assim

$$f(x) = 4\cos(x) - e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -4\sin(x) - e^x$$

Método de Newton

Solução do Exemplo - (cont.)

Do gráfico, escolhemos $x_0 = 1$ como chute inicial. Assim

$$f(x) = 4\cos(x) - e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -4\sin(x) - e^x$$

Portanto temos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4\cos(x_k) - e^{x_k}}{(-4\sin(x_k) - e^{x_k})}$$

Passo 1

$$x_1 = x_0 - \frac{4\cos(x_0) - e^{x_0}}{(-4\sin(x_0) - e^{x_0})} = 1 - \frac{4\cos(1) - e^1}{(-4\sin(1) - e^1)}$$

Método de Newton

Solução do Exemplo - (cont.)

Do gráfico, escolhemos $x_0 = 1$ como chute inicial. Assim

$$f(x) = 4\cos(x) - e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -4\sin(x) - e^x$$

Portanto temos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4\cos(x_k) - e^{x_k}}{(-4\sin(x_k) - e^{x_k})}$$

Passo 1

$$x_1 = x_0 - \frac{4\cos(x_0) - e^{x_0}}{(-4\sin(x_0) - e^{x_0})} = 1 - \frac{4\cos(1) - e^1}{(-4\sin(1) - e^1)}$$

$$= 1 - \frac{(-0.557)}{(-6.048)} = 0.908$$

Método de Newton

Solução do Exemplo - (cont.)

Do gráfico, escolhemos $x_0 = 1$ como chute inicial. Assim

$$f(x) = 4\cos(x) - e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -4\sin(x) - e^x$$

Portanto temos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4\cos(x_k) - e^{x_k}}{(-4\sin(x_k) - e^{x_k})}$$

Passo 1

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{4\cos(x_0) - e^{x_0}}{(-4\sin(x_0) - e^{x_0})} = 1 - \frac{4\cos(1) - e^1}{(-4\sin(1) - e^1)} \\
&= 1 - \frac{(-0.557)}{(-6.048)} = 0.908 \\
e_1 &= \frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = 0.101 > \epsilon
\end{aligned}$$

Método de Newton

Solução do Exemplo - (cont.)

Passo 2

$$x_2 = x_1 - \frac{4\cos(x_1) - e^{x_1}}{(-4\sin(x_1) - e^{x_1})} = 0.908 - \frac{4\cos(0.908) - e^{0.908}}{(-4\sin(0.908) - e^{0.908})}$$

$$= 0.908 - \frac{(-0.019)}{(-5.631)} = 0.905$$

Método de Newton

Solução do Exemplo - (cont.)

Passo 2

$$x_2 = x_1 - \frac{4\cos(x_1) - e^{x_1}}{(-4\sin(x_1) - e^{x_1})} = 0.908 - \frac{4\cos(0.908) - e^{0.908}}{(-4\sin(0.908) - e^{0.908})}$$

$$= 0.908 - \frac{(-0.019)}{(-5.631)} = 0.905$$

$$e_2 = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|0.905 - 0.908|}{|0.905|} = 0.0033 < \epsilon$$

Método de Newton

Solução do Exemplo - (cont.)

Passo 2

$$x_2 = x_1 - \frac{4\cos(x_1) - e^{x_1}}{(-4\sin(x_1) - e^{x_1})} = 0.908 - \frac{4\cos(0.908) - e^{0.908}}{(-4\sin(0.908) - e^{0.908})}$$

$$= 0.908 - \frac{(-0.019)}{(-5.631)} = 0.905$$

$$e_2 = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|0.905 - 0.908|}{|0.905|} = 0.0033 < \epsilon$$

Portanto obtemos $x_2 = 0.905$ como aproximação para α com uma precisão de 10^{-2}.

□

Método de Newton

Algoritmo

entrada: $f(x)$ e sua derivada $f'(x)$, aproximação inicial x_0,
precisão ϵ e número máximo de iterações $maxit$

para k *de* 1 *até* $maxit$ **faça**
    $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$;
    se $abs(x_1 - x_0) < \epsilon$ **então**
        retorne x_1;
    fim-se
    $x_0 = x_1$;
fim-para

Método de Newton

Exemplo

Resolva $f(x) = x - x^{1/3} - 2 = 0$ usando $x_0 = 3$ como aproximação inicial.

Exemplo

Resolva $f(x) = x - x^{1/3} - 2 = 0$ usando $x_0 = 3$ como aproximação inicial.

Solução do Exemplo

Temos que a derivada é

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

nesse caso a fórmula de iteração é

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}}$$

Método de Newton

Solução do Exemplo

Aplicando o método temos

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x_k)$
0	3.0	0.839750	-0.442250e+00
1	3.526644	0.856130	4.506792e-03
2	3.521380	0.855986	3.771414e-07
3	**3.52137971**	0.855986	0.00000e+00

E assim ao final das iterações obtemos $\alpha \approx x_3 = 3.52137971$ como valor aproximado para a raiz.

□

Convergência do método de Newton

Teorema (Ref: Ruggiero, página 69)

Sejam $f(x)$, $f'(x)$ *e* $f''(x)$ *contínuas em um intervalo* I *que contém a raiz* α *de* $f(x) = 0$. *Vamos supor que* $f'(\alpha) \neq 0$.

Então existe um intervalo $\bar{I} \subset I$, *contendo a raiz* α, *tal que se* $x_0 \in \bar{I}$, *a sequência* $\{x_k\}$ *gerada pelo método de Newton* $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ *irá convergir para a raiz.*

Convergência do método de Newton

Teorema (Ref: Ruggiero, página 69)

Sejam $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em um intervalo I que contém a raiz α de $f(x) = 0$. Vamos supor que $f'(\alpha) \neq 0$.

Então existe um intervalo $\bar{I} \subset I$, contendo a raiz α, tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ irá convergir para a raiz.

Prova

O método de Newton é um MPF com $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Para provar a convergência do método, basta verificar, que sob as hipóteses desse Teorema, as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo são satisfeitas para $\phi(x)$.

Precisamos provar que existe $\bar{I} \subset I$ centrado em α tal que

(i) $\phi(x)$ *e* $\phi'(x)$ *são contínuas em* $\bar{I}$

(ii) $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in \bar{I}$

Convergência do método de Newton

Prova (cont.)

Sabemos que

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Pelas hipóteses temos que

- $f'(\alpha) \neq 0$
- $f'(x)$ *é contínua*

Então, $f'(x) \neq 0, \forall x$ *na vizinhança de* α*.*

Convergência do método de Newton

Prova (cont.)

Sabemos que

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Pelas hipóteses temos que

- $f'(\alpha) \neq 0$
- $f'(x)$ *é contínua*

Então, $f'(x) \neq 0, \forall x$ *na vizinhança de* α*.*
Sendo assim é possível obter um intervalo $I_1 \subset I$ *tal que* $f'(x) \neq 0, \forall x \in I_1$*.*

Logo, em $I_1 \subset I$*, temos que* $f(x)$*,* $f'(x)$ *e* $f''(x)$ *são contínuas e* $f'(x) \neq 0$*. Portanto, concluímos que* $\phi(x)$ *e* $\phi'(x)$ *são contínuas em* I_1 *(pela continuidade da soma, produto e divisão). Item (i) OK!*

Convergência do método de Newton

Prova (cont.)

Como $\phi'(x)$ *é contínua em* I_1 *e* $|\phi'(\alpha)| = 0 < 1$ *(por construção do método de Newton), é possível escolher* $I_2 \subset I_1$ *tal que* $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$*. E ainda,* I_2 *pode ser escolhido de forma que* α *esteja centrado neste intervalo.*

Item (ii) OK!

Sendo assim, encontramos $I_2 \subset I$*, centrado em* α *onde* $\phi(x)$ *e* $\phi'(x)$ *são contínuas e* $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$*. Ou seja,* $I_2 = \bar{I}$*.*
$\square$

Convergência do método de Newton

Prova (cont.)

Como $\phi'(x)$ é contínua em I_1 e $|\phi'(\alpha)| = 0 < 1$ (por construção do método de Newton), é possível escolher $I_2 \subset I_1$ tal que $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$. E ainda, I_2 pode ser escolhido de forma que α esteja centrado neste intervalo.

Item (ii) OK!

Sendo assim, encontramos $I_2 \subset I$, centrado em α onde $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas e $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$. Ou seja, $I_2 = \bar{I}$.
$\square$

Em resumo: se f, f' e f'' forem contínuas e $f'(\alpha) \neq 0$, o método de Newton converge, desde que a aproximação inicial x_0 seja escolhida *"suficientemente próxima"* da raiz α.

Convergência do método de Newton

Prova (cont.)

Como $\phi'(x)$ *é contínua em* I_1 *e* $|\phi'(\alpha)| = 0 < 1$ *(por construção do método de Newton), é possível escolher* $I_2 \subset I_1$ *tal que* $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$*. E ainda,* I_2 *pode ser escolhido de forma que* α *esteja centrado neste intervalo.*

Item (ii) OK!

Sendo assim, encontramos $I_2 \subset I$*, centrado em* α *onde* $\phi(x)$ *e* $\phi'(x)$ *são contínuas e* $|\phi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$*. Ou seja,* $I_2 = \bar{I}$*.*
$\square$

Em resumo: se f, f' e f'' forem contínuas e $f'(\alpha) \neq 0$, o método de Newton converge, desde que a aproximação inicial x_0 seja escolhida *"suficientemente próxima"* da raiz α.

E se $f'(\alpha) = 0$? Problemas de convergência. Veremos mais detalhes adiante.

Ordem de convergência do método de Newton

Vamos supor que as hipóteses do Teorema estão todas satisfeitas, i.e.:

- f, f', f'' contínuas em um intervalo I com centro em α
- $f'(\alpha) \neq 0$

então subtraindo α de $x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ temos

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha)$$

Ordem de convergência do método de Newton

Vamos supor que as hipóteses do Teorema estão todas satisfeitas, i.e.:

- f, f', f'' contínuas em um intervalo I com centro em α
- $f'(\alpha) \neq 0$

então subtraindo α de $x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ temos

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha)$$

Expandindo $\phi(x_k)$ em série de Taylor em torno do ponto $a = \alpha$, resulta em

$$\phi(x_k) = \phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\phi'(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^2}{2}\phi''(\xi_k)$$

Ordem de convergência do método de Newton

Vamos supor que as hipóteses do Teorema estão todas satisfeitas, i.e.:

- f, f', f'' contínuas em um intervalo I com centro em α
- $f'(\alpha) \neq 0$

então subtraindo α de $x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ temos

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha)$$

Expandindo $\phi(x_k)$ em série de Taylor em torno do ponto $a = \alpha$, resulta em

$$\phi(x_k) = \phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\phi'(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^2}{2}\phi''(\xi_k)$$

assim

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\underbrace{\phi'(\alpha)}_{=0} + \frac{(x_k - \alpha)^2}{2}\phi''(\xi_k) - \phi(\alpha)$$

Ordem de convergência do método de Newton

Portanto

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} - \alpha &= \frac{(x_k - \alpha)^2}{2}\phi''(\xi_k) \\
\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} &= \frac{1}{2}\phi''(\xi_k)
\end{aligned}
$$

Ordem de convergência do método de Newton

Portanto

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{(x_k - \alpha)^2}{2}\phi''(\xi_k)$$
$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} = \frac{1}{2}\phi''(\xi_k)$$

e assim obtemos

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \left|\frac{1}{2}\phi''(\xi_k)\right| \leq c$$

Ordem de convergência do método de Newton

Portanto

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} - \alpha &= \frac{(x_k - \alpha)^2}{2}\phi''(\xi_k) \\
\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} &= \frac{1}{2}\phi''(\xi_k)
\end{aligned}
$$

e assim obtemos

$$
\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \left|\frac{1}{2}\phi''(\xi_k)\right| \leq c
$$

isto é

$$
|x_{k+1} - \alpha| \leq c|x_k - \alpha|^2
$$

Pela definição de ordem de convergência, concluimos que $p = 2$ e portanto temos que o método de Newton tem convergência quadrática.

Ordem de convergência do método de Newton

Observações

- A convergência do método de Newton é rápida
- O método requer o cálculo:
  - da derivada da função
  - da avaliação da função e da sua derivada a cada iteração
- Além disso, a função pode não ser diferenciável em alguns pontos.

Ordem de convergência do método de Newton

Na prática, o que significa essa ordem de convergência quadrática?

Vamos supor que o erro em uma iteração k do algoritmo seja da ordem de 10^{-2}. Pela expressão anterior

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq c|x_k - \alpha|^2$$

ou seja, o erro na próxima iteração $k + 1$ é aproximadamente 10^{-4} e assim temos

$$10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}, \ldots$$

Vejamos um exemplo prático.

Ordem de convergência do método de Newton

Exemplo

Como exemplo considere $f(x) = 4\sin(x) - e^x$ com $x_0 = 0.5$ e use $\epsilon = 10^{-10}$.

Ordem de convergência do método de Newton

Exemplo

Como exemplo considere $f(x) = 4\sin(x) - e^x$ com $x_0 = 0.5$ e use $\epsilon = 10^{-10}$.

Solução

O método de Newton com a precisão especificada produz os seguintes resultados:

k	x_k	e_k
0	3.555116e-01	1.444884e-01
1	3.704195e-01	1.490784e-02
2	3.705581e-01	1.386326e-04
3	3.705581e-01	1.220854e-08
4	3.705581e-01	1.110223e-16

Raiz aproximada $= 0.3705581$.

□

Problemas com o método de Newton

Em algumas situações o método de Newton pode falhar por conta de:

i) Aproximação inicial ruim.
Em algumas situações as condições sobre a função para a convergência do método são satisfeitas, porém a escolha da aproximação inicial está fora do intervalo para o qual o método converge.

Por exemplo, se um ponto x_0 é estacionário, i.e., $f'(x_0) = 0$. Seja $f(x) = 1 - 2x^2$, então $f'(x) = -4x$. Escolhendo $x_0 = 0$ temos que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{0}$$

Problemas com o método de Newton

i) Aproximação inicial ruim.
Outra situação que pode levar à falha do método de Newton é a escolha de um ponto inicial que faz o método entrar em loop. Exemplo com $x_0 = 0$:

$$f(x) = x^3 - 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 2$$

Problemas com o método de Newton

i) Aproximação inicial ruim.
Outra situação que pode levar à falha do método de Newton é a escolha de um ponto inicial que faz o método entrar em loop. Exemplo com $x_0 = 0$:

$$f(x) = x^3 - 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 2$$

Escolhendo $x_0 = 0$ o método entra em loop e gera uma sequência $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$.

Obs: nesses casos, um método diferente, como por exemplo o método da Bissecção pode ser usado para obter uma aproximação inicial mais precisa para então ser usada no método de Newton.

Problemas com o método de Newton

ii) Problemas com a derivada
- Derivada discontínua.
- Derivada não existe na raiz.

iii) Convergência não quadrática.
Em algumas situações o método pode convergir com uma ordem não quadrática. Um exemplo é quando temos raízes com multiplicidade $m > 1$, ou seja, quando a derivada é zero na raiz. Veremos como tratar isso adiante.

Método da Secante

Como discutido uma séria desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter $f'(x)$ e calcular o seu valor a cada passo. Existem algumas formas de modificar o método para contornar essa desvantagem.

Uma modificação consiste em substituir $f'(x)$ pelo quociente das diferenças

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \tag{4}$$

onde x_k e x_{k-1} são aproximações para α.

Dessa forma temos o seguinte esquema:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}} \\ &= x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \end{aligned}$$

Método da Secante

Tirando o mínimo e simplificando

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{5}$$
$$= \frac{x_k f(x_k) - x_k f(x_{k-1}) - f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

obtemos o seguinte processo iterativo

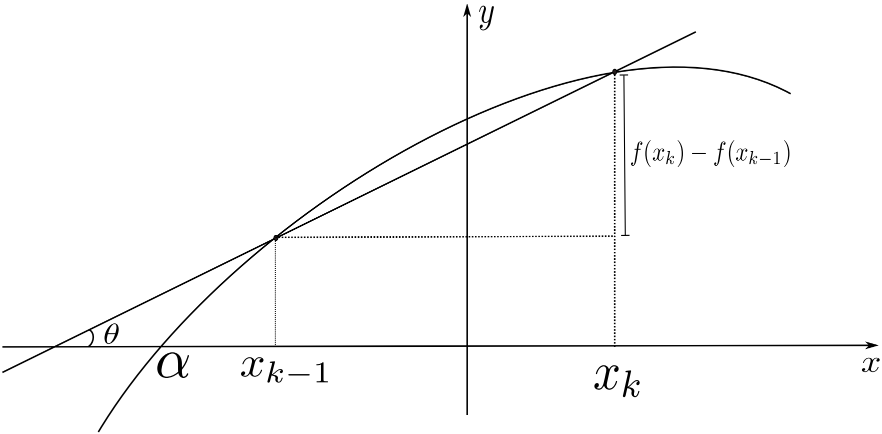
$$\boxed{x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_{k-1} - f(x_{k-1})x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})}} \quad k = 1, 2, \ldots$$

o qual é conhecido como método da secante.

Note que para obter x_{k+1} precisamos x_k e x_{k-1}, ou seja, duas aproximações iniciais devem estar disponíveis para a equação anterior ser usada.

Método da Secante

Interpretação Geométrica



Método da Secante

Interpretação Geométrica

Visto dessa forma o método consiste em tomar como aproximação a interseção da reta que passa pelos pontos $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ com o eixo x. Sendo assim, partindo de (5) temos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Método da Secante

Interpretação Geométrica

Visto dessa forma o método consiste em tomar como aproximação a interseção da reta que passa pelos pontos $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ com o eixo x. Sendo assim, partindo de (5) temos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_k)} = \frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Visto dessa forma o método consiste em tomar como aproximação a interseção da reta que passa pelos pontos $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ com o eixo x. Sendo assim, partindo de (5) temos

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad &\Rightarrow \quad \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_k)} = \frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\
&\Rightarrow \quad \frac{f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})}
\end{aligned}
$$

Método da Secante

Interpretação Geométrica

Visto dessa forma o método consiste em tomar como aproximação a interseção da reta que passa pelos pontos $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ com o eixo x. Sendo assim, partindo de (5) temos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_k)} = \frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})}$$

$$\Rightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})}$$

Método da Secante

Interpretação Geométrica

Visto dessa forma o método consiste em tomar como aproximação a interseção da reta que passa pelos pontos $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ com o eixo x. Sendo assim, partindo de (5) temos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_k)} = \frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})}$$

$$\Rightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})}$$

Observação: note que a fórmula desse método é muito parecida com a do método da Falsa Posição, a diferença é que o método da Falsa Posição cerca a raiz α pelo intervalo $[a, b]$ e o método da Secante usa 2 aproximações sucessivas.

Método da Secante

Exemplo

Encontre a raiz de $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$, usando o método da Secante com $x_0 = 1.4$ e $x_1 = 1.5$ com uma precisão $\epsilon = 10^{-3}$.

Método da Secante

Exemplo

Encontre a raiz de $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$, usando o método da Secante com $x_0 = 1.4$ e $x_1 = 1.5$ com uma precisão $\epsilon = 10^{-3}$.

Solução do Exemplo

Avaliando a função em x_0 e x_1 temos

$$f(x_0) = f(1.4) = \sqrt{1.4} - 5e^{-1.4} = 1.183 - 5(0.247) = -0.052$$
$$f(x_1) = f(1.5) = \sqrt{1.5} - 5e^{-1.5} = 1.225 - 5(0.223) = 0.110$$

Método da Secante

Exemplo

Encontre a raiz de $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$, usando o método da Secante com $x_0 = 1.4$ e $x_1 = 1.5$ com uma precisão $\epsilon = 10^{-3}$.

Solução do Exemplo

Avaliando a função em x_0 e x_1 temos

$$f(x_0) = f(1.4) = \sqrt{1.4} - 5e^{-1.4} = 1.183 - 5(0.247) = -0.052$$
$$f(x_1) = f(1.5) = \sqrt{1.5} - 5e^{-1.5} = 1.225 - 5(0.223) = 0.110$$

pelo método da secante temos

$$x_2 = \frac{1.4f(1.5) - 1.5f(1.4)}{f(1.5) - f(1.4)} = \frac{1.4(0.110) - 1.5(-0.052)}{0.110 + 0.052} = 1.432$$

Método da Secante

Exemplo

Encontre a raiz de $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$, usando o método da Secante com $x_0 = 1.4$ e $x_1 = 1.5$ com uma precisão $\epsilon = 10^{-3}$.

Solução do Exemplo

Avaliando a função em x_0 e x_1 temos

$$f(x_0) = f(1.4) = \sqrt{1.4} - 5e^{-1.4} = 1.183 - 5(0.247) = -0.052$$
$$f(x_1) = f(1.5) = \sqrt{1.5} - 5e^{-1.5} = 1.225 - 5(0.223) = 0.110$$

pelo método da secante temos

$$x_2 = \frac{1.4f(1.5) - 1.5f(1.4)}{f(1.5) - f(1.4)} = \frac{1.4(0.110) - 1.5(-0.052)}{0.110 + 0.052} = 1.432$$
$$e_2 = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0.047 > \epsilon \quad \Rightarrow \text{ mais iterações!}$$

Método da Secante

Solução do Exemplo

Avaliando a função em x_2

$$f(x_2) = f(1.432) = \sqrt{1.432} - 5e^{-1.432} = 1.197 - 5(0.239) = 0.002$$

Método da Secante

Solução do Exemplo

Avaliando a função em x_2

$$f(x_2) = f(1.432) = \sqrt{1.432} - 5e^{-1.432} = 1.197 - 5(0.239) = 0.002$$

assim

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1.5f(1.432) - 1.432f(1.5)}{f(1.432) - f(1.5)} \\ &= \frac{1.5(0.002) - 1.432(0.110)}{0.002 - 0.110} = 1.431 \end{aligned}$$

Método da Secante

Solução do Exemplo

Avaliando a função em x_2

$$f(x_2) = f(1.432) = \sqrt{1.432} - 5e^{-1.432} = 1.197 - 5(0.239) = 0.002$$

assim

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1.5f(1.432) - 1.432f(1.5)}{f(1.432) - f(1.5)} \\ &= \frac{1.5(0.002) - 1.432(0.110)}{0.002 - 0.110} = 1.431 \\ e_3 &= \frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.0007 < \epsilon \end{aligned}$$

Método da Secante

Solução do Exemplo

Avaliando a função em x_2

$$f(x_2) = f(1.432) = \sqrt{1.432} - 5e^{-1.432} = 1.197 - 5(0.239) = 0.002$$

assim

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1.5f(1.432) - 1.432f(1.5)}{f(1.432) - f(1.5)} \\ &= \frac{1.5(0.002) - 1.432(0.110)}{0.002 - 0.110} = 1.431 \\ e_3 &= \frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.0007 < \epsilon \end{aligned}$$

Portanto, a raiz aproximada é $x_3 = 1.431$.
□

Método da Secante

Algoritmo

entrada: função $f(x)$, aproximações iniciais x0 e x1, precisão ϵ e número máximo de iterações $maxit$

para k *de* 1 *até* $maxit$ **faça**

- $f_0 = f(x_0)$;
- $f_1 = f(x_1)$;
- $x_2 = x_1 - \frac{f_1\ (x_1 - x_0)}{f_1 - f_0}$;
- **se** *abs(*$x_2 - x_1$*)* $< \epsilon$ **então**
  - retorne x_2;
- **fim-se**
- $x_0 = x_1$;
- $x_1 = x_2$;

fim-para

Ordem de convergência do método da Secante

Seja

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \frac{x_{k-1} - x_{x-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

Ordem de convergência do método da Secante

Seja

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})\frac{x_{k-1} - x_{x-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

então definindo $e_k = x_k - \alpha \Rightarrow x_k = \alpha + e_k$ e assim substituindo temos

$$(\alpha + e_k) = (\alpha + e_{k-1}) - f(x_{k-1})\frac{e_{k-1} - e_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

Ordem de convergência do método da Secante

Seja

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})\frac{x_{k-1} - x_{x-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

então definindo $e_k = x_k - \alpha \Rightarrow x_k = \alpha + e_k$ e assim substituindo temos

$$(\alpha + e_k) = (\alpha + e_{k-1}) - f(x_{k-1})\frac{e_{k-1} - e_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

$$e_k = e_{k-1} - f(x_{k-1})\frac{e_{k-1} - e_{x-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

Ordem de convergência do método da Secante

Seja

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})\frac{x_{k-1} - x_{x-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

então definindo $e_k = x_k - \alpha \Rightarrow x_k = \alpha + e_k$ e assim substituindo temos

$$\begin{aligned}
(\alpha + e_k) &= (\alpha + e_{k-1}) - f(x_{k-1})\frac{e_{k-1} - e_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})} \\
e_k &= e_{k-1} - f(x_{k-1})\frac{e_{k-1} - e_{x-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})} \\
&= \frac{f(x_{k-1})e_{k-2} - f(x_{k-2})e_{x-1}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}
\end{aligned}$$

Ordem de convergência do método da Secante

Seja

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})\frac{x_{k-1} - x_{x-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

então definindo $e_k = x_k - \alpha \Rightarrow x_k = \alpha + e_k$ e assim substituindo temos

$$(\alpha + e_k) = (\alpha + e_{k-1}) - f(x_{k-1})\frac{e_{k-1} - e_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

$$e_k = e_{k-1} - f(x_{k-1})\frac{e_{k-1} - e_{x-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

$$= \frac{f(x_{k-1})e_{k-2} - f(x_{k-2})e_{x-1}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$$

Pelo Teorema do Valor Médio temos que existe c_{k-1} entre x_{k-1} e α tal que

$$(x_{k-1} - \alpha)f'(c_{k-1}) = f(x_{k-1}) - f(\alpha)$$

Ordem de convergência do método da Secante

Sendo assim

$$f'(c_{k-1}) = \frac{f(x_{k-1})}{(x_{k-1} - \alpha)} = \frac{f(x_{k-1})}{e_{k-1}}$$

Ordem de convergência do método da Secante

Sendo assim

$$f'(c_{k-1}) = \frac{f(x_{k-1})}{(x_{k-1} - \alpha)} = \frac{f(x_{k-1})}{e_{k-1}}$$

de onde obtemos

$$f(x_{k-1}) = f'(c_{k-1})e_{k-1}$$
$$f(x_{k-2}) = f'(c_{k-2})e_{k-2}$$

Ordem de convergência do método da Secante

Sendo assim

$$f'(c_{k-1}) = \frac{f(x_{k-1})}{(x_{k-1} - \alpha)} = \frac{f(x_{k-1})}{e_{k-1}}$$

de onde obtemos

$$f(x_{k-1}) = f'(c_{k-1})e_{k-1}$$
$$f(x_{k-2}) = f'(c_{k-2})e_{k-2}$$

logo

$$\begin{aligned} e_k &= \frac{f'(c_{k-1})e_{k-1}e_{k-2} - f'(c_{k-2})e_{k-1}e_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})} \\ &= \frac{f'(c_{k-1}) - f'(c_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})} e_{k-1}e_{k-2} \end{aligned}$$

Vamos supor que existe $M > 0$ tal que

$$\max \left| \frac{f'(c_{k-1}) - f'(c_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})} \right| < M$$

Ordem de convergência do método da Secante

Então

$$|e_k| = M|e_{k-1}||e_{k-2}|$$

Ordem de convergência do método da Secante

Então

$$|e_k| = M|e_{k-1}||e_{k-2}|$$

Suponha que para k muito grande exista algum C_k tal que

$$|e_k| = C_k|e_{k-1}|^p$$

onde p é a ordem de convergência do método.

Ordem de convergência do método da Secante

Então

$$|e_k| = M|e_{k-1}||e_{k-2}|$$

Suponha que para k muito grande exista algum C_k tal que

$$|e_k| = C_k|e_{k-1}|^p$$

onde p é a ordem de convergência do método.
De forma análoga temos que

$$|e_{k-1}| = C_{k-1}|e_{k-2}|^p \quad \Rightarrow \quad |e_{k-2}| = \frac{(|e_{k-1}|)^{(1/p)}}{(C_{k-1})^{(1/p)}}$$

Ordem de convergência do método da Secante

Então

$$|e_k| = M|e_{k-1}||e_{k-2}|$$

Suponha que para k muito grande exista algum C_k tal que

$$|e_k| = C_k|e_{k-1}|^p$$

onde p é a ordem de convergência do método.
De forma análoga temos que

$$|e_{k-1}| = C_{k-1}|e_{k-2}|^p \quad \Rightarrow \quad |e_{k-2}| = \frac{(|e_{k-1}|)^{(1/p)}}{(C_{k-1})^{(1/p)}}$$

Assim

$$|e_k| = C_k|e_{k-1}|^p$$

$$|e_k| = M|e_{k-1}||e_{k-2}| = M|e_{k-1}|\frac{(|e_{k-1}|)^{(1/p)}}{(C_{k-1})^{(1/p)}}$$

Ordem de convergência do método da Secante

Então

$$|e_k| = M|e_{k-1}||e_{k-2}|$$

Suponha que para k muito grande exista algum C_k tal que

$$|e_k| = C_k|e_{k-1}|^p$$

onde p é a ordem de convergência do método.
De forma análoga temos que

$$|e_{k-1}| = C_{k-1}|e_{k-2}|^p \quad \Rightarrow \quad |e_{k-2}| = \frac{(|e_{k-1}|)^{(1/p)}}{(C_{k-1})^{(1/p)}}$$

Assim

$$|e_k| = C_k|e_{k-1}|^p$$

$$|e_k| = M|e_{k-1}||e_{k-2}| = M|e_{k-1}|\frac{(|e_{k-1}|)^{(1/p)}}{(C_{k-1})^{(1/p)}}$$

Pela igualdade temos

$$\Rightarrow \left[\frac{C_k}{M}(C_{k-1})^{(1/p)}\right]|e_{k-1}|^p = |e_{k-1}|^{1+1/p}$$

Ordem de convergência do método da Secante

Assim temos que p deve satisfazer

$$p = 1 + \tfrac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad p^2 - p - 1 = 0$$

Ordem de convergência do método da Secante

Assim temos que p deve satisfazer

$$p = 1 + \tfrac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad p^2 - p - 1 = 0$$

de onde encontramos que

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Ordem de convergência do método da Secante

Assim temos que p deve satisfazer

$$p = 1 + \tfrac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad p^2 - p - 1 = 0$$

de onde encontramos que

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Assim concluimos que a ordem de convergência do método da secante é $p \approx 1.618$.

Ordem de convergência do método da Secante

Assim temos que p deve satisfazer

$$p = 1 + \tfrac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad p^2 - p - 1 = 0$$

de onde encontramos que

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Assim concluimos que a ordem de convergência do método da secante é $p \approx 1.618$.

Observe que:

(-) ordem de convergência menor do que a do método de Newton

(+) este método não requer o conhecimento de $f'(x)$

Método da Secante

Exemplo

Resolva o exemplo anterior $f(x) = 4\sin(x) - e^x = 0$ usando

- Método de Newton com $x_0 = 0.5$
- Método da secante com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$
- Precisão de $\epsilon = 10^{-10}$ para ambos.

Solução

Método da Secante

k	x_k	e_k
0	6.06942655306e-01	3.93057344694e-01
1	-2.66518467137e-01	8.73461122443e-01
2	4.34798223441e-01	7.01316690578e-01
3	3.84606581747e-01	5.01916416945e-02
4	3.69925253915e-01	1.46813278320e-02
5	3.70563838916e-01	6.38585001888e-04
6	3.70558098277e-01	5.74063939790e-06
7	3.70558095970e-01	2.30728297579e-09
8	3.70558095970e-01	8.38218383592e-15

Método da Secante

Exemplo

Resolva o exemplo anterior $f(x) = 4\sin(x) - e^x = 0$ usando

- Método de Newton com $x_0 = 0.5$
- Método da secante com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$
- Precisão de $\epsilon = 10^{-10}$ para ambos.

Solução

Método da Secante

k	x_k	e_k
0	6.06942655306e-01	3.93057344694e-01
1	-2.66518467137e-01	8.73461122443e-01
2	4.34798223441e-01	7.01316690578e-01
3	3.84606581747e-01	5.01916416945e-02
4	3.69925253915e-01	1.46813278320e-02
5	3.70563838916e-01	6.38585001888e-04
6	3.70558098277e-01	5.74063939790e-06
7	3.70558095970e-01	2.30728297579e-09
8	3.70558095970e-01	8.38218383592e-15

Método da Secante

Exemplo

Resolva o exemplo anterior $f(x) = 4\sin(x) - e^x = 0$ usando

- Método de Newton com $x_0 = 0.5$
- Método da secante com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$
- Precisão de $\epsilon = 10^{-10}$ para ambos.

Solução

Método da Secante

k	x_k	e_k
0	6.06942655306e-01	3.93057344694e-01
1	-2.66518467137e-01	8.73461122443e-01
2	4.34798223441e-01	7.01316690578e-01
3	3.84606581747e-01	5.01916416945e-02
4	3.69925253915e-01	1.46813278320e-02
5	3.70563838916e-01	6.38585001888e-04
6	3.70558098277e-01	5.74063939790e-06
7	3.70558095970e-01	2.30728297579e-09
8	3.70558095970e-01	8.38218383592e-15

Método de Newton

k	x_k	e_k
0	3.555116e-01	1.444884e-01
1	3.704195e-01	1.490784e-02
2	3.705581e-01	1.386326e-04
3	3.705581e-01	1.220854e-08
4	3.705581e-01	1.110223e-16

Conteúdo

- Aula passada
  - Método de Newton
  - Método da Secante
- Aula de hoje
  - Método de Newton (Raízes Múltiplas)
  - Exemplos de aplicações
  - Códigos e comparações entre os métodos

Método de Newton

Falamos anteriormente que o método de Newton converge de forma não quadrática em algumas situações. Em particular, quando uma raiz tem multiplicidade $m > 1$, o método de Newton apresenta uma convergência linear e não quadrática.

Lembrando que, uma raiz α tem multiplicidade $m > 0$ quando

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)} = 0$$

e

$$f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Método de Newton

Falamos anteriormente que o método de Newton converge de forma não quadrática em algumas situações. Em particular, quando uma raiz tem multiplicidade $m > 1$, o método de Newton apresenta uma convergência linear e não quadrática.

Lembrando que, uma raiz α tem multiplicidade $m > 0$ quando

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)} = 0$$

e

$$f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Exemplo:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 \quad \rightarrow \quad f(1) = 0$$

Método de Newton

Falamos anteriormente que o método de Newton converge de forma não quadrática em algumas situações. Em particular, quando uma raiz tem multiplicidade $m > 1$, o método de Newton apresenta uma convergência linear e não quadrática.

Lembrando que, uma raiz α tem multiplicidade $m > 0$ quando

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)} = 0$$

e

$$f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 & \rightarrow \quad & f(1) = 0 \\ f'(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14 & \rightarrow \quad & f'(1) = 0 \end{aligned}$$

Método de Newton

Falamos anteriormente que o método de Newton converge de forma não quadrática em algumas situações. Em particular, quando uma raiz tem multiplicidade $m > 1$, o método de Newton apresenta uma convergência linear e não quadrática.

Lembrando que, uma raiz α tem multiplicidade $m > 0$ quando

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)} = 0$$

e

$$f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 &\rightarrow\quad& f(1) = 0\\
f'(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14 &\rightarrow\quad& f'(1) = 0\\
f''(x) &= 12x^2 + 12x - 24 &\rightarrow\quad& f''(1) = 0
\end{aligned}$$

Método de Newton

Falamos anteriormente que o método de Newton converge de forma não quadrática em algumas situações. Em particular, quando uma raiz tem multiplicidade $m > 1$, o método de Newton apresenta uma convergência linear e não quadrática.

Lembrando que, uma raiz α tem multiplicidade $m > 0$ quando

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)} = 0$$

e

$$f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 & \rightarrow \quad & f(1) = 0 \\
f'(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14 & \rightarrow \quad & f'(1) = 0 \\
f''(x) &= 12x^2 + 12x - 24 & \rightarrow \quad & f''(1) = 0 \\
f'''(x) &= 24x + 12 & \rightarrow \quad & f'''(1) = 36
\end{aligned}$$

Método de Newton

Para ver porque isto acontece, vamos expandir $f(x)$ em série de Taylor em torno de α, isto é

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha) f'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^3}{3!} f'''(\alpha) + \ldots$$

Método de Newton

Para ver porque isto acontece, vamos expandir $f(x)$ em série de Taylor em torno de α, isto é

$$f(x) = f(\alpha)+(x-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^3}{3!}f'''(\alpha)+\dots$$

considerando que a raiz tem multiplicidade m, temos

$$f(x) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + (x-\alpha)\underbrace{f'(\alpha)}_{=0} + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}\underbrace{f''(\alpha)}_{=0}$$
$$+ \dots + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!}\underbrace{f^{(m-1)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x-\alpha)^m}{m!}f^{(m)}(t), \quad t \in [x, \alpha]$$

Método de Newton

Para ver porque isto acontece, vamos expandir $f(x)$ em série de Taylor em torno de α, isto é

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha) f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{3!} f'''(\alpha) + \ldots$$

considerando que a raiz tem multiplicidade m, temos

$$f(x) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + (x-\alpha) \underbrace{f'(\alpha)}_{=0} + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} \underbrace{f''(\alpha)}_{=0}$$
$$+ \ldots + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!} \underbrace{f^{(m-1)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x-\alpha)^m}{m!} f^{(m)}(t), \quad t \in [x, \alpha]$$

portanto podemos escrever

$$f(x) = \frac{(x-\alpha)^m}{m!} f^{(m)}(t) \tag{6}$$

Método de Newton

Lembrando que

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Método de Newton

Lembrando que

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Vamos escrever

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x), \quad \text{onde} \quad h(x) = \frac{f^{(m)}(t)}{m!}$$

Método de Newton

Lembrando que

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Vamos escrever

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x), \quad \text{onde} \quad h(x) = \frac{f^{(m)}(t)}{m!}$$

$$f'(x) = m(x-\alpha)^{(m-1)} h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)$$

Método de Newton

Lembrando que

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Vamos escrever

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x), \quad \text{onde} \quad h(x) = \frac{f^{(m)}(t)}{m!}$$
$$f'(x) = m(x-\alpha)^{(m-1)} h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)$$

e assim

$$\phi(x) = x - \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1} h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)}$$
$$= x - \frac{(x-\alpha) h(x)}{m\ h(x) + (x-\alpha)\ h'(x)}$$

Método de Newton

$$\phi(x) = x - \frac{(x-\alpha)h(x)}{m\ h(x) + (x-\alpha)\ h'(x)}$$

Método de Newton

$$\phi(x) = x - \frac{(x-\alpha)h(x)}{m\ h(x) + (x-\alpha)\ h'(x)}$$

Derivando temos (simplificando $h(x) = h$)

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[h+(x-\alpha)h][mh+(x-\alpha)h'] - [(x-\alpha)h][mh'+h'+h''(x-\alpha)]}{[mh+(x-\alpha)h']^2}$$

Método de Newton

$$\phi(x) = x - \frac{(x-\alpha)h(x)}{m\ h(x) + (x-\alpha)\ h'(x)}$$

Derivando temos (simplificando $h(x) = h$)

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[h+(x-\alpha)h][mh+(x-\alpha)h'] - [(x-\alpha)h][mh'+h'+h''(x-\alpha)]}{[mh+(x-\alpha)h']^2}$$

Avaliando em $x = \alpha$ temos

$$\phi'(\alpha) = 1 - \frac{[h+(\alpha-\alpha)h][mh+(\alpha-\alpha)h'] - [(\alpha-\alpha)h][mh'+h'+h''(\alpha-\alpha)]}{[mh+(\alpha-\alpha)h']^2}$$

Método de Newton

$$\phi(x) = x - \frac{(x-\alpha)h(x)}{m\ h(x) + (x-\alpha)\ h'(x)}$$

Derivando temos (simplificando $h(x) = h$)

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[h+(x-\alpha)h][mh+(x-\alpha)h'] - [(x-\alpha)h][mh'+h'+h''(x-\alpha)]}{[mh+(x-\alpha)h']^2}$$

Avaliando em $x = \alpha$ temos

$$\phi'(\alpha) = 1 - \frac{[h+(\alpha-\alpha)h][mh+(\alpha-\alpha)h'] - [(\alpha-\alpha)h][mh'+h'+h''(\alpha-\alpha)]}{[mh+(\alpha-\alpha)h']^2}$$

ou seja

$$\phi'(\alpha) = 1 - \frac{mh(x)^2}{m^2h(x)^2} = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$$

Método de Newton

Portanto, como $m > 1$ temos que $\frac{m-1}{m} \neq 0$ e portanto temos que $\phi'(\alpha) \neq 0$, e o método de Newton nesse caso possui **não apresenta** mais convergência quadrática.

Método de Newton

Portanto, como $m > 1$ temos que $\frac{m-1}{m} \neq 0$ e portanto temos que $\phi'(\alpha) \neq 0$, e o método de Newton nesse caso possui **não apresenta** mais convergência quadrática.

Para ilustrar o problema iremos apresentar o desempenho do método de Newton para o seguinte problema:

$$f(x) = (x-5)^3 e^x$$

cuja multiplicidade da raiz $\alpha = 5$ é $m = 3$.

Método de Newton

Portanto, como $m > 1$ temos que $\frac{m-1}{m} \neq 0$ e portanto temos que $\phi'(\alpha) \neq 0$, e o método de Newton nesse caso possui **não apresenta** mais convergência quadrática.

Para ilustrar o problema iremos apresentar o desempenho do método de Newton para o seguinte problema:

$$f(x) = (x-5)^3 e^x$$

cuja multiplicidade da raiz $\alpha = 5$ é $m = 3$. Note que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x-5)^2 e^x + (x-5)^3 e^x \\ f''(x) &= 6(x-5)e^x + 3(2x-10)^2 e^x + (x-5)^3 e^x \end{aligned}$$

Portanto $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$. Vamos usar como aproximação inicial $x_0 = 4.0$ e uma precisão de $\epsilon = 10^{-8}$.

Convergência lenta do método de Newton

```
metodo de newton
 k        xk              f(xk)       |xk - xk-1|
 0   4.500000e+00  -1.125214e+01
 1   4.700000e+00  -2.968574e+00  2.000000e-01
 2   4.811111e+00  -8.280532e-01  1.111111e-01
 3   4.878305e+00  -2.368325e-01  6.719368e-02
 4   4.920585e+00  -6.865801e-02  4.228017e-02
 5   4.947776e+00  -2.006279e-02  2.719149e-02
 6   4.965493e+00  -5.891409e-03  1.771625e-02
 7   4.977129e+00  -1.735387e-03  1.163628e-02
 8   4.984811e+00  -5.122062e-04  7.682241e-03
 9   4.989900e+00  -1.513777e-04  5.088691e-03
 10   4.993278e+00  -4.477676e-05  3.378070e-03
 11   4.995524e+00  -1.325227e-05  2.245706e-03
 12   4.997018e+00  -3.923664e-06  1.494335e-03
 13   4.998013e+00  -1.161988e-06  9.949826e-04
 14   4.998676e+00  -3.441787e-07  6.627717e-04
 ...
 39   5.000000e+00  -2.136250e-20  2.620374e-08
 40   5.000000e+00  -6.329628e-21  1.746916e-08
 41   5.000000e+00  -1.875445e-21  1.164610e-08
 42   5.000000e+00  -5.556876e-22  7.764069e-09

 raiz                  = 5.000000e+00
```

Método de Schröder

Uma simples modificação do método de Newton, proposta por Schröder permite calcular uma raiz de multiplicidade m, mantendo a convergência quadrática.

Método de Schröder

Uma simples modificação do método de Newton, proposta por Schröder permite calcular uma raiz de multiplicidade m, mantendo a convergência quadrática. Basta usar o seguinte processo iterativo

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Método de Schröder

Uma simples modificação do método de Newton, proposta por Schröder permite calcular uma raiz de multiplicidade m, mantendo a convergência quadrática. Basta usar o seguinte processo iterativo

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Veremos agora como deduzir este método.

Da expansão em série de Taylor de $f(x)$ quando a função tem uma raiz de multiplicidade m, da equação (6) temos que

$$f(x) = \frac{(x-\alpha)^m}{m!} f^{(m)}(t)$$

Método de Schröder

Uma simples modificação do método de Newton, proposta por Schröder permite calcular uma raiz de multiplicidade m, mantendo a convergência quadrática. Basta usar o seguinte processo iterativo

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Veremos agora como deduzir este método.

Da expansão em série de Taylor de $f(x)$ quando a função tem uma raiz de multiplicidade m, da equação (6) temos que

$$f(x) = \frac{(x-\alpha)^m}{m!} f^{(m)}(t)$$

Vamos aproximar $f^{(m)}(x)$ por uma constante b, assim

$$f(x) \approx \frac{(x-\alpha)^m}{m!} b, \quad f'(x) \approx m\frac{(x-\alpha)^{m-1}}{m!} b$$

Método de Schröder

Consequentemente o método de Newton será modificado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{f'(x)} &= \frac{\frac{(x-\alpha)^m}{m!}b}{m\frac{(x-\alpha)^{m-1}}{m!}b} \\
&= \frac{b(x-\alpha)^m}{m!}\frac{m!}{b\ m(x-\alpha)^{m-1}} \\
&= \frac{(x-\alpha)}{m}
\end{aligned}$$

Método de Schröder

Consequentemente o método de Newton será modificado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{f'(x)} &= \frac{\frac{(x-\alpha)^m}{m!}b}{m\frac{(x-\alpha)^{m-1}}{m!}b} \\
&= \frac{b(x-\alpha)^m}{m!}\frac{m!}{b\ m(x-\alpha)^{m-1}} \\
&= \frac{(x-\alpha)}{m}
\end{aligned}$$

portanto

$$\alpha = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Método de Schröder

Consequentemente o método de Newton será modificado da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{f'(x)} &= \frac{\frac{(x-\alpha)^m}{m!} b}{m \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{m!} b} \\
&= \frac{b(x-\alpha)^m}{m!} \frac{m!}{b\ m(x-\alpha)^{m-1}} \\
&= \frac{(x-\alpha)}{m}
\end{aligned}
$$

portanto

$$
\alpha = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}
$$

o que sugere o seguinte método iterativo, conhecido como método de Schröder

$$
x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}
$$

Método para raízes múltiplas

Obs: uma desvantagem desse método é que precisamos conhecer a multiplicidade m da raiz que procuramos antes de usa-lo.

Uma outra alternativa para raízes múltiplas é o seguinte método: considere a função

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

onde $f(x) = (x - \alpha)^m h(x)$, onde $h(\alpha) \neq 0$.

Método para raízes múltiplas

Obs: uma desvantagem desse método é que precisamos conhecer a multiplicidade m da raiz que procuramos antes de usa-lo.

Uma outra alternativa para raízes múltiplas é o seguinte método: considere a função

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

onde $f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$, onde $h(\alpha) \neq 0$. Logo

$$u(x) = \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1} h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)}$$

Método para raízes múltiplas

Obs: uma desvantagem desse método é que precisamos conhecer a multiplicidade m da raiz que procuramos antes de usa-lo.

Uma outra alternativa para raízes múltiplas é o seguinte método: considere a função

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

onde $f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$, onde $h(\alpha) \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)} \\ &= \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{(x-\alpha)^{m-1}[mh(x) + (x-\alpha)h'(x)]} \end{aligned}$$

Método para raízes múltiplas

Obs: uma desvantagem desse método é que precisamos conhecer a multiplicidade m da raiz que procuramos antes de usa-lo.

Uma outra alternativa para raízes múltiplas é o seguinte método: considere a função

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

onde $f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$, onde $h(\alpha) \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)} \\ &= \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{(x-\alpha)^{m-1}[mh(x) + (x-\alpha)h'(x)]} \\ &= \frac{(x-\alpha)h(x)}{mh(x) + (x-\alpha)h'(x)} \end{aligned}$$

Método para raízes múltiplas

Obs: uma desvantagem desse método é que precisamos conhecer a multiplicidade m da raiz que procuramos antes de usa-lo.

Uma outra alternativa para raízes múltiplas é o seguinte método: considere a função

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

onde $f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$, onde $h(\alpha) \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)} \\ &= \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{(x-\alpha)^{m-1}[mh(x) + (x-\alpha)h'(x)]} \\ &= \frac{(x-\alpha)h(x)}{mh(x) + (x-\alpha)h'(x)} \end{aligned}$$

Assim concluimos que $u(x)$ tem uma raiz em $x = \alpha$ com multiplicidade 1. Logo, podemos usar o método de Newton para encontrar a raiz de $u(x)$ que teremos convergência quadrática.

Método para raízes múltiplas

Calculando a derivada de $u(x)$

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Método para raízes múltiplas

Calculando a derivada de $u(x)$

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Usando o método de Newton para $u(x)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \frac{[f'(x_k)]^2}{f'(x_k)f'(x_k) - f(x_k)f''(x_k)}$$

Método para raízes múltiplas

Calculando a derivada de $u(x)$

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Usando o método de Newton para $u(x)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \frac{[f'(x_k)]^2}{f'(x_k)f'(x_k) - f(x_k)f''(x_k)}$$

que resulta no seguinte método

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)}}$$

Método para raízes múltiplas

Calculando a derivada de $u(x)$

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Usando o método de Newton para $u(x)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \frac{[f'(x_k)]^2}{f'(x_k)f'(x_k) - f(x_k)f''(x_k)}$$

que resulta no seguinte método

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)}}$$

Obs: nesse método além de $f'(x)$ precisamos também de $f''(x)$, mas por outro lado não é preciso conhecer a multiplicade m da raiz procurada.

Método para raízes múltiplas

Por fim, uma outra alternativa é reformular o problema de encontrar as raízes de forma que o novo problema tenha apenas uma raiz.

Método para raízes múltiplas

Por fim, uma outra alternativa é reformular o problema de encontrar as raízes de forma que o novo problema tenha apenas uma raiz.

A forma mais fácil de fazer isso é calcular a $(m-1)$-ésima derivada de $f(x)$ e então resolver o problema [Atkinson, p.90]

$$f^{(m-1)}(x) = 0$$

Método para raízes múltiplas

Por fim, uma outra alternativa é reformular o problema de encontrar as raízes de forma que o novo problema tenha apenas uma raiz.

A forma mais fácil de fazer isso é calcular a $(m-1)$-ésima derivada de $f(x)$ e então resolver o problema [Atkinson, p.90]

$$f^{(m-1)}(x) = 0$$

Exemplo

$$f(x) = -4.68999 + 9.1389x - 5.56x^2 + x^3$$

A raiz é $\alpha = 1.23$ com multiplicidade $m = 2$. Derivando uma vez

$$f'(x) = 9.1389 - 11.12x + 3x^2$$

Podemos então aplicar o método de Newton para $f'(x) = 0$ para encontrar a raiz. □

Aceleração de Aitken

Vimos que a ordem de convergência do método do ponto fixo é linear, e que esta será tão rápida quanto menor for o valor de $\phi'(\alpha)$.

Podemos acelerar a convergência do MPF através de um método conhecido como aceleração de Aitken. A idéia básica do método é a partir de uma sequência $\{x_k\}$ que converge de forma linear, calcular uma sequência $\{\hat{x}_k\}$, a qual converge mais rápido para α.

Aceleração de Aitken

Vimos que a ordem de convergência do método do ponto fixo é linear, e que esta será tão rápida quanto menor for o valor de $\phi'(\alpha)$.

Podemos acelerar a convergência do MPF através de um método conhecido como aceleração de Aitken. A idéia básica do método é a partir de uma sequência $\{x_k\}$ que converge de forma linear, calcular uma sequência $\{\hat{x}_k\}$, a qual converge mais rápido para α.

Do Teorema do Ponto Fixo e do estudo da convergência do método, temos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha - x_k}{\alpha - x_{k-1}} = \phi'(\alpha)$$

para $x_k = \phi(x_{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots$. Portanto podemos escrever

$$\alpha - x_k \approx \lambda(\alpha - x_{k-1})$$

onde $\lambda = \phi'(\alpha),\ |\lambda| < 1$.

Aceleração de Aitken

Vamos reescrever $\alpha - x_k \approx \lambda(\alpha - x_{k-1})$ da seguinte forma

$$\alpha - x_k \approx \lambda\alpha - \lambda x_{k-1}$$

Aceleração de Aitken

Vamos reescrever $\alpha - x_k \approx \lambda(\alpha - x_{k-1})$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \alpha - x_k &\approx \lambda\alpha - \lambda x_{k-1} \\ -\lambda\alpha + \alpha - x_k &\approx -\lambda x_{k-1} \end{aligned}$$

Aceleração de Aitken

Vamos reescrever $\alpha - x_k \approx \lambda(\alpha - x_{k-1})$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \alpha - x_k &\approx \lambda\alpha - \lambda x_{k-1} \\ -\lambda\alpha + \alpha - x_k &\approx -\lambda x_{k-1} \\ \alpha(1-\lambda) - x_k &\approx -\lambda x_{k-1} \end{aligned}$$

Aceleração de Aitken

Vamos reescrever $\alpha - x_k \approx \lambda(\alpha - x_{k-1})$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\alpha - x_k &\approx \lambda\alpha - \lambda x_{k-1} \\
-\lambda\alpha + \alpha - x_k &\approx -\lambda x_{k-1} \\
\alpha(1-\lambda) - x_k &\approx -\lambda x_{k-1} \\
\alpha(1-\lambda) &\approx x_k - \lambda x_{k-1}
\end{aligned}$$

Aceleração de Aitken

Vamos reescrever $\alpha - x_k \approx \lambda(\alpha - x_{k-1})$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\alpha - x_k &\approx \lambda\alpha - \lambda x_{k-1} \\
-\lambda\alpha + \alpha - x_k &\approx -\lambda x_{k-1} \\
\alpha(1-\lambda) - x_k &\approx -\lambda x_{k-1} \\
\alpha(1-\lambda) &\approx x_k - \lambda x_{k-1} \\
\alpha &\approx \frac{x_k - \lambda x_{k-1}}{1-\lambda}
\end{aligned}$$

Aceleração de Aitken

Vamos reescrever $\alpha - x_k \approx \lambda(\alpha - x_{k-1})$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\alpha - x_k &\approx \lambda\alpha - \lambda x_{k-1} \\
-\lambda\alpha + \alpha - x_k &\approx -\lambda x_{k-1} \\
\alpha(1-\lambda) - x_k &\approx -\lambda x_{k-1} \\
\alpha(1-\lambda) &\approx x_k - \lambda x_{k-1} \\
\alpha &\approx \frac{x_k - \lambda x_{k-1}}{1-\lambda}
\end{aligned}$$

Se λ fosse um valor conhecido, poderiamos substituir na equação anterior para encontrar o valor de α.

Vamos manipular a equação anterior e escrevê-la de outra forma.

Aceleração de Aitken

$$\alpha \approx \frac{x_k - \lambda x_{k-1} + \lambda x_k - \lambda x_k}{1 - \lambda}$$

Aceleração de Aitken

$$\begin{aligned}\alpha &\approx \frac{x_k - \lambda x_{k-1} + \lambda x_k - \lambda x_k}{1-\lambda} \\ &\approx \frac{x_k - \lambda x_k}{1-\lambda} + \frac{\lambda x_k - \lambda x_{k-1}}{1-\lambda}\end{aligned}$$

Aceleração de Aitken

$$
\begin{aligned}
\alpha &\approx \frac{x_k - \lambda x_{k-1} + \lambda x_k - \lambda x_k}{1-\lambda} \\
&\approx \frac{x_k - \lambda x_k}{1-\lambda} + \frac{\lambda x_k - \lambda x_{k-1}}{1-\lambda} \\
&\approx x_k + \frac{\lambda x_k - \lambda x_{k-1}}{1-\lambda}
\end{aligned}
$$

Aceleração de Aitken

$$
\begin{aligned}
\alpha &\approx \frac{x_k - \lambda x_{k-1} + \lambda x_k - \lambda x_k}{1-\lambda} \\
&\approx \frac{x_k - \lambda x_k}{1-\lambda} + \frac{\lambda x_k - \lambda x_{k-1}}{1-\lambda} \\
&\approx x_k + \frac{\lambda x_k - \lambda x_{k-1}}{1-\lambda} \\
\alpha &\approx x_k + \frac{\lambda}{1-\lambda}(x_k - x_{k-1})
\end{aligned}
$$

Aceleração de Aitken

$$
\begin{aligned}
\alpha &\approx \frac{x_k - \lambda x_{k-1} + \lambda x_k - \lambda x_k}{1-\lambda} \\
&\approx \frac{x_k - \lambda x_k}{1-\lambda} + \frac{\lambda x_k - \lambda x_{k-1}}{1-\lambda} \\
&\approx x_k + \frac{\lambda x_k - \lambda x_{k-1}}{1-\lambda} \\
\alpha &\approx x_k + \frac{\lambda}{1-\lambda}(x_k - x_{k-1})
\end{aligned}
$$

Temos que $\lambda = \phi'(\alpha)$. Poderíamos aproximar λ por

$$
\lambda \approx \frac{\alpha - x_k}{\alpha - x_{k-1}}
$$

entretanto, não conhecemos α.

Aceleração de Aitken

Considere a seguinte razão

$$\boxed{\lambda_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}}$$

Aceleração de Aitken

Considere a seguinte razão

$$\boxed{\lambda_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}}$$

para ver que λ_k é uma aproximação de λ a medida que x_k se aproxima de α, escreva

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}} = \frac{\phi(x_{k-1}) - \phi(x_{k-2})}{x_{k-1} - x_{k-2}} = \phi'(c_n)$$

onde c_n está entre x_k e x_{k-1}.

Aceleração de Aitken

Considere a seguinte razão

$$\boxed{\lambda_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}}$$

para ver que λ_k é uma aproximação de λ a medida que x_k se aproxima de α, escreva

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}} = \frac{\phi(x_{k-1}) - \phi(x_{k-2})}{x_{k-1} - x_{k-2}} = \phi'(c_n)$$

onde c_n está entre x_k e x_{k-1}. Portanto, a medida que vamos nos aproximando de α, o número c_n também se aproxima de α. Então

$$\lambda_k \to \lambda \text{ para } x_k \to \alpha$$

Aceleração de Aitken

Juntando tudo isso, podemos obter

$$\hat{x_k} = x_{k-1} + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}(x_k - x_{k-1})$$

com

$$\lambda_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$$

onde $\hat{x_k}$ é chamado de extrapolação de Aitken de $\{x_k, x_{k-1}, x_{k-2}\}$ e $\hat{x_k} \approx \alpha$.

Aceleração de Aitken

Juntando tudo isso, podemos obter

$$\hat{x_k} = x_{k-1} + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}(x_k - x_{k-1})$$

com

$$\lambda_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$$

onde $\hat{x_k}$ é chamado de extrapolação de Aitken de $\{x_k, x_{k-1}, x_{k-2}\}$ e $\hat{x_k} \approx \alpha$. Substituindo λ_k e manipulando a expressão, chegamos a

$$\boxed{\hat{x_k} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}}}$$

Aceleração de Aitken

O método pode ser usado da seguinte forma: dado x_0, calculamos

$$x_1 = \phi(x_0), \quad x_2 = \phi(x_1),$$

e assim aplicamos a fórmula de Aitken para calcular $\hat{x}_2$. Em seguida, usamos $\hat{x}_2$ como novo valor de partida, isto é, calculamos

$$x_3 = \phi(\hat{x}_2), \quad x_4 = \phi(x_3),$$

e usamos $\hat{x}_2$, x_3 e x_4 para calcular $\hat{x}_4$, e assim por diante.

Aceleração de Aitken

Exemplo

Encontre a raiz de $f(x) = 6.28 - x + \sin(x)$ usando o processo iterativo $x_{k+1} = 6.28 + \sin(x)$ e usando o este mesmo processo com a aceleração de Aitken.

Solução do Exemplo

Neste caso a raiz é $\alpha = 6.015503072$, sendo assim temos que

$$\phi'(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \phi'(\alpha) \approx 0.96$$

o que implica em uma convergência muito lenta para a raiz usando o MPF. Veja.

Aceleração de Aitken

Solução do Exemplo

Usando $x_{k+1} = 6.28 + \sin(x)$ temos

$$x_0 = 6$$
$$x_1 = 6.28 + \sin(6) = 6.28 - 0.279415 = 6.000585$$
$$x_2 = 6.28 + \sin(6.000585) = 6.28 - 0.278854 = 6.001146$$
$$x_3 = 6.28 + \sin(6.001146) = 6.001685$$
$$x_4 = 6.28 + \sin(6.001685) = 6.002202$$
$$x_5 = 6.28 + \sin(6.002202) = 6.002700$$
$$x_6 = 6.28 + \sin(6.002202) = 6.003178$$
$$x_7 = \ldots$$

Aceleração de Aitken

Solução do Exemplo

Usando a aceleração de Aitken temos

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 6\\
x_1 &= 6.28 + \sin(6) = 6.28 - 0.279415 = 6.000585\\
x_2 &= 6.28 + \sin(6.000585) = 6.28 - 0.278854 = 6.001146
\end{aligned}
$$

Aceleração de Aitken

Solução do Exemplo

Usando a aceleração de Aitken temos

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 6\\
x_1 &= 6.28 + \sin(6) = 6.28 - 0.279415 = 6.000585\\
x_2 &= 6.28 + \sin(6.000585) = 6.28 - 0.278854 = 6.001146\\
\hat{x}_2 &= x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = 6.014259
\end{aligned}
$$

Aceleração de Aitken

Solução do Exemplo

Usando a aceleração de Aitken temos

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 6 \\
x_1 &= 6.28 + \sin(6) = 6.28 - 0.279415 = 6.000585 \\
x_2 &= 6.28 + \sin(6.000585) = 6.28 - 0.278854 = 6.001146 \\
\hat{x}_2 &= x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = 6.014259 \\
x_3 &= 6.28 + \sin(6.014259) = 6.014304 \\
x_4 &= 6.28 + \sin(6.014304) = 6.014347
\end{aligned}
$$

Aceleração de Aitken

Solução do Exemplo

Usando a aceleração de Aitken temos

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 6\\
x_1 &= 6.28 + \sin(6) = 6.28 - 0.279415 = 6.000585\\
x_2 &= 6.28 + \sin(6.000585) = 6.28 - 0.278854 = 6.001146\\
\hat{x}_2 &= x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = 6.014259\\
x_3 &= 6.28 + \sin(6.014259) = 6.014304\\
x_4 &= 6.28 + \sin(6.014304) = 6.014347\\
\hat{x}_4 &= x_4 - \frac{(x_4 - x_3)^2}{x_4 - 2x_3 + \hat{x}_2} = 6.015272
\end{aligned}
$$

Aceleração de Aitken

Solução do Exemplo

Usando a aceleração de Aitken temos

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 6 \\
x_1 &= 6.28 + \sin(6) = 6.28 - 0.279415 = 6.000585 \\
x_2 &= 6.28 + \sin(6.000585) = 6.28 - 0.278854 = 6.001146 \\
\hat{x}_2 &= x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = 6.014259 \\
x_3 &= 6.28 + \sin(6.014259) = 6.014304 \\
x_4 &= 6.28 + \sin(6.014304) = 6.014347 \\
\hat{x}_4 &= x_4 - \frac{(x_4 - x_3)^2}{x_4 - 2x_3 + \hat{x}_2} = 6.015272 \\
x_5 &= \ldots
\end{aligned}
$$

$\square$

Comparação dos métodos

- **Bisseção e Falsa Posição**: se a função $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$ e mudar de sinal nos extremos do intervalo $f(a)f(b) < 0$, então temos **garantia de convergência (!!!)**.

Comparação dos métodos

- **Bisseção e Falsa Posição**: se a função $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$ e mudar de sinal nos extremos do intervalo $f(a)f(b) < 0$, então temos **garantia de convergência (!!!)**.

- **Ponto Fixo**: nem todas as escolhas da função de iteração do método do Ponto Fixo são adequadas, pois algumas divergem e outras podem convergir de forma muito lenta.

  O MPF irá convergir se:
  - $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ contínuas num intervalo I centrado em α
  - $|\phi'(x)| < 1, \ \forall x \in I$

Comparação dos métodos

- **Newton**; possui critérios mais restritivos para convergência.
  - É preciso calcular $f(x)$ e $f'(x)$ a cada iteração
  - Convergência quadrática
  - Raiz com multiplicadade $m > 1 \Rightarrow$ convergência lenta.
- **Secante**: muito parecido com o método de Newton.
  - Precisa de duas aproximações para calcular uma nova aproximação.
  - Não é preciso conhecer a derivada.
  - O cálculo de $f'(x)$ é obtido de forma aproximada.
  - Convergência super-linear

Comparação dos métodos

- Existem situações que o método de Newton pode falhar:
  - má escolha para a aproximação inicial x_0
  - apresentar uma convergência não quadrática, quando temos raízes com multiplicicade $m > 1$ ou mesmo quando $f'(x_k) \approx 0$.

Comparação dos métodos

- Existem situações que o método de Newton pode falhar:
  - má escolha para a aproximação inicial x_0
  - apresentar uma convergência não quadrática, quando temos raízes com multiplicicade $m > 1$ ou mesmo quando $f'(x_k) \approx 0$.
- De forma geral o método de Newton é o mais indicado sempre que for fácil avaliar as condições de convergência e que $f'(x)$ estiver disponível.

Comparação dos métodos

- Existem situações que o método de Newton pode falhar:
  - má escolha para a aproximação inicial x_0
  - apresentar uma convergência não quadrática, quando temos raízes com multiplicicade $m > 1$ ou mesmo quando $f'(x_k) \approx 0$.
- De forma geral o método de Newton é o mais indicado sempre que for fácil avaliar as condições de convergência e que $f'(x)$ estiver disponível.
- Se $f'(x)$ não está disponível ou é uma função muito custosa de se avaliar, então o método da Secante é o mais indicado, uma vez que é o método que converge de forma mais rápida entre os demais.

Comparação dos métodos

- Existem situações que o método de Newton pode falhar:
  - má escolha para a aproximação inicial x_0
  - apresentar uma convergência não quadrática, quando temos raízes com multiplicicade $m > 1$ ou mesmo quando $f'(x_k) \approx 0$.
- De forma geral o método de Newton é o mais indicado sempre que for fácil avaliar as condições de convergência e que $f'(x)$ estiver disponível.
- Se $f'(x)$ não está disponível ou é uma função muito custosa de se avaliar, então o método da Secante é o mais indicado, uma vez que é o método que converge de forma mais rápida entre os demais.
- Podemos ainda usar um método como o da Bissecção/Falsa Posição cuja convergência é garantida para obter uma aproximação inicial mais precisa para ser usada no método de Newton, por exemplo.

Comparação dos métodos

Exemplo - (Ruggiero, Exemplo 18)

Considere a seguinte função $f(x) = e^{-x^2} - \cos(x)$. Para o método de Newton e do Ponto Fixo usamos:

$$f'(x) = \sin(x) - 2xe^{-x^2}$$

$$\phi(x) = \cos(x) - e^{-x^2} + x$$

Precisão $\epsilon = 10^{-8}$. Raiz encontrada $\alpha = 1.447414$.

Comparação dos métodos

Exemplo - (Ruggiero, Exemplo 18)

Considere a seguinte função $f(x) = e^{-x^2} - \cos(x)$. Para o método de Newton e do Ponto Fixo usamos:

$$f'(x) = \sin(x) - 2xe^{-x^2}$$
$$\phi(x) = \cos(x) - e^{-x^2} + x$$

Precisão $\epsilon = 10^{-8}$. Raiz encontrada $\alpha = 1.447414$.

método	iterações	dados
bissecção	24	$[1, 2]$
falsa posição	10	$[1, 2]$
ponto fixo	14	$x_0 = 1.5$
newton	4	$x_0 = 1.5$
secante	7	$x_0 = 1,\ x_1 = 2$

□

Comparação dos métodos

Exemplo - (Ruggiero, Exemplo 19)

Considere a seguinte função $f(x) = x^3 - x - 1$. Para o método de Newton e do Ponto Fixo usamos:

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$
$$\phi(x) = (x+1)^{1/3}$$

Precisão $\epsilon = 10^{-8}$. Raiz encontrada $\alpha = 1.324718$.

Comparação dos métodos

Exemplo - (Ruggiero, Exemplo 19)

Considere a seguinte função $f(x) = x^3 - x - 1$. Para o método de Newton e do Ponto Fixo usamos:

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$
$$\phi(x) = (x+1)^{1/3}$$

Precisão $\epsilon = 10^{-8}$. Raiz encontrada $\alpha = 1.324718$.

método	iterações	dados
bissecção	24	$[1, 2]$
falsa posição	18	$[1, 2]$
ponto fixo	10	$x_0 = 1.0$
newton	**22**	$x_0 = 0$
secante	**27**	$x_0 = 0,\ x_1 = 0.5$

Comparação dos métodos

Exemplo - (Ruggiero, Exemplo 19)

A convergência lenta do método de Newton se deve ao fato do chute inicial $x_0 = 0$ estar distante da raiz, e ainda porque x_0 gera $x_1 = 0.5$ como aproximação que está muito próximo de um zero de $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}/3 \approx \pm 0.57$

Idem para o método da Secante.

□

Comparação dos métodos

Exemplo - (Ruggiero, Exemplo 20)

Considere a seguinte função $f(x) = 4\sin(x) - e^x$. Para o método de Newton e do Ponto Fixo usamos:

$$f'(x) = 4\cos(x) - e^x$$
$$\phi(x) = x - 2\sin(x) = 0.5e^x$$

Precisão $\epsilon = 10^{-8}$. Raiz encontrada $\alpha = 0.3705581$.

Comparação dos métodos

Exemplo - (Ruggiero, Exemplo 20)

Considere a seguinte função $f(x) = 4\sin(x) - e^x$. Para o método de Newton e do Ponto Fixo usamos:

$$f'(x) = 4\cos(x) - e^x$$
$$\phi(x) = x - 2\sin(x) = 0.5e^x$$

Precisão $\epsilon = 10^{-8}$. Raiz encontrada $\alpha = 0.3705581$.

método	iterações	dados
bissecção	24	$[0, 1]$
falsa posição	9	$[0, 1]$
ponto fixo	8	$x_0 = 0.5$
newton	4	$x_0 = 0.5$
secante	8	$x_0 = 0,\ x_1 = 1$

□

Outros métodos e problemas

Outros métodos mais robustos

- Método pégaso
- Método Muller (aproximação quadrática)
- Método de van Wijngaarden-Dekker-Brent
  - Mais detalhes em [F. F. Campos, Cap. 6, Página 301]
  - Método usado na função `fzero` do MATLAB

Métodos específicos para raízes polinomiais

- Raízes complexas
- Mais detalhes em [N. B. Franco, Cap. 3, Página 92]

Implementações

- C
  - Implementação simples.
- Python
  - Implementação simples de cada método para estudar os métodos.
  - Implementação da biblioteca da linguagem. Mais robusta e eficiente.
- MATLAB
  - Como usar as funções do ambiente para encontrar raízes.
- FORTRAN/FORTRAN90
  - Preparando...

MATLAB

fzero

Função `fzero` implementa o método de van Wijngaarden-Dekker-Brent.

Sintaxe:

```
x = fzero(fun,x0)
x = fzero(fun,x0,options)
[x,fval] = fzero(...)
[x,fval,exitflag] = fzero(...)
[x,fval,exitflag,output] = fzero(...)
```

- `x` é a a raiz encontrada
- `x0` pode ser um escalar ou um vetor com 2 elementos (intervalo)
- `options` pode ser usado para exibir o resultado de cada passo do método, para especificar a precisão a ser usada, etc

MATLAB

fzero - Exemplo de uso

Achar a raiz de $f(x) = 0.05x^3 - 0.4x^2 + 3\sin(x)x = 0$ que se encontra no intervalo $[10, 12]$.

```
f = @(x) 0.05*x.^3 - 0.4*x.^2 + 3.0 * sin(x)*x
intv = [11,12]
[x,fx] = fzero(f,intv)

x =  11.744
fx = -2.3093e-13
```

MATLAB

Também é possível implementar suas próprias funções em MATLAB. O exemplo a seguir implementa o método da Bissecção.

```
function [ r ] = bisection( f, a, b, N, eps )
  if ( f(a) * f(b) > 0 )
    error( 'f(a) e f(b) nao possuem sinais opostos.' );
  end

  for k = 1:N
    c = (a + b)/2;
    if ( abs(b - a) < eps )
      r = c;
      return;
    end
    if ( f(c)*f(a) < 0 )
      b = c;
    else
      a = c;
    end
  end
  error( 'o metodo nao convergiu' );
end
```

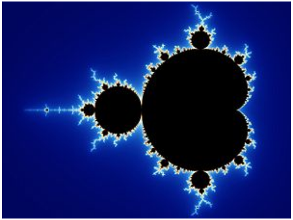
Extra: Fractais

Definição (Fractal)

Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original.

Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e independem de escala. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

Referência: Wikipedia, Fractal



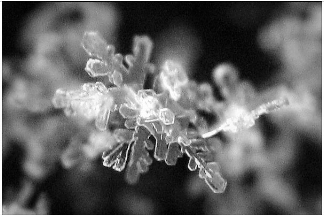
Extra: Fractais

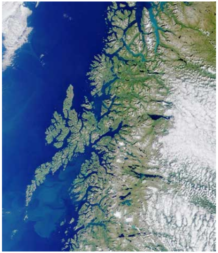
Cientificamente, fractais podem ser usados para descrever objetos altamente irregulares.

Aplicações

- compressão de imagem
- mecânica dos fluidos (turbulência)
- cosmologia
- sismologia
- biologia (crescimento bacteriano, árvores, etc..)
- música/arte
- teoria do caos
- etc etc etc

Extra: Fractais





Extra: Fractais e o método de Newton

Vamos usar o método de Newton para gerar alguns fractais. Agora iremos trabalhar com funções complexas da variável $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, onde $i = \sqrt{-1}$.

Extra: Fractais e o método de Newton

Vamos usar o método de Newton para gerar alguns fractais. Agora iremos trabalhar com funções complexas da variável $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, onde $i = \sqrt{-1}$.

Vamos trabalhar com a seguinte função complexa:

$$f(z) = z^4 + 1 = 0, z \in \mathbb{C}$$

Extra: Fractais e o método de Newton

Vamos usar o método de Newton para gerar alguns fractais. Agora iremos trabalhar com funções complexas da variável $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, onde $i = \sqrt{-1}$.

Vamos trabalhar com a seguinte função complexa:

$$f(z) = z^4 + 1 = 0, z \in \mathbb{C}$$

as raízes dessa equação são

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}(2n+1)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}(2n+1)\right), \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Extra: Fractais e o método de Newton

Vamos usar o método de Newton para gerar alguns fractais. Agora iremos trabalhar com funções complexas da variável $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, onde $i = \sqrt{-1}$.

Vamos trabalhar com a seguinte função complexa:

$$f(z) = z^4 + 1 = 0, z \in \mathbb{C}$$

as raízes dessa equação são

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{4}(2n+1)\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}(2n+1)\right), \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Vamos usar a fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Extra: Fractais e o método de Newton

Vamos usar o método de Newton para gerar alguns fractais. Agora iremos trabalhar com funções complexas da variável $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, onde $i = \sqrt{-1}$.

Vamos trabalhar com a seguinte função complexa:

$$f(z) = z^4 + 1 = 0, z \in \mathbb{C}$$

as raízes dessa equação são

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{4}(2n+1)\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}(2n+1)\right), \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Vamos usar a fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Para $n = 0$, temos que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{(i\pi/4)}$ então

$$\begin{aligned} f(e^{(i\pi/4)}) &= (e^{(i\pi/4)})^4 + 1 = e^{i\pi} + 1 \\ &= \cos(\pi) + i\sin(\pi) + 1 \\ &= -1 + 0 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Extra: Fractais e o método de Newton

A ideia básica de gerar o fractal de Newton é a seguinte:

- Escolha uma função complexa como p. ex. $f(z) = z^4 + 1$
- Escolha uma coleção de chutes iniciais z_0 para as raízes
- Execute o método de Newton para cada chute inicial
- Nesse exemplo, cada chute inicial irá convergir para alguma das 4 raízes
- Vamos colorir cada chute inicial no plano com uma cor, a qual estará associada com a raiz que aquele chute inicial convergiu
- O brilho da cor irá depender do número de iterações para convergir

Para ilustrar o algoritmo, iremos apresentar uma implementação em Python, usando a biblioteca PIL para manipular e criar imagens.

Extra: Fractais e o método de Newton

```
from PIL import Image
from math import *

delta = 1.0e-6   # precisao
res =  500       # tamanho da imagem (qto menor mais rapido)
iters = 30       # numero de iteracoes (qto mais alto, mais brilho)

# area para desenhar (-1,-1) a (1,1)
xa,xb = -1.0, 1.0
ya,yb = -1.0, 1.0

# cria uma imagem para pintar, incialmente toda preta
img = Image.new("RGB", (res, res), (0,0,0))

# calcula solucoes de z**4 + 1 = 0
solutions = [cos((2*n+1)*pi/4)+1j*sin((2*n+1)*pi/4) for n in range(4)]
colors = [(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0)]

# continua ...
```

Extra: Fractais e o método de Newton

```
# loop sobre as partes real/imaginaria para usar como chute inicial
for re in range(0,res):
    zx = re * (xb - xa) / (res - 1) + xa
    for im in range(0,res):
        zy = im * (yb - ya) / (res - 1) + ya
        z = complex(zx,zy)

        for i in range(iters): # metodo de Newton
            try:
                z -= (z**4+1)/(4*z**3)
            except ZeroDivisionError:
                continue
            if (abs(z**4+1) < delta): break

        # brilho eh funcao do numero de iteracoes
        color_depth = int(iters-i)*255.0/iters

        # encontra para qual solucao este chute inicial convergiu
        err = [abs(z-root) for root in solutions]
        distances = zip(err, range(len(colors)))

        # seleciona a cor associada com a solucao
        color = [int(i*color_depth) for i in colors[min(distances)[1]]]
        img.putpixel((re,im), tuple(color))
```

Extra: Fractais e o método de Newton

Exemplo: $f(z) = z^4 + 1$ em $[-1, -1] \times [1, 1]$.