

Nome: **Gabarito**

Atenção: (i) Prova à lápis ou caneta. Assinar todas as folhas de caneta. (ii) Mostre todos os passos do desenvolvimento e justifique suas respostas. (iii) Use arredondamento com **cinco** casas decimais.

1. (35 Pontos) Considere o problema de aproximar a função $\ln(x)$ por um polinômio de Taylor.
- (a) Considere $f(\tilde{x}) = \ln((1 + \tilde{x})/(1 - \tilde{x})) = \ln(1 + \tilde{x}) - \ln(1 - \tilde{x})$ e determine o polinômio de Taylor de grau $n = 4$ em torno de $a = 0$ denotado por $P_4(\tilde{x})$ para essa função.
 - (b) Para aproximar a função logaritmo natural usando o polinômio de Taylor $P_4(\tilde{x})$, considere que $\ln(x) = \ln((1 + \tilde{x})/(1 - \tilde{x}))$ e determine uma relação para \tilde{x} em função de x . Qual o valor de \tilde{x} quando $x = 2$?
 - (c) Qual o valor aproximado de $\ln(2)$ utilizando o polinômio de Taylor $P_4(\tilde{x})$? Qual o valor do erro absoluto cometido na aproximação? *Dica: não se esqueça de transformar a variável apropriadamente.*
 - (d) Determine um limitante superior para o erro cometido por $P_4(\tilde{x})$ considerando que a derivada de ordem 5 de $f(\tilde{x})$ é limitada por $M_5 = 188$.
 - (e) Discuta o resultado do erro absoluto (item (c)) cometido tendo em vista o limitante do erro (item (d)).

Resposta:

(a) Para $\ln(1 + x)$ temos $P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Para $\ln(1 - x)$ temos $P_4(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Logo, para $\ln((1 + \tilde{x})/(1 - \tilde{x})) = \ln(1 + \tilde{x}) - \ln(1 - \tilde{x})$ temos $P_4(\tilde{x}) = 2\left(\tilde{x} + \frac{\tilde{x}^3}{3}\right)$.

(b) $\tilde{x} = \frac{x-1}{1+x}$ o que implica que para $x = 2$ temos $\tilde{x} = 1/3$.

(c) $P_4(\tilde{x}) = 2\left((1/3) + (1/3)^3/3\right) = 0.69136$

$\ln(2) = 0.69315$

Erro = 0.00179

(d) Calculando o limitante do erro para $x = 2 \Rightarrow \tilde{x} = 1/3$, com $a = 0$ temos que

$$|R_4| \leq M_5 \frac{|(x-a)^5|}{5!} \leq 188 \frac{x^5}{120} \leq 188 \frac{(1/3)^5}{120} \leq 0.00645$$

(e) Concluimos que o erro cometido (0.00179) é menor que o limitante para o erro (0.00645), isto é, $0.00179 < 0.00645$.

2. (35 Pontos) Considere uma máquina com representação de números dada por um sistema de ponto flutuante $\mathcal{F}(10, 3, -4, 4)$, i.e., com 3 dígitos na mantissa e expoente no intervalo $[-4, 4]$. A máquina utiliza arredondamento.
- (a) Represente $x_1 = e^1$ e $x_2 = 5^5$ nessa máquina. Os números podem ser representados? Existe erro na representação? Se sim, calcule o erro relativo de ambos e informe em qual caso houve o maior erro.
- (b) Para $x = 0.01$ calcule o resultado da seguinte operação: $\sqrt{1+x} - 1$ na máquina especificada. Realize cada operação aritmética e o seu respectivo resultado representados no sistema de ponto flutuante.
- (c) Explique o que ocorre com o resultado.
- (d) Sugira uma forma de evitar o problema ocorrido nas operações de aritmética de ponto flutuante e refaça os seus cálculos. Dessa forma, qual o erro absoluto ao se calcular $\sqrt{1+x} - 1$?

Resposta:

(a)

$$x_1 = 0.271 \times 10^1 \text{ com erro relativo } ER(x_1) = \frac{|e^1 - 2.71|}{|e^1|} = 0.003056$$

$$x_2 = 0.312 \times 10^4 \text{ com erro relativo } ER(x_2) = \frac{|3125 - 3120|}{|3125|} = 0.00160$$

(b)

A representação de $x = 0.01$ na máquina \mathcal{F} é 0.100×10^{-1} . A operação $1 + x$ é realizada como

$$\begin{array}{r} 0.100 \times 10^1 \\ + 0.100 \times 10^{-1} \\ \hline 0.100 \times 10^1 \\ + 0.001 \times 10^1 \\ \hline 0.101 \times 10^1 \end{array}$$

Assim como $0.101 \times 10^1 = 1.01$ temos que $\sqrt{1.01} = 1.00498$ cuja representação na máquina \mathcal{F} é 0.100×10^1 . Realizando a subtração $\sqrt{1.01} - 1$ encontra-se como resposta 0.000×10^1 .

(c) Ocorre cancelamento ou perda de dígitos significativos com a subtração de números muito próximos.

(d) Podemos escrever $\sqrt{1+x} - 1$ como

$$\sqrt{1+x} - 1 = (\sqrt{1+x} - 1) \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1}$$

Desta forma quando realiza-se a operação em ponto flutuante tem-se: $\frac{0.01}{2.0}$ que é realizada como

$$\begin{array}{r} 0.100 \times 10^{-1} \\ + 0.200 \times 10^1 \\ \hline 0.500 \times 10^{-2} \end{array}$$

O valor exato da operação é $\sqrt{1+x} - 1 = 0.00499$. Logo o erro é 1×10^{-5} .

3. (30 Pontos) Seja a o número de letras do seu primeiro nome, e sejam $b = a + 1$ e $c = a + 2$.
- (a) construa um polinômio de grau 3 que tenha exatamente como raízes os números a , b e c ;
 - (b) escolha entre a , b e c e mostre (através de cálculos) que o número escolhido trata-se, de fato, de uma raiz do polinômio;
 - (c) escreva a fórmula de iteração do método de Newton para encontrar raízes desse polinômio;
 - (d) escolha uma aproximação inicial x_0 e realize uma iteração do método de Newton para encontrar uma aproximação para a raiz escolhida. Apresente todo o desenvolvimento da questão.

Resposta: Nome: Bernardo $\Rightarrow a = 8, b = 9, c = 10 \Rightarrow f(x) = (x-8)(x-9)(x-10)$
Para o método de Newton é preciso calcular a derivada $f'(x) = 3x^2 - 54x + 242$, e assim temos a seguinte fórmula de iteração

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - 8)(x_k - 9)(x_k - 10)}{3x_k^2 - 54x_k + 242}$$

Executando o método com $x_0 = 7$ temos

METODO DE NEWTON

k	xk	f(xk)	erro(xk-xk-1)
1	7.545455e+00	-1.622840e+00	5.454545e-01
2	7.848953e+00	-3.739851e-01	3.034987e-01
3	7.974674e+00	-5.259231e-02	1.257209e-01
4	7.999092e+00	-1.819380e-03	2.441748e-02
5	7.999999e+00	-2.470623e-06	9.072166e-04
8.0			

Fórmulas: Limitante do erro para polinômio de Taylor:

$$|R_n(\tilde{x})| \leq M_{n+1} \frac{|\tilde{x} - a|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{para } t \in [a, \tilde{x}].$$