Cálculo Numérico: Lista de Exercícios 3

Métodos para Encontrar Raízes Reais de Funções Reais

1. Mostre que as seguintes equações possuem exatamente uma raiz e que em cada caso a raiz está no intervalo $[0.5, 1]$.

(a) $x^2 + ln(x) = 0$

(b) $xe^x - 1 = 0$

Determine essas raízes com até duas casas decimais corretas (i.e., com $\epsilon = 10^{-2}$), usando o método da Bisseção.

2. Encontre o zero das seguintes funções pelo método da Bisseção, com $\epsilon = 0.03$ ou até seis iterações do método (i.e., $k = 6$):

(a) $x^2 + sen(x) - 5$ no intervalo $[1.2, 2.4]$

(b) $x^3 - 2x^2 - 20x + 30$ no intervalo $[1.3, 4.8]$

(obs: use sempre radianos para avaliar funções trigonométricas)

3. Aplique o método da Bisseção e o da Falsa Posição para calcular a raiz positiva de $x^2 - 7 = 0$ com $\epsilon = 10^{-2}$, partindo do intervalo inicial $[2.0, 3.0]$.

4. Aplique o método da Bisseção para resolver:

(a) $e^x - 3x = 0$

(b) $x^3 + cos(x) = 0$,

obtendo, em cada caso o intervalo inicial $[a, b]$ graficamente.

5. Considere o problema de encontrar o zero da função $f(x) = x + ln(x)$ no intervalo $[0.5, 0.6]$ usando um método de ponto fixo. Analise a convergência, quando a função de iteração é dada por:

(a) $\varphi(x) = -ln(x)$;

(b) $\varphi(x) = e^{-x}$.

6. A equação $x^2 + 5x - 1 = 0$ tem uma raiz em $[0, 0.5]$. Verifique quais dos processos abaixo podem ser usados, com sucesso, para obtê-la.

(a) $x_{k+1} = \frac{1-x_k^2}{5}$

(b) $x_{k+1} = \frac{1-5x_k}{x_k}$

(c) $x_{k+1} = \sqrt{1 - 5x_k}$

7. A equação $x^3 - 2x - 17 = 0$ tem apenas uma raiz real. Determine seu valor correto até duas casas decimais usando o método de Newton-Raphson e o método da Secante.

8. Encontre o zero das seguintes funções pelo método de Newton-Raphson e o método da Secante com $\epsilon = 0.0005$ ou até seis iterações (i.e., $k = 6$):

(a) $f(x) = x^3 - cos(x)$ no intervalo [0,1]

(b) $f(x) = 2x^3 + ln(x) - 5$ no intervalo [1,2]

9. O valor de π pode ser obtido através da resolução das seguintes equações:

(a) $sen(x) = 0$

(b) $cos(x) + 1 = 0$

Aplique o método de Newton com $x_0 = 3$ e com precisão 10^{-7} em cada caso e compare os resultados obtidos. Justifique.

10. Suponha que você deseja calcular b/a em um computador capaz de somente somar, subtrair e multiplicar. Responda:

(a) Use o método de Newton para estabelecer uma forma de calcular $1/a$ (dica: note que $1/a$ é o zero de $f(x) = 1/x - a$).

(b) Mostre que o método de Newton converge quando o ponto inicial x_0 está no intervalo $[1/2a, 3/2a]$.

(c) Usando o método do item (a) calcule 10/9 neste computador.

11. Suponha que você deseja computar $\sqrt{b}$ em um computador que não possui a função de "raiz quadrada". Responda:

(a) Use o método de Newton para estabelecer uma forma de calcular a raiz (dica: note que $\sqrt{b}$ é zero da função $f(x) = x^2 - b$).

(b) Usando o método do item (a) calcule $\sqrt{2}$ neste computador.

12. Use o método de Newton para encontrar o zero da função $f(x) = (x-2)^3$, com até duas casas decimais corretas (i.e., $|x_{k+1} - 2| < \epsilon = 10^{-2}$). Porque o método demora para convergir para a raiz $\xi = 2$?

13. A equação $x^2 - b = 0$ tem como raiz $\xi = \sqrt{b}$. Considere o método de ponto fixo com $\varphi(x) = b/x$:

(a) comprove que $\varphi'(\xi) = -1$;

(b) o que acontece com a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$?

(c) sua conclusão do item (b) pode ser generalizada para qualquer função de iteração $\varphi(x)$ tal que $|\varphi'(\xi)| = 1$?

14. Use o método de Newton-Raphson para obter a menor raiz positiva das equações a seguir com precisão $\epsilon = 10^{-4}$:

(a) $x/2 - tan(x) = 0$

(b) $2cos(x) = e^x/2$

(c) $x^5 - 6 = 0$

15. Deduza o método de Newton a partir de sua interpretação geométrica.

16. Seja $f(x) = e^x - 4x^2$ e ξ sua raiz no intervalo $(0, 1)$. Tomando $x_0 = 0.5$, encontre ξ com $\epsilon = 10^{-4}$ usando:

(a) o método de ponto fixo com $\varphi(x) = (e^{x/2})/2$;

(b) o método de Newton.

Compare a rapidez de convergência.

17. Seja $f(x) = x^2/2 + x(ln(x) - 1)$. Obtenha seus pontos críticos com o auxílio de um método numérico.

Referências

[1] Ruggiero, M., e Lopes, V., Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais, Segunda Edição, Makron, Books, 1998.

[2] Franco, N. B., Cálculo Numérico, Prentice Hall, 2006.