Nome: ______________________________

Atenção:

i. Confira os dados da prova. Prova à lápis ou caneta. Assinar todas as folhas de caneta.
ii. Mostre todos os passos do desenvolvimento e **justifique suas respostas**.
iii. **Não é permitido consulta** a nenhum material ou equipamento, exceto uma calculadora.
iv. Use arredondamento com quatro casas decimais.

---

1. (25 Pontos) Sabendo que a função seno hiperbólico pode ser escrita como $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$:
   (a) utilize um polinômio de Taylor de grau 5 em torno de $a = 0$ para aproximar $\sinh(x)$;
   (b) use a aproximação do item (a) para calcular o valor aproximado de $\sinh(x)$ para $x = 1$;
   (c) determine um limitante superior para o erro para a aproximação de ordem 5 feita em torno de $a = 0$ para $x = 1$. A fórmula do erro de Lagrange, de forma geral, é dada por:

$$|R_n(x)| \leq \max |f^{(n+1)}(t)| \frac{|(x-a)^{n+1}|}{(n+1)!}, \quad \text{para} \quad t \in [a, x].$$

2. (25 Pontos) Considere uma máquina com representação de números dada por um sistema de ponto flutuante $F(10, 3, -4, 4)$, i.e., com 3 dígitos na mantissa e expoente no intervalo $[-4, 4]$. A máquina utiliza arredondamento.
   (a) Represente os números $x_1 = 5^6$, $x_2 = \pi$ e $x_3 = -0.000007$. Responda se podem ser representados exatamente, com erro, ou indique a ocorrência de *underflow* ou *overflow*.
   (b) Qual o menor e o maior número (em valor absoluto) que pode ser representado neste sistema?
   (c) Para $x = 0.05$ calcule o resultado da seguinte operação: $1 - \cos(x)$ na máquina especificada. O que ocorre com o resultado?

3. (25 Pontos) Seja $f(x) = x^2/2 + x(\ln(x) - 1)$. Considere o problema de obter os pontos críticos da função utilizando o método de Newton.
   (a) escreva uma fórmula de iteração pelo método de Newton para obter os pontos críticos de $f(x)$;
   (b) utilize $x_0 = 0.9$ e encontre uma aproximação; faça 3 iterações;
   (c) o método proposto em (a) pode ser utilizado para qualquer aproximação inicial x_0? Justifique.

4. (25 Pontos) Seja $f(x) = 4^x - x - 2$ para $x \in [0, 2]$. Considere o método do ponto fixo para encontrar uma raiz de $f(x)$ entre $[0, 2]$. Para isso:
   (a) escolha uma função de iteração $\phi(x)$ para o método do ponto fixo;
   (b) verifique que o método do ponto fixo irá convergir para a função de iteração $\phi(x)$ escolhida no intervalo $I = [0, 2]$;
   (c) escolha uma aproximação inicial x_0 e obtenha uma aproximação realizando apenas 2 iterações.