Nome: **Gabarito** ____

Atenção: (i) Prova à lápis ou caneta. Assinar todas as folhas de caneta. (ii) Mostre todos os passos do desenvolvimento e justifique suas respostas.(iii) Use arredondamento com **cinco** casas decimais.

1. (35 Pontos) Considere o problema de aproximar a função $\ln(x)$ por um polinômio de Taylor.
   (a) Considere $f(\tilde{x}) = \ln((1+\tilde{x})/(1-\tilde{x})) = \ln(1+\tilde{x}) - \ln(1-\tilde{x})$ e determine o polinômio de Taylor de grau $n = 4$ em torno de $a = 0$ denotado por $P_4(\tilde{x})$ para essa função.
   (b) Para aproximar a função logaritmo natural usando o polinômio de Taylor $P_4(\tilde{x})$, considere que $\ln(x) = \ln((1+\tilde{x})/(1-\tilde{x}))$ e determine uma relação para $\tilde{x}$ em função de x. Qual o valor de $\tilde{x}$ quando $x = 2$?
   (c) Qual o valor aproximado de $\ln(2)$ utilizando o polinômio de Taylor $P_4(\tilde{x})$? Qual o valor do erro absoluto cometido na aproximação? *Dica: não se esqueça de transformar a variável apropriadamente.*
   (d) Determine um limitante superior para o erro cometido por $P_4(\tilde{x})$ considerando que a derivada de ordem 5 de $f(\tilde{x})$ é limitada por $M_5 = 188$.
   (e) Discuta o resultado do erro absoluto (item (c)) cometido tendo em vista o limitante do erro (item (d)).

Resposta:
(a) Para $\ln(1+x)$ temos $P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$
Para $\ln(1-x)$ temos $P_4(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$
Logo, para $\ln((1+\tilde{x})/(1-\tilde{x})) = \ln(1+\tilde{x}) - \ln(1-\tilde{x})$ temos $P_4(\tilde{x}) = 2\left(\tilde{x} + \frac{\tilde{x}^3}{3}\right)$.

(b) $\tilde{x} = \frac{x-1}{1+x}$ o que implica que para $x = 2$ temos $\tilde{x} = 1/3$.

(c) $P_4(\tilde{x}) = 2\left((1/3) + (1/3)^3/3\right) = 0.69136$
$\ln(2) = 0.69315$
$Erro = 0.00179$

(d) Calculando o limitante do erro para $x = 2 \Rightarrow \tilde{x} = 1/3$, com $a = 0$ temos que

$$|R_4| \leq M_5 \frac{|(x-a)^5|}{5!} \leq 188\frac{x^5}{120} \leq 188\frac{(1/3)^5}{120} \leq 0.00645$$

(e) Concluimos que o erro cometido (0.00179) é menor que o limitante para o erro (0.00645), isto é, $0.00179 < 0.00645$.

2. (35 Pontos) Considere uma máquina com representação de números dada por um sistema de ponto flutuante $\mathcal{F}(10, 3, -4, 4)$, i.e., com 3 dígitos na mantissa e expoente no intervalo $[-4, 4]$. A máquina utiliza arredondamento.

   (a) Represente $x_1 = e^1$ e $x_2 = 5^5$ nessa máquina. Os números podem ser representados? Existe erro na representação? Se sim, calcule o erro relativo de ambos e informe em qual caso houve o maior erro.

   (b) Para $x = 0.01$ calcule o resultado da seguinte operação: $\sqrt{1+x} - 1$ na máquina especificada. Realize cada operação aritmética e o seu respectivo resultado representados no sistema de ponto flutuante.

   (c) Explique o que ocorre com o resultado.

   (d) Sugira uma forma de evitar o problema ocorrido nas operações de aritmética de ponto flutuante e refaça os seus cálculos. Dessa forma, qual o erro absoluto ao se calcular $\sqrt{1+x} - 1$?

Resposta:
(a)
$x_1 = 0.272 \times 10^1$ com erro relativo $ER(x_1) = \frac{|e^1 - 2.72|}{|e^1|} = 0.00063$
$x_2 = 0.312 \times 10^4$ com erro relativo $ER(x_2) = \frac{|3125 - 3120|}{|3125|} = 0.00160$

(b)
A representação de $x = 0.01$ na máquina $\mathcal{F}$ é 0.100×10^{-1} A operação $1 + x$ é realizada como

$$\begin{array}{r} 0.100 \times 10^{1} \\ +0.100 \times 10^{-1} \\ \hline 0.100 \times 10^{1} \\ +0.001 \times 10^{1} \\ \hline 0.101 \times 10^{1} \end{array}$$

Assim como $0.101 \times 10^1 = 1.01$ temos que $\sqrt{1.01} = 1.00498$ cuja representação na máquina $\mathcal{F}$ é 0.100×10^1. Realizando a subtração $\sqrt{1.01} - 1$ encontra-se como resposta 0.000×10^1.

(c) Ocorre cancelamento ou perda de dígitos significativos com a subtração de números muito próximos.

(d) Podemos escrever $\sqrt{1+x} - 1$ como

$$\sqrt{1+x} - 1 = (\sqrt{1+x} - 1)\frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1}$$

Desta forma quando realiza-se a operação em ponto flutuante tem-se: $\frac{0.01}{2.0}$ que é realizada como

$$\begin{array}{r} 0.100 \times 10^{-1} \\ +0.200 \times 10^{1} \\ \hline 0.500 \times 10^{-2} \end{array}$$

O valor exato da operação é $\sqrt{1+x} - 1 = 0.00499$. Logo o erro é 1×10^{-5}.

3. (30 Pontos) Seja a o número de letras do seu primeiro nome, e sejam $b = a + 1$ e $c = a + 2$.
   (a) construa um polinômio de grau 3 que tenha exatamente como raízes os números a, b e c;
   (b) escolha entre a, b e c e mostre (através de cálculos) que o número escolhido trata-se, de fato, de uma raiz do polinômio;
   (c) escreva a fórmula de iteração do método de Newton para encontrar raízes desse polinômio;
   (d) escolha uma aproximação inicial x_0 e realize uma iteração do método de Newton para encontrar uma aproximação para a raiz escolhida. Apresente todo o desenvolvimento da questão.

Resposta: Nome: Bernardo $\Rightarrow$ $a = 8, b = 9, c = 10$ $\Rightarrow$ $f(x) = (x-8)(x-9)(x-10)$
Para o método de Newton é preciso calcular a derivada $f'(x) = 3x^2 - 54x + 242$, e assim temos a seguinte fórmula de iteração

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - 8)(x_k - 9)(x_k - 10)}{3x_k^2 - 54x_k + 242}$$

Executando o método com $x_0 = 7$ temos

```
METODO DE NEWTON
k  xk             f(xk)          erro(xk-xk-1)
1  7.545455e+00  -1.622840e+00  5.454545e-01
2  7.848953e+00  -3.739851e-01  3.034987e-01
3  7.974674e+00  -5.259231e-02  1.257209e-01
4  7.999092e+00  -1.819380e-03  2.441748e-02
5  7.999999e+00  -2.470623e-06  9.072166e-04
8.0
```

Fórmulas: Limitante do erro para polinômio de Taylor:

$$|R_n(\tilde{x})| \leq M_{n+1} \frac{|(\tilde{x}-a)^{n+1}|}{(n+1)!}, \quad \text{para} \quad t \in [a, \tilde{x}].$$