Cálculo Numérico: Lista de Exercícios ~~4~~ 5

Métodos para Interpolação Polinomial

Resolução do Sistemas Linear

1. Conhecendo a seguinte tabela:

x	-1	0	3
$f(x)$	15	8	-1

determinar o polinômio de interpolação para a função definida por este conjunto de pontos, usando a resolução do sistema linear.

Forma de Lagrange

2. Considere a tabela:

x	1	3	4	5
$f(x)$	0	6	24	60

(a) Determine o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.

(b) Calcule $f(3.5)$.

3. Construir o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, para a função $f(x) = sen(\pi x)$, escolhendo os pontos: $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, e $x_2 = 1/2$.

4. Calcular $e^{3.1}$ usando a fórmula de Lagrange sobre **três** pontos e a tabela:

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
e^x	11.02	13.46	16.44	20.08	24.53	29.96	36.59	44.70

(Para tornar a interpolação mais precisa, use os pontos da tabela que estão mais próximos de $x = 3.1$.)

Forma de Newton

5. Seja a função tabelada:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	0	1	-1	0

(a) Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton.

(b) Calcular $f(0.5)$.

6. Dada a função tabelada:

x	0	1	1.5	2.5	3.0
$f(x)$	1.0	0.5	0.4	0.286	0.25

(a) Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton sobre dois pontos (interpolação linear). (Use os pontos mais próximos de $x = 0.5$)

(b) Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton sobre três pontos (interpolação quadrática). (Use os pontos mais próximos de $x = 0.5$)

(c) Calcular $f(0.5)$ usando os itens (a) e (b).

Lembre-se que a fórmula de Newton do polinômio de interpolação sobre três pontos é igual ao polinômio sobre dois pontos adicionando ao termo de ordem 2. Além disso, o ponto x_0 dever ser comum aos dois polinômios. Portanto, tome cuidado ao escolher os pontos.

7. Mostre que, se $x_0 < x_1 < x_2$, $x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ e $x_0 < x < x_2$, então:

a) O interpolante linear pode ser escrito como

$$P_1(x) = y_0 + \mu(y_1 - y_0), \quad \mu = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

b) O interpolante quadrático pode ser escrito como

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{\mu(\mu - 1)}{2}\left[(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)\right].$$

8. Considerando a função $f(x) = \sqrt{x}$ tabelada:

x	1.00	1.10	1.15	1.25	1.30
$f(x)$	1.00000	1.04881	1.07238	1.11803	1.14018

(a) Determinar o valor aproximado de $\sqrt{1.12}$ usando o polinômio de interpolação de Newton sobre três pontos. (Escolha os pontos mais próximos de $x = 1.12$ para fazer a interpolação).

(b) Calcular um limitante superior para o erro.

9. Dada a função $f(x) = xe^{x/2}$ e a tabela:

x	2.25	2.5	2.75
$xe^{x/2}$	6.930	8.726	10.87

(a) Calcular o polinômio de interpolação sobre 3 pontos usando a forma de Newton.

(b) Calcular $f(2.4)$.

(c) Dar um limitante superior para o erro na interpolação.

Exercícios Complementares

10. Considere a função $f(x)$ dada pela tabela:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	0	0	0

e o polinômio dado por $p(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

(a) Verifique que $p(x_k) = f(x_k)$, k=0,1,2,3.

(b) $p(x)$ é o polinômio interpolador de $f(x)$ sobre os pontos $0, 1, 2, 3$? Justifique.

11. Mostre que a interpolação de um polinômio de grau n sobre $n + k$ pontos, $k \geq 1$, é exata. (Dica: use a fórmula para o erro de interpolação).

12. Sabendo-se que $e \approx 2.72$, $\sqrt{e} \approx 1.65$ e a equação $x - e^{-x} = 0$ tem uma raiz em $[0, 1]$, determinar o valor desta raiz usando o polinômio interpolador sobre três pontos.

13. Dada a tabela:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$ln(x)$	-2.303	-1.609	-1.204	-0.916	-0.693

(a) Estimar $ln(0.32)$ através de interpolação linear e quadrática.

(b) Qual deve ser o valor de h se queremos obter $ln(x)$ com três casas decimais corretas, para $x \geq 1$, através de interpolação linear, usando uma tabela para argumentos x_i igualmente espaçados de h?

Referências

[1] FRANCO, Neide Bertoldi: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2006)

[2] CAMPOS, Frederico Ferreira: Algoritmos Numéricos. Editora LTC (2007)

[3] SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2003)

[4] ATKINSON, Kendall: Elementary Numerical Analysis. second edition, John Wiley & Sons (1993)

[5] RUGGIERO, M.A.G., LOPES, V.L.: Cálculo Numérico, aspectos teóricos e práticos. Makron Books (1997)