Cálculo Numérico: Lista de Exercícios 1

Polinômio de Taylor

Nos exercícios abaixo, considere $x_0 = a$ o ponto para expansão do polinômio de Taylor.

1. Encontre o polinômio de Taylor linear e quadrático em torno do ponto a para as seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ (c) $f(x) = e^{cos(x)}$, $a = 0$
(b) $f(x) = sen(x)$, $a = \pi/4$ (d) $f(x) = log(1 + e^x)$, $a = 0$

2. Produza uma fórmula geral para o polinômio de Taylor expandido em torno de $a = 0$ de grau n para as seguintes funções:

(a) $1/(1 - x)$ (c) $(1 + x)^{1/3}$ (e) $cos(x)$
(b) $\sqrt{1 + x}$ (d) $sen(x)$

3. Encontre o polinômio de Taylor de grau 1, 3, e 5 da função $f(x) = sen(x)$ expandido em torno de $a = 0$. Desenhe o gráfico da função $f(x)$ e dos polinômios de Taylor e compare os resultados.

4. (a) Encontre o polinômio de Taylor de grau 1, 2, 3, e 4 para a função $f(x) = e^{-x}$, expandido em torno de $a = 0$.

(b) Usando o polinômio de Taylor para e^t, substitua $t = -x$ para obter uma aproximação para e^{-x}. Compare o resultado com (a).

5. (a) Encontre o polinômio de Taylor de grau 1, 2, 3, e 4 para a função $f(x) = e^{x^2}$, expandido em torno de $a = 0$.

(b) Usando o polinômio de Taylor para e^t, substitua $t = x^2$ para obter uma aproximação para e^{x^2}. Compare o resultado com (a).

6. Aplique a fórmula de Taylor para expressar o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ como um polinômio em potências de $(x - 1)$.

7. Use o polinômio de Taylor para mostrar que

$$(1 + t)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j,$$

para n inteiro e onde $\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$ é o coeficiente binomial.

8. Encontre um limitante superior para o erro ao aproximar $f(x) = e^x$, para $x \in [-1, 1]$, pelo polinômio de Taylor de grau 3 expandido em torno de $a = 0$.

9. Encontre o polinômio de Taylor de grau 2 para a função $f(x) = e^x sen(x)$ em torno do ponto $a = 0$. Determine um limitante superior do erro para essa aproximação quando $x \in [-\pi/4, \pi/4]$.

10. Determine um valor de n suficiente para que $|e^x - p_n(x)| \leq 10^{-5}$, para $-1 \leq x \leq 1$, onde $p_n(x)$ é o polinômio de Taylor expandido em torno de $a = 0$.

11. (opcional) Para $f(x) = e^x$, encontre a aproximação por polinômio de Taylor que garante um erro menor do que 10^{-7} para todo $x \in [-1, 1]$. Usando esta aproximação, escreva um programa que calcule e^x. Compare o resultado de sua função com o resultado da função $exp()$ da linguagem de programação que você utiliza.

12. (opcional) Responda as questões abaixo:

(a) Obtenha uma expansão usando polinômios de Taylor para $f(t) = 1/(1 + t^2)$, em torno do ponto $a = 0$. (Dica: Use a expansão em polinômio de Taylor para $1/(1 - x)$ desenvolvida no exercício acima aplicada no ponto $x = -t^2$.)

(b) Obtenha uma aproximação para $g(x) = tan^{-1}(x)$. Faça isso integrando o resultado do item (a), já que:

$$tan^{-1}(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

(c) Sabendo que $\tan^{-1}(1) = \pi/4$, use a aproximação acima para estabelecer que

$$\pi \approx 4\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1},$$

para n "grande".

(d) Determine quantos termos da fórmula do item (c) seria suficiente para obter uma aproximação de π com erro inferior a 10^{-10}. Esta é uma boa forma de determinar o número π?

Referências

[1] Franco, N. B., Cálculo Numérico, Prentice Hall, 2006.

[2] Atkinson, K., Elementary Numerical Analysis, Second Edition, John Wiley & Sons, 1993.

[3] Ruggiero, M., e Lopes, V., Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais, Segunda Edição, Makron, Books, 1998.