

Cálculo Numérico: Lista de Exercícios 3

Métodos para a Resolução de Sistemas Lineares

Método de Eliminação de Gauss:

1. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 4x_1 - 8x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Resolva-o pelo método de Eliminação de Gauss.

2. Repita o exercício 1 para o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

3. Verificar, usando o método de Eliminação de Gauss, que o sistema linear abaixo não tem solução.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

4. Use o método de Eliminação de Gauss com Pivotamento Parcial no sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}.$$

5. Seja o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 0.0001x_1 + 1.00x_2 = 1.00 \\ 1.00x_1 + 1.00x_2 = 2.00 \end{cases}$$

Simule uma máquina que opera com 3 dígitos na mantissa com arredondamento e resolva o sistema usando:

- (a) O Método de Gauss sem Pivotamento.
- (b) O Método de Gauss com Pivotamento Parcial.
- (c) Sabendo que a solução do sistema é aproximadamente

$$x^* = \begin{pmatrix} 1.0001 \\ 0.9999 \end{pmatrix}$$

comente os resultados.

6. Resolva os seguintes sistemas utilizando eliminação gaussiana sem e com pivoteamento, utilizando:

- a) Quatro dígitos na representação em ponto flutuante.

$$\begin{cases} 0,004 x_1 + 15,73 x_2 = 15,77 \\ 0,423 x_1 - 24,72 x_2 = -20,49 \end{cases}$$

Resposta: Sem pivoteamento $x_1 = 12,50$ e $x_2 = 0.9994$; Com pivoteamento $x_1 = 10,0$ e $x_2 = 1,0$.

b) Três dígitos na representação em ponto flutuante:

$$\begin{cases} 0,0002 x_1 + 2 x_2 = 5 \\ 2 x_1 + 2 x_2 = 6 \end{cases}$$

Resposta: Sem pivoteamento $x_1 = 0,0$ e $x_2 = 2,5$; Com pivoteamento $x_1 = 0,5$ e $x_2 = 2,5$.

c) Dois dígitos na representação em ponto flutuante:

$$\begin{cases} x_1 + 4 x_2 + 52 x_3 = 57 \\ 22 x_1 + 110 x_2 - 3 x_3 = 134 \\ 22 x_1 + 2 x_2 + 14 x_3 = 38 \end{cases}$$

Resposta: Sem pivoteamento $x_1 = 0,0$, $x_2 = 0,0$ e $x_3 = 1,1$; Com pivoteamento $x_1 = 1,0$, $x_2 = 1,0$ e $x_3 = 1,0$.

d) (Desafio!) Seis dígitos na representação em ponto flutuante:

$$\begin{cases} 0,001 x_1 + 1567 x_2 + 0,999 x_3 = 1568 \\ 926,4 x_1 + 0,6 x_2 - 929,0 x_3 = 1,0 \\ 1,0 x_1 - 2,0 x_2 + 1,0 x_3 = 0,0 \end{cases}$$

Resposta: Sem pivoteamento $x_1 = -0,5$, $x_2 = 0,997451$ e $x_3 = 0,5$; Com pivoteamento $x_1 = 1,0$, $x_2 = 1,0$ e $x_3 = 1,0$.

Fatoração de Matrizes (LU, Cholesky e LDL^t):

7. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 102x_3 = 3 \end{cases}$$

(a) Resolva-o usando a decomposição LU .

(b) Calcule o determinante de A usando a decomposição.

8. Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Verificar se A satisfaz as condições para a existência da decomposição LU (sem pivotamento).

(b) Decompor A em L e U .

(c) Através da decomposição LU , calcular o determinante de A .

(d) Resolver o sistema $Ax = b_1$, onde $b_1 = (0, -7, -5)^t$.

(e) Resolver o sistema $Ax = b_2$, onde $b_2 = (1, 1, 5)^t$.

9. Aplicando-se o método da decomposição LU à matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 3 & \dots \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ \dots & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

obteve-se as matrizes:

$$L = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \dots & -1 & \dots & 5 \\ \dots & 1 & \dots & -2 \\ \dots & 0 & 3 & -4 \\ 0 & \dots & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Preencher os espaços pontilhados com valores adequados.

10. Quais das matrizes A , B , e C abaixo podem ser decompostas na forma LU ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 7 & 17 \end{pmatrix}$$

Decompore as que forem possíveis.

11. Encontre a decomposição $A = LU$ das seguintes matrizes:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{d) } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

12. Uma vez realizada a decomposição $A = LU$, o determinante da matriz pode ser calculado como $\det(A) = u_{11} \times u_{22} \times \dots \times u_{nn}$. Calcule o determinante das matrizes da questão 11.

13. A matriz U da decomposição $A = LU$ pode ser reescrita como $U = D\bar{U}$ onde D é uma matriz diagonal com elementos $d_i = u_{ii}$ e a matriz \bar{U} possui elementos com valor 1 na diagonal.

a) Mostre que $\bar{u}_{ij} = u_{ij}/u_{ii}$.

b) Escreva a decomposição $A = LD\bar{U}$ das matrizes da questão 11.

c) Quando a decomposição $A = LD\bar{U}$ pode ser escrita como $A = LDL^t$?

14. Utilize as decomposições $A = LU$ da questão 11 para resolver os seguintes sistemas:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ para } b = (21, 0 \quad 3)^t \text{ e } b = (1, 0 \quad 0, 0)^t$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ para } b = (3 \quad 11 \quad 15)^t \text{ e } b = (1 \quad 1 \quad 1)^t$$

15. Calcule as inversas das matrizes da questão 11 com auxílio da decomposição $A = LU$.

16. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) Verificar se A satisfaz as condições para a existência da decomposição de Cholesky.

(b) Decompor A em GG^T .

(c) Através da decomposição de Cholesky, calcular o determinante de A .

(d) Resolver o sistema $Ax = b$, onde $b = (0, 6, 5)^t$.

Métodos Iterativos (Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel):

17. Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 102x_3 = 6. \end{cases}$$

(a) Verificar se o Método de Gauss-Jacobi é convergente para este sistema, usando o critério das linhas.

(b) Resolver o sistema com $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^t$ e $e = 10^{-2}$.

18. Repetir o exercício 11 para o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 20 \\ 7x_1 + x_2 + 102x_3 = 30. \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

(a) Verifique se o Método de Gauss-Seidel é convergente usando o critério de Sassenfeld.

(b) Aplique o Método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ e $\epsilon = 10^{-2}$.

20. Um método iterativo estacionário pode ser escrito na forma $x^{k+1} = Mx^k + c$, onde a matriz de iteração M e o vetor c são constantes. Utilizando a decomposição $A = D + E + F$ (onde D é uma matriz diagonal, E é uma matriz triangular inferior e F é uma matriz triangular superior) mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel podem ser escritos nessa forma, explicitando M e c para cada caso.

21. O método iterativo $x^{k+1} = Mx^k + c$ é convergente se, para *alguma* norma de matriz $\|\cdot\|$, $\|M\| < 1$ (condição suficiente para convergência). Seja

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0,6 & 0,4 \\ -0,3 & 0,1 & 0,0 \end{pmatrix}.$$

a matriz de iteração de um sistema $Ax = b$. Teste o critério de convergência para as normas abaixo.

- Norma do Máximo (soma máxima de linha) $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
- Norma 1 (soma máxima de coluna) $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

22. Resolver os sistemas lineares da questão 14 utilizando os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel com $x^0 = \mathbf{0}$. Utilize como critério de parada o erro absoluto

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon$$

com $\varepsilon = 0,01$ ou cinco iterações.

23. Tomando o limite $k \rightarrow \infty$ no processo iterativo $x^{k+1} = Mx^k + c$, verificamos que a solução exata satisfaz a equação

$$x = Mx + c.$$

Utilize esse resultado para provar que o erro entre duas iterações sucessivas está relacionado por:

$$e^{k+1} = Me^k$$

onde $e^k = x - x^k$.

Referências

- [1] FRANCO, Neide Bertoldi: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2006)
- [2] CAMPOS, Frederico Ferreira: Algoritmos Numéricos. Editora LTC (2007)
- [3] SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2003)
- [4] ATKINSON, Kendall: Elementary Numerical Analysis. second edition, John Wiley & Sons (1993)
- [5] RUGGIERO, M.A.G., LOPES, V.L.: Cálculo Numérico, aspectos teóricos e práticos. Makron Books (1997)