

Cálculo Numérico: Lista de Exercícios 2

Aritmética de Ponto Flutuante e Noções Básicas sobre Erros

1. Converta os números em representação binária para sua representação decimal, e os números em representação decimal para binária.

- (a) $(110011)_2$ (c) $(101.11011)_2$ (e) $(4.25)_{10}$
 (b) $(0.1000001)_2$ (d) $(366)_{10}$ (f) $(29/6)_{10}$

2. Seja um sistema de aritmética de ponto flutuante de quatro dígitos na mantissa, base decimal e que usa o arredondamento. Dados os números:

$$x = 0.9370 \times 10^4 \quad y = 0.1272 \times 10^2$$

efetue as operações: $x + y$ e $x \times y$. Obtenha o erro relativo no resultado supondo que x e y estão exatamente representados.

3. Sejam os seguintes números: $x = 0.5289$, $y = 0.8012$ e $z = 0.6024$, e considere um sistema de ponto flutuante com mantissa de 4 dígitos e base decimal. Mostre que:

- (a) $x(y + z) \neq x \times y + x \times z$
 (b) $(x + y) + z \neq x + (y + z)$

neste sistema.

4. Determine os erros relativos das quatro expressões do exercício anterior, considerando como valor exato o determinado pela calculadora com todas as casas decimais.
5. Seja uma máquina fictícia que opera em um sistema de ponto flutuante de base binária e que representa os números usando 32 bits. Seja o seguinte número representado nesta máquina:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0

Se o primeiro bit indica o sinal do número, o segundo é o sinal do expoente, os próximos seis são o expoente, e os vinte e quatro últimos são a mantissa, responda às seguintes perguntas:

- (a) O número está normalizado? Se não, normalize-o.
 (b) O número é positivo ou negativo?
 (c) Em módulo, o número é menor do que 1 ou maior do que 1?
 (d) Como ficaria a representação deste número no sistema $F(10,6,-10,10)$ (i.e., base decimal, 6 dígitos na mantissa, e expoente variando de $\{-10, \dots, 10\}$)?
6. Considere uma máquina cujo sistema de representação de números é definido por $F(10,4,-5,5)$ (i.e., base decimal, 4 dígitos na mantissa, e expoente no intervalo $\{-5, \dots, 5\}$). Pedem-se:
- (a) Qual o menor e maior número em módulo representados neste sistema?
 (b) Como será representado o número 73.758 nesta máquina, se for usado o arredondamento? E se for usado o truncamento?
 (c) Se $a = 42450$ e $b = 3$ qual o resultado de $a+b$?

(d) Qual o resultado da soma:

$$S = 42450 + \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{10 \text{ vezes}} = 42450 + \sum_{k=1}^{10} 3$$

(supondo que o computador efetua as operações da esquerda para a direita).

(e) Qual o resultado da soma:

$$S = \sum_{k=1}^{10} 3 + 42450.$$

7. Considere o seguinte sistema de ponto flutuante $F(2, 4, -4, 5)$. Qual o menor e maior número em módulo representados neste sistema?

8. Deseja-se calcular:

$$S = \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k^2}$$

no sistema $F(10, 3, -5, 4)$, usando arredondamento em todas as operações. Assim, efetue a soma:

(a) da direita para a esquerda;

(b) da esquerda para a direita.

Os valores obtidos em (a) e (b) são iguais?

9. Considere o sistema $F(2, 8, -10, 10)$. Represente no sistema os números: $x_1 = \sqrt{8}$, $x_2 = e^2$, e $x_3 = 3.57$. Existe algum com representação exata neste sistema?

10. Quantos números podem ser representados no sistema $F(2, 3, -1, 2)$? Represente os números $x_1 = (0.38)_{10}$, $x_2 = (5.3)_{10}$, e $x_3 = (0.15)_{10}$.

11. Tente evitar perda de dígitos significantes no cálculo das seguintes funções:

(a) $\frac{1 - \cos(x)}{x^2}$, para x próximo de zero;

(b) $\operatorname{sen}(a + x) - \operatorname{sen}(a)$, para x próximo de zero;

(c) $\log(1 + x) - \log(x)$, para x grande.

Isto é, tente reescrever as funções acima de forma que não haja subtração de dois números quase iguais. Use identidades trigonométricas nos itens (a) e (b).

12. Use a aproximação por polinômio de Taylor para evitar perda de dígitos significantes nas seguintes fórmulas quando x está próximo de zero:

(a) $\frac{e^x - 1}{x}$

(b) $\frac{e^x - e^{-x}}{2x}$

Referências

- [1] Franco, N. B., Cálculo Numérico, Prentice Hall, 2006.
- [2] Atkinson, K., Elementary Numerical Analysis, Second Edition, John Wiley & Sons, 1993.
- [3] Ruggiero, M., e Lopes, V., Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais, Segunda Edição, Makron, Books, 1998.