

Nome: _____

Atenção:

- i. Confira os dados da prova. Prova à lápis ou caneta. Assinar todas as folhas de caneta.
- ii. Mostre todos os passos do desenvolvimento e **justifique suas respostas**.
- iii. **Não é permitido consulta** a nenhum material ou equipamento, exceto uma calculadora.

1. (25 Pontos) A intensidade de uma fonte radioativa é dada por $I = I_0 e^{-\alpha t}$. Através de observações, tem-se que:

t	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
I	3.16	2.38	1.75	1.34	1.00	0.74	0.56

Usando o método dos mínimos quadrados:

- (a) faça uma linearização de forma que os parâmetros apareçam de forma linear;
 - (b) monte o sistema de equações normais e resolva-o;
 - (c) determine os valores de I_0 e α .
2. (30 Pontos) Seja a função contínua $f(x) = xe^x$ no intervalo $[-1, 1]$. Considere que deseja-se aproximá-la por um polinômio de grau um pelo método dos mínimos quadrados. Determine utilizando, obrigatoriamente, integração numérica pela regra de Gauss com 2 pontos ou trapézio:
- (a) a matriz do sistema de equações normais;
 - (b) o vetor do sistema de equações normais.

Comente a respeito de erros cometidos durante o cálculo da matriz e do vetor do sistema de equações normais. *Obs: não é preciso resolver o sistema.*

3. (25 Pontos) Um engenheiro calculou o valor de $I = \int_0^1 e^x dx$ usando a regra do trapézio repetida com espaçamento $h = 0.1$ e obteve a seguinte aproximação $I \approx 1.719713$. O engenheiro afirmou que o erro cometido em sua aproximação é menor do que $\varepsilon = 10^{-3}$.
- (a) Nesse caso, faça uma análise do erro considerando que o limitante superior do erro é $|E_T^R|$.
 - (b) Responda se a afirmação do engenheiro sobre o erro está correta ou não. Se não estiver correta, informe um possível espaçamento h que deve ser usado para calcular I com erro menor do que ε .
 - (c) Nesse caso, quantos sub-intervalos devem ser usados?

4. (30 Pontos) Considere a seguinte tabela que representa a velocidade de um atleta:

t	0	1	2	3	4
v(t)	1	η	4	0	0

- (a) Calcule a distância percorrida $I = \int_0^4 v(t)dt$ pela regra de Simpson (*simples*) com $h = 2$.
- (b) Sabendo que $v(t)$ é um polinômio de grau ≤ 3 , discuta o erro cometido no item (a).
- (c) Utilizando informações de (a) e (b), calcule η pela regra de Simpson (*repetida*) com $h = 1$.

Fórmulas:

$$I_T = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \quad |E_T^R| \leq \frac{M_2}{12} (b-a)h^2, \quad \text{com } M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

$$I_S = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad |E_S^R| \leq \frac{M_4}{180} (b-a)h^4, \quad \text{com } M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

Gauss com 2 pontos: $t_0 = -\sqrt{3}/3$, $t_1 = \sqrt{3}/3$, $w_0 = 1$, $w_1 = 1$.