Dinámica rotacional

ACADEMIA DE FÍSICA I

FIME UANL

Introducción

La *dinámica rotacional* estudia del movimiento de los cuerpos rígidos que giran o rotan sobre un eje fijo, por la acción de fuerzas externas.

Se denomina un *cuerpo rígido* a cualquier objeto real de forma definida que puede girar, sin deformarse, de modo que todas sus partes permanezcan a distancias constantes de un punto fijo llamado *radio de giro*.

Al analizar la dinámica de la rotación debemos encontrar la relación entre torque y la rotación que produce.

Momento de torsión

La causa de los cambios en el movimiento de rotación de un objeto en torno a cierto eje se mide mediante una cantidad llamada ***momento de torsión*** τ (letra griega *tau*), conocida como ***torca***.

El momento de torsión es una cantidad vectorial así como es la fuerza.

El momento de torsión se expresa como:

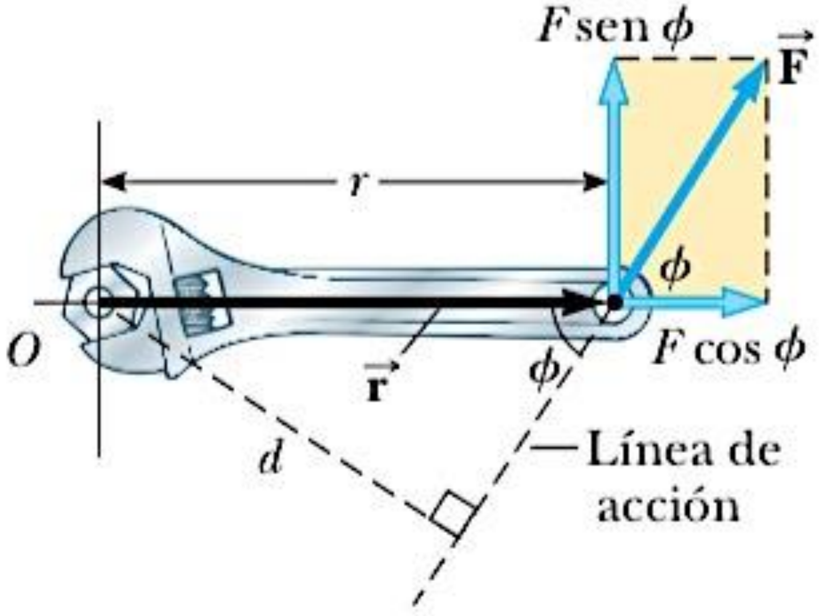
$$\vec{\tau} = \vec{r} \; x \; \vec{F}$$

La magnitud del momento de torsión asociada con la fuerza F alrededor del eje que pasa por un punto fijo como:

$$\mathrm{T} = r\,F\ \sin\emptyset = \mathrm{F}d$$

Donde *r* es la distancia entre el eje de rotación y el punto de aplicación de *F* y *d* es la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de *F.*

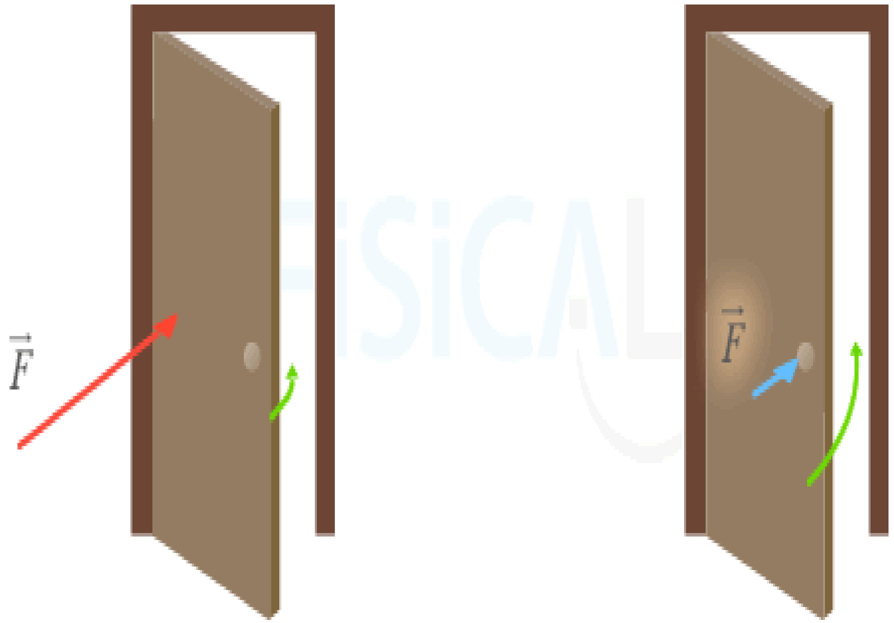
La cantidad d se llama ***brazo de momento*** (o brazo de palanca) de $\vec{F}$.



Ejemplo:

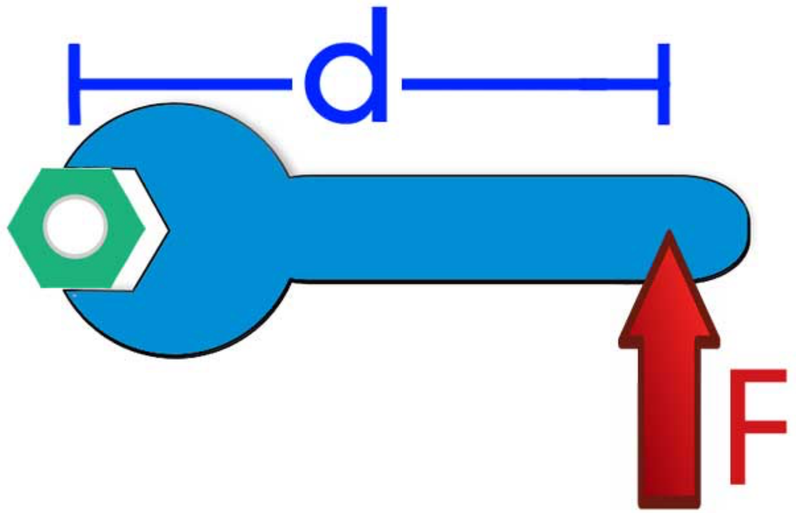
Cotidianamente se tiene la experiencia de empujar una puerta para abrirla o cerrarla. Una puerta es un cuerpo rígido, que gira en torno de un eje vertical a través de las bisagras.

Si se empuja perpendicularmente contra la pared cerca de la manija más lejana a las bisagras se produce una torca grande. Si se empuja la puerta en un punto cerca de la bisagra, el abrir o cerrar la puerta se vuelve más lento y se produce una torca menor, por lo que se tiene que empujar más fuerte.



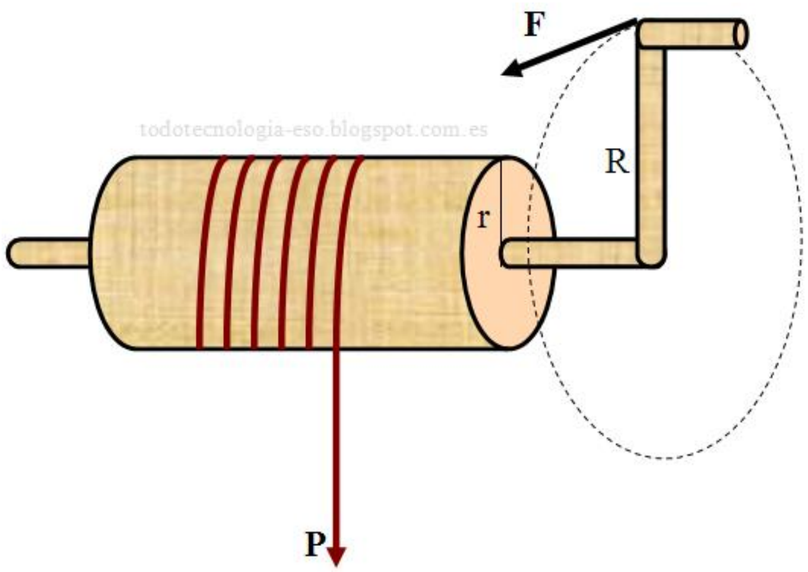
Unidades

Las unidades del momento de torsión son de fuerza por longitud, que en el sistema internacional es $N \cdot m$ y en el sistema inglés $lb_f \cdot ft$ (libra fuerza-pie).



Momento de torsión neto

El momento de torsión que actúa sobre una rueda o algún otro cuerpo libre para rotar en torno de un eje producirá una aceleración angular. Por ejemplo: el carrete portamangueras, consiste en una manivela sobre una rueda, se ejerce una torca al girarla para enrollar la manguera.



La aceleración angular de un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo es proporcional al momento de torsión neto que actúa en torno a dicho eje.

El momento de torsión neto que actúa sobre la partícula es proporcional a su aceleración angular, por lo que realizando semejanzas con la segunda ley de Newton queda:

Segunda Ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$

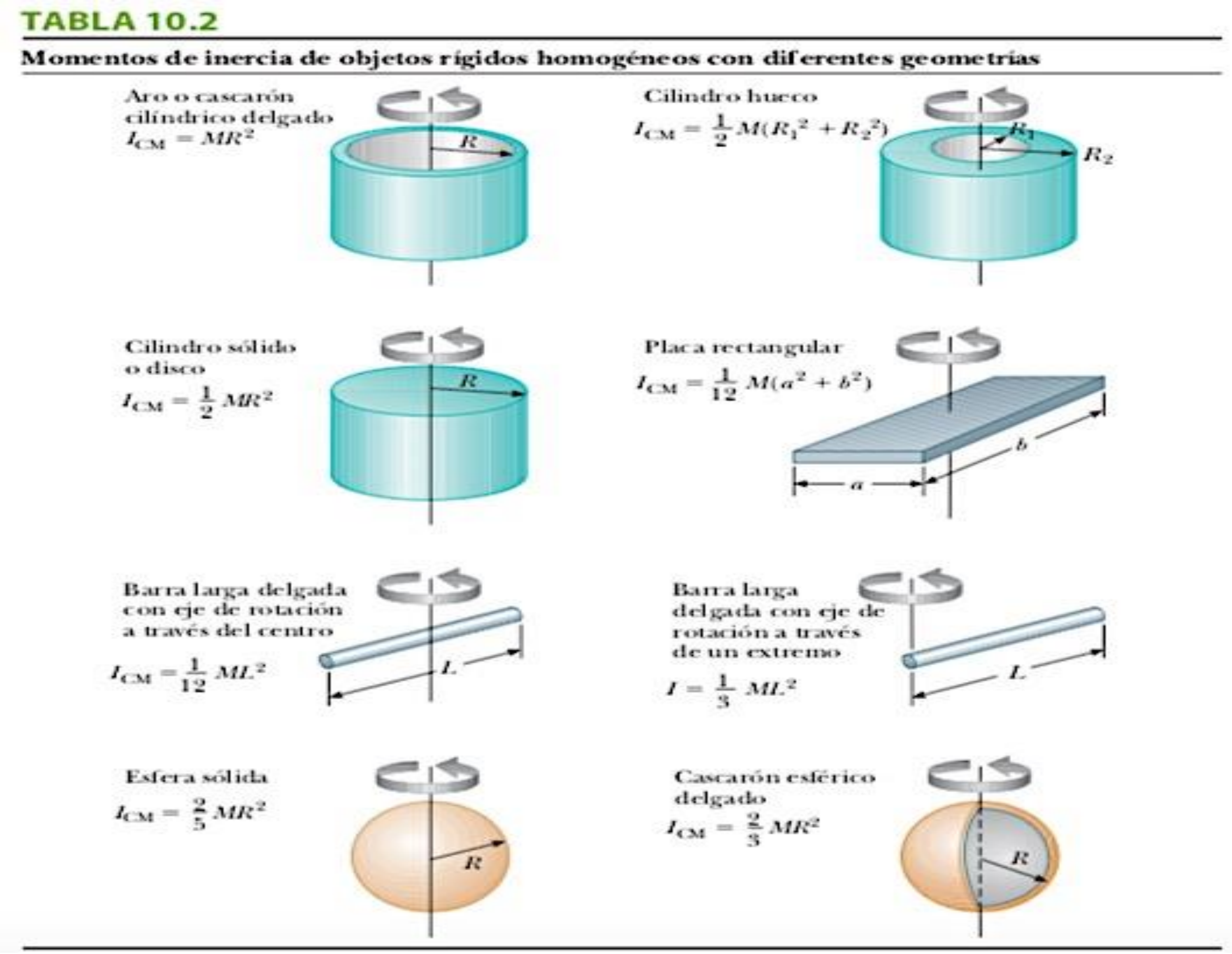
Momento de torsión neto $\sum \tau = I\alpha$

El símbolo *I* es una cantidad que se llama *momento de inercia del objeto* y depende de las masas de las partículas que componen el objeto y de sus distancias desde el eje de rotación. Tiene unidades $kg\ m^2$ para el SI y $slug\ ft^2$ en el sistema inglés.

El momento de torsión neto en torno al eje de rotación es proporcional a la aceleración angular del objeto, con un factor de proporcionalidad que es *I*, una cantidad que depende del eje de rotación y del tamaño y la forma del objeto.

La ecuación $\sum \tau_{ext} = I\alpha$ es la representación matemática del análisis de modelo de un **objeto rígido bajo un momento de torsión neto**.

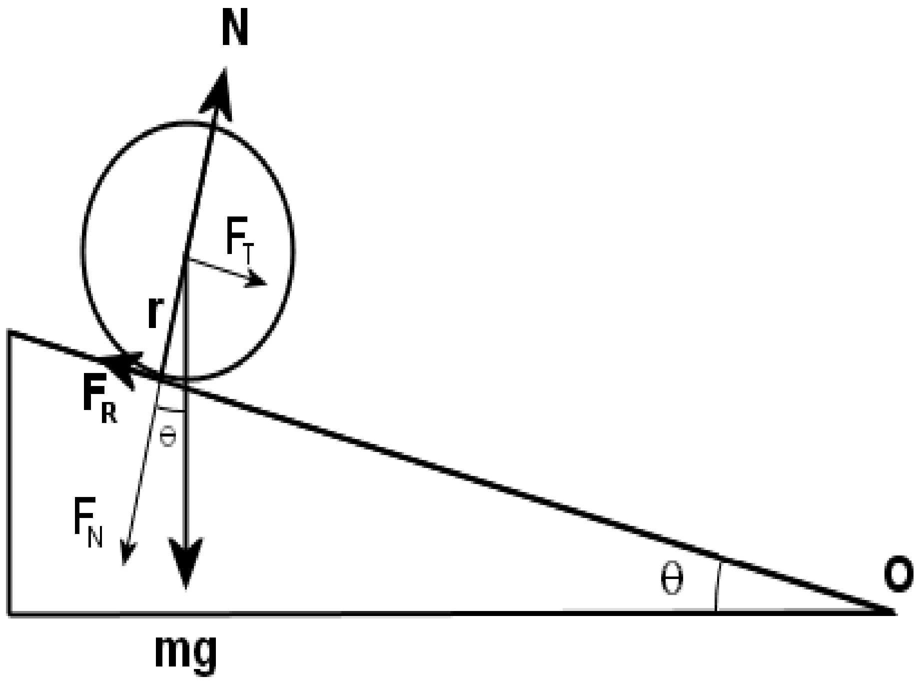
La siguiente tabla proporciona los momentos de inercia para varios objetos sobre ejes específicos. Los momentos de inercia de un objeto rígido con geometría simple son fáciles de calcular siempre que el eje de rotación coincida con un eje de simetría.



Fuente: Serway, Raymond, A. Y John, W. Jewett, Jr., Física para ciencias e ingeniería, vol. 1, 10.ª edición, Cengage, 2018.

Ejemplos:

1) Un cilindro sólido de 500 g de masa y 7.5 cm de radio rueda 20^0 por una rampa inclinada. ¿Cuál es la aceleración del cilindro? Suponga que es uniforme y rueda sin deslizarse.



Solución:

$F_N = fuerza\ normal$

$w = peso$

$F_f = fuerza\ de\ fricción$

$r = radio\ del\ cilindro$

$\alpha = aceleración\ angular$

$\alpha_T = aceleración\ tangencial$

$\tau = torca = rF_f$

$I = \frac{1}{2} MR^2$

$$r(F_f) = \frac{1}{2} m a_t r$$

$$(F_f) = \frac{1}{2} m a_t$$

$$2F_f = m a_t$$

$$a = \frac{2F_f}{m}$$

Sustitución:

$$F_f = mg\sin\theta \text{ - m}a_T$$

$$a_T = \frac{2F_f}{m} = \frac{2(mg\sin\theta - \mathrm{m}a_T)}{m}$$

$$a_T = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

$$a_T = \frac{2}{3}(9.8\ m/s^2)\sin(20)$$

$$\boldsymbol{a_T = 2.23\ m/s^2}$$

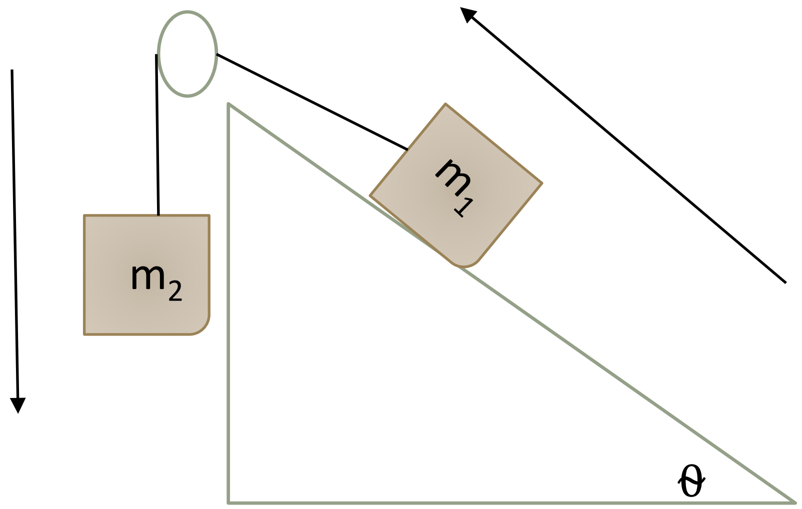
2) En un plano inclinado a 36.87^0 con respecto a la horizontal hay una masa m_1 de 2 kg unida por una cuerda a otra masa m_2 de 5 kg que cuelga. La cuerda pasa por una polea de masa m_p de 0.1 kg y un radio r_p de 0.1 m. El coeficiente de fricción entre la masa m_1 y el plano inclinado es de 0.2.

a) Determina la aceleración de las masas

b) Calcule la tensión en cada cuerda

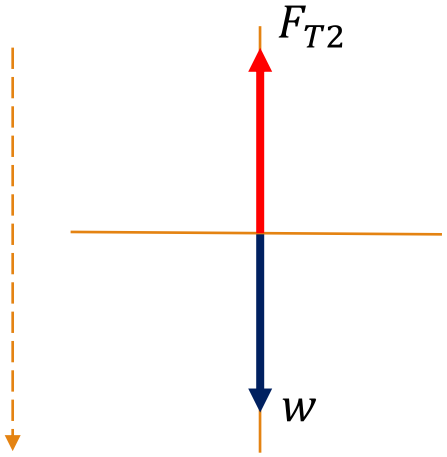
c) Calcule la inercia rotacional de la polea

d) Suponiendo que el sistema se mueve desde el reposo, ¿qué velocidad tendrá la masa m_2 al descender 50 cm?



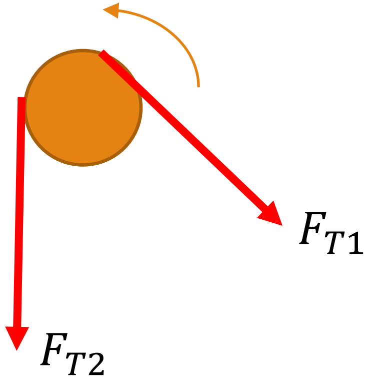
DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

masa 2



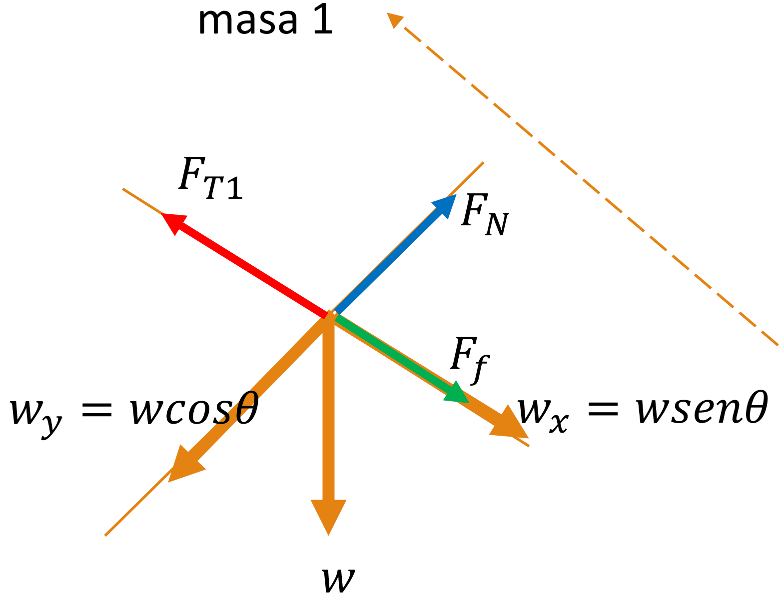
$$\sum F_y = m_2 a$$

polea



$$\sum \tau = \mathrm{I}\alpha$$

masa 1



$$\sum F_x = m_1 a$$

De los diagramas de cuerpo libre salen tres ecuaciones

1) $T_1 - F_f - w_{1x} = m_1 a$

2) $w_2 - T_2 = m_2 a$

3) $T_2 r - T_1 r = I\alpha$

De estas tres ecuaciones sale un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas , de las cuales se puede usar cualquier método de solución como: suma/resta, sustitución,matrices por montante, cofactores,Cramer etc.
En este caso en particular se uso el método de sustitución, es decir, se sustituyó en la ecuación 3 la tensión 1 y tensión 2 despejada de las ecuaciones 1 y 2.Para llegar a obtener la aceleración.

Solución:

Datos:

- $m_1 = 2$ kg
- $m_2 = 5$ kg
- $\mu_k = 0.2$
- $r_p = 0.1$ m
- $m_p = 0.1$ kg

Para $m_{1:}$

1) $T_1 - F_f - w_1 = m_1 a$

$$T_1 =$$

Para $m_{2:}$

2) $w_2 - T_2 = m_2 a$

Para la polea:

3) $T_2 r - T_1 r = I\alpha$

$$T_2 r - T_1 r = (\frac{1}{2} m r^2)\frac{a}{r}$$

$$a = \alpha r$$

a) aceleración

$$a = \frac{2w_2 - 2F_f - 2w_{1x}}{(m_p + 2m_2 + 2m_1)}$$

$$a = \frac{2(49N) - 2(3.13N) - 2(11.76N)}{(0.1kg + 2(5kg) + 2(2kg))}$$

$$F_f = m_1 g \cos \emptyset = (2\ kg)\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)\cos 36.87 = 3.13\ N$$

$$w_{1x} = m_1 g \sin \emptyset = (2\ kg)\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)\sin 36.87 = 11.76\ N$$

$$w_2 = m_2 g = (5\ kg)\left(9.8\frac{m}{s^2}\right) = 49\ N$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$a = \frac{68.22\ N}{14.1\ kg}$$

$$\boldsymbol{a = 4.83\ \frac{m}{s^2}}$$

b) Tensión en cada cuerda

F_{T1}

$F_{T1} = m_1 a + F_f + w_{1x}$

$= (2kg)(4.83\,\frac{m}{s^2}) + 3.13\text{ N} + 11.76\text{ N}$

$= 9.66\text{ N} + 3.13\text{ N} + 11.76\text{ N}$

$\mathbf{F_{T1} = 24.55\ N}$

F_{T2}

$$w_2 - F_{T2} = m_2 a$$

$$F_{T2} = w_2 - m_2 a$$

$= 49\text{ N} – (5kg)(4.83\,\frac{m}{s^2})$

$$\boldsymbol{F_{T2}} = \mathbf{24.85\ N}$$

c) Inercia de la polea

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

$$I = \frac{1}{2}(0.1kg)(0.1m)^2$$

$$\boldsymbol{I = 5x10^{-4}\ kg\ m^2}$$

d) velocidad

$v_i = 0$

$a = 4.83\ \frac{m}{s^2}$

$\Delta y = 50\ cm = 0.5\ \text{m}$

$$Vf^2 = Vi^2 + 2a\Delta\text{y}$$

$$Vf = \sqrt{2a\Delta\text{y}} = \sqrt{2(4.83\ \frac{m}{s^2}\ )(0.5\ m)}$$

$$\boldsymbol{Vf = 2.19\ m/s}$$

Referencia:

Física para ciencias e ingeniería

Autores: Serway, Jewett

Editorial: Cengage

10ª Edición

Física I Problemario

Autores: Franco Quintanilla, Juan Antonio

Rodríguez Valladares, Flor Elizabeth

Ramírez Montemayor, Victor

Sánchez Ruiz, Gustavo Adolfo

Editorial: Cengage

1ª Edición