UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CURSO DE CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO

2ª – AVALIAÇÃO (RESOLUÇÃO)

1ª Questão. O produto escalar possui diversas aplicações na geometria, álgebra e na física. Entre as alternativas abaixo aquela que não corresponde uma aplicação direta da definição de produto escalar é:

a) (   ) Módulo de vetor
b) (   ) Ortogonalidade entre vetores.
c) (**X**) Área de um paralelogramo
d) (   ) Ângulos entre retas.
e) (   ) Projeção de um vetor.

SOLUÇÃO:
A área de um paralelogramo é dado diretamente pelo produto vetorial

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sen\theta$$

Onde: $\vec{u}$, $\vec{v}$ são os lados do paralelogramo e θ é ângulo entre $\vec{u}$, $\vec{v}$.

2ª Questão. O duplo produto vetorial usualmente denotado por $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ possui algumas características diferenciadas do produto escalar. Dado o duplo produto $(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u}$. Qual alternativa correta:

a) (   ) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.
b) (   ) $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w}$.
c) (   ) $|\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})|$ é o volume do paralelepípedo de arestas $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
d) (   ) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{0}$, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.
e) (**X**) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ é um vetor coplanar com $\vec{v}$ e $\vec{w}$, com $\vec{v}$ não colinear com e $\vec{w}$.

SOLUÇÃO:

Se $\vec{v}$, $\vec{w}$ forem linearmente independentes, qualquer outro vetor $\vec{z}$ é coplanar com $\vec{v}$, $\vec{w}$ em particular tomando $\vec{z} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$. Assim, $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ é coplanar com $\vec{v}$, $\vec{w}$.

3ª Questão. Dada a equação $r: \begin{cases} y = -3 \\ \frac{x-1}{4} = \frac{z}{-1} \end{cases}$. A afirmação correta em relação a reta r é:

a) (   ) O vetor diretor de r é $\vec{v} = (4, -3, -1)$.
b) (   ) A reta r é paralela ao eixo Oy.
c) (   ) A reta r intercepta o plano xOz no ponto $P\left(-\frac{1}{4}, -3, 0\right)$.
d) (   ) Paralela com reta $s: \begin{cases} y = -3 \\ \frac{z-1}{4} = \frac{x}{-1} \end{cases}$.
e) (**X**) O vetor diretor tem módulo $\sqrt{17}$.

SOLUÇÃO:

Dado a reta r, o vetor diretor de r é $\vec{v} = (4, 0, -1)$ e um ponto de r é A(5, -3, -1) fazendo x = 5. Assim

$$|\vec{v}| = \sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 0 + 1} = \sqrt{17}.$$

4ª Questão. O torque é uma grandeza física vetorial (representada por $\vec{\tau}$) e está relacionada com a possibilidade de um corpo sofrer uma torção ou alterar seu movimento de rotação. O cálculo do torque é $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Se $\vec{r} = (2\vec{\imath} + \vec{\jmath})$m e $\vec{\tau} = \left(3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 9\vec{k}\right)N.m$, sabendo que a componente de $\vec{F}$ na direção $\vec{\jmath}$ é -2, então a força $\vec{F}$ é:

a) (**X**) $(-13\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k})N$.
b) (   ) $(3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 9\vec{k})N$.
c) (   )$(-2\vec{\jmath} + 9\vec{k})N$.
d) (   ) $(3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})N$.
e) (   ) $(3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 13\vec{k})N$.

SOLUÇÃO:

Sejam

1 - $\vec{F} = (x, y, z)$, temos que y = -2, componente na direção $\vec{\jmath}$.

$$2 - \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow (3, -6, 9) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ x & -2 & z \end{vmatrix} \rightarrow (3, -6, 9) = (z, -2z, -4 - x) \rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ -2z = -6 \\ -4 - x = 9 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x = -13 \end{cases}$$

Portanto, $\vec{F} = (-13, -2, 3) = \left(-13\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right)N$.

5ª Questão. Analise as seguintes afirmações:

I – O produto **VETORIAL** não é associativo.
II – O resultado do produto **ESCALAR** é número.
III – O produto **ESCALAR** pode ser definido no $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.
IV – O produto **VETORIAL/MISTO** é zero se um dos vetores nulo.
É correto afirmar:

a) (   ) VETORIAL – ESCALAR – MISTO – MISTO.
b) (   ) MISTO – ESCALAR – MISTO – MISTO.
c) (**X**) VETORIAL– ESCALAR – ESCALAR – MISTO.
d) (   ) MISTO– ESCALAR – VETORIAL – MISTO.
e) (   ) MISTO– ESCALAR – MISTO – VETORIAL.

6ª Questão. Usando as propriedades de produto escalar. Mostre que:

$$\textbf{Se } \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0} \textbf{ para todo } \vec{\boldsymbol{v}}, \textbf{ então } \vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{0}}.$$

SOLUÇÃO:

Se $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$ para todo $\vec{\boldsymbol{v}}$, tomando $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}}$, temos $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$ pela propriedade (I) de produto escalar temos $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{0}}$.

7ª Questão. Mostre que os símbolos de produto escalar ($\cdot$) e produto vetorial ($\times$) podem ser permutados, ou seja:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) = (\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) \cdot \vec{\boldsymbol{w}}$$

SOLUÇÃO:

Tomando

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) \overset{1}{\triangleq} (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \overset{2}{\triangleq} -(\vec{w},\vec{v},\vec{u}) \overset{3}{\triangleq} (\vec{w},\vec{u},\vec{v}) \overset{4}{\triangleq} \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) \overset{5}{\triangleq} (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$$

Em: 1 – usamos a definição produto misto de vetores.
2 – usamos a propriedade cíclica do produto misto.
3 – usamos a propriedade cíclica do produto misto.
4 – usamos a definição de produto misto de vetores.
5 – usamos a propriedade comutativa do produto escalar.

8ª Questão. Calcular o volume do tetraedro A(1,0,2), B(-1,0,3), C(2, 4, 1) e D(-1, -2, 2). E para este calcule a medida da altura traçada do vértice A.

SOLUÇÃO:

O volume do tetraedro é $V = \frac{|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|}{6}$. Calculando os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, temos:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,0,3) - (1,0,2) = (-2,0,1)$.

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,4,1) - (1,0,2) = (1,4,-1)$.

$\overrightarrow{AD} = D - A = (-1,-2,2) - (1,0,2) = (-2,-2,0)$.

Logo, $|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \left\|\begin{matrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{matrix}\right\| = |10| = 10 \rightarrow V = \frac{|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|}{6} \rightarrow V = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}\ u.v.$.

A altura $h = \frac{V}{A_b}$, onde A_b é a área da base, ou seja $A_b = \frac{|\overrightarrow{BC}\times \overrightarrow{BD}|}{2}$.

$\overrightarrow{BC} = C - B = (2,4,1) - (-1,0,3) = (3,4,-2)$.

$\overrightarrow{BD} = D - B = (-1,-2,2) - (-1,0,3) = (0,-2,-1)$. Assim,

$$|\overrightarrow{BC}\times \overrightarrow{BD}| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{matrix}\right\| = |(-8,3,-6)| = \sqrt{(-8)^2 + (3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{109}$$

Logo, $A_b = \frac{|\overrightarrow{BC}\times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{109}}{2}$.

Portanto, $h = \frac{V}{A_b} \rightarrow h = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{\sqrt{109}}{2}} = \frac{10\sqrt{109}}{327}$ u. c..

9ª Questão. Verifique se os pontos $A(1,2,-1)$, $B(2,1,-3)$ e $C(1,4,0)$ não são colineares pela definição de reta e calcule a área do triângulo ABC.

SOLUÇÃO:

Sejam A(1, 2, -1) o ponto onde a reta r passa e o vetor diretor dado por $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Logo,

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,1,-3) - (1,2,-1) = (1,-1,-2)$. Assim a equação da reta na forma simétrica é:

$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-2}$

Tomando o ponto C(1,4, 0), x = 1, y = 4, z = 0, temos: $\frac{1-1}{1} = \frac{4-2}{-1} = \frac{0+3}{-2} \rightarrow 0 = -2 = -\frac{3}{2}$ (Falso)

Logo, os pontos A,B e C não são colineares.

A área do triangulo ABC é A = $\frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|}{\mathbf{2}}$

O vetor $\overrightarrow{AC} = C - A = (1,4,0) - (1,2,-1) = (0,2,1)$ e

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right\| = |(3,-1,2)| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

Logo, a área do triângulo ABC é A = $\frac{\sqrt{\mathbf{14}}}{\mathbf{2}}$ **u.a..**

10ª Questão. Determine a equação simétrica da reta que passa por ponto médio M do segmento de extremidades $A(-1,0,2)$ e $B(4,-1,5)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$.

SOLUÇÃO:

Seja M o ponto médio de AB, temos que $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$. Assim,

$M(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$. e $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ = (-1, 0, 2), $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ = (4, -1, 5). Assim:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (2, 13, 1).$$

Logo, a equação simétrica da reta r é:

$$r: \frac{x - \frac{3}{2}}{2} = \frac{y + \frac{1}{2}}{13} = \frac{z - \frac{7}{2}}{1}$$