Análisis de series de tiempo

Técnicas básicas y nuevas tendencias

Dr. Raúl Salgado García

Centro de Investigación en Ciencias - UAEM
Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica A. C.

07 de julio de 2025

Escuela Nacional de Supercómputo:
07-11 de julio de 2025.

Día 3

Métodos basados en entropía

Contenido

Entropía

Entropía de Shannon

Entropía

Concepto de entropía

El concepto de **entropía** se originó en el campo de la termodinámica a mediados del siglo XIX, introducido por el físico alemán Rudolf Clausius en 1865. Así, en el campo de la física, **la entropía es una medida del desorden o la aleatoriedad** de un sistema termodinámico.
A medida que un sistema se desordena, su entropía aumenta, y este concepto fue central para formalizar la segunda ley de la termodinámica, que afirma que la entropía de un sistema cerrado siempre tiende a aumentar.
Más tarde, a mediados del siglo XX, el concepto de entropía fue adoptado en otros campos, incluyendo la teoría de la información, donde fue formalizado por Claude Shannon en 1948.
La entropía se convirtió en un concepto básico de la teoría de la información, un área de estudio que aborda cómo se puede medir, almacenar y transmitir información de manera eficiente.

Entropía

Concepto de entropía

En teoría de la información, la **entropía** cuantifica la incertidumbre inherente en una fuente de datos. La idea es que cuanto más impredecible sea el contenido de un mensaje, mayor será la cantidad de información que contiene. Si el contenido de un mensaje es completamente predecible, su entropía es baja, y si es completamente impredecible, su entropía es alta.

Entropía

Entropía de Shannon

La entropía de Shannon, que es la versión más conocida, se define matemáticamente para una variable aleatoria X que tiene un conjunto de posibles valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cada uno con una probabilidad asociada $p(x_i)$. La fórmula de la entropía de Shannon es:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log_2 p(x_i)$$

Donde:
- $H(X)$ es la entropía de la variable aleatoria X, - $p(x_i)$ es la probabilidad de que el valor x_i ocurra, - $\log_2$ es el logaritmo en base 2 (se usa para medir la entropía en bits).

Entropía

Interpretación

Si una fuente genera mensajes que siempre tienen el mismo valor, su entropía es 0, porque no hay incertidumbre en el mensaje (es completamente predecible).

Si cada mensaje es completamente aleatorio y todas las posibilidades son igualmente probables, la entropía es máxima porque hay una máxima incertidumbre sobre el próximo mensaje que se recibirá.

Entropía

Definición

Definición: (Entropía de Shannon)

La entropía $H(X)$ de una variable aleatoria X se define como

$$H(X) = -\mathbb{E}[\log_2 (p(X))]$$

siendo $p(X)$ la función de probabilidad cuando X es discreta o la función densidad en el caso en que X es continua.

Cuando la v.a. X es continua, entonces la entropía se calcula como una integral:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2(p(x)) dx.$$

Entropía conjunta

Definición de entropía conjunta

Definición: (Entropía conjunta)

La entropía $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de un vector aleatorio $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, se define como:

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = -\mathbb{E}[\log_2 (p(X_1, X_2, \ldots, X_n))]$$

siendo $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la función de probabilidad cuando $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un v.a. discreto o la función densidad en el caso en que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un v.a. continuo.

La entropía conjunta para una colección de v.a.'s se interpreta de igual forma que la entropía para una sola v.a.: nos ofrece una medida de la incertidumbre (o "grado de aleatoriedad") del vector aleatorio.

Entropía conjunta

Algunas propiedades

- La entropía de Shannon (univariada y conjunta) siempre es positiva: $H(X) \geq 0$, $H(X_1, X_2 \ldots, X_n) > 0$.
- Cuando las variables son independientes, la entropía conjunta es la suma de las entropías univariadas:

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = H(X_1) + H(X_2) + \cdots + H(X_n), \quad \text{con } X_1, X_2, \ldots X_n \text{ independientes.}$$

- La entropía conjunta está acotada por la suma de las entropías univariadas:

$$0 \leq H(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq H(X_1) + H(X_2) + \cdots + H(X_n).$$

Entropía condicional

Entropía condicional

Entropía condicional

Definición de entropía condicional

Definición: (Entropía condicional)

Dadas dos v.a.s X y Y, la entropía condicional de la variable Y dada la variable X se define como:

$$H(Y|X) = -\mathbb{E}[\log_2(p(Y|X))].$$

De manera explícita, cuando las v.a.'s son discretas o continuas, la entropía condiciona se calcula como sigue:

$$H(Y|X) = -\sum_x \sum_y p(x,y)\log_2(p(y|x)), \qquad H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\log_2(p(y|x))dx.$$

Entropía condicional

Propiedades

- Es interesante notar que la entropía condicional se relaciona con la entropía de Shannon como:
$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X),$$
lo que se interpreta como la incertidumbre del vector aleatorio (X,Y) menos la incertidumbre de la v.a. X.
- Si las v.a.'s X y Y son independientes entonces $H(Y|X) = H(Y)$ lo que nos da a entender que $H(Y|X)$ mide la incertidumbre en la variable Y por la influencia de la variable X, y por lo tanto ofrece una forma indirecta de medir dicha influencia.
- La entropía condicional se puede generalizar para vectores aleatorios en general: si X es un vector aleatorio y si Y es otro vector aleatorio, entonces la entropía condicional de Y dado X se define como
$$H(Y|X) = -\mathbb{E}[\log_2(p(Y|X))].$$

Información mutua

Información mutua

Información mutua

Definición de **entropía relativa**

Definición: (Entropía relativa)

Dadas dos v.a.s X y Y, con distribuciones $p(x)$ y $q(x)$ respectivamente, definimos la **entropía relativa** o **divergencia Kullback-Leibler** de q respecto a p como:

$$D_{\mathrm{KL}}(p||q) := \sum_x p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right)$$

La divergencia Kullback-Leibler, $D_{\mathrm{KL}}(p||q)$, de q respecto a p se interpreta como una medida de que tanto difiere una distribución,$q(x)$, respecto de otra distribución de referencia, $p(x)$, lo que cuantifica la cercanía entre ambas distribuciones.

Aunque $D_{\mathrm{KL}}(p||q)$ mide la **cercanía entre** p **y** q, esta medida **no es una distancia**.

Información mutua

Definición de **información mutua**

Definición: (información mutua)

Dadas dos v.a.'s X y Y con distribución conjunta $P(x, y)$ y con marginales $p(x)$ y $q(y)$ de X y Y respectivamente, definimos la **información mutua** entre X y Y como:

$$I(X, Y) := \sum_{x} p(x) \log \left(\frac{P(X, Y)}{p(X) q(Y)} \right).$$

Información mutua

Algunas propiedades

- En términos de la entropía condicional podemos escribir la información mutua como:

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

  Esto quiere decir que la información mutua $I(X, Y)$ mide una reducción en la incertidumbre de X (medido por H(X)) debido a la información que nos provee la variable Y (porque restamos la incertidumbre de X dada Y)
- La información mutua de X y X es la entropía: $I(X, X) = H(X)$

- La **información mutua** es en realidad la entropía relativa de la distribución conjunta respecto del producto de los marginales:

$$I(X, Y) = D_{\mathrm{KL}}(P(X, Y) || p(X)q(Y))$$

- Esto indica que $I(X, Y)$ es una medida de que tan "cerca" está la distribución conjunta de ser el producto de los marginales
- ... o alternativamente, que tan "cerca" están X y Y de ser **independientes**

Índice de Brouty

Índice de Brouty

Índice de Brouty

QUANTITATIVE FINANCE

Quantitative Finance >

Volume 23, 2023 - Issue 6

Submit an article | Journal homepage

Enter keywords, authors, DOI, etc | This Journal

Advanced sea

495 Views

8 CrossRef citations to date

0 Altmetric

Research Papers

A statistical test of market efficiency based on information theory

Xavier Brouty & Matthieu Garcin

Pages 1003-1018 | Received 28 Oct 2022, Accepted 28 Apr 2023, Published online: 23 May 2023

Cite this article | https://doi.org/10.1080/14697688.2023.2211108 | Check for updates

Full Article | Figures & data | References | Citations | Metrics | Reprints & Permissions | Read this article

Abstract

We determine the amount of information contained in a time series of price returns at a given time scale, by using a widespread tool of the information theory, namely the Shannon entropy, applied to a symbolic representation of this time series. By deriving the exact and the asymptotic distribution of this market information indicator in the case where the efficient market

Related research

People also read | Recommended articles | Cited by 8

How does price (in)efficiency influence cryptocurrency portfolios performance? The role of multifractality >

Índice de Brouty
Conceptos preliminares

- Consideremos una serie de precios de algún activo, que denotaremos como:

$$\{P_0, P_1, P_2, \dots P_n\}$$

- A partir de la serie, construímos una serie simbólica a partir de los rendimientos:

$$X_i := \mathbb{I}_{P_i - P_{i-1} > 0}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

  Esto genera una muestra de 0's y 1's: el valor "0" indica que hubo pérdida, mientras que "1" indica que hubo ganancia.

- El contenido de información de las primeras L variables de pérdida/ganancia será:

$$H_L := H(\mathbf{X}_1^L) = -\sum_{x_1, x_2, \dots, x_L} p(x_1, x_2, \dots, x_L) \log_2 \left(p(x_1, x_2, \dots, x_L)\right),$$

  donde $\mathbf{X}_1^L := (X_1, X_2, \dots, X_L)$.

Índice de Brouty

Conceptos preliminares

La hipótesis de mercados eficientes indica que no podemos predecir el valor del rendimiento al tiempo $L+1$, X_{L+1}, disponiendo de toda la información de los rendimientos desde X_1 hasta X_L.

Esto indica que X_{L+1} debe cumplir las siguientes propiedades:

- X_{L+1} es una variable aleatoria independiente de las v.a.'s $X_1, X_2, \ldots X_L$.
- X_{L+1} debe ser una variable aleatoria de Bernoulli con parámetro $p = 1/2$.

A estas propiedades del vector aleatorio $(X_1, X_2, \ldots X_L, X_{L+1})$ las denominaremos **hipótesis de eficiencia**.

- El contenido de información de las primeras $L+1$ variables de indicadoras de rendimientos **bajo la hipótesis de eficiencia** es

$$\begin{aligned} H^*_{L+1} &= H(\mathbf{X}_1^L) = -\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_L} p(x_1,x_2,\ldots,x_{L+1}) \log_2\left(p(x_1,x_2,\ldots,x_{L+1})\right), \\ &= -\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_L} p(x_1,x_2,\ldots,x_L)p(x_{L+1}) \log_2\left(p(x_1,x_2,\ldots,x_L)p(x_{L+1})\right), \end{aligned}$$

Entonces, bajo la hipótesis de eficiencia, obtenemos:

$$H^*_{L+1} = 1 + H_L,$$

Con lo cual definimos el índice de Brouty como:

$$I^* := H^*_{L+1} - H_{L+1} = 1 + H_L - H_{L+1}.$$

Referencias

Algunas referencias

- Cover, T. M. (1999). Elements of information theory. John Wiley & Sons.
- Ash, Robert B. Information theory. Courier Corporation, 2012.
- Cover, T. M., & Thomas, J. A. (1991). Entropy, relative entropy and mutual information. Elements of information theory, 2(1), 12-13.
- Brouty, X., & Garcin, M. (2023). A statistical test of market efficiency based on information theory. Quantitative finance, 23(6), 1003-1018.