UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Tópicos de Ciências Exatas

ÁREA DO CONHECIMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E ENGENHARIAS

2024/2

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Exercício 07 (da semana passada)

Comportamento exponencial do crescimento da bactéria *Escherichia coli*

- A *Escherichia coli* (*E. coli*), é um tipo de bactéria que habita naturalmente o intestino das pessoas e de alguns animais, sem que haja qualquer sinal de doença.
- Porém, há alguns tipos de *E. coli* que são nocivos para as pessoas e que entram no organismo devido ao consumo de alimentos contaminados, causando infecções intestinais e infecções urinárias.

- A *E. coli* se reproduz a partir de um processo chamado fissão binária, que começa por uma elongação celular, propiciando a formação de um septo e culmina na separação em duas células-filhas, idênticas àquela original

4 células **8 células** **16 células** **32 células**

https://www.youtube.com/watch?v=KIpcCyuypzg

- Sabendo que a lei matemática que descreve o comportamento da *E. coli* pode ser dada por

$$N(t) = 2^{3t+1}$$

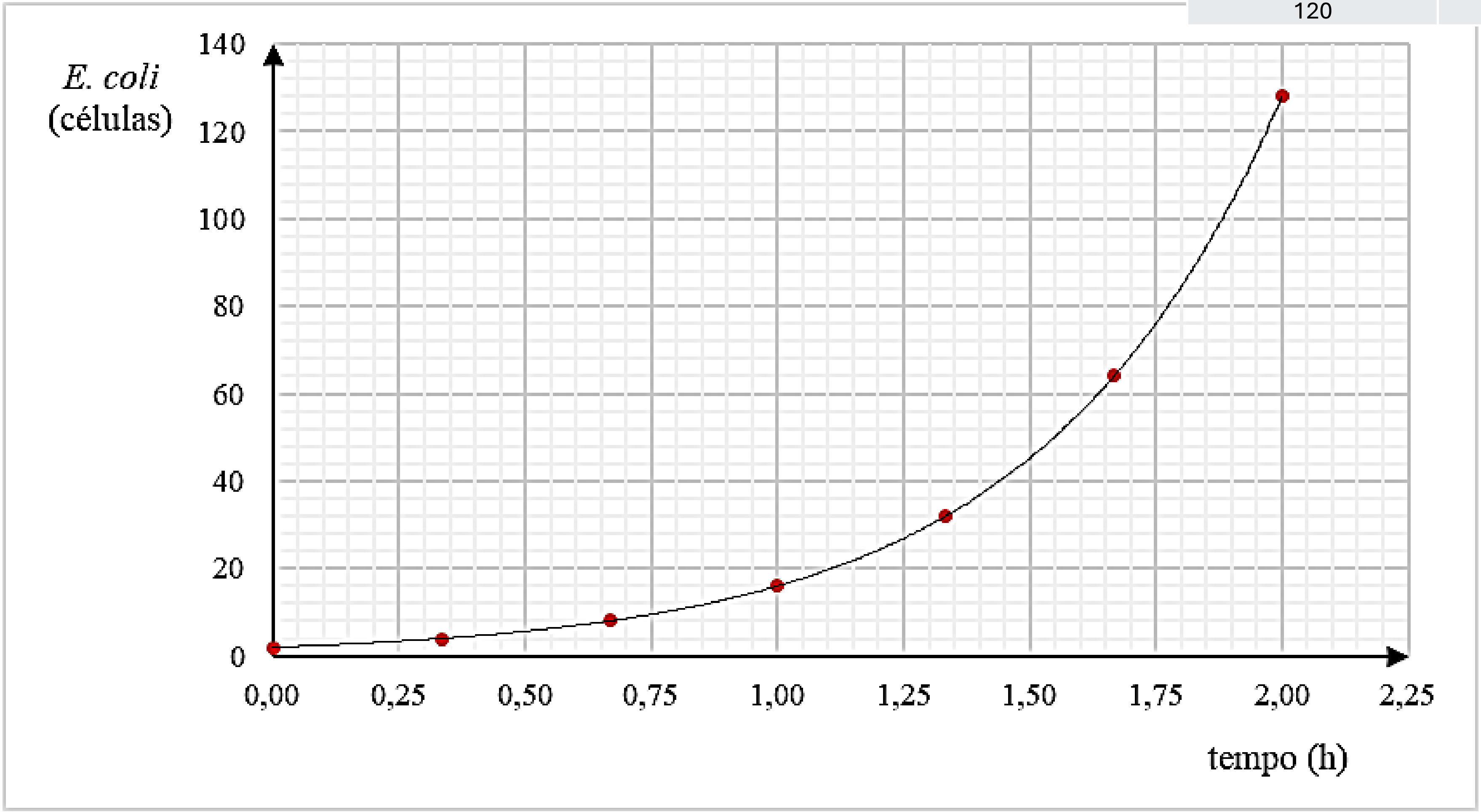
  onde t é o tempo, em horas, e N é o número de células, responda:

a) Podemos determinar a população de *E. coli* em 24 horas?

b) Quanto tempo levará para que a população de *E. coli* atinja 1 milhão de células?

Comportamento exponencial do crescimento da bactéria *Escherichia coli*

Tempo (min)	Tempo (h)	Células (E. coli)
0	0	2
20	0,33	4
40	0,67	8
60	1	16
80	1,33	32
100	1,67	64
120	2	128



UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

$N(t) = 2^{3t+1}$

a) Podemos determinar a população de *E. coli* em 24 horas?

$N(24) = 2^{3 \cdot 24+1} = 2^{73}$

$N(24) = 9{,}4447 \times 10^{21}$ células

b) Quanto tempo levará para que a população de *E. coli* atinja 1 milhão de células?

$N(t) = 1000.000 \Rightarrow 1000000 = 2^{3t+1}$

$1000000 = 2^{3t} \cdot 2^{1}$

$500.000 = 2^{3t}$

e agora?

$2^{20} = 1048.576$

$2^{19} = 524.288$

$\therefore 3t \cong 19h$

$t \cong 6{,}33h$?

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

- Existe uma forma mais eficiente para determinar o resultado do item (b)?

- Podemos encontrar uma resposta exata para a pergunta do item (b)?

Analisando situações semelhantes

$a^x = a^y$

$2^x = 32$

$2^x = 2^5 \Rightarrow \boxed{x=5}$

$2^x = 10$

2^x	2^3	$2^{3,5}$	2^4
?	8	?	16

Aula 12
Logaritmos
e suas propriedades

$2^5 = 32$

Logaritmos

Dados a e b, números reais positivos, sendo $a \neq 1$, o logaritmo de b na base a é o número real x tal que:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

x é o logaritmo de b na base a

a é a base do logaritmo

b é o logaritmando

$2^5 = 32$

$\log_2 32 = 5$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Notas de Aula
Atividade 1 – p. 21

Escreva as igualdades na forma de logaritmos:

a) $2^3 = 8 \Leftrightarrow$ $\log_2 8 = 3$

b) $7^2 = 49 \Leftrightarrow$ $\log_7 49 = 2$

c) $10^3 = 1000 \Leftrightarrow$ $\log_{10} 1000 = 3$

d) $4^{-2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow$ $\log_4 (1/16) = -2$

e) $2^0 = 1 \Leftrightarrow$ $\log_2 1 = 0$

f) $3^1 = 3 \Leftrightarrow$ $\log_3 3 = 1$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Atividade 2 – p. 21

Escreva os logaritmos na forma de potências:

a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow$ $3^4 = 81$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow$ $\left(1/2\right)^{-5} = 32$

2^5

c) $\log_3 1 = 0 \Leftrightarrow$ $3^0 = 1$

d) $\log_{10} 0{,}001 = -3 \Leftrightarrow$ $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

ou

$0{,}001$

Atividade 3 – p. 21

$\log_a b = x$

$\Downarrow$

$a^x = b$

Calcule os logaritmos, utilizando a definição:

a) $\log_3 27 = x \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

b) $\log_{10} 10 = 1$

c) $\log_{10} 100 = 2$

d) $\log_5 1 = x \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$

e) $\log_e e = 1$

f) $\log_2 128 = 7$

g) $\log_8 32 = x \Rightarrow 8^x = 32 \Rightarrow (2^3)^x = 2^5$

$2^{3x} = 2^5 \Rightarrow \boxed{x = 5/3}$

h) $\log_5 3125 = 5$

i) $\log_3 \sqrt{3} = x \Rightarrow 3^x = \sqrt{3} \Rightarrow 3^x = 3^{1/2} \Rightarrow \boxed{x = 1/2}$

$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}}$

j) $\log_e 1 = 0$

Consequências de definição

Após resolver as Atividades 1, 2 e 3, podemos generalizar alguns resultados:

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$b > 0$

$$\log_a 1 = \underline{\;0\;}$$

$$\log_a a = \underline{\;1\;}$$

$$a^{\log_a b} = \underline{\;b\;}$$

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$\log_a b = x$

$a^x = b$

Sistemas de Logaritmos

Sistema de Logaritmo de Base a

$$\log_a b$$

Sistema de Logaritmo Decimal

$$\log_{10} b = \log b$$

Sistema de Logaritmo Neperiano ou Natural

$$\log_e b = \ln b$$

Atividade 4 – p. 21

Utilizando a calculadora científica, determine os logaritmos solicitados e faça a “prova” reescrevendo os mesmos na forma de potência (utilize 5 casas decimais):

a) $\log 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^{3} = 1000$

b) $\log 3 = 0{,}47712 \Leftrightarrow 10^{0{,}47712} = 2{,}999991333 \cong 3$

c) $\log 15 =$

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

d) $\ln 7 = 1,94591 \Rightarrow e^{1,94591} = 7$

$\log_e 7$

e) $\ln 2 = 0,69315$

f) $\log 24 = 1,38021$

g) $\ln 4,315 = 1,46210$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Propriedades – Mudança de Base

Ex $\log_2 3 = x$

$2^x = 3$

$1{,}58496$

$2^{1{,}58496} = 3$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

ou

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

ou

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

$\log_2 3$

$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}$

$1{,}58496$

$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$

Atividade 5 – p. 22

Com auxílio da calculadora científica, determine os seguintes logaritmos:

a) $\log_5 7 = \dfrac{\log 7}{\log 5} = 1{,}209$

b) $\log_3 40 = \dfrac{\ln 40}{\ln 3} = 3{,}358$

c) $\log_{12} 21{,}459 = \frac{\log 21{,}459}{\log 12} = 1{,}234$

d) $\log_{2} 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = 3{,}322$

e) $\log_{\frac{1}{4}} 0{,}375 = \frac{\ln 0{,}375}{\ln (1/4)} = 0{,}706$

Resolução de Equações
Exemplos:

Aplicando propriedades de equivalência, propriedades operatórias e mudança de base, resolva as equações:

a) $2^x - 5 = 13$

mud. de base

$2^x = 13+5$

$2^x = 18 \Rightarrow x = \log_2 18 = \dfrac{\log 18}{\log 2} = 4{,}169925\ldots$

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

b) $7(3^{-2k}) \cancel{+ 44{,}3} = 100 - 44{,}3$

$\frac{\cancel{7} \cdot (3^{-2k})}{\cancel{7}} = \frac{55{,}7}{7}$

$3^{-2k} = \left(\frac{55{,}7}{7}\right) \Longrightarrow -2k = \boxed{\log_3 \left(\frac{55{,}7}{7}\right)}$

$a^x = b \Longrightarrow x = \log_a b$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

UCS
UNIVERSIDADE
DE CAXIAS DO SUL

(2º caso)

$$-2K = \log_3\left(\frac{55{,}7}{7}\right)$$

$$-2K = \frac{\log(55{,}7/7)}{\log 3}$$

$$-2K = 1{,}89$$

$$\boxed{K \cong -0{,}94}$$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE
DE CAXIAS DO SUL

Atividade 6 – p. 22

Atividade 6) Muitos problemas que envolvem modelos exponenciais, requerem a resolução de equações exponenciais que, na maioria das vezes, não são triviais, ou seja, não podem ser simplificadas escrevendo todas as potências na mesma base. Nessas situações, usamos dois artifícios: propriedades de equivalência de igualdades e propriedades operatórias de logaritmos. Resolva as equações exponenciais, aplicando as propriedades citadas. Para verificar sua resposta, faça uma "prova real".

a) $3^x + 4 = 15{,}47$

b) $5.(2^{x-1}) = \frac{7}{3}$

c) $12e^{-0.45t} - 4 = 26{,}75$

d) $-4 + 3e^{2t} = 0$

e) $7 = \frac{3}{5}(5^{-2k} + 1)$

f) $\frac{1362{,}4}{2+e^{-0{,}5x}} = 250$

a) $x = 2{,}221$

b) $x = -0{,}0995$

c) $t = -2{,}091$

d) $t = 0{,}144$

e) $k = -0{,}735$

f) $x = -2{,}477$

Problema do crescimento da *E. coli*: agora podemos finalizar!

- Podemos encontrar uma resposta exata para a pergunta do item (b)?

Para isso, vamos resolver a equação obtida quando

$$N = 1\,000\,000$$

no modelo exponencial que representa o crescimento da bactéria:

$$N = 2^{3t+1}$$

$$1\,000\,000 = 2^{3t} \cdot 2^{1}$$

$$500\,000 = 2^{3t}$$

$$a^x = b$$

$$x = \log_a b$$

$$3t = \log_2 500.000$$

$$3t = \frac{\log 500.000}{\log 2}$$

$$t = \frac{1}{3}\left(\frac{\log 500.000}{\log 2}\right)$$

$$\boxed{t \cong 6{,}3h}$$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Problemas Contextualizados
Exemplo 01

tema

Um capital de R\$ 1.000,00 ficou aplicado em um regime de juros compostos a uma taxa de juros de 1% ao mês. Após um determinado tempo o montante da aplicação era igual R\$ 1.269,73. Sabendo que o montante de uma aplicação em juros compostos é obtido pela função $M(t) = C.(1+i)^t$, onde i é a taxa de juros na forma decimal, determine o tempo que o capital ficou aplicado.

0,01

$1\% = \frac{1}{100}$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

$$M(t) = C.(1+i)^t$$

$$C = 1000$$

$$i = 1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$M = 1269{,}73$$

Problemas Contextualizados
Exemplo 02

tema

7.10 Do estudo da Química, sabemos que alguns elementos têm a tendência natural de emitir radiação e transformar-se em elementos diferentes. Eles são chamados de elementos *radioativos*. Com o passar do tempo, a quantidade do elemento original presente em uma amostra diminui de acordo com a função

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt},$$

onde Q é a quantidade do elemento presente na amostra (medido em unidades de massa), Q_0 é a quantidade inicial, t é o tempo transcorrido desde a medição inicial e k é uma constante positiva característica de cada elemento. Para o iodo-128 (usado como *contraste* em diagnóstico por imagem) o valor de k é 0,0275 min^{-1} (Halliday; Resnick; Merrill, 1991, p. 263).

(a) Suponha que 5 mg de iodo-128 sejam injetados em um paciente. Desenhe o gráfico mostrando a quantidade de contraste presente no paciente até 2 horas após sua injeção.

(b) Qual é a taxa média de decaimento durante a primeira hora? E durante a segunda hora?

(c) Depois de quanto tempo a quantidade de iodo presente no paciente será 1 mg?

$$Q = Q_0 e^{-kt}$$

$$Q = 5e^{-0,0275t}$$

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Problemas Contextualizados
Exemplo 03

Tema

A tensão de descarga de um capacitor em um circuito RC pode ser determinada a partir da função

$$V = V_0 e^{-kt}$$

onde V é a tensão de descarga, V_0 é a tensão de descarga inicial, k é a constante de tempo e t é o tempo.

2

Dada a função de descarga de um capacitor $V = 6e^{-0,02t}$, determine qual será a tensão no capacitor após 40 s. (Aula 09)

Considerando a função dada, determine qual será o tempo necessário para que a tensão no capacitor seja 2 V.

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Atividades da Aula 12

- Finalizar os itens que ficaram pendentes nas Atividades 1 até 6, das páginas 21 e 22 (Notas de Aula).
- Exercícios do livro Pré-Cálculo (Adami, Dornelles e Lorandi): p. 129
  - 7.1, 7.2, 7.4, 7.5, 7.8, 7.15, 7.19
- **Lembre-se:** para acessar o livro Pré-Cálculo, você deve estar logado no UCSVirtual e na plataforma de e-books “Minha biblioteca”. Em seguida, utilize o campo de busca (título, autor ou ID da obra) ou clique aqui.