Ciência da Computação

Lógica para Computação

Prof. Giovanni Ely Rocco (gerocco@ucs.br)

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Lógica de Predicados

Árvores de Refutação

A lógica dos predicados é **indecidível**, ou seja, não há procedimento algorítmico que detecte a **invalidade**.

A árvore de refutação é um método capaz de testar validade e invalidades <u>para algumas formas de argumentos</u>.

A técnica incorpora as regras de refutação da lógica proposicional e inclui regras para tratar os quantificadores:

*Quantificação Universal (**∀**)*

*Quantificação Universal Negada (**~∀**)*

*Quantificação Existencial (**∃**)*

*Quantificação Existencial Negada (**~∃**)*

Lógica de Predicados

Árvores de Refutação

Quantificação Universal Negada

N. √ $\sim\forall x\, Sx$

|

$\exists x \sim Sx$ [N $\sim\forall$]

Quantificação Universal

N. $\forall x\, (Sx \to Px)$

|

$Sa \to Pa$ [N $\forall$]

qualquer letra nominal

Quantificação Existencial Negada

N. √ $\sim\exists x\, Sx$

|

$\forall x \sim Sx$ [N $\sim\exists$]

Quantificação Existencial

N. √ $\exists x\, Sx$

|

Sb [N $\exists$]

letra nominal que **ainda não ocorreu no ramo**

Lógica de Predicados

Regras de Inferência de Quantificadores

1. **Eliminação Universal** (**EU**, Instanciação Universal)

O que é verdadeiro para qualquer coisa
também é verdadeiro para um indivíduo particular.

$$\forall x\, \phi x \therefore \phi v$$

qualquer símbolo,
constante ou variável

Ex. Todos os homens são mortais.
Sócrates é homem.
Logo, Sócrates é mortal.

1. $\forall x\,(Hx \rightarrow Mx)$	
2. Hs	$\therefore Ms$
3. $Hs \rightarrow Ms$	**1 EU**
4. Ms	**2,3 MP**

Outro Exemplo:

$\sim Ms \vdash \sim\forall x\, Mx$

1. $\sim Ms$	Premissa
2. $\mid\ \forall x\, Mx$	Hipótese
3. $\mid\ Ms$	2 EU
4. $\mid\ Ms \wedge \sim Ms$	1,3 ∧I
5. $\sim\forall x\, Mx$	2-4 RAA

Lógica de Predicados

Regras de Inferência de Quantificadores

2. **Introdução Universal** (**IU**, Generalização Universal)

É válido derivar a quantificação universal
a partir de uma instância de substituição
de qualquer individuo arbitrariamente selecionado.

$\phi v \therefore \forall x\, \phi x$

variável denotando qualquer indivíduo arbitrariamente selecionado

Ex. Todos os caxienses são gaúchos.
Todos os gaúchos são brasileiros.
Logo, todos os caxienses são brasileiros.

1. $\forall x\,(Cx \rightarrow Gx)$
2. $\forall x\,(Gx \rightarrow Bx)$ $\quad\therefore \forall x\,(Cx \rightarrow Bx)$

---

3. $Ca \rightarrow Ga$ **1 EU**
4. $Ga \rightarrow Ba$ **2 EU**
5. $Ca \rightarrow Ba$ **3,4 SH**
6. $\forall x\,(Cx \rightarrow Bx)$ **5 IU**

Observações sobre a variável de substituição:

– não pode ocorrer em premissas nem em qualquer hipótese vigente (é um representante arbitrário);
– e deve substituir todas as ocorrências na quantificação.

Lógica de Predicados

Regras de Inferência de Quantificadores

3. **Introdução Existencial** (**IE**, Generalização Existencial)

O indivíduo que possui uma propriedade
deriva que alguém tem aquela propriedade. $\phi v \therefore \exists x\, \phi x$

4. **Eliminação Existencial** (**EE**, Instanciação Existencial)

Raciocínio hipotético para afirmação que
pelo menos uma coisa tem uma propriedade,
usando um indivíduo representativo com essa propriedade. $\exists x\, \phi x \therefore \phi v$

Ex. Sócrates é grego e brasileiro.
Logo, alguém é grego e brasileiro.

1. $Gs \wedge Bs$
2. $\exists x\, (Gx \wedge Bx)$ **1 IE**

2'. $\exists x\, (Gx \wedge Bs)$ **1 IE**
2''. $\exists x\, (Gs \wedge Bx)$ **1 IE**

Ex. Existe alguém grego e brasileiro.
Logo, existe alguém brasileiro.

1. $\exists x\, (Gx \wedge Bx)$
2. | $Ga \wedge Ba$ **Hipótese**
3. | Ba **2 ∧E**
4. | $\exists x\, Bx$ **3 IE**
5. $\exists x\, Bx$ **1,2-4 EE**

Lógica de Predicados

Regras de Inferência de Quantificadores

5. **Intercâmbio de Quantificadores (IQ)**

Para simplificação na demonstração, é possível alterar os quantificadores conforme equivalências:

$$\forall x\ \phi x \equiv \sim(\exists x \sim\phi x)$$
$$\forall x \sim\phi x \equiv \sim(\exists x\ \phi x)$$
$$\exists x\ \phi x \equiv \sim(\forall x \sim\phi x)$$
$$\exists x \sim\phi x \equiv \sim(\forall x\ \phi x)$$

$\forall x\ \phi x$ $\qquad$ $\forall x \sim\phi x$

contraditórias

$\exists x\ \phi x$ $\qquad$ $\exists x \sim\phi x$

Ex. $\forall x{\sim}Fx \rightarrow \forall x{\sim}Gx \vdash \exists xGx \rightarrow \exists xFx$

1.	$\forall x{\sim}Fx \rightarrow \forall x{\sim}Gx$	Premissa
2.	${\sim}\exists xFx \rightarrow \forall x{\sim}Gx$	1 IQ
3.	${\sim}\exists xFx \rightarrow {\sim}\exists xGx$	2 IQ
4.	$\exists xGx \rightarrow \exists xFx$	2 Transposição

Lógica de Predicados

Regras de Inferência para Quantificadores

1. **Eliminação Universal** (**EU**, Instanciação Universal)

$$\forall x\ \phi x \therefore \phi v$$

2. **Introdução Universal** (**IU**, Generalização Universal)

$$\phi v \therefore \forall x\ \phi x$$

3. **Introdução Existencial** (**IE**, Generalização Existencial)

$$\phi v \therefore \exists x\ \phi x$$

4. **Eliminação Existencial** (**EE**, Instanciação Existencial)

$$\exists x\ \phi x \therefore \phi v$$

5. **Intercâmbio de Quantificadores** (**IQ**)

$$\forall x\ \phi x \equiv \sim (\exists x \sim\phi x)$$

$$\forall x \sim\phi x \equiv \sim (\exists x\ \phi x)$$

$$\exists x\ \phi x \equiv \sim (\forall x \sim\phi x)$$

$$\exists x \sim\phi x \equiv \sim (\forall x\ \phi x)$$

Lógica de Predicados

Exercícios

1. $\forall x \forall y\, Fxy \vdash Faa$

1.	$\forall x \forall y\, Fxy$	Premissa
2.	$\forall y\, Fay$	1 EU
3.	Faa	2 EU

2. $\forall x\, (Fx \vee Gx) \vdash \exists x\, (Fx \vee Gx)$

1.	$\forall x\, (Fx \vee Gx)$	Premissa
2.	$Fa \vee Ga$	1 EU
3.	$\exists x (Fx \vee Gx)$	2 IE

3. $\forall x\, (Fx \wedge Gx) \vdash \forall x Fx \wedge \forall x Gx$

1.	$\forall x\, (Fx \wedge Gx)$	Premissa
2.	$Fa \wedge Ga$	1 EU
3.	Fa	2 ∧E
4.	Ga	3 ∧E
5.	$\forall x\, Fx$	3 IU
6.	$\forall x\, Gx$	4 IU
7.	$\forall x Fx \wedge \forall x Gx$	5,6 ∧I

4. $\forall x Fx \rightarrow \forall x Gx, \sim Ga \vdash \sim \forall x Fx$

1.	$\forall x Fx \rightarrow \forall x Gx$	Premissa
2.	$\sim Ga$	Premissa
3.	$\vert\ \forall x Fx$	Hipótese (RAA)
4.	$\vert\ \forall x Gx$	1,3 MP
5.	$\vert\ Ga$	4 EU
6.	$\vert\ Ga \wedge \sim Ga$	2,5 ∧I
7.	$\sim \forall x Fx$	3-6 RAA

5. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x Fx \vdash \exists x Gx$

1.	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Premissa
2.	$\exists x Fx$	Premissa
3.	$\vert\ Fa$	Hipótese (EE)
4.	$\vert\ Fa \rightarrow Ga$	1 EU
5.	$\vert\ Ga$	3,4 MP
6.	$\vert\ \exists x Gx$	5 IE
7.	$\exists x Gx$	2,3-6 EE

instância representativa

Lógica de Predicados

Exercícios

6. $\forall x(Fx\rightarrow(Gx\vee Hx)), \forall x{\sim}Gx \vdash \forall x(Fx\rightarrow Hx)$

1.	$\forall x(Fx\rightarrow(Gx\vee Hx))$	Premissa
2.	$\forall x{\sim}Gx$	Premissa
3.	$Fa\rightarrow(Ga\vee Ha)$	1 EU
4.	${\sim}Ga$	2 EU
5.	$\mid Fa$	Hipótese (PC)
6.	$\mid Ga\vee Ha$	3,5 MP
7.	$\mid Ha$	4,6 SD
8.	$Fa\rightarrow Ha$	5-7 PC
9.	$\forall x(Fx\rightarrow Hx)$	8 IU

7. $\forall x(Fx\rightarrow(Gx\vee Hx)), \forall x{\sim}Gx \vdash \forall xFx\rightarrow\forall xHx$

1.	$\forall x(Fx\rightarrow(Gx\vee Hx))$	Premissa
2.	$\forall x{\sim}Gx$	Premissa
3.	$Fa\rightarrow(Ga\vee Ha)$	1 EU
4.	${\sim}Ga$	2 EU
5.	$\mid \forall xFx$	Hipótese (PC)
6.	$\mid Fa$	5 EU
7.	$\mid Ga\vee Ha$	3,6 MP
8.	$\mid Ha$	4,7 SD
9.	$\mid \forall xHx$	8 IU
10.	$\forall xFx\rightarrow\forall xHx$	5-9 PC