4. Álgebra de Conjuntos

Diagramas de Venn

Um diagrama de Venn é uma representação pictórica na qual os conjuntos são representados por áreas delimitadas por curvas no plano. Em geral, o conjunto universo $\boldsymbol{U}$ é representado por um retângulo, e os demais conjuntos por círculos, elipses, etc.

Exemplo: Em cada item abaixo, faça um diagrama que simbolize a situação:

a) um dado conjunto A b) $C = \{1, 2, 3\}$ c) $A = \{3, 5, 8\}$ e $B = \{4, 5, 6, 8, 9\}$

d) $A \subset B$ e) $C \subset \boldsymbol{U}$ f) $A \subset B \wedge C \subset B$

<u>Exercícios</u>

1) Faça um diagrama que simbolize cada uma das seguintes situações:

a) A, B, C e D são conjuntos não-vazios;

$D \subset C \subset B \subset A$

b) A, B e D são conjuntos não-vazios;

$A \supset B, D \subset A \wedge B \not\subset D$; $(\exists x)(x \in B \wedge x \in D)$

2) Sejam A, B e D três conjuntos tais que:

$A \subset B \subset D$; $a \in A, b \in B \wedge d \in D$; $e \notin A, f \notin B \wedge g \notin D$.

Quais das afirmações a seguir são **sempre** verdadeiras?

a) $a \in D$ b) $b \in A$ c) $d \notin A$ d) $e \in B$ e) $f \notin A$ f) $g \notin A$

3) Sejam A, B e D três conjuntos tais que:

$A \supset B, A \supset D \wedge B \not\subset D$; $(\exists x)(x \in B \wedge x \in D)$; $a \in A, b \in B \wedge d \in D$; $e \notin A, f \notin B \wedge g \notin D$.

Quais das afirmações a seguir são **sempre** verdadeiras?

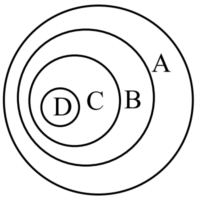
a) $a \in D$ b) $b \in A$ c) $d \in A$ d) $e \notin B$ e) $f \notin A$ f) $g \notin A$

4) Dentre as relações a seguir, determine as que são corretas. Para as que forem falsas, determine um contra-exemplo:

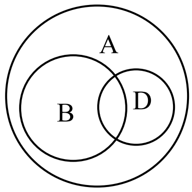
a) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ b) $A \not\subset B \wedge B \not\subset C \Rightarrow A \not\subset C$

Respostas:

1) a)



b)



2) a) V   b) F   c) F   d) F   e) V   f) V

3) a) F   b) V   c) V   d) V   e) F   f) F

4) a) V   b) F contra-exemplo: $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{1, 2, 5\}$ $A \not\subset B \wedge B \not\subset C$ mas $A \subset C$

União de Conjuntos

A <u>união</u> de dois conjuntos A e B denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B; isto é:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

A operação de união pode ser visualizada através de um diagrama de Venn:

Exemplos:

1) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, então:

a) $A \cup B =$ d) $B \cup B =$

b) $A \cup C =$ e) $(A \cup B) \cup C =$

c) $B \cup C =$ f) $A \cup (B \cup C) =$

2) Suponha os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} | 3 < x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 2 = x\}$. Então: $A \cup B =$

3) Considere os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. Então: $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q} =$ $\mathbb{R} \cup \mathbb{I} =$ $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} =$

4) Para qualquer conjunto universo $\boldsymbol{U}$ e qualquer $A \subset \boldsymbol{U}$, vale:

$\varnothing \cup \varnothing =$ $\boldsymbol{U} \cup \varnothing =$ $\boldsymbol{U} \cup A =$ $\boldsymbol{U} \cup \boldsymbol{U} =$

Intersecção de Conjuntos

A <u>intersecção</u> de dois conjuntos A e B denotada por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e a B; isto é:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

A operação de intersecção pode ser visualizada através de um diagrama de Venn:

Se $A \cap B = \varnothing$, isto é, se A e B não possuem elementos em comum, então A e B são chamados de <u>conjuntos disjuntos</u>.

Exemplos:

1) Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, então:

a) $A \cap B =$

b) $A \cap C =$

c) $B \cap C =$

d) $B \cap B =$

e) $A \cap (B \cap C) =$

f) $(A \cap B) \cup C =$

g) $(A \cup C) \cap B =$

h) $(A \cap B) \cup (A \cap C) =$

2) Suponha os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 = x\}$. Então: $A \cap B =$

3) Considere os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. Então: $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} =$ $\mathbb{R} \cap \mathbb{I} =$ $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} =$

4) Para qualquer conjunto universo $\boldsymbol{U}$ e qualquer $A \subset \boldsymbol{U}$, vale:

$\varnothing \cap \varnothing =$ $\boldsymbol{U} \cap \varnothing =$ $\boldsymbol{U} \cap A =$ $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{U} =$

Sejam os conjuntos A, B e C. Valem as seguintes propriedades das operações $\cup$ e $\cap$:

- $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$ (propriedades comutativas)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (propriedades associativas)
- $A \cup \varnothing = A$ e $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (propriedades distributivas)

<u>Exercícios</u>

1) São dados os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{Z} | -4 < x \leq 2\}$; $C = \{x \in \mathbb{Z} | -2 < x < 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 3\}$; $D = \{x \in \mathbb{Z} | 3 \leq x \leq 8\}$.

Determine:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \cup D$

d) $A \cap D$

e) $A \cup B \cup D$

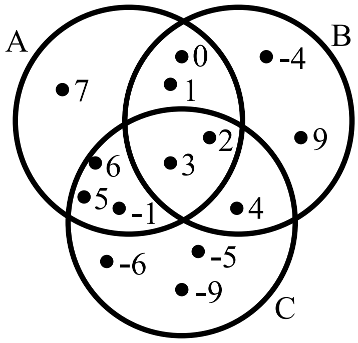
f) $A \cap B \cap C$

g) $A \cap B \cap C \cap D$

h) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

i) $(A \cap D) \cup (B \cap C)$

2) Com base no diagrama ao lado, determine:



a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $A \cap C$

d) $B \cap C$

e) $A \cap B \cap C$

f) $A \cup B \cup C$

g) $(A \cup B) \cap C$

h) $(A \cap B) \cup C$

3) Considere os conjuntos:

A = {divisores naturais de 30}; B = {múltiplos de 6}; C = {múltiplos de 3}. Calcule:

a) $A \cap C$ b) $B \cap C$ c) $A \cap (B \cup C)$

d) $A \cap B \cap C$ e) quais os elementos de A que não pertencem a B.

4) Sabendo que $A \cap B = \{2, 5\}$, $B = \{2, 5, 9\}$ e $A \cup B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, represente num diagrama os conjuntos A e B.

5) Sabendo que $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $A \cap C = \{1, 2, 4, 5\}$, $B \cap C = \{1, 2, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 4, 5, 6, 10\}$, $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$ e $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, represente num diagrama os conjuntos A, B e C.

6) Dados os conjuntos $A = \{2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, determine o conjunto C, tal que $A \cap C = \{2\}$, $B \cap C = \{4\}$ e $A \cup B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

7) Determine o conjunto C sabendo que: $A \cup B \cup C = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 10\}$, $A \cap B = \{2, 3, 8\}$, $A \cap C = \{2, 7\}$, $B \cap C = \{2, 5, 6\}$ e $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 8\}$.

8) Determine o conjunto A sabendo que: $A \subset \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12\}$, $A \cap \{1, 4, 5, 10\} = \{4, 5\}$, $A \cup \{0, 4, 5, 8, 9\} = \{0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $\{6, 7\} \subset A$.

9) Trace o diagrama de Venn para os três conjuntos não-vazios A, B e C, de tal maneira que A, B e C tenham as seguintes propriedades:

a) $A \subset B, C \subset B, A \cap C = \varnothing$

b) $A \subset B, C \not\subset B, A \cap C \neq \varnothing$

c) $A \subset C, A \neq C, B \cap C = \varnothing$

d) $A \subset (B \cap C), B \subset C, C \neq B, A \neq C$

10) Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para quaisquer conjuntos A, B e C? Para as que são falsas, determine um contra-exemplo:

a) $A \cup A = A$

b) $B \cap B = B$

c) Se $A \cap B = \varnothing$ então $A \subset B$

d) Se $A \subset B$ então $A \cup B = B$

e) Se $A \subset B$ então $A \cap B = B$

f) $A \cap \varnothing = \varnothing$

g) $A \cup \varnothing = \varnothing$

Respostas:

1) a) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ b) $\{0,1,2\}$ c) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ d) Ø

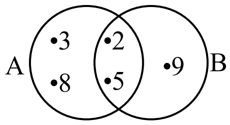
e) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ f) $\{0,1,2\}$ g) Ø h) $\{-1,0,1,2,3,4\}$ i) $\{0,1,2,3\}$

2) a) $\{-4,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,9\}$ b) $\{-9,-6,-5,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ c) $\{-1,2,3,5,6\}$ d) $\{2,3,4\}$ e) $\{2,3\}$

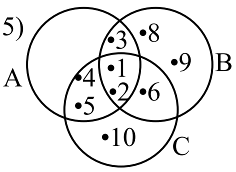
f) $\{-9,-6,-5,-4,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,9\}$ g) $\{-1,2,3,4,5,6\}$ h) $\{-9,-6,-5,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$

3) a) $\{3,6,15,30\}$ b) B c) $\{3,6,15,30\}$ d) $\{6,30\}$ e) $\{1,2,3,5,10,15\}$

4)

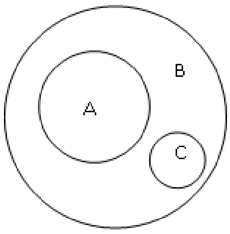


5)

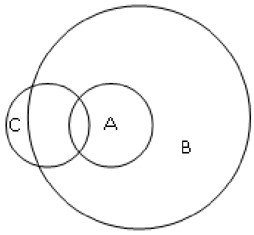


6) $\{2,4,6\}$ 7) $\{2,5,6,7,9,10\}$ 8) $\{4,5,6,7\}$

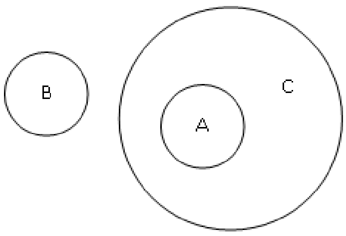
9) a)



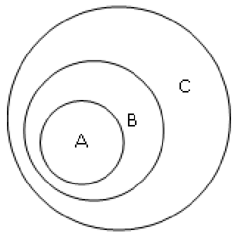
b)



c)



d)



10) a) V b) V c) F contra-exemplo: $A=\{0,1\}$, $B=\{2,3\}$ $A\cap B=$ Ø mas $A\not\subset B$ d) V

e) F contra-exemplo: $A=\{0,1\}$, $B=\{0,1,2,3\}$ $A\subset B$ mas $A\cap B\neq B$ f) V

g) F contra-exemplo: $A=\{0,1\}$ e $A\cup$ Ø $\neq$ Ø

Complemento de um Conjunto

Suponha o conjunto universo $\boldsymbol{U}$. O <u>complemento</u> de um conjunto $A\subset \boldsymbol{U}$, denotado por $\sim A$, é o conjunto dos elementos que não pertencem a A; isto é:

$$\sim A=\{x\in \boldsymbol{U} \mid x\notin A\}$$

A operação complemento pode ser visualizada através de um diagrama de Venn:

Exemplos:

1) Sejam $\boldsymbol{U} = \{1, 2, 3, ..., 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, então:

a) $\sim A =$

b) $\sim B =$

c) $\sim (A \cap C) =$

d) $\sim (A \cup B) =$

e) $\sim (\sim C) =$

f) $\sim B \cap \sim C =$

2) Suponha o conjunto universo $\mathbb{N}$. Seja $A = \{0, 1, 2\}$. Então $\sim A =$

3) Para qualquer conjunto universo $\boldsymbol{U}$, vale: $\sim\varnothing =$ $\sim \boldsymbol{U} =$

4) Suponha o conjunto $\mathbb{R}$ como conjunto universo. Então: $\sim \mathbb{Q} =$ $\sim \mathbb{I} =$

5) Para qualquer conjunto universo $\boldsymbol{U}$ e qualquer $A \subset \boldsymbol{U}$, vale: $A \cup \sim A =$ $A \cap \sim A =$

Diferença entre Conjuntos

A diferença entre os conjuntos A e B, denotada por $A - B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B; isto é: $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

A operação de diferença pode ser visualizada através de um diagrama de Venn:

Exemplos:

1) Sejam, $\boldsymbol{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$, então:

a) $\mathrm{A} - \mathrm{C} =$

b) $\mathrm{B} - \mathrm{C} =$

c) $\mathrm{A} - \mathrm{B} =$

d) $\mathrm{C} - \mathrm{A} =$

e) $\sim (B - C) =$

f) $(A \cup B) - C =$

g) $(\sim B - A) \cup C =$

h) $\sim (B \cap C) - (A \cup B) =$

2) Suponha os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} | x > 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 3x + 2 = 0\}$. Então:

$A - B =$ $B - A =$

3) Considere os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. Então: $\mathbb{R} - \mathbb{Q} =$ $\mathbb{R} - \mathbb{I} =$ $\mathbb{Q} - \mathbb{I} =$

4) Para qualquer conjunto universo $\boldsymbol{U}$ e qualquer $A \subset \boldsymbol{U}$, vale:

$\varnothing - \varnothing =$ $\boldsymbol{U} - \varnothing =$ $\boldsymbol{U} - A =$ $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U} =$

Diferença Simétrica entre Conjuntos

A diferença simétrica dos conjuntos A e B, denotada por $A \oplus B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em A mas não em B, ou que estão em B mas não em A, isto é:

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

Podemos ainda dizer que $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

A operação de diferença simétrica pode ser visualizada através de um diagrama de Venn:

Exemplos:

1) Sejam, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, então: $A \oplus B =$

2) Para qualquer conjunto universo $\boldsymbol{U}$ e qualquer $A \subset \boldsymbol{U}$, vale:

$A \oplus A =$ $\quad$ $A \oplus \boldsymbol{U} =$ $\quad$ $\varnothing \oplus A =$

3) Com o uso de diagramas de Venn mostre que $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Exercícios

1) Sejam os conjuntos $\boldsymbol{U} = \{1, 2, 3, ..., 8, 9\}$, $A = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x < 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | 3 < x \leq 7\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} | 5 \leq x \leq 9\}$, $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $E = \{2, 4, 6, 8\}$ e $F = \{1, 5, 9\}$, determine:

a) $\sim A$

b) $\sim D$

c) $A - B$

d) $F - D$

e) $C \oplus D$

f) $E \oplus F$

g) $A \cap (B \cup E)$

h) $\sim (A - E)$

i) $(A \cap D) - B$

j) $(B \cap F) \cup (C \cap E)$

2) Sejam $\boldsymbol{U} = \{1, 2, 3, ..., 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $B = \{2, 5, 7\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, determine:

a) $\sim C$

b) $A - B$

c) $A - C$

d) $A \oplus B$

e) $A \oplus C$

f) $(A \cup C) - B$

g) $\sim (A \cup B)$

h) $(B \oplus C) - A$

3) Sejam $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{a,b,d,f,g\}$, $C=\{b,c,e,g,h\}$ e $D=\{d,e,f,g,h\}$, determine:

a) $C-D$

b) $A\cap(B\cup D)$

c) $B-(C\cup D)$

d) $(A\cap D)\cup B$

e) $(A\cup D)-C$

f) $B\cap C\cap D$

g) $(C-A)-D$

h) $A\oplus B$

i) $A\oplus C$

j) $(A\oplus D)-B$

4) A parte sombreada no diagrama representa:

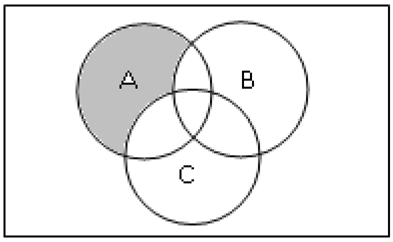
a) $\sim(B\cup C)\cup C$

b) $\sim(B\cup C)$

c) $\sim C\cap\sim B\cap\sim A$

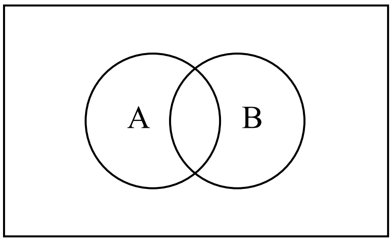
d) $A-(B\cup C)$

e) $A-(A\cap B\cap C)$



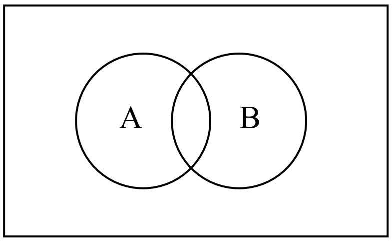
5) Nos diagramas de Venn, sombreie o que se pede:

a)



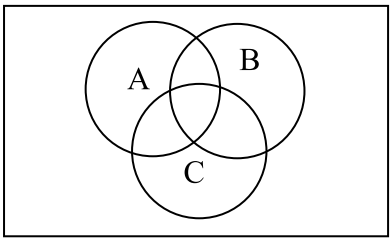
$A\cap\sim B$

b)



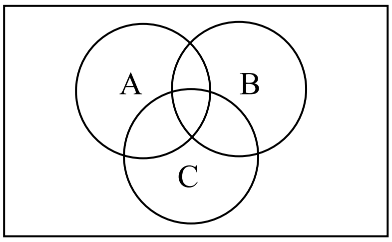
$\sim(B-A)$

c)



$A-(B\cup C)$

d)



$\sim A\cap(B\cup C)$

6) *A*, *B* e *C* são subconjuntos de um conjunto ***U***. Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para quaisquer conjuntos *A*, *B* e *C*? Para as que são falsas, determine um contra-exemplo:

a) $\sim(A\cap B)=\sim A\cap\sim B$

b) $\sim(\sim A)=A$

c) $A-B=\sim(B-A)$

d) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

e) $(A-B)\cup(B-C)=A-C$

f) $A-B\subset A$

g) Se $A\subset B$ então $\sim A=B-A$

h) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

i) $A\oplus B=B\oplus A$

j) $(A-C)\cap(A-B)=A-(B\cup C)$

7) Encontre os conjuntos A e B se $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$ e $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

8) Se A e B são dois conjuntos não-vazios, tais que $A - B = \{1, 3, 6, 7\}$, $B - A = \{4, 8\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, determine o conjunto $A \cap B$.

9) Seja X um conjunto tal que $X - \{1, 2, 3, 7, 8\} = \{4\}$ e $X \cap \{1, 2, 3, 5, 6\} = \{1, 2, 3\}$. Encontre o conjunto X.

Respostas:

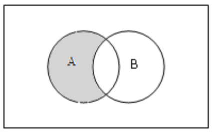
1) a) $\{6, 7, 8, 9\}$ b) $\{2, 4, 6, 8\}$ c) $\{1, 2, 3\}$ d) $\varnothing$ e) $\{1, 3, 6, 8\}$

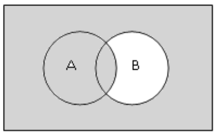
f) $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$ g) $\{2, 4, 5\}$ h) $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$ i) $\{1, 3\}$ j) $\{5, 6, 8\}$

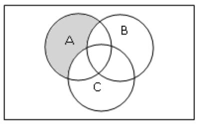
2) a) $\{2, 4, 6, 8\}$ b) $\{1, 6\}$ c) $\{2, 6\}$ d) $\{1, 6, 7\}$ e) $\{2, 3, 6, 7, 9\}$ f) $\{1, 3, 6, 9\}$ gl) $\{3, 4, 8, 9\}$ h) $\{3, 9\}$

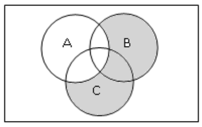
3) a) $\{b, c\}$ b) $\{a, b, d, e\}$ c) $\{a\}$ d) $\{a, b, d, e, f, g\}$ e) $\{a, d, f\}$

f) $\{g\}$ g) ϕ h) $\{c, e, f, g\}$ i) $\{a, d, g, h\}$ j) $\{c, h\}$

4) d 5) a) 

b) 

c) 

d) 

6) a) F contra-exemplo: Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ e $\boldsymbol{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ então $\sim (A \cap B) = \{1, 3, 4\}$ e $\sim A \cap \sim B = \{4\}$, portanto $\sim (A \cap B) \neq \sim A \cap \sim B$ b) V

c) F contra-exemplo: Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ e $\boldsymbol{U} = \{0, 1, 2, 3\}$ então $A - B = \{1\}$ e $\sim (B - A) = \{0, 1, 2\}$, portanto $A - B \neq \sim (B - A)$ d) V

e) F contra-exemplo: Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 5, 6\}$ então $(A - B) \cup (B - C) = \{1, 3, 4\}$ e $B - C = \varnothing$, portanto $(A - B) \cup (B - C) \neq B - C$ f) V g) V h) V i) V j) V

7) $A = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 6, 9, 10\}$ 8) $\{2, 5\}$ 9) $\{1, 2, 3, 4\}$

Conjuntos Finitos, Princípio da Enumeração

Já sabemos que um conjunto é finito se, ao contarmos seus diferentes elementos, o processo de contagem chega ao fim. Neste caso é correto dizer que um conjunto finito é aquele que possui exatamente n elementos distintos com $n \in \mathbb{N}$.

A notação $n(A)$ será usada para denotar o número de elementos de um conjunto finito A.

Se A e B são dois conjuntos finitos, então $A \cup B$ e $A \cap B$ também são finitos e:

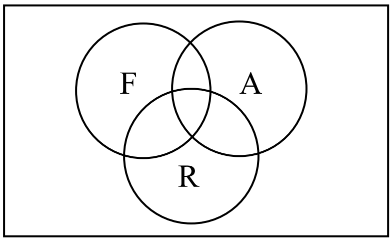
$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Para três conjuntos A, B e C, finitos, essa relação será:

$$\boxed{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

Exemplo: Considere os seguintes dados sobre 120 estudantes de matemática no que diz respeito aos idiomas francês, alemão e russo: 65 estudam francês, 45 estudam alemão, 42 estudam russo, 20 estudam francês e alemão, 25 estudam francês e russo, 15 estudam alemão e russo e 8 estudam os três idiomas.

a) Determine o número de alunos que estudam pelo menos um dos três idiomas;
b) Preencha o diagrama de Venn com o número correto de estudantes.



Conjunto das Partes

Para um dado conjunto *A*, o **conjunto das partes** de *A*, denotado por *P*(*A*), é o conjunto de todos os subconjuntos de *A*. Se *A* é finito, então *P*(*A*) também é, e o número de elementos de *P*(*A*) é:

$$\boxed{nP(A) = 2^{n(\mathrm{A})}}$$

Exemplo: Suponha que $A = \{1, 2, 3\}$. Então $P(A) =$

$$nP(A) =$$

Produto Cartesiano

Sejam dois conjuntos arbitrários *A* e *B*. O conjunto de todos os pares ordenados (a,b) onde $a \in A$ e $b \in B$ é chamado de **produto cartesiano** dos conjuntos *A* e *B*. Indicamos $A \times B$ e lemos "*A* cartesiano *B*".

Por definição: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Denotamos o produto cartesiano de um conjunto *A* por ele mesmo como $A \times A = A^2$.

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$ e $C = \{0,1,2\}$, temos:

$A \times B =$	$B^2 =$
$B \times C =$	$(A \times B) \times C =$
$C \times B =$	$A \times (B \times C) =$
$A^2 =$	

Observações:

$A \times B \neq B \times A$

$n(A \times B) = n(A) \,.\, n(B)$

Exercícios

1) Em uma pesquisa com 60 pessoas, verificou-se que: 25 leem a revista A, 26 leem a revista B, 26 leem a revista C, 9 leem as revistas A e C, 11 leem as revistas A e B, 8 leem as revistas B e C e 3 leem as três revistas.
    a) Ache o número de pessoas que leem pelo menos uma das três revistas;
    b) Ache o número de pessoas que leem exatamente uma revista.
2) Foi realizada uma pesquisa com uma amostragem de 25 carros novos à venda em uma revendedora local para verificar quais dos três opcionais populares, ar-condicionado (A), rádio (B) e vidros elétricos (C), já estavam instalados. A pesquisa concluiu: 15 tinham ar-condicionado, 12 tinham rádio, 11 tinham vidros elétricos, 5 tinham ar-condicionado e vidros elétricos, 9 tinham ar-condicionado e rádio, 4 tinham rádio e vidros elétricos, 3 tinham as três opções. Ache o número de carros que têm:
    a) Apenas vidros elétricos;
    b) Apenas ar-condicionado;
    c) Apenas rádio;
    d) Rádio e vidros elétricos, mas não ar-condicionado;
    e) Ar-condicionado e rádio, mas não vidro elétricos;
    f) Apenas uma das opções;
    g) Nenhuma das opções.
3) Numa pesquisa, verificou-se que, das pessoas consultadas, 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois jornais (A e B) e 110 não liam nenhum dos dois jornais. Quantas pessoas foram consultadas?
4) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 2000 pessoas usam os produtos A ou B. O produto B é usado por 800 pessoas, e 320 pessoas usam os dois produtos ao mesmo tempo. Quantas pessoas usam o produto A?
5) Sabe-se que o sangue das pessoas pode ser classificado em quatro tipos de antígenos. Em uma pesquisa efetuada num grupo de 120 pacientes de um hospital, constatou-se que 40 deles têm o antígeno A, 35 têm o antígeno B e 14 têm o antígeno AB. Nestas condições, pede-se o número de pacientes cujo sangue tem o antígeno O.

6) Num grupo de 99 esportistas, 40 jogam vôlei, 20 jogam vôlei e xadrez, 22 jogam xadrez e tênis, 18 jogam vôlei e tênis e 11 jogam as três modalidades. O número de pessoas que jogam xadrez é igual ao número de pessoas que jogam tênis.
   a) Quantos esportistas jogam tênis e não jogam vôlei?
   b) Quantos jogam xadrez ou tênis e não jogam vôlei?
   c) Quantos jogam vôlei e não jogam xadrez?
7) Em uma Universidade são lidos dois jornais, A e B. Exatamente 80% dos alunos lêem o jornal A e 60% o jornal B. Sabendo que todo aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, determine o percentual de alunos que leem ambos.
8) Numa cidade são consumidos três produtos A, B e C. Feito um levantamento do mercado sobre o consumo desses produtos, obteve-se o resultado disposto na tabela abaixo:

PRODUTOS	Nº de Consumidores
A	150
B	200
C	250
A e B	70
A e C	90
B e C	80
A, B e C	60
Nenhum dos três	180

   Pergunta-se:
   a) Quantas pessoas consomem apenas o produto A?
   b) Quantas pessoas consomem o produto A ou o produto B ou o produto C?
   c) Quantas pessoas consomem o produto A ou o produto B?
   d) Quantas pessoas consomem apenas o produto C?
   e) Quantas pessoas foram consultadas?
9) Uma prova era constituída de dois problemas. 300 alunos acertaram somente um dos problemas, 260 acertaram o segundo, 100 alunos acertaram os dois e 210 erraram o primeiro. Quantos alunos fizeram a prova?
10) Numa pesquisa sobre a preferência em relação a dois jornais, foram consultadas 470 pessoas e o resultado foi o seguinte: 250 delas leem o jornal A, 180 o jornal B e 60, os jornais A e B.
   a) Quantas pessoas leem apenas o jornal A?
   b) Quantas leem apenas o jornal B?
   c) Quantas leem jornais?
   d) Quantas não leem jornais?

11) Uma cidade com 10.000 habitantes tem dois clubes de futebol: A e B. Numa pesquisa feita com seus habitantes, constatou-se que 1.200 pessoas não apreciam nenhum dos dois clubes, 1.300 apreciam os dois clubes e 4.500 apreciam o clube A.

a) Quantas pessoas apreciam apenas o clube A?

b) Quantas apreciam o clube B?

c) Quantas apreciam apenas o clube B?

12) Determine o conjunto das partes de $A = \{a, b, c, d\}$.

13) Dado $A = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}\}$.

a) Determine se cada uma das seguintes afirmativas é verdadeira ou falsa:

(i) $a \in A$ (iv) $\{\{a, b\}\} \subset A$

(ii) $\{c\} \subset A$ (v) $\varnothing \subset A$

(iii) $\{d, e, f\} \in A$

Ache o conjunto das partes de A.

14) Dados $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{1\}$, ache:

a) $A \times B$ c) B^2

b) $B \times C$ d) $(A \times B) \times C$

15) Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{c, d\}$, ache:

a) $(A \times B) \cap (A \times C)$ b) $(B \cap C) \times A$ c) $A \times (B \cup C)$

16) Se $n(A \times B) = 10$ e $A = \{1, 3\}$, quantos elementos tem B?

17) Se $nP(A) = 8$ e $nP(B) = 32$, quantos elementos tem $A \times B$?

Respostas:

1) a) 52 b) 30 2) a) 5 b) 4 c) 2 d) 1 e) 6 f) 11 g) 2 3) 340 4) 1520 5) 59

6) a) 36 b) 59 c) 20 7) 40% 8) a) 50 b) 420 c) 280 d) 140 e) 600 9) 450

10) a) 190 b) 120 c) 370 d) 100 11) a) 3200 b) 5600 c) 4300

12) $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$

13) a) (i) F (ii) F (iii) V (iv) V (v) V

b) $P(A) = \{\emptyset, \{\{a, b\}\}, \{\{c\}\}, \{\{d, e, f\}\}, \{\{a, b\}, \{c\}\}, \{\{a, b\}, \{d, e, f\}\}, \{\{c\}, \{d, e, f\}\}, A\}$

14) a) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ b) $\{(1, 1), (2, 1)\}$ c) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

d) $\{((1, 1), 1), ((1, 2), 1), ((2, 1), 1), ((2, 2), 1), ((3, 1), 1), ((3, 2), 1)\}$

15) a) $\{(1, c), (2, c)\}$ b) $\{(c, 1), (c, 2)\}$ c) $\{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d)\}$

16) 5 elementos 17) 15 elementos