1.Teoria dos Conjuntos

Introdução

A idéia intuitiva de conjunto é tão antiga quanto a de número. Embora a idéia de conjunto sempre tenha existido no pensamento humano e na Matemática, de modo geral, ela só recebeu um tratamento formal e sistemático no final do século XIX, pelo matemático russo Georg Cantor (1845-1918) – o criador da Teoria dos Conjuntos.

Conjuntos e Elementos

Um conjunto é uma coleção de zero ou mais objetos distintos, chamados elementos do conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada. Em outras palavras, é uma coleção não-ordenada de objetos. Normalmente usamos letras maiúsculas: A, B, X, Y,... para denotar conjuntos, e letras minúsculas: a, b, x, y, ... para denotar elementos de conjuntos.

Descrição de Conjuntos

Quando queremos determinar ou indicar um conjunto, podemos fazê-lo de duas maneiras:

1) <u>por Extensão</u>: Neste caso, listamos todos os elementos do conjunto,em qualquer ordem (separados por vírgulas) e entre chaves.

Exemplo: $A = \{a, e, i, o, u\}$

No caso do número de elementos ser muito grande, escrevemos apenas alguns deles, suficiente para que se possa perceber a lei de formação do conjunto, colocamos reticências e indicamos o último elemento.

Exemplo: $B = \{0, 2, 4, 6, ..., 148\}$

Quando o número de elementos do conjunto é infinito, uma vez conhecida sua lei de formação, basta escrever alguns deles e colocar reticências.

Exemplo: $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

2) <u>por Compreensão</u>: Neste caso, designamos as propriedades que caracterizam os elementos do conjunto.

Exemplo: $A = \{x \mid x \text{ é um inteiro par e } x > 0\}$

Relação de Pertinência

Se a é elemento de um conjunto A, escrevemos $a \in A$ e dizemos que a pertence ao conjunto A.

Se a não é elemento de um conjunto A, escrevemos $a \notin A$ e dizemos que a não pertence ao conjunto A.

Exemplo: Considerando o conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$, podemos dizer que:

$i \in A$

$b \notin A$

Conjuntos Numéricos

Os conjuntos de maior importância são os conjuntos numéricos. Destes, alguns são especiais pela sua grande utilização e, por isso, recebem nomes convencionais. São eles:

1) <u>Conjunto dos números naturais</u>: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Convenciona-se o uso do símbolo (*) para indicar a exclusão do elemento 0 (zero) de qualquer conjunto numérico. Assim:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

Marque V ou F, conforme sejam verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

( ) A soma de dois números naturais quaisquer é um número natural.

( ) A diferença entre dois números naturais quaisquer é um número natural.

( ) O produto de dois números naturais quaisquer é um número natural.

( ) O quociente de dois números naturais quaisquer é um número natural.

2) <u>Conjunto dos números inteiros</u>: $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Convenciona-se o uso dos símbolos:

(+) para exclusão dos negativos

(−) para exclusão dos positivos

Dessa maneira, podemos escrever:

$\mathbb{Z}_+ =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_- =$

$\mathbb{Z}^* =$

$\mathbb{Z}_+^* =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_-^* =$

Marque V ou F, conforme sejam verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

( ) A soma de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

( ) A diferença entre dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

( ) O produto de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

( ) O quociente de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

3) <u>Conjunto dos números racionais</u> ($\mathbb{Q}$): Número racional é todo aquele que pode ser expresso na forma de fração com numerador inteiro e denominador inteiro diferente de zero:

$$\mathbb{Q} = \left\{x | x = \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Os números racionais admitem representação decimal exata ou periódica.

Admitem-se também para os racionais as notações $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, ...

Exemplos:

$-\frac{9}{3} = -3 \in \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\frac{1}{3} = 0{,}3333... \in \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\frac{14}{2} = \frac{7}{1} = 7 \in \mathbb{Q}$

$\frac{1}{4} = 0{,}25 \in \mathbb{Q}$ $\qquad$ $-\frac{15}{8} = -1{,}875 \in \mathbb{Q}$

Marque V ou F, conforme sejam verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

( ) A soma de dois números racionais quaisquer é um número racional.

( ) A diferença entre dois números racionais quaisquer é um número racional.

( ) O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

( ) O quociente de dois números racionais quaisquer é um número racional.

4) <u>Conjunto dos números irracionais</u> ($\mathbb{I}$): é o conjunto dos números que não podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Os números irracionais admitem representação decimal não exata e não periódica.

Exemplos:

$\pi = 3{,}14159265\ldots \in \mathbb{I}$ $\qquad$ $\sqrt{2} = 1{,}4142135624\ldots \in \mathbb{I}$

Marque V ou F, conforme sejam verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

( ) A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

( ) O produto de dois números irracionais é um número irracional.

5) <u>Conjunto dos números reais</u> ($\mathbb{R}$): Número real é qualquer número racional ou irracional.

Admitem-se também para os reais as notações $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, ...

Exemplos:

$3 \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\pi \in \mathbb{R}$ $\quad$ $-3{,}8 \in \mathbb{R}$

$-\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\frac{4}{5} \in \mathbb{R}$ $\quad$ $0{,}3333\ldots \in \mathbb{R}$

6) <u>Conjunto dos números complexos</u> ($\mathbb{C}$): São os números cuja forma algébrica é $a + bi$ com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

Exemplos:

$3+\sqrt{-16} = 3 + 4i \in \mathbb{C}$ $\quad$ $-7+\sqrt{-25} = -7 + 5i \in \mathbb{C}$

$\sqrt{-9} = 0 + 3i \in \mathbb{C}$ $\quad$ $2 = 2 + 0i \in \mathbb{C}$

Tomando um número complexo $z = a + bi$, temos:

$a \neq 0$ e $b = 0 \Rightarrow z = a$ (z é real)

$a \neq 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow z = a + bi$ (z é imaginário)

$a = 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow z = bi$ (z é imaginário puro)

<u>Exercícios</u>

1) Considere os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Verifique a qual (ou a quais) dos conjuntos citados pertence cada um dos números:

a) $\sqrt{4}$ $\quad$ b) $\sqrt[3]{-5}$ $\quad$ c) $\frac{1}{6}$ $\quad$ d) -2 $\quad$ e) $\sqrt{-2}$ $\quad$ f) 0,3 $\quad$ g) 3,21545454…

2) Complete corretamente, com o símbolo $\in$ ou $\notin$, conforme o caso, cada enunciado abaixo:

a) -15….. $\mathbb{Q}$ $\quad$ b) $\sqrt[5]{-1}$ …… $\mathbb{R}$ $\quad$ c) $\sqrt{5}$ … $\mathbb{Q}$

3) Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

a) $-4 \in \mathbb{N}$ $\quad$ e) $\sqrt{7} \notin \mathbb{R}$

b) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ $\quad$ f) $-2{,}1313\ldots \in \mathbb{Q}$

c) $0 \in \mathbb{Q}_-$ $\quad$ g) $\frac{4}{3} \in \mathbb{Q}^*_+$

d) $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}_+$ $\quad$ h) $-8 \in \mathbb{R}^*_+$

4) Dados dois números a e b tais que $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $b \notin \mathbb{Q}$, associe V (verdadeiro) ou F (falso) a cada afirmação:

a) $(a + b) \in \mathbb{Q}$
b) $(a . b) \notin \mathbb{Q}$
c) $b^2 \in \mathbb{Q}$
d) $a^2 \in \mathbb{Q}$
e) $(a - b) \notin \mathbb{Q}$
f) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

5) Descreva cada conjunto a seguir, listando seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x < 6\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{Z} | -2 < x \leq 4\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é } par\ e\ x < 15\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{N} | x^2 + x - 6 = 0\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{N}^* | x < 3\}$
f) $F = \{x \in \mathbb{Z}^* | -2 < x < 2\}$

6) Descreva cada conjunto a seguir através de uma propriedade característica:

a) $A = \{5, 7, 9, 11, 13, ...\}$
b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
c) $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
d) $D = \{-3, 3\}$

Respostas:

1) a) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ b) pertence a $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ c) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ d) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ e) $\mathbb{C}$ f) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ g) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$

2) a) $\in$ b) $\in$ c) $\notin$

3) a) F b) V c) V d) F e) F f) V g) V h) F

4) a) F b) V c) F d) V e) V f) F

5) a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ b) $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ c) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ d) $\{2\}$ e) $\{1, 2\}$ f) $\{-1, 1\}$

6) a) $\{x \in \mathbb{N} | x \text{ é ímpar e } x \geq 5\}$ b) $\{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 2\}$ c) $\{x \in \mathbb{N} | x \text{ é divisor de } 12\}$ d) $\{x \in \mathbb{Z} | x^2 = 9\}$

Conjuntos vazio, unitário e universo

O *conjunto vazio* é um conjunto que não possui elementos e é denotado por $\varnothing$ ou $\{\}$.

Exemplo: $\{x \in \mathbb{Z} | x^2 = 3\}$

O *conjunto unitário* é um conjunto constituído por um único elemento.

Exemplo: $\{x \in \mathbb{N} | 3 < x < 5\}$

O *conjunto universo* é o conjunto formado por todos os elementos com os quais estamos trabalhando num determinado assunto. Para denotar o conjunto universo vamos usar o símbolo ***U***. Fixado o universo ***U***, todos os elementos pertencem a ***U*** e todos os conjuntos são partes de ***U***.

Exemplo: Se ***U*** = $\mathbb{N}$, então a equação $x+5=2$ não tem solução; porém, se ***U*** = $\mathbb{Z}$, então a equação $x+5=2$ tem como solução $x=-3$.

Subconjuntos

Se todo elemento de um conjunto *A* é também um elemento de um conjunto *B*, dizemos que *A* é um subconjunto de *B* ou que *A* está contido em *B* e escrevemos: $A \subset B$.

Quando $A \subset B$ podemos também escrever $B \supset A$ (lê-se *B* contém *A*).

Se *A* não for subconjunto de *B*, escrevemos $A \not\subset B$. Nesse caso, existe pelo menos um elemento de *A* que não pertence a *B*.

Exemplos:

a) Considerando os conjuntos $A=\{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 5, 7\}$ e $C=\{1, 5\}$, temos $C \subset A$ e $C \subset B$ mas $B \not\subset A$.

b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

c) $\{2, 4, 6\} \subset \{6, 2, 4\}$

Propriedades:

1) Para todo conjunto *A*, temos $\varnothing \subset A \subset$ ***U***.

2) Para todo conjunto *A*, $A \subset A$.

3) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Observação: $\in$ e $\notin$ são relações entre elemento e conjunto.

$\subset$ e $\not\subset$ são relações entre conjunto e conjunto.

Por exemplo, $2 \in \mathbb{N}$ pode ser escrito também como $\{2\} \subset \mathbb{N}$, mas não podemos escrever $2 \subset \mathbb{N}$ nem $\{2\} \in \mathbb{N}$.

Igualdade de Conjuntos

Dois conjuntos *A* e *B* são iguais se cada elemento pertencente a *A* pertencer também a *B*, e se cada elemento que pertence a *B* pertencer também a *A*, isto é: A = B se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Exemplos:

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$$

$$\{1, 2, 4\} = \{1, 2, 2, 2, 4, 4\}$$

$$\{0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x < 3\}$$

Exercícios

1) Quais destes conjuntos são iguais: $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, r\}$, $\{s, r, s, t\}$?

2) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é } par\ e\ x > 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é } ímpar\ e\ 2 < x < 4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N}^* | x < 8\}$, associe V ou F:

a) $B = \{12, 14, 16, 18, ...\}$

b) $3 \in B$

c) $10 \in C$

d) B é conjunto unitário

e) $2 \notin C$

f) B é conjunto vazio

g) $0 \notin A$

h) $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

3) Dados $A = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 5\}$, $B = \{10, 12, 16, 20\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é } par\ e\ x > 2\}$,, diga quais das seguintes sentenças são verdadeiras:

a) $B \subset C$

b) $B \subset A$

c) $A \subset C$

d) $26 \in C$

e) $\{11, 12, 13\} \subset A$

f) $\{11, 12, 13\} \subset C$

g) $\{12\} \in B$

h) $\{12\} \subset B$

i) $12 \in B$

j) $12 \subset B$

4) Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

a) $\mathbb{N} \supset \mathbb{Z}$ b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ d) $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$

5) Considere os seguintes conjuntos:

$\varnothing$, $A = \{1\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 5, 9\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\boldsymbol{U} = \{1, 2, ..., 8, 9\}$.

Insira o símbolo correto, $\subset$ ou $\not\subset$, em cada par de conjuntos:

a) $\varnothing$ .... A

b) A .... B

c) B C

d) B .... E

e) C .... D

f) C .... E

g) D .... E

h) D .... U

6) Quais dos seguintes conjuntos são iguais?

$A = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 4x + 3 = 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 3x + 2 = 0\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} | x < 3\}$ $F = \{1, 2, 1\}$

$D = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é } ímpar \text{ e } x < 5\}$ $G = \{3, 1\}$

$E = \{1, 2\}$ $H = \{1, 1, 3\}$

7) Sejam $A = \{1, 2, ..., 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$, $E = \{3, 5\}$ e X um conjunto desconhecido. Para cada item abaixo, determine quais dos conjuntos *A*, *B*, *C*, *D* ou *E* podem ser iguais a *X*:

a) $X \subset D$ mas $X \not\subset B$

b) $X \subset A$ mas $X \not\subset C$

c) $X \subset C$ mas $X \not\subset A$

8) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 3, 7, 8\}$, $D = \{3, 4\}$, $E = \{1, 3\}$, $F = \{1\}$ e X um conjunto desconhecido. Para cada item abaixo, determine quais dos conjuntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* ou *F* podem ser iguais a *X*:

a) $X \subset A$ e $X \subset B$

b) $X \not\subset B$ e $X \subset C$

c) $X \not\subset A$ e $X \not\subset C$

d) $X \subset B$ e $X \not\subset C$

9) Dado o conjunto $A = \{1, 2, \{3, 4\}, \{5\}\}$, julgue se os itens abaixo são verdadeiros ou falsos:

a) O conjunto *A* tem 4 elementos

b) $1 \in A$

c) $1 \subset A$

d) $\{1\} \in A$

e) $\{1\} \subset A$

f) $5 \in A$

g) $5 \subset A$

h) $\{5\} \in A$

i) $\{5\} \subset A$

j) $\{\{5\}\} \subset A$

k) $2 \in A$

l) $\{3, 4\} \in A$

m) $\{2\} \subset A$

n) $\{3, 4\} \subset A$

o) $\emptyset \in A$

p) $\emptyset \subset A$

Respostas:

1) todos são iguais

2) a) F b) V c) F d) V e) F f) F g) V h) V

3) a) V b) V c) F d) V e) V f) F g) F h) V i) V j) F

4) a) F b) V c) V d) V

5) a)$\subset$ b)$\subset$ c) $\not\subset$ d)$\subset$ e) $\not\subset$ f)$\subset$ g) $\not\subset$ h) $\subset$

6) B = E = F A = D = G = H

7) a) D e E b) A, B e D c) nenhum

8) a) D b) C, E e F c) B d) B, D

9) a) V b) V c) F d) F e) V f) F g) F h) V i) F j) V k) V l) V m) V n) F o) F p) V