6. Propriedades das Relações em A

Relações Reflexivas

Sejam A um conjunto e R uma relação em A. Então, R é uma *relação reflexiva* se:

$$(\forall a \in A)(aRa)$$

isto é, R é reflexiva se todo elemento $a \in A$ está relacionado consigo mesmo.

Exemplo 1: Determine se as seguintes relações em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ são reflexivas:

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$$

$$R_4 = \varnothing$$

$$R_5 = A \times A$$

Matriz de uma relação reflexiva: a diagonal principal contém somente o valor verdadeiro (1).

Grafo de uma relação reflexiva: em cada vértice do grafo deve haver um laço.

Exemplo 2: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$A^2 : A \to A$

$\langle A, = \rangle$

Relações Irreflexivas:

Sejam A um conjunto e R uma relação em A. R é uma *relação irreflexiva* se: $(\forall a \in A)(a \not R\, a)$.

isto é, R é irreflexiva se nenhum elemento $a \in A$ está relacionado consigo mesmo.

Exemplo 3: Determine se as seguintes relações em $B = \{0, 1, 2\}$ são irreflexivas:

$$R_6 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$R_7 = \{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$$

$$R_8 = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$$

Exemplo 4: Determine se as relações do exemplo 1 são irreflexivas.

Matriz de uma relação irreflexiva: a diagonal principal contém somente o valor falso (0).

Grafo de uma relação irreflexiva: em nenhum dos vértices pode haver um laço.

Exemplo 5: Seja $B = \{0, 1, 2\}$

$\varnothing : B \to B$

$\langle B, R \rangle$,supondo $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

Exemplo 6: Escreva a matriz e desenhe o grafo da relação $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 4)\}$em $A = \{1, 2, 3, 4\}$. *R* é reflexiva? *R* é irreflexiva?

Relações Simétricas

Sejam *A* um conjunto e *R* uma relação em *A*. *R* é uma *relação simétrica* se: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \to bRa)$

isto é, *R* é simétrica quando, estando *a* relacionado com *b*, temos também *b* relacionado com *a*.

Exemplo 7: Determine quais das relações dos exemplos 1 e 3 são simétricas.

Matriz de uma relação simétrica: a metade acima da diagonal principal é a imagem espelhada da metade de baixo.

Grafo de uma relação simétrica: entre dois vértices quaisquer, ou não existe aresta, ou a aresta tem duas “pontas”.

Exemplo 8: Seja $B = \{0, 1, 2\}$

$\langle B, R\rangle$,supondo $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

Relações Anti-Simétricas

Sejam A um conjunto e R uma relação em A. R é uma *relação anti-simétrica* se: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \text{ e } bRa \rightarrow a = b)$ ou, equivalentemente se:

$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \rightarrow a \not R\, b \text{ ou } b \not R\, a)$

isto é, se *a* e *b* são elementos distintos, então *a* não se relaciona com *b* ou *b* não se relaciona com *a*.

Exemplo 9: Determine quais das relações dos exemplos 1 e 3 são anti-simétricas.

Matriz de uma relação anti-simétrica: para qualquer célula verdadeira (1) em uma das metades da matriz (em relação à diagonal), a correspondente célula na outra metade é falsa (0).

Grafo de uma relação anti-simétrica: entre dois vértices quaisquer, não há arestas de duas "pontas".

Exemplo 10: A relação $S = \{(0,0), (1,1), (1,2)\}$ em $B = \{0, 1, 2\}$ é anti-simétrica?

Relação Transitiva

Sejam A um conjunto e R uma relação em A. R é uma *relação transitiva* se: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(aRb \text{ } e \text{ } bRc \rightarrow aRc)$

isto é, se *a* está relacionado com *b* e *b* está relacionado com *c*, então *a* está relacionado com *c*.

Exemplo 11: Determine quais das relações dos exemplos 1 e 3 são transitivas.

Grafo de uma relação simétrica: sempre que uma aresta ligar um vérice *a* a um vértice *b* e o vértice *b* a um vértice *c*, então deve haver uma aresta de *a* para *c*.

Exemplo 12: A relação $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ em $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é transitiva?

Exercícios

1) Determine se as seguintes relações em $A = \{1, 2, 3\}$ são reflexivas, irreflexivas, simétricas, anti-simétricas e, ou, transitivas:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ $R_4 = A \times A$ $R_5 = \varnothing$

2) Determine se as seguintes relações em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ são reflexivas, irreflexivas, simétricas, anti-simétricas e, ou, transitivas:

$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$

3) Determine se as seguintes relações em $A = \{0, 1, 2, 4, 6\}$ são reflexivas, irreflexivas, simétricas, anti-simétricas e, ou, transitivas:

$R_1 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 6)\}$

$R_2 = \{(0, 1), (1, 0), (2, 4), (4, 2), (4, 6), (6, 4)\}$

$R_3 = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2), (2, 0), (2, 1), (1, 0), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$

$R_4 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (4, 6), (6, 4)\}$

4) Considere as seguintes relações em um conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$:

$R_1 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$

$R_2 = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 3)\}$

$R_3 = \{(0, 1), (2, 3)\}$

Desenhe os grafos das relações e diga se são reflexivas, simétricas, transitivas.

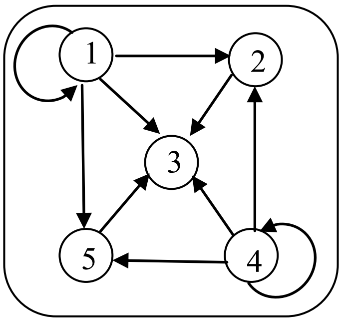
5) Se $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ e a relação binária R em A definida como

$\forall (x, y) \in A \times A,\ xRy \Leftrightarrow 3 \mid (x - y)$

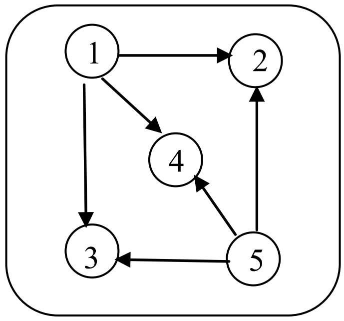
Desenhe o grafo de R e diga se é reflexiva, simétrica, transitiva.

6) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine se as relações definidas pelos grafos abaixo são reflexivas, irreflexivas, simétricas, anti-simétricas e, ou, transitivas:

R_1



R_2



7) Determine se as relações definidas pelos matrizes abaixo são reflexivas, irreflexivas, simétricas e, ou anti-simétricas:

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{R_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{R_6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8) Determine se as seguintes relações sobre o conjunto dos inteiros são reflexivas, irreflexivas, simétricas, anti-simétricas e/ou transitivas:

$R_1 = \{(a, b) \mid a \le b\}$ $\qquad R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$ $\qquad R_3 = \{(a, b) \mid a = b\}$

$R_4 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$ $\qquad R_5 = \{(a, b) \mid a + b \le 3\}$

9) Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Considere R uma relação num conjunto A.

a) Se R é simétrica, R^{-1} é simétrica.

b) Se R é reflexiva, $R \cap R^{-1} \neq \varnothing$.

Respostas:

1) R_1) S N S N S $\quad R_2$) S N N S N $\quad R_3$) N N N S N $\quad R_4$) S N S N S $\quad R_5$) N S S S S

2) R_1) N N N N N $\quad R_2$) N N N N N $\quad R_3$) S N S N S

3) R_1) S N N S N $\quad R_2$) N S S N N $\quad R_3$) N N S N S $\quad R_4$) S N S N S

4) R_1) S S N $\quad R_2$) N N S $\quad R_3$) N N S $\quad$ 5) S S S $\quad$ 6) R_1) N N N S S $\quad R_2$) N S N S S

7) R_1) N N S N $\quad R_2$) N N S N $\quad R_3$) N N N S $\quad R_4$) N S N N $\quad R_5$) S N N S $\quad R_6$) N N N S

8) R_1) S N N S S $\quad R_2$) N S N S S $\quad R_3$) S N S S S $\quad R_4$) N S N S N $\quad R_5$) N N S N N $\quad$ 9) a) V $\quad$ b) V