Matemática Discreta

Prof. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky - PPGEP/UCS
e-mail: ldchiwiacowsky@ucs.br

Universidade de Caxias do Sul
Área do Conhecimento de Ciências Exatas e Engenharias

Sumário

Definição

É uma coleção de zero ou mais objetos distintos, chamados elementos do conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada. É uma coleção “não-ordenada”.

Normalmente, usamos letras maiúsculas para denotar conjuntos: A, B, C, X, Y, ..., e letras minúsculas para denotar elementos de conjuntos: a, b, c, x, y, ...

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;
   b) $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 148\}$,

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;
   b) $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 148\}$, suficiente para se perceber a lei de formação;

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;
   b) $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 148\}$, suficiente para se perceber a lei de formação;
   c) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$,

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;
   b) $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 148\}$, suficiente para se perceber a lei de formação;
   c) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, quando o número de elementos é infinito.

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;
   b) $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 148\}$, suficiente para se perceber a lei de formação;
   c) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, quando o número de elementos é infinito.
2. Por compreensão: designamos as propriedades que caracterizam os elementos do conjunto: $X = \{x/P(x)\}$, onde $P(x)$ representa a propriedade.
   Exemplo:
   a) $X = \{x/x$ é um inteiro par e $x > 0\}$

Se a é um elemento de um conjunto A, então escrevemos $a \in A$ e dizemos "a pertence ao conjunto A".
Se a não é um elemento de um conjunto A, escrevemos $a \notin A$ e dizemos "a não pertence ao conjunto A".
Exemplos:

a) Seja $A = \{a, e, i, o, u\}$, então $i \in A$ e $b \notin A$;

Se a é um elemento de um conjunto A, então escrevemos $a \in A$ e dizemos "a pertence ao conjunto A".
Se a não é um elemento de um conjunto A, escrevemos $a \notin A$ e dizemos "a não pertence ao conjunto A".
Exemplos:

a) Seja $A = \{a, e, i, o, u\}$, então $i \in A$ e $b \notin A$;
b) Seja $B = \{x/x$ é brasileiro$\}$, então $Neymar \in B$ e $Messi \notin B$.

Os conjuntos de maior importância para nós serão os conjuntos numéricos. Destes, alguns são especiais:

1. Conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
   Ainda, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, onde $(*)$ indica a exclusão do número zero de qualquer conjunto.

Os conjuntos de maior importância para nós serão os conjuntos numéricos. Destes, alguns são especiais:

1. Conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
   Ainda, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, onde $(*)$ indica a exclusão do número zero de qualquer conjunto.
2. Conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
   Convenciona-se usar $(+)$ para exclusão dos negativos e $(-)$ para exclusão dos positivos.
   Assim:
   $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}$,
   $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^*_+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$,
   $\mathbb{Z}^*_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$.

3. Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$): número racional é todo aquele que pode ser expresso na forma de fração com numerador inteiro e denominador inteiro diferente de zero. Assim, $\mathbb{Q} = \{x/x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*\}$.
Números racionais admitem representação decimal, exata ou periódica.
Admite-se também para os racionais as notações $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, ...
Exemplos:
   a) $-\frac{9}{3} = -3 \in \mathbb{Q}$;
   b) $\frac{1}{3} = 0,3333 \in \mathbb{Q}$;
   c) $\frac{14}{2} = 7 \in \mathbb{Q}$;
   d) $\frac{1}{4} = 0,25 \in \mathbb{Q}$;
   e) $-\frac{15}{8} = -1,875 \in \mathbb{Q}$.

4. Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$): é o conjunto dos números que não podem ser escritos na forma p/q com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Estes números admitem representação decimal não exata e não periódica.

Exemplos:

a) $\pi = 3,14159265... \in \mathbb{I}$;

b) $e = 2,7182818... \in \mathbb{I}$;

c) $\sqrt{2} = 1,4142135624... \in \mathbb{I}$.

4. Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$): é o conjunto dos números que não podem ser escritos na forma p/q com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Estes números admitem representação decimal não exata e não periódica.
   Exemplos:
   a) $\pi = 3,14159265... \in \mathbb{I}$;
   b) $e = 2,7182818... \in \mathbb{I}$;
   c) $\sqrt{2} = 1,4142135624... \in \mathbb{I}$.

5. Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$): número real é qualquer número racional ou irracional. Admite-se também as notações $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, ...
   Exemplos:
   a) $3 \in \mathbb{R}$;
   b) $\pi \in \mathbb{R}$;
   c) $-1,8 \in \mathbb{R}$;
   d) $0,3333... \in \mathbb{R}$;
   e) $\frac{4}{5} \in \mathbb{R}$.

6. Conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$): são números cuja forma algébrica é dada como $a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

Exemplos:

a) $3 + \sqrt{-16} = 3 + 4i \in \mathbb{C}$;
b) $-7 + \sqrt{-25} = -7 + 5i \in \mathbb{C}$;
c) $\sqrt{-9} = 0 + 3i \in \mathbb{C}$;
d) $2 = 2 + 0i \in \mathbb{C}$.

Teoria dos Conjuntos

Exercícios

1. Considere os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Verifique qual (ou quais) dos conjuntos citados pertence cada um dos números:
   - a) $\sqrt{4}$
   - b) $\sqrt[3]{-5}$
   - c) $\frac{1}{6}$
   - d) -2
   - e) $\sqrt{-2}$
   - f) $0,3$
   - g) $3,21545454...$
2. Complete corretamente, com o símbolo $\in$ ou $\notin$, conforme o caso, cada enunciado abaixo:
   - a) -15______$\mathbb{Q}$
   - b) $\sqrt[5]{-1}$______$\mathbb{R}$
   - c) $\sqrt{5}$______$\mathbb{Q}$
   - d) π______$\mathbb{R}$

3. Assinale V ou F:

a) $-4 \in \mathbb{N}$
b) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$
c) $0 \in \mathbb{Q}_-$
d) $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}_+$
e) $\sqrt{7} \notin \mathbb{R}$
f) $-2,1313... \in \mathbb{Q}$
g) $\frac{4}{7} \in \mathbb{Q}^*_+$
h) $-8 \in \mathbb{R}^*_+$

4. Dados dois números a e b tais que $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $b \notin \mathbb{Q}$, associe V ou F a cada afirmação:

a) $(a+b) \in \mathbb{Q}$
b) $(a \cdot b) \notin \mathbb{Q}$
c) $b^2 \in \mathbb{Q}$
d) $a^2 \in \mathbb{Q}$
e) $(a-b) \notin \mathbb{Q}$
f) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

5. Descreva cada conjunto a seguir, listando seus elementos:
   - a) $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x < 6\}$
   - b) $B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 4\}$
   - c) $C = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ é par e } x < 15\}$
   - d) $D = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + x - 6 = 0\}$
   - e) $E = \{x \in \mathbb{N}^* / x < 3\}$
   - f) $F = \{x \in \mathbb{Z}^* / -2 < x < 2\}$
6. Descreva cada conjunto a seguir através de uma propriedade característica:
   - a) $A = \{5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$
   - b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
   - c) $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
   - d) $D = \{-3, 3\}$

O **conjunto vazio** é um conjunto que não possui elementos e é denotado por $\varnothing$ ou $\{\ \}$.
Exemplo: $X = \{x \in \mathbb{Z}/x^2 = 3\}$.

O **conjunto unitário** é um conjunto constituído por um único elemento.
Exemplo: $X = \{x \in \mathbb{N}/3 < x < 5\}$.

O **conjunto universo** é o conjunto formado por todos os elementos com os quais estamos trabalhando em um determinado contexto. É denotado pelo símbolo U.
Exemplos:

a) Se $U = \mathbb{N}$, então $x + 5 = 2$ não tem solução,
b) Se $U = \mathbb{Z}$, então a equação $x + 5 = 2$ tem como solução $x = -3$.

Se todo o elemento de um conjunto A é também um elemento de um conjunto B, dizemos que "A é um subconjunto de B" ou que "A está contido em B", e escrevemos: $A \subseteq B$.

Quando $A \subseteq B$ podemos escrever também $B \supseteq A$ e lemos "B contém A".

Se A não for subconjunto de B, então escrevemos $A \nsubseteq B$, ou ainda $B \nsupseteq A$. Isto significa que existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B.

Exemplos:

a) Sejam $A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ e $C = \{1, 5\}$, temos $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$ mas $B \nsubseteq A$;

b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$;

c) $\{2, 4, 6\} \subseteq \{6, 2, 4\}$.

Propriedades:

1. Para todo conjunto A, temos $\emptyset \subseteq A \subseteq U$;
2. Para todo conjunto A, $A \subseteq A$;
3. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

Observação

1. $\in$ e $\notin$ são relações entre elemento e conjunto;
2. $\subseteq$ e $\not\subseteq$ são relações entre conjunto e conjunto.

Pertinência $\times$ Inclusão: Os elementos de um conjunto podem ser conjuntos. Portanto, atenção aos conceitos de pertinência e inclusão

Exemplo: Seja $S = \{a, b, c, d, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}\}$. Então:

a) $\{a\} \notin S$, mas $\{a\} \subseteq S$;
b) $\emptyset \in S$ e $\emptyset \subseteq S$;
c) $\{0\} \in S$ e $\{1, 2\} \in S$;
d) $\{a, b, c, d\} \notin S$, mas $\{a, b, c, d\} \subseteq S$.

Dois conjuntos A e B são iguais se cada elemento pertencente a A também pertencer a B e vice-versa, isto é, $A = B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Exemplos:

a) $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq 0\}$;

b) $\{1, 2, 4\} = \{1, 2, 2, 2, 4, 4\}$;

c) $\{0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{N} / 0 \leq x < 3\}$.

Exercícios da apostila “1. Teoria dos Conjuntos”, página 7.

Álgebra de Conjuntos

Definição

Uma álgebra é constituída de operações definidas sobre um conjunto. A Álgebra de Conjuntos é constituída por operações definidas para todos os conjuntos.

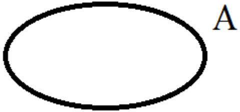
Álgebra de Conjuntos

Diagramas de Venn

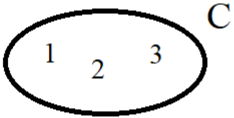
Podemos representar conjuntos e suas operações por meio de figuras geométricas (elipses, retângulos, círculos, ...) chamadas “Diagramas de Venn”. Em geral, o conjunto universo U é representado por um retângulo e os demais conjuntos por círculos, elipes, etc.

Exemplos:

a) Um dado conjunto A

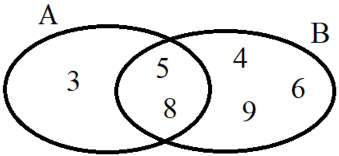


b) $C = \{1, 2, 3\}$



Exemplos:

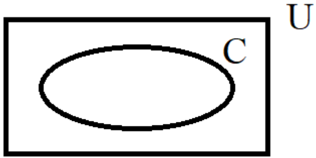
c) $A = \{3, 5, 8\}$ e $B = \{4, 5, 6, 8, 9\}$



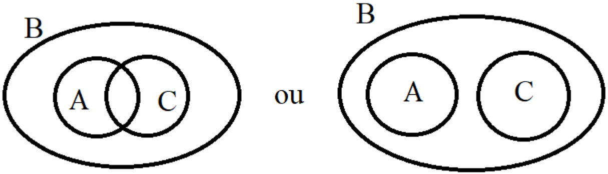
d) $A \subseteq B$

<u>Exemplos</u>:

e) $C \subseteq U$



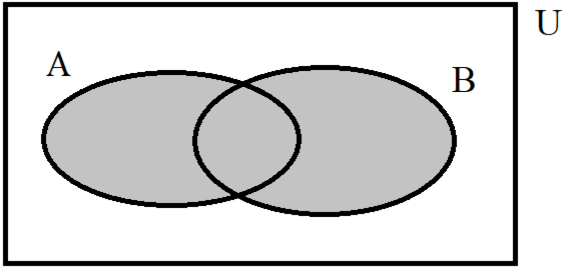
f) $A \subseteq B$ e $C \subseteq B$



Exercícios da apostila “4. Álgebra de Conjuntos”, página 24.

Sejam A e B conjuntos. A união dos conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$



Exemplos:

1. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, determine:
   a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cup C$ d) $B \cup B$ e) $(A \cup B) \cup C$ f) $A \cup (B \cup C)$
2. Suponha os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N}/3 < x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}/x^2 - 2 = x\}$, determine $A \cup B$.
3. Considere os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. Determine: a) $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{R} \cup \mathbb{I}$ c) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
4. Para qualquer conjunto universo U e qualquer $A \subseteq U$, determine:
   a) $\varnothing \cup \varnothing$ b) $U \cup \varnothing$ c) $U \cup A$ d) $U \cup U$

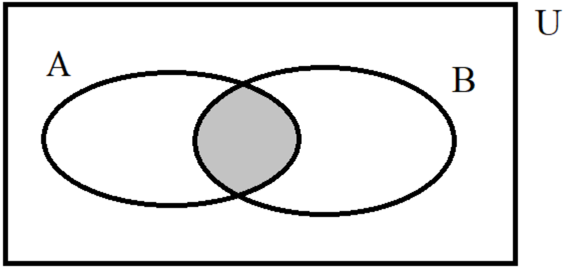
<u>Propriedades da Operação de União</u>:

1. Elemento Neutro: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
2. Idempotência: $A \cup A = A$
3. Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$
4. Associatividade: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Operação Intersecção

Sejam A e B conjuntos. A intersecção dos conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto de elementos que pertencem a A e a B, simultaneamente:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$



Exemplos:

1. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, determine:
   a) $A \cap B$ b) $A \cap C$ c) $B \cap C$ d) $B \cap B$
   e) $A \cap (B \cap C)$ f) $(A \cap B) \cup C$ g) $(A \cup C) \cap B$ h) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Suponha os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 = x\}$, determine $A \cap B$.
3. Considere os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. Determine: a) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{R} \cap \mathbb{I}$ c) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}$
4. Para qualquer conjunto universo U e qualquer $A \subseteq U$, determine:
   a) $\varnothing \cap \varnothing$ b) $U \cap \varnothing$ c) $U \cap A$ d) $U \cap U$

Propriedades da Operação de Intersecção:

1. Elemento Neutro: $A \cap U = U \cap A = A$
2. Idempotência: $A \cap A = A$
3. Comutatividade: $A \cap B = B \cap A$
4. Associatividade: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

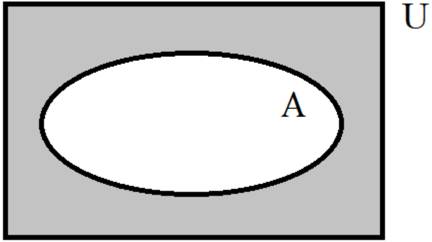
Propriedades Envolvendo União e Intersecção:

1. Distributividade da $\cap$ sobre a $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Distributividade da $\cup$ sobre a $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercícios da apostila “4. Álgebra de Conjuntos”, página 26.

Suponha o conjunto universo U. O complemento de um conjunto $A \subseteq U$, denotado por $\sim A$ (ou $\overline{A}$, A^C, A') é o conjunto dos elementos que estão em U mas não pertencem a A:

$$\sim A = \overline{A} = A^C = A' = \{x \in U / x \notin A\} = U \backslash A$$



Álgebra de Conjuntos

Operação Complemento

Exemplos:

1. Dados os conjuntos $U = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, determine:
   a) $\sim A = \overline{A}$ b) $\sim B = \overline{B}$ c) $\sim(A \cap C)$ d) $\sim(A \cup B)$ e) $\sim \sim C$
2. Suponha o conjunto universo $U = \mathbb{N}$. Seja $A = \{0, 1, 2\}$. Determine $\sim A$.
3. Para qualquer conjunto universo U, determine: a) $\sim\emptyset$ b) $\sim U$
4. Suponha o conjunto $\mathbb{R}$ como conjunto universo. Determine:
   a) $\sim\mathbb{Q}$ b) $\sim\mathbb{I}$
5. Para qualquer conjunto universo U e qualquer $A \subseteq U$, determine:
   a) $A \cup \sim A$ b) $A \cap \sim A$

Propriedades de De Morgan:

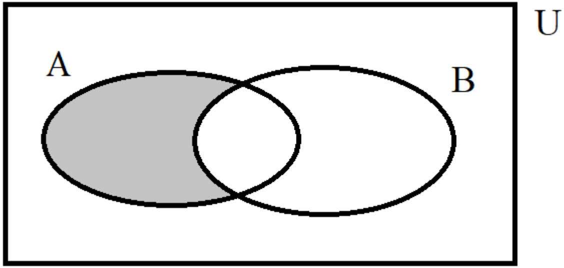
1. $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B \Leftrightarrow A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B)$
2. $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B \Leftrightarrow A \cap B = \sim(\sim A \cup \sim B)$

Exemplos:

6. Com base no exemplo (1) anterior, verifique:
   a) $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ b) $\sim(A \cap C) = \sim A \cup \sim C$

A diferença entre os conjuntos A e B, denotada por $A - B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\} = A \backslash B$$

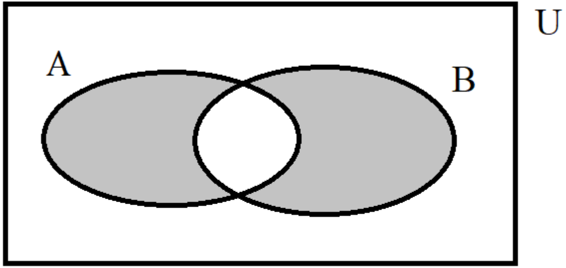


Exemplos:

1. Dados os conjuntos $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$, determine:
   a) $A - C$ b) $B - C$ c) $A - B$ d) $C - A$
   e) $\sim(B - C)$ f) $(A \cup B) - C$ g) $(\sim B - A) \cup C$ h) $\sim(B \cap C) - (A \cup B)$
2. Suponha os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / x > 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 3x + 2 = 0\}$.
   Determine: a) $A - B$ b) $B - A$
3. Considere os conjuntos numéricos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. Determine:
   a) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{R} - \mathbb{I}$ c) $\mathbb{Q} - \mathbb{I}$
4. Para qualquer conjunto universo U e qualquer $A \subseteq U$, determine:
   a) $\varnothing - \varnothing$ b) $U - \varnothing$ c) $U - A$ d) $U - U$

A diferença simétrica dos conjuntos A e B, denotada por $A \oplus B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em A mas não em B, ou que estão em B mas não em A:

$$A \oplus B = \{x/(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\} = A \ominus B$$



Exemplos:

1. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, determine $A \oplus B$.
2. Para qualquer conjunto universo U e qualquer $A \subseteq U$, determine:
   a) $A \oplus A$ b) $A \oplus U$ c) $\varnothing \oplus A$
3. Com o uso de Diagramas de Venn, mostre que $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Propriedades:

1. Distributividade da intersecção em relação à diferença simétrica:
   $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
2. $A \oplus B = \sim A \oplus \sim B$

Exercícios da apostila “4. Álgebra de Conjuntos”, página 30.

Definição

Um Conjunto é Finito quando o processo de contagem de seus elementos chega ao fim. Neste caso, dizemos que um conjunto finito é aquele que possui exatamente n elementos distintos, com $n \in \mathbb{N}$.

A notação $n(A)$ ou $|A|$ indicará o número de elementos de um conjunto finito A.

Se A e B são dois conjuntos finitos, então $A \cup B$ e $A \cap B$ também são finitos:

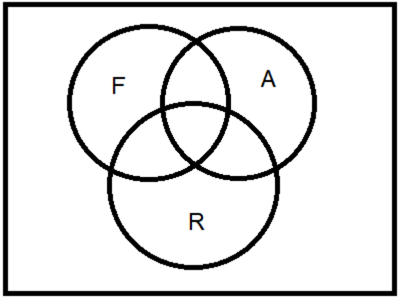
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Para três conjuntos A, B e C, finitos, essa relação será:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Exemplo: Considere os seguintes dados sobre 120 estudantes no que diz respeito aos idiomas francês, alemão e russo: 65 estudam francês, 45 estudam alemão, 42 estudam russo, 20 estudam francês e alemão, 25 estudam francês e russo, 15 estudam alemão e russo e 8 estudam os três idiomas.

a) Preencha o Diagrama de Venn com o número correto de estudantes;
b) Determine o número de alunos que estudam pelo menos um dos três idiomas.



Exercícios:

1. O controle de qualidade em uma fábrica retira de uma linha de montagem 40 peças com defeitos de pintura, embalagem ou componentes eletrônicos. Deste total de peças retiradas, 28 tiveram defeito de pintura, 17 tiveram defeito de embalagem, 13 tiveram defeito eletrônico, 6 tiveram ambos defeitos de pintura e embalagem, 7 tinham defeitos de embalagem e componentes eletrônicos e 10 tinham defeitos de pintura e defeitos eletrônicos. Alguma peça apresentou todos os três tipos de defeito? Quantas? (Resp.: Sim, 5 peças)
2. Uma pesquisa com 150 estudantes universitários revela que 83 possuem automóveis, 97 possuem bicicletas, 28 possuem motocicletas, 53 possuem automóvel e bicicleta, 14 possuem automóvel e motocicleta, 7 possuem bicicleta e motocicleta e 2 possuem os três.
   a) Quantos alunos possuem uma bicicleta e nada mais? (Resp.: 39)
   b) Quantos alunos não possuem nenhum dos três? (Resp.: 14)

Para um conjunto A, o conjunto das partes de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de A.
Se A é finito, então $\mathcal{P}(A)$ também é, e o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é dador por

$$n\mathcal{P}(A) = 2^{n(A)}$$

Exemplo: Suponha $A = \{1, 2, 3\}$, determine $\mathcal{P}(A)$:

Exercícios da apostila “4. Álgebra de Conjuntos”, página 34.

Exercícios

1. Determinar o conjunto X tal que:
   i. $\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\}$
   ii. $\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\}$
   iii. $\{b, c, d\} \cap X = \{c\}$
2. Seja $A = \{1, \{2\}, \{1, 2\}\}$, indique V ou F nos itens abaixo:
   a) $1 \in A$ b) $2 \in A$ c) $\emptyset \subseteq A$ d) $\{1, 2\} \subseteq A$
3. José Carlos e Marlene são os pais de Valéria. A família quer viajar nas férias de julho. José Carlos consegue tirar férias na empresa do dia 2 ao dia 28. Marlene obteve licença no escritório de 5 a 30. As férias de Valéria na escola vão de 1 a 25. Durante quantos dias a família poderá viajar sem faltar às suas obrigações?

Exercícios

4. Em uma classe de 30 alunos, 16 gostam de Matemática e 20 gostam de História. O número de alunos desta classe que gostam de Matemática e História é:
   a) exatamente 16 b) exatamente 10 c) no máximo 6
   d) no mínimo 6 e) exatamente 18
5. Em uma pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 destas pessoas não usam o produto B e que 2 destas pessoas não usam o produto A, qual é o número de pessoas que utilizam os produtos A e B?

Exercícios

6. Considere os conjuntos a seguir, considerando o conjunto universo para este problema como sendo o conjunto de todos os quadriláteros:
   - A = conjunto de todos os paralelogramos;
   - B = conjunto de todos os losangos;
   - C = conjunto de todos os retângulos;
   - D = conjunto de todos os trapézios.

   Usando **apenas** os símbolos x, A, B, C, D, $\in$, $\notin$, $\subseteq$, $=$, $\neq$, $\cup$, $\cap$, $\sim$, $\varnothing$, (,), escreva as sentenças a seguir em notação de conjuntos:

   a) O polígono x é um paralelogramo, mas não é um losango;
   b) Existem outros quadriláteros além dos paralelogramos e dos trapézios;
   c) Tanto retângulos quanto losangos são paralelogramos.

Exercícios - Soluções

1. Vamos analisar as conclusões possíveis de cada item:

   i. $\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow$ com certeza o elemento e pertence a X, enquanto os elementos a, b, c e d podem ou não pertencer ao conjunto X;

   ii. $\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\} \Rightarrow$ com certeza os elementos a e e pertencem a X, enquanto os elementos c e d podem ou não pertencer ao conjunto X;

   iii. $\{b, c, d\} \cap X = \{c\} \Rightarrow$ com certeza o elemento c pertence a X, enquanto os elementos b e d não pertencem ao conjunto X.

   Assim, podemos afirmar que o conjunto é definido como $X = \{a, c, e\}$

Exercícios - Soluções

2. a) V b) F c) V d) F
3. Podemos assumir, para cada membro da família, um conjunto formado pelas datas em que o respectivo membro estará de férias. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{JC} &= \{02/07, 03/07, \ldots, 27/07, 28/07\}; \\ \text{M} &= \{05/07, 06/07, \ldots, 29/07, 30/07\}; \\ \text{V} &= \{01/07, 02/07, \ldots, 24/07, 25/07\}. \end{aligned}$$

   Precisamos calcular o número de elementos da intersecção dos três conjuntos, isto é $n(JC \cap M \cap V)$. Para tanto, podemos construir o respectivo conjunto e contabilizar o número de elementos. Assim, temos:
   $JC \cap M \cap V = \{05/07, 06/07, \ldots, 24/07, 25/07\} \Rightarrow n(JC \cap M \cap V) = 21.$

Exercícios - Soluções

4. Caso seja assumido que todos os 30 alunos presentes na turma gostam de pelo menos uma disciplina, teríamos:

$$n(M \cup H) = n(M) + n(H) - n(M \cap H) \Rightarrow 30 = 16 + 20 - n(M \cap H) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(M \cap H) = 16 + 20 - 30 = 6;$$

ou seja, exatamente 6 alunos gostam tanto de Matemática quanto de História. Porém, se existir na turma um aluno que não gosta nem de Matemática nem de História? Neste caso, teremos $n(M \cup H) = 29$. Destes 29, quantos alunos gostam tanto de Matemática quanto de História?

$$n(M \cup H) = n(M) + n(H) - n(M \cap H) \Rightarrow 29 = 16 + 20 - n(M \cap H) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(M \cap H) = 16 + 20 - 29 = 7.$$

Exercícios - Soluções

Agora, se existirem na turma dois alunos que não gostam nem de Matemática nem de História? Neste caso, teremos $n(M \cup H) = 28$. Destes 28, quantos alunos gostam tanto de Matemática quanto de História?

$$n(M \cup H) = n(M) + n(H) - n(M \cap H) \Rightarrow 28 = 16 + 20 - n(M \cap H) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(M \cap H) = 16 + 20 - 28 = 8.$$

De forma geral, temos que avaliar a condição $n(M \cup H) \leq 30$. Para determinar o número de alunos que gostam tanto de Matemática quanto de História para esta condição, devemos substituir a definição de $n(M \cup H)$ na expressão da condição, obtendo:

$$n(M \cup H) \leq 30 \Rightarrow n(M) + n(H) - n(M \cap H) \leq 30 \Rightarrow 16 + 20 - n(M \cap H) \leq 30 \Rightarrow$$

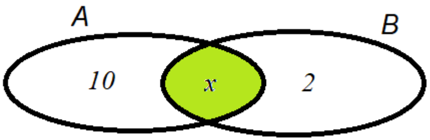
$$\Rightarrow n(M \cap H) \geq 16 + 20 - 30;$$

teremos então $n(M \cap H) \geq 6$, ou seja, no mínimo 6 (item d).

Exercícios - Soluções

5. Com base nas informações do enunciado, podemos escrever:
   - $n(A \cup B) = 15$
   - $n(A - B) = 10$
   - $n(B - A) = 2$
   - $n(A \cap B) = x$

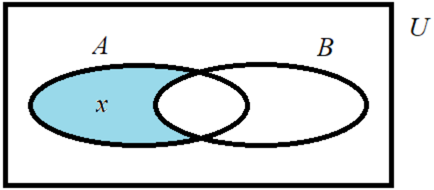
   Representando por um Diagrama de Venn, temos:



Portanto, $n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A) - n(B) = 15 - 10 - 2 \Rightarrow n(A \cap B) = 3.$

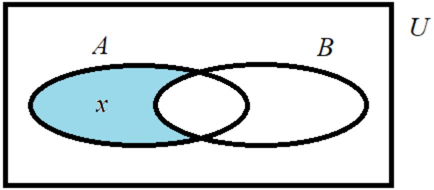
Exercícios - Soluções

6. Para cada item, recomenda-se a construção do Diagrama de Venn correspondente para facilitar a interpretação:
   a) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Exercícios - Soluções

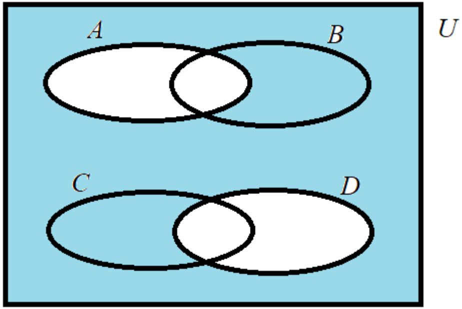
6. Para cada item, recomenda-se a construção do Diagrama de Venn correspondente para facilitar a interpretação:
   a) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Portanto, temos a sentença: $x \in (A \cap \sim B)$ ou $x \in (A \cap \bar{B})$

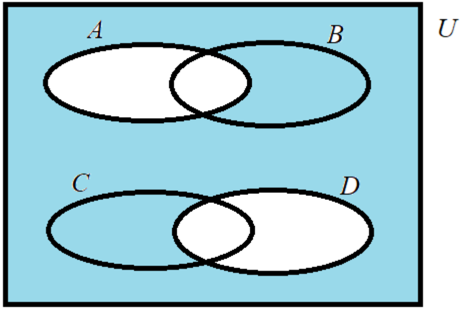
Exercícios - Soluções

b) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Exercícios - Soluções

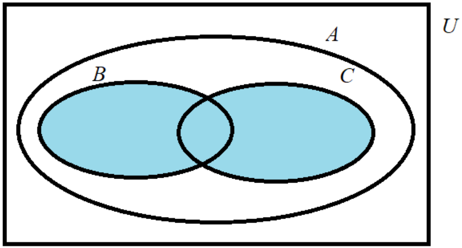
b) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Portanto, temos a sentença: $\sim(A \cup D) \neq \varnothing$

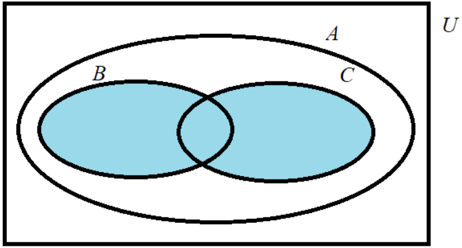
Exercícios - Soluções

c) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Exercícios - Soluções

c) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Portanto, temos a sentença: $(B \cup C) \subseteq A$

Produto Cartesiano

Definição

Sejam dois conjuntos arbitrários A e B. O conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$, é chamado de **produto cartesiano dos conjuntos A e B**. Indicamos por $A \times B$ e lemos "A cartesiano B". Assim: $A \times B = \{(a, b)/a \in A \wedge b \in B\}$.

Denotamos o produto cartesiano de um conjunto A por ele mesmo como $A \times A = A^2$.

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B =$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A =$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C =$

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B =$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

e) $A^2 = A \times A =$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

e) $A^2 = A \times A = \{(a, a)\}$

f) $B^2 = B \times B =$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

e) $A^2 = A \times A = \{(a, a)\}$

f) $B^2 = B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

e) $A^2 = A \times A = \{(a, a)\}$

f) $B^2 = B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

g) $(A \times B) \times C = \{(a, a), (a, b)\} \times \{0, 1, 2\} =$
$\{((a, a), 0), ((a, a), 1), ((a, a), 2), ((a, b), 0), ((a, b), 1), ((a, b), 2)\}$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

e) $A^2 = A \times A = \{(a, a)\}$

f) $B^2 = B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

g) $(A \times B) \times C = \{(a, a), (a, b)\} \times \{0, 1, 2\} =$
$\{((a, a), 0), ((a, a), 1), ((a, a), 2), ((a, b), 0), ((a, b), 1), ((a, b), 2)\}$

h) $A \times (B \times C) =$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

e) $A^2 = A \times A = \{(a, a)\}$

f) $B^2 = B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

g) $(A \times B) \times C = \{(a, a), (a, b)\} \times \{0, 1, 2\} =$
$\{((a, a), 0), ((a, a), 1), ((a, a), 2), ((a, b), 0), ((a, b), 1), ((a, b), 2)\}$

h) $A \times (B \times C) = ???$

Produto Cartesiano

Observações:

- $A \times B \neq B \times A$ (não é comutativo)
- $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ e $n(A \times B \times C) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C)$
- $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ (não é associativo)

Exercícios: Apostila “4. Álgebra de Conjuntos”, página 36.

UCS
UNIVERSIDADE
DE CAXIAS DO SUL