

Ciência da Computação

Lógica para Computação

Prof. Giovanni Ely Rocco (gerocco@ucs.br)



Dedução Natural

Método de demonstração de validade de inferências que utiliza inferências válidas já demonstradas.

Regras de Inferência

Conjunto de inferências válidas (argumento) usados no procedimento de demonstração (prova).

Prova ou Derivação

Procedimento de demonstração da validade, ou não, de uma inferência, em uma série de etapas de raciocínio.

Cálculo Proposicional e de Predicados

Sistema de regras para prova de argumentos válidos (regras básicas, hipotéticas, teoremas e equivalências).

Cálculo Proposicional

Regras Não-Hipotéticas de Inferência

1. Modus Ponens (MP)

De uma condicional verdadeira, pode-se inferir que se o antecedente for verdadeiro o consequente também é.

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{q}$$

Ex. Considerando que me alimento bem,
e quem tem saúde é mais longo,
e quem se alimenta bem tem saúde,
posso concluir que devo ter longevidade.

$$\frac{a \quad s \rightarrow l \quad a \rightarrow s}{l}$$

1. a
2. $s \rightarrow l$
3. $a \rightarrow s$
—
∴ 4. s 1,3 MP
∴ 5. l 2,4 MP

$a, s \rightarrow l, a \rightarrow s \vdash l$

premissas

conclusão

Derivação

Instância da regra de inferência usada para deduzir uma linha em uma demonstração.

Cálculo Proposicional

Regras Não-Hipotéticas de Inferência

2. **Eliminação da Negação** ($\sim\mathbf{E}$, Dupla Negação)

$$\frac{\sim \sim p}{p}$$

3. **Introdução da Conjunção** ($\wedge\mathbf{I}$, Conjunção)

$$\frac{p \quad q}{p \wedge q}$$

4. **Eliminação da Conjunção** ($\wedge\mathbf{E}$, Simplificação)

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

5. **Introdução da Disjunção** ($\vee\mathbf{I}$, Adição)

$$\frac{p}{p \vee q}$$

Cálculo Proposicional

Regras Não-Hipotéticas de Inferência

6. **Eliminação da Disjunção** (**\vee E**, Dilema Construtivo)

$$p \vee q$$

$$p \rightarrow r$$

$$q \rightarrow r$$

$$r$$

7. **Introdução do Bicondicional** (**\leftrightarrow I**)

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow p$$

$$p \leftrightarrow q$$

8. **Eliminação do Bicondicional** (**\leftrightarrow E**)

$$p \leftrightarrow q$$

$$p \rightarrow q$$

Hoje é sábado ou domingo;

se é sábado é final de semana; se é domingo é final de semana;

logo, pode-se concluir, com certeza, que hoje é final de semana.

Cálculo Proposicional

Regras Hipotéticas de Inferência

9. Prova do Condicional (PC, Demonstração Condicional)

Suposição de uma hipótese verdadeira para o condicional com o objetivo de demonstrar a conclusão desse argumento.

Ex. Se me alimento bem então sou saudável,
quem tem saúde, tem mais longevidade,
logo se me alimento bem tenho longevidade.

$$a \rightarrow s, s \rightarrow l \vdash a \rightarrow l$$

$$1. a \rightarrow s$$

$$2. s \rightarrow l \quad \therefore a \rightarrow l$$

3. a	<i>Hipótese</i>
4. s	1,3 MP
5. l	2,4 MP
6. $a \rightarrow l$	3-5 PC

Suposição de que
o antecedente da conclusão
é verdadeiro.

Cálculo Proposicional

Regras Hipotéticas de Inferência

10. Redução ao Absurdo (**RAA**, Prova Indireta)

Suposição da negação da conclusão para obter uma contradição e, por *reductio ad absurdum*, demonstrar indiretamente ser verdadeira.

Ex. Quem se alimenta bem é saudável,
eu não tenho boa saúde,
logo não tenho me alimentado bem.

$$a \rightarrow s, \sim s \vdash \sim a$$

1. $a \rightarrow s$

2. $\sim s$

$\therefore \sim a$

3. a

Hipótese

4. s

1,3 MP

5. $s \wedge \sim s$

2,4 $\wedge I$

6. $\sim a$

3-5 RAA

Suposição de que
a conclusão é falsa.

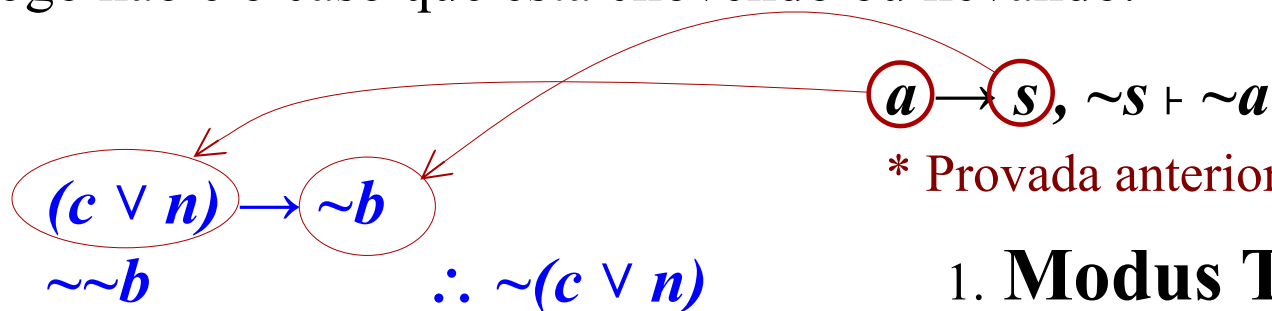
Contradição.

Cálculo Proposicional

Regras Derivadas

Toda a instância de um argumento válido
é também uma formulação válida.

Ex. Se está chovendo ou nevando, então o céu não está aberto;
não é o caso que o céu não está aberto;
logo não é o caso que está chovendo ou nevando.



Instância Substitutiva

*substituição de algumas proposições
por outras fórmulas bem formadas (wwf)*

$a \rightarrow s, \sim s \vdash \sim a$

** Provada anteriormente por RAA.*

1. Modus Tollens (MT)

1. $(c \vee n) \rightarrow \sim b$

2. $\sim \sim b$

$\therefore \sim(c \vee n)$

3. $(c \vee n)$ Hipótese

4. $\sim b$ 1,3 MP

5. $\sim b \wedge \sim \sim b$ 2,4 $\wedge I$

6. $\sim(c \vee n)$ 3-5 RAA

Cálculo Proposicional

Regras Derivadas

Toda a instância de um argumento válido é também uma formulação válida.

$$(C \vee N) \rightarrow \sim B \vdash \sim \sim B \rightarrow \sim(C \vee N)$$

1.	$(C \vee N) \rightarrow \sim B$	Premissa
2.	$\sim \sim B$	Hipótese (PC)
3.	$C \vee N$	Hipótese (RAA)
4.	$\sim B$	1,3 MP
5.	$\sim B \wedge \sim \sim B$	2,4 $\wedge I$
6.	$\sim(C \vee N)$	3-5 RAA
7.	$\sim \sim B \rightarrow \sim(C \vee N)$	2-6 PC

Prova

utilizando apenas
as regras básicas

1.	$(C \vee N) \rightarrow \sim B$	Premissa
2.	$\sim \sim B$	Hipótese
3.	$\sim(C \vee N)$	1,2 MT
4.	$\sim \sim B \rightarrow \sim(C \vee N)$	2-3 PC

Prova

utilizando as
regras básicas e
regras derivadas

Cálculo Proposicional

Regras Derivadas (principais)

2. Absorção (**ABS**)

$$\frac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (p \wedge q)}$$

3. Silogismo Disjuntivo (**SD**)

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{q}$$

4. Silogismo Hipotético (**SH**)

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$$

5. Dilema Construtivo (**DC**)

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ q \rightarrow s \end{array}}{r \vee s}$$

Cálculo Proposicional

Teoremas

Teoremas ou leis do cálculo proposicional são prováveis sem quaisquer suposições não-hipotéticas.

$$\vdash \sim(P \wedge \sim P)$$

Indicação de Teorema

Prova:

- | | |
|----------------------------|----------|
| 1. $P \wedge \sim P$ | Hipótese |
| 2. $\sim(P \wedge \sim P)$ | 1-1 RAA |

$$\vdash (P \vee Q) \vee (\sim P \vee \sim Q)$$

Prova:

- | | |
|--|----------|
| 1. $P \vee \sim P$ | |
| 2. $P \rightarrow (P \vee Q)$ | |
| 3. $\sim P \rightarrow (\sim P \vee \sim Q)$ | |
| 4. $(P \vee Q) \vee (\sim P \vee \sim Q)$ | 1,2,3 DC |

IT
IT
IT

Introdução
de Teorema

$$\vdash P \rightarrow (P \vee Q)$$

Prova:

- | | |
|-------------------------------|----------|
| 1. P | Hipótese |
| 2. $P \vee Q$ | 1 VI |
| 3. $P \rightarrow (P \vee Q)$ | 1-2 PC |

$$\vdash P \vee \sim P$$

Prova:

- | | |
|---|----------------|
| 1. $\sim(P \vee \sim P)$ | Hipótese (RAA) |
| 2. P | Hipótese (RAA) |
| 3. $P \vee \sim P$ | 2 VI |
| 4. $(P \vee \sim P) \wedge \sim(P \vee \sim P)$ | 1,3 $\wedge I$ |
| 5. $\sim P$ | 2-4 RAA |
| 6. $P \vee \sim P$ | 5 VI |
| 7. $(P \vee \sim P) \wedge \sim(P \vee \sim P)$ | 1,6 $\wedge I$ |
| 8. $\sim\sim(P \vee \sim P)$ | 1-7 RAA |
| 9. $P \vee \sim P$ | 8 $\sim E$ |

Cálculo Proposicional

Exemplo

$$\vdash (P \rightarrow Q) \leftrightarrow \sim(P \wedge \sim Q)$$

1.	$P \rightarrow Q$	Hipótese (PC)
2.	$P \wedge \sim Q$	Hipótese (RAA)
3.	P	2 $\wedge E$
4.	$\sim Q$	2 $\wedge E$
5.	Q	1,3 MP
6.	$Q \wedge \sim Q$	4,5 $\wedge I$
7.	$\sim(P \wedge \sim Q)$	2-6 RAA
8.	$(P \rightarrow Q) \rightarrow \sim(P \wedge \sim Q)$	1-7 PC
9.	$\sim(P \wedge \sim Q)$	Hipótese (PC)
10.	P	Hipótese (PC)
11.	$\sim Q$	Hipótese (RAA)
12.	$P \wedge \sim Q$	10,11 $\wedge I$
13.	$(P \wedge \sim Q) \wedge \sim(P \wedge \sim Q)$	9,12 $\wedge I$
14.	$\sim\sim Q$	11-13 RAA
15.	Q	14 $\sim E$
16.	$P \rightarrow Q$	10-15 PC
17.	$\sim(P \wedge \sim Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	9-16 PC
18.	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \sim(P \wedge \sim Q)$	8,17 $\leftrightarrow I$

Cálculo Proposicional

Equivalências

1. Associação (Assoc)

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

2. Comutação (Com)

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

3. Distribuição (Dist)

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

7. Transposição (Trans)

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

8. Exportação (Exp)

$$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

4. Dupla negação (DN)

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

5. Tautologia (Taut)

$$p \equiv p \vee p \equiv p \wedge p$$

6. De Morgan (DM)

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$
$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

9. Implicação Material (IM)

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

10. Equivalência Material (EM)

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$
$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

Se nenhuma operação tática for aplicável, analisar a Estrutura da Conclusão...

1. Proposição simples

Coloca-se como hipótese a negação da conclusão para RAA;
observar, no caso de proposição negada, aplicar a eliminação da dupla negação ($\sim E$).

2. Conjunção na conclusão

Provar as proposições separadamente e concluir com conjunção delas ($\wedge I$).

3. Disjunção na conclusão

Provar por hipótese de negação da disjunção conclusão por RAA;
ou provar os condicionais para uma conclusão por dilema construtivo ($\vee E$);
ou, eventualmente, provar uma das proposições simples e adicionar a outra ($\vee I$).

4. Condicional na conclusão

Por Prova do Condicional (PC), com hipótese do antecedente e derivação consequente.

5. Bicondicional na conclusão

Provar os dois condicionais por PC e concluir com a introdução do bicondicional ($\leftrightarrow I$).

Cálculo Proposicional

Orientações Táticas

1. Simplificar e Isolar

- a. Simplificação (Simp, $\wedge E$)
- b. Modus Ponens (MP)
- c. Modus Tollens (MT)
- d. Silogismo Disjuntivo (SD)

2. Derivar Negações

- a. Modus Tollens (MT)
- b. Silogismo Disjuntivo (SD)

4. Adicionar Necessários

- a. Adição (Ad, $\vee I$)

Operar Condicionais 3

- a. Modus Ponens (MP)
- b. Modus Tollens (MT)
- c. Silogismo Hipotético (SH)
- d. Dilema Construtivo (DC)

Combinar Linhas 5

- a. Conjunção (Conj, $\wedge I$)

Cálculo Proposicional

Orientações Táticas

Exemplo...

$$\sim P \wedge Q, S \rightarrow P, (\sim S \vee R) \rightarrow T \vdash T \wedge \sim P$$

1. $\sim P \wedge Q$ *Premissa*

2. $S \rightarrow P$ *Premissa*

3. $(\sim S \vee R) \rightarrow T$ *Premissa*

4. $\sim P$ *1 Simp ($\wedge E$)* [Tática.1: Simplificar e Isolar]

5. $\sim S$ *2,4 MT* [Tática.2: Derivar negações]

6. $\sim S \vee R$ *5 Ad ($\vee I$)* [Tática.4: Adicionar necessários]

7. T *3,6 MP* [Tática.3: Operar condicionais]

8. $T \wedge \sim P$ *4,7 Conj ($\wedge I$)* [Tática.5: Combinar linhas]

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$
10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$
11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$
12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$

2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$

3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$

4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$

5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$

6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$

7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$

8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$

10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$

11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$

12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$

13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ *premissa*

2. $\sim P$ *premissa*

3. Q *premissa*

4. $Q \rightarrow R$ *1,2 MP*

5. R *3,4 MP*

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$

2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$

3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$

4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$

5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$

6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$

7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$

8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$

10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$

11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$

12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$

13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$

1. $P \rightarrow (Q \wedge R)$

premissa

2. P

premissa

3. $Q \wedge R$

1,2 MP

4. Q

3 $\wedge E$

5. $P \wedge Q$

2,4 $\wedge I$

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$
10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$
11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$
12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$

- | | |
|----------------------------------|------------------------------|
| 1. P | <i>premissa</i> |
| 2. $\sim \sim (P \rightarrow Q)$ | <i>premissa</i> |
| 3. $P \rightarrow Q$ | <i>2 $\sim E$</i> |
| 4. Q | <i>1,3 MP</i> |
| 5. $(R \wedge S) \vee Q$ | <i>4 $\vee I$</i> |

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$
10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$
11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$
12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S,$
 $Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$

- | | |
|-----------------------------------|----------------|
| 1. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ | premissa |
| 2. $P \rightarrow S$ | premissa |
| 3. $Q \rightarrow S$ | premissa |
| 4. $P \rightarrow T$ | premissa |
| 5. $R \rightarrow T$ | premissa |
| 6. $P \vee Q$ | 1 $\wedge E$ |
| 7. S | 2,3,6 $\vee E$ |
| 8. $P \vee R$ | 1 $\wedge E$ |
| 9. T | 4,5,8 $\vee E$ |
| 10. $S \wedge T$ | 7,9 $\wedge I$ |

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$
10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$
11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$
12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$

1. $P \rightarrow Q$

premissa

2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

premissa

3. $Q \rightarrow P$

1,2 MP

4. $P \leftrightarrow Q$

1,3 $\leftrightarrow I$

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$
10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$
11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$
12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$

1. $F \leftrightarrow (S \vee D)$

premissa

2. S

premissa

3. $(S \vee D) \rightarrow F$

1 $\leftrightarrow E$

4. $S \vee D$

2 $\vee I$

5. F

3,4 MP

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. **$T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$**
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$
10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$
11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$
12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

7. **$T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$**

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1. T | <i>premissa</i> |
| 2. $(T \wedge C) \rightarrow \sim S$ | <i>premissa</i> |
| 3. $\sim S \rightarrow \sim P$ | <i>premissa</i> |
| 4. C | <i>hipótese</i> |
| 5. $T \wedge C$ | <i>1,4 $\wedge I$</i> |
| 6. $\sim S$ | <i>2,5 MP</i> |
| 7. $\sim P$ | <i>3,6 MP</i> |
| 8. $C \rightarrow \sim P$ | <i>4-7 PC</i> |

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$

8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$
10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$
11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$
12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

- | | | |
|----|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1. | $(P \wedge Q) \rightarrow R$ | <i>premissa</i> |
| 2. | P | <i>hipótese</i> |
| 3. | Q | <i>hipótese</i> |
| 4. | $P \wedge Q$ | <i>2,3 $\wedge I$</i> |
| 5. | R | <i>1,4 MP</i> |
| 6. | $Q \rightarrow R$ | <i>3-5 PC</i> |
| 7. | $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ | <i>2-6 PC</i> |

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$

10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$
11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$
12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$

1.	$P \leftrightarrow \sim Q$	premissa
2.	$P \wedge Q$	hipótese
3.	P	2 $\wedge E$
4.	Q	2 $\wedge E$
5.	$P \rightarrow \sim Q$	1 $\leftrightarrow E$
6.	$\sim Q$	3,5 MP
7.	$Q \wedge \sim Q$	4,6 $\wedge I$
8.	$\sim (P \wedge Q)$	2-7 RAA

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$

10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$

11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$
12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. $\sim (P \vee Q)$ | <i>premissa</i> |
| 2. P | <i>hipótese</i> |
| 3. $P \vee Q$ | <i>2 $\vee I$</i> |
| 4. $(P \vee Q) \wedge \sim (P \vee Q)$ | <i>1,3 $\wedge I$</i> |
| 5. $\sim P$ | <i>2-4 RAA</i> |
| 6. Q | <i>hipótese</i> |
| 7. $P \vee Q$ | <i>6 $\vee I$</i> |
| 8. $(P \vee Q) \wedge \sim (P \vee Q)$ | <i>1,7 $\wedge I$</i> |
| 9. $\sim Q$ | <i>6-8 RAA</i> |
| 10. $\sim P \wedge \sim Q$ | <i>5,9 $\wedge I$</i> |

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$
10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$

11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$

12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$

13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$

1. $\sim P \rightarrow Q$ *premissa*
2. $R \rightarrow S$ *premissa*
3. $\sim P \vee R$ *premissa*
4. $\sim Q$ *premissa*
5. $\sim \sim P$ *1,4 MT*
6. P *5 $\sim E$*
7. R *3,6 SD*
8. S *2,7 MP*

-- outra forma de demonstração

1. $\sim P \rightarrow Q$ *premissa*
2. $R \rightarrow S$ *premissa*
3. $\sim P \vee R$ *premissa*
4. $\sim Q$ *premissa*
5. $Q \vee S$ *1,2,3 DC*
6. S *4,5 SD*

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$
10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$
11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$

12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$

13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$

- | | |
|---------------------------------|----------------|
| 1. $P \rightarrow Q$ | premissa |
| 2. $(P \wedge Q) \rightarrow R$ | premissa |
| 3. $\sim R$ | premissa |
| 4. $ P$ | hipótese |
| 5. $ Q$ | 1,4 MP |
| 6. $ \sim (P \wedge Q)$ | 2,3 MT |
| 7. $ \sim P \vee \sim Q$ | 6 DM |
| 8. $ \sim Q$ | 4,7 SD |
| 9. $ Q \wedge \sim Q$ | 5,8 $\wedge I$ |
| 10. $\sim P$ | 4-9 RAA |

-- outra forma de demonstração

- | | |
|---------------------------------|----------|
| 1. $P \rightarrow Q$ | premissa |
| 2. $(P \wedge Q) \rightarrow R$ | premissa |
| 3. $\sim R$ | premissa |
| 4. $P \rightarrow (P \wedge Q)$ | 1 ABS |
| 5. $P \rightarrow R$ | 2,4 SH |
| 6. $\sim P$ | 3,5 MT |

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$
10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$
11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$
12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
13. **I, $(I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$**

13. I, $(I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

1. I *premissa*
2. $(I \wedge C) \rightarrow \sim S$ *premissa*
3. $\sim S \rightarrow \sim A$ *premissa*

...

Cálculo Proposicional

Exercícios

1. $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$
2. $P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$
3. $P, \sim \sim (P \rightarrow Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \rightarrow S, Q \rightarrow S, P \rightarrow T, R \rightarrow T \vdash S \wedge T$
5. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \vdash P \leftrightarrow Q$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $T, (T \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim P \vdash C \rightarrow \sim P$
8. $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
9. $P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim (P \wedge Q)$
10. $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$
11. $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$
12. $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
13. **$I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$**

13. $I, (I \wedge C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1. I | <i>premissa</i> |
| 2. $(I \wedge C) \rightarrow \sim S$ | <i>premissa</i> |
| 3. $\sim S \rightarrow \sim A$ | <i>premissa</i> |
| 4. $ C$ | <i>hipótese</i> |
| 5. $ I \wedge C$ | <i>1,4 $\wedge I$</i> |
| 6. $ \sim S$ | <i>2,5 MP</i> |
| 7. $ \sim A$ | <i>3,6 MP</i> |
| 8. $C \rightarrow \sim A$ | <i>4-8 PC</i> |

Cálculo Proposicional

Resumo das Regras

1. MP

$$p \rightarrow q, p \vdash q$$

2. $\sim E$

$$\sim\sim p \vdash p$$

3. $\wedge I$

$$p, q \vdash p \wedge q$$

4. $\wedge E$

$$p \wedge q \vdash p$$

5. $\vee I$

$$p \vdash p \vee q$$

6. $\vee E$

$$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash r$$

7. $\leftrightarrow I$

$$p \rightarrow q, q \rightarrow p \vdash p \leftrightarrow q$$

8. $\leftrightarrow E$

$$p \leftrightarrow q \vdash p \rightarrow q$$

9. PC

suposição de
hipótese verdadeira

10. RAA

suposição de
negação da conclusão

11. MT

$$p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$$

12. ABS

$$p \rightarrow q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$$

13. SD

$$p \vee q, \sim p \vdash q$$

14. SH

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

15. DC

$$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash r \vee s$$

Associação (Assoc)

Comutação (Com)

Distribuição (Dist)

Tautologia (Taut)

$$p \equiv p \vee p \equiv p \wedge p$$

De Morgan (DM)

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Tranposição (Trans)

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

Exportação (Exp)

$$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Impl. Material (IM)

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Equiv. Material (EM)

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$