5. Relações

Introdução

Intuitivamente, uma relação é uma comparação entre dois objetos tomados em uma ordem definida. Os dois objetos estão, ou não, relacionados de acordo com alguma regra. Por exemplo, "menor do que" é uma relação definida nos inteiros. Alguns pares de números, como $(2, 8)$ satisfazem a relação menor que (pois 2 < 8), mas o par $(10, 3)$ não satisfaz.

Há outras relações definidas sobre os inteiros, tais como "divisibilidade", "maior do que", "igualdade", etc., Além disso, há relações sobre outros tipos de objetos. Por exemplo, "é paralelo a", "é um subconjunto de", "é congruente com", e assim por diante.

Definição

Dados dois conjuntos *A* e *B*, uma *relação binária* ou, simplesmente, *relação R* de *A* em *B* é um subconjunto de $A \times B$, ou seja, $R \subset A \times B$, também denotada como $R : A \to B$ onde: *A* é o conjunto de partida de *R* e *B* é o conjunto de chegada de *R*.

A definição deixa claro que toda relação é um conjunto de pares ordenados onde cada primeiro elemento pertence ao conjunto de partida e cada segundo elemento pertence ao conjunto de chegada. Se $(a,b) \in R$, escrevemos $a R b$ que se lê "*a* está relacionado a *b*". Por outro lado, se $(a,b) \notin R$ escrevemos $a \not{R} b$ que se lê "*a* não está relacionado a *b*".

O *domínio* de uma relação *R* é o conjunto de todos os primeiros elementos de um par ordenado que pertence a *R*, e a *imagem* de *R* é o conjunto dos segundos elementos.

Exemplo 1: Se $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, então: $A \times B =$

Qualquer subconjunto de $A \times B$ é uma relação de *A* em *B*; então são exemplos de relações:

$R_1 =$ $\qquad\qquad$ $R_3 =$

$R_2 =$ $\qquad\qquad$ $R_4 =$

Exemplo 2: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z\}$, e seja $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$, então:

R é uma relação de *A* em *B*, pois…………………….

O domínio de *R* é ……………………

A imagem de *R* é……………………

Complete com os símbolos *R* ou $\not{R}$: 3….*y* $\quad$ 2….*z* $\quad$ 3….*x* $\quad$ 1….*y*

Represente *R* usando um diagrama de setas.

Exemplo 3: Sejam $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B=\{1, 2, 3, 4\}$. Escreva a relação $R=\{(x, y)\in A\times B \mid x<y\}$ como um conjunto de pares ordenados.

Exemplo 4: Sejam $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Escreva a relação $R\subset B\times A$, $x\,R\,y \Leftrightarrow y=x+2$ como um conjunto de pares ordenados.

Endorrelação

Se R é uma relação de um conjunto A para si mesmo, isto é, se R é um subconjunto de $A^2=A\times A$, então dizemos que R é uma *endorrelação* ou *auto-relação*. Notação: $\langle A, R\rangle$.

Exemplo 5: Se $A=\{0, 1, 2\}$, escreva a relação "menor que" de A em A e represente R usando um diagrama de setas.

Exemplo 6: Seja $S=\{1, 2\}$. Seja a relação $R=\{(x, y)\in S\times S \mid x+y=\text{ímpar}\}$, então $R=$

Exemplo 7: Seja $A=\{a, b\}$. Escreva a relação $\langle A, =\rangle$

Exemplo 8: Se $A=\{1, 2, 3\}$ escreva a relação $\geq: A\rightarrow A$.

Endorrelação como grafo

Toda endorrelação $R: A\rightarrow A$ pode ser representada como um grafo direcionado com arestas ligando cada par ordenado (a,b), com origem em *a* e destino em *b*.

Exemplo 9: Dados $A=\{1, 2, 3\}$ e $B=\{4, 5\}$ desenhe os grafos orientados das endorrelações:

a) $<: A\rightarrow A$ b) $\langle B, =\rangle$ c) $R: A\rightarrow A$ tal que $R=\{(1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$

Relação como matriz

A relação $R: A\rightarrow B$ pode ser representada na forma de matriz, o que facilita sua implementação em sistemas computacionais.

Sejam $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, ...b_n\}$ dois conjuntos finitos. A representação da relação $R : A \to B$ como matriz é como segue:

a) o número de linhas é *n* (número de elementos do conjunto de partida);

b) o número de colunas é *m* (número de elementos do conjunto de chegada);

c) a matriz resultante possui $m \times n$ células;

d) cada uma das $m \times n$ células possuem um valor lógico associado;

e) se $(a, b) \in R$, então a posição determinada pela linha *i* e pela coluna *j* da matriz contém valor verdadeiro (1); caso contrário, seu valor será falso (0).

Exemplo 10: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos que:

$R : C \to C$ tal que $R = \{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$ $\langle B, = \rangle$ $\langle C, < \rangle$

$S : C \to B$ tal que $S = \{(0, a), (1, b)\}$ $\varnothing : A \to A$ $A \times B : A \to B$

Relação inversa

Seja *R* uma relação qualquer de um conjunto *A* para um conjunto *B*. A relação inversa de *R*, denotada por R^{-1}, é obtida pela inversão dos componentes de cada par ordenado pertencente a *R*; isto é: $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

Exemplo 11: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$;

$R =$

$R^{-1} =$

A matriz da relação inversa é a matriz transposta da matriz da relação.

O grafo da relação inversa é o grafo resultante da inversão dos sentidos das arestas.

Exemplo 12: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R : A \to A$ tal que $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 3), (3, 1)\}$;

a) desenhe os grafos orientados de R e de R^{-1};

b) determine a matriz de R e de R^{-1}.

Exercícios

1) São dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Seja R a seguinte relação de A para B:

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}.$$

a) Determine a matriz da relação;

b) Desenhe o diagrama de setas de R;

c) Ache a relação inversa R^{-1} de R;

d) Determine o domínio e a imagem de R.

2) Sejam $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 10\}$. Para cada uma das seguintes relações:

- Escreva os pares da relação;
- Determine o domínio e a imagem da relação.

a) $R_1 = \{(x, y) \in B \times A \mid x \text{ é divisível por } y\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x \,.\, y = 12\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y + 1\}$

d) $R_4 = \{(x, y) \in B \times A \mid x \leq y\}$

3) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ e seja R a relação em A definida por "x divide y", escrita x|y.

a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados;

b) Desenhe seu grafo orientado;

c) Ache a relação inversa R^{-1} de R. R^{-1} pode ser descrita em palavras?

4) Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Para cada uma das relações em A:

- Escreva os pares da relação;
- Desenhe o grafo orientado;
- Escreva a matriz.

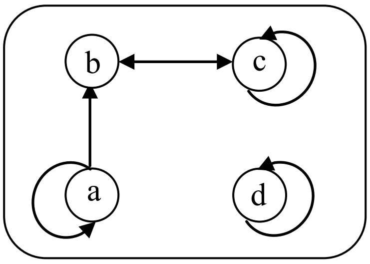
a) $R_1 \subset A \times A, \quad xRy \Leftrightarrow x = 2$

b) $R_2 \subset A \times A, \quad xRy \Leftrightarrow x > 1 \wedge x \neq y$

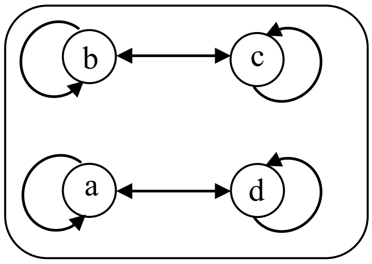
c) $R_3 \subset A \times A, \quad xRy \Leftrightarrow x \leq y$

5) Sejam R_1 e R_2 as seguintes relações em $A = \{a, b, c, d\}$:

R_1



R_2



a) Escreva os pares de R_1 e R_2; b) Ache as relações inversas:

6) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e as relações de A em B: $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$. Obtenha:

a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_1 - R_2$ d) $R_2 - R_1$

7) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ e R e S relações de A em B definidas por:

$R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c), (3, b), (4, a)\}$

$S = \{(1, b), (2, c), (3, b), (4, b)\}$. Obtenha:

a) $\sim R$ b) $R \cap S$ c) $R \cup S$ d) R^{-1}

Respostas:

1) c) $R = \{(y, 1), (z, 1), (y, 3), (x, 4), (z, 4)\}$ d) Dom(R) = $\{1, 3, 4\}$ Im(R) = $\{x, y, z\}$

2) a) $R_1 = \{(3, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (10, 2), (10, 5)\}$ Dom(R_1) = $\{3, 4, 5, 6, 10\}$ Im(R_1) = $\{2, 3, 4, 5\}$

b) $R_2 = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3)\}$ Dom(R_2) = $\{2, 3, 4\}$ Im(R_2) = $\{3, 4, 6\}$

c) $R_3 = \{(4, 3), (5, 4)\}$ Dom(R_3) = $\{4, 5\}$ Im(R_3) = $\{3, 4\}$

d) $R_4 = \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5)\}$ Dom(R_4) = $\{3, 4, 5\}$ Im(R_4) = $\{3, 4, 5\}$

3) a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$

c) $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (6, 1), (2, 2), (4, 2), (6, 2), (3, 3), (6, 3), (4, 4), (6, 6)\}$ "x é um múltiplo de y"

4) a) $R_1 = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ b) $R_2 = \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ c) $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

5) a) $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$ $R_2 = \{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$

b) $R_1^{-1} = \{(a, a), (b, a), (c, b), (b, c), (c, c), (d, d)\}$ $R_2^{-1} = \{(a, a), (d, a), (b, b), (c, b), (b, c), (c, c), (a, d), (d, d)\}$

6) a) $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$ b) $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$ c) $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$

d) $R_2 - R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

7) a) $\sim R = \{(1, c), (2, a), (3, a), (3, c), (4, b), (4, c)\}$ b) $R \cap S = \{(1, b), (2, c), (3, b)\}$

c) $R \cup S = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c), (3, b), (4, a), (4, b)\}$ d) $R^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 2), (b, 3), (a, 4), (b, 4)\}$

Composição de relações

Sejam A, B e C conjuntos, R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. A relação de *composição* de R e S escrita como $S \circ R$ é definida como: Se $a \in A$ e $c \in C$, então $(a, c) \in S \circ R$ se e somente se existir algum $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.

Exemplo 13: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$. Consideremos as relações:

$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ de A em B $\qquad$ $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ de B em C

Faça a composição de R e S com o auxílio do diagrama de setas.

Exemplo 14: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as relações R e S sobre A: $R = \{(1, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$

$S = \{(1, 4), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$. Determine $S \circ R$.

Exercícios

1) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{x, y, z\}$. Considere as seguintes relações R e S de A para B e de B para C, respectivamente: $R = \{(1, b), (2, a), (2, c)\}$ e $S = \{(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)\}$. Ache a relação composta $S \circ R$ com o auxílio do diagrama de setas.

2) Sejam R e S as seguintes relações em $A = \{1, 2, 3\}$:

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,1),(3,3)\} \qquad S = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}.$$

Determine: a) $R \cap S$ b) $R \cup S$ c) $S \circ R$ d) $S \circ S$

3) Seja $R = \{(1,3),(1,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$ uma relação em $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Escreva a matriz de R;

b) Desenhe o grafo orientado de R;

c) Determine o domínio e a imagem de R;

d) Ache R^{-1};

e) Ache a relação composta $R \circ R$.

4) Sejam R e S as seguintes relações em $A = \{a, b, c, d\}$:

$$R = \{(a,a),(a,c),(c,b),(c,d),(d,b)\} \qquad S = \{(b,a),(c,c),(c,d),(d,a)\}.$$

Determine as seguintes relações compostas:

a) $S \circ R$ b) $R \circ S$; c) $R \circ R$; d) $S \circ S$

5) Seja R a relação nos inteiros positivos definida pela equação $x + 3y = 12$; isto é:

$$R = \{(x, y) \mid x + 3y = 12\}$$

a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados;

b) Ache o domínio e a imagem de R;

c) Escreva R^{-1} como um conjunto de pares ordenados;

d) Ache a relação composta $R \circ R$.

6) Sejam $A = \{a, b, c\}$ e R e S relações sobre A com matrizes:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine $S \circ R$.

Respostas:

1) $S \circ R = \{(1,x),(2,y),(2,z)\}$

2) a) $R \cap S = \{(1,2),(3,1)\}$ b) $R \cup S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}$

c) $S \circ R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ d) $S \circ S = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

3) c) Dom(R) = $\{1, 3\}$ Im(R) = $\{2, 3, 4\}$ d) $R^{-1} = \{(3,1),(4,1),(2,3),(3,3),(4,3)\}$

e) $R \circ R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

4) a) $S \circ R = \{(a,c),(a,d),(c,a),(d,a)\}$ b) $R \circ S = \{(b,a),(b,c),(c,b),(c,d),(d,a),(d,c)\}$

c) $R \circ R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(c,b)\}$ d) $S \circ S = \{(c,c),(c,a),(c,d)\}$

5) a) $R = \{(0,4),(3,3),(6,2),(9,1),(12,0)\}$ b) Dom(R) = $\{0, 3, 6, 9, 12\}$ Im(R) = $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $R^{-1} = \{(4,0),(3,3),(2,6),(1,9),(0,12)\}$ d) $R \circ R = \{(3,3),(12,4)\}$

6) $S \circ R = \{(a,a),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$