8. Relações de equivalência

Uma relação R em um conjunto A é uma *relação de equivalência* se R for reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 1: Seja a relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,3),(3,3),(4,4)\}$ em $A = \{1, 2, 3, 4\}$. R é de equivalência?

Exemplo 2: Seja $A = \mathbb{Z}$ e seja $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a = b\}$. R é de equivalência?

Exemplo 3: Seja $A = \mathbb{Z}$ e seja $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \leq b\}$. R é de equivalência?

Classes de equivalência: Sejam R uma relação de equivalência em A e $a \in A$. Então, a classe de equivalência de a, denotada por $[a]$ é definida por:

$$[a] = \{x \in A \mid xRa\} \quad \text{ou} \quad [a] = \{x \in A \mid (x, a) \in R\}$$

Exemplo 4: Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Seja a relação de equivalência $R \subseteq A \times A$, definida por $R = \{(0,0)(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(0,2),(1,3),(2,0),(3,1),(0,4),(4,0),(2,4),(4,2)\}$.

Então: classe de equivalência do elemento 0: $[0] =$

classe de equivalência do elemento 1: $[1] =$

classe de equivalência do elemento 2: $[2] =$

classe de equivalência do elemento 3: $[3] =$

classe de equivalência do elemento 4: $[4] =$

Observação: A união das classes de equivalência de R é igual a A e essas classes de equivalência são iguais ou disjuntas. Isso nos leva a concluir que uma relação de equivalência em um conjunto A particiona o conjunto A em subconjuntos disjuntos.

O conjunto das classes de equivalência será indicado por A/R.

Escreva o conjunto das classes de equivalência do exemplo 4 → $A/R =$

Observe que o conjunto A/R é uma partição de A.

9. Relações de ordem parcial

Uma relação R em um conjunto A é de *ordem parcial* (ou de *ordem*) se R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplo 1: Seja a relação $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ em $A = \{1, 2, 3\}$. R é de ordem parcial?

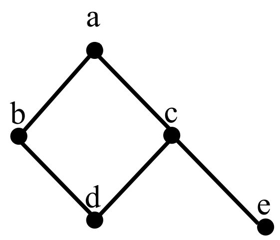
Exemplo 2: Seja $A = \mathbb{N}^*$ e seja $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ divide } b\}$. R é uma relação de ordem?

Exemplo 3: Seja $A = \mathbb{Z}$ e seja $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \leq b\}$. R é uma relação de ordem?

Se A é um conjunto finito então podemos representar uma relação de ordem parcial em A pelo "Diagrama de Hasse".

Exemplo 4: Represente R do exemplo 1 como grafo e como diagrama de Hasse.

Exemplo 5: Dado o diagrama de Hasse a seguir, liste os pares que pertencem à relação de ordem parcial correspondente.



Exercícios

3) Quais das relações abaixo são relações de equivalência sobre $A = \{a, b, c\}$?

a) $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$

b) $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c)\}$

c) $R_3 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}$

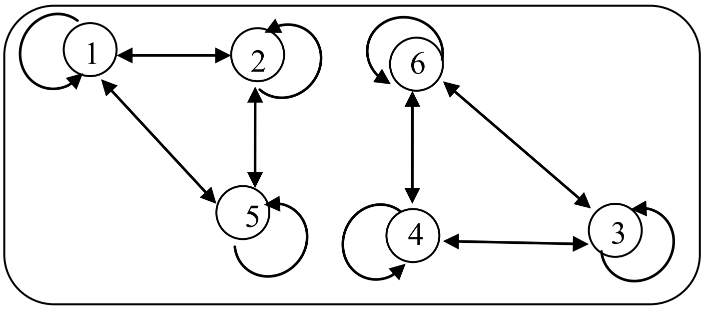
d) $R_4 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, c), (c, b), (a, c), (c, a), (a, b), (b, a)\}$

4) Seja $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (4, 5), (5, 4)\}$ uma relação de equivalência. Escreva: a) $[3]$ b) $[4]$

5) Escreva o conjunto das classes de equivalência para cada relação de equivalência encontrada no exercício 3.

6) Seja $A = \{a, b, c\}$. Determine se a relação R cuja matriz $\mathrm{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma relação de equivalência.

7) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine se a relação R cujo grafo é dado abaixo é uma relação de equivalência.



8) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e a relação de equivalência $R \subseteq A \times A$, definida por $xRy \Leftrightarrow (x - y)$ é divisível por 4. Determine o conjunto das classes de equivalência definidas por R.

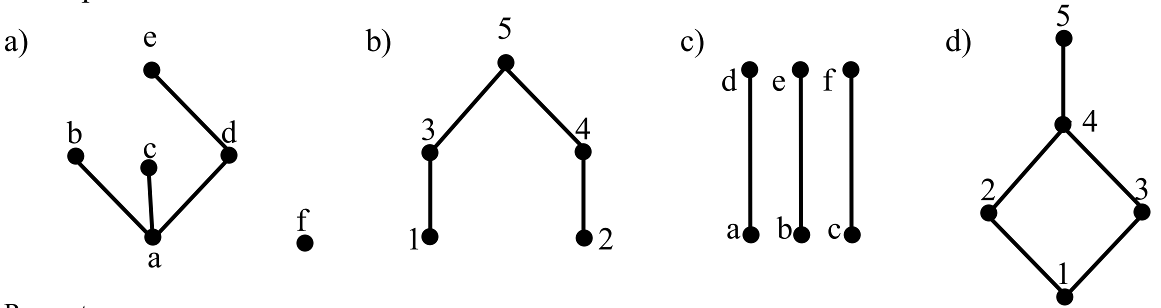
9) Dada a partição $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ do conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$ liste os pares ordenados pertencentes à relação de equivalência correspondente.

10) Dada a partição $\{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}\}$ do conjunto $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ liste os pares ordenados pertencentes à relação de equivalência correspondente.

11) Seja a relação $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ em $A = \{1, 2, 3, 4\}$. R é de ordem? Faça o diagrama de Hasse.

12) Seja $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ e a relação de ordem "*x* divide *y*". Faça o diagrama de Hasse.

13) Dados os diagramas de Hasse a seguir, liste os pares que pertencem à relação de ordem correspondente.



Respostas:

1) a) $\{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ b) $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, c)\}$

c) $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$

2) a) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(2,2),(3,3)\}$ b) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(2,1),(3,2)\}$

c) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3),(2,1),(2,2)\}$

3) R_1 e R_4 4) a) $\{1,2,3\}$ b) $\{4,5\}$

5) $A/R_1 = \{\{a,b\},\{c\}\}$ $A/R_4 = \{\{a,b,c\}\}$

6) SIM 7) SIM 8) $A/R = \{\{0,4,8\},\{1,5,9\},\{2,6,10\},\{3,7\}\}$

9) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

10) $R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,f),(e,e),(f,e),(f,f),(f,d),(d,f)\}$

13) a) $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(d,e)\}$

b) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(1,5),(3,5),(2,4),(2,5),(4,5)\}$

c) $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,d),(b,e),(c,f)\}$

d) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,4),(4,5),(1,3),(3,4),(1,4),(1,5),(2,5),(3,5)\}$

10. Tipos de relações

Relação Funcional

Uma relação R: $A \to B$ é uma relação funcional se, e somente se

$$(\forall a \in A)(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)(aRb_1 \wedge aRb_2 \to b_1 = b_2)$$

Ou seja, em uma relação funcional, cada elemento do conjunto de partida está relacionado com, no máximo, um elemento do conjunto de chegada.

Matriz de uma relação funcional: existe, **no máximo**, um valor verdadeiro em cada **linha** da matriz.

Exemplo 1: Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e R:$A \to B$ tal que $R = \{(a,1),(b,2),(c,2)\}$. R é uma relação funcional?

Relação Injetora

Uma relação R: $A \to B$ é uma relação injetora se, e somente se

$$(\forall b \in B)(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(a_1Rb \wedge a_2Rb \to a_1 = a_2)$$

Ou seja, em uma relação injetora, cada elemento do conjunto de chegada está relacionado com, no máximo, um elemento do conjunto de partida.

Matriz de uma relação injetora: existe, **no máximo**, um valor verdadeiro em cada **coluna** da matriz.

Exemplo 2: Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e R:A→B tal que $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$. R é uma relação injetora?

Relação Total

Uma relação R: A→B é uma relação total se, e somente se

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb)$$

Ou seja, em uma relação total, todos os elementos do conjunto de partida devem estar relacionados a algum elemento do conjunto de chegada.

Matriz de uma relação total: existe, **pelo menos**, um valor verdadeiro em cada **linha** da matriz.

Exemplo 3: Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e R:A→B tal que $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3)\}$. R é uma relação total?

Relação Sobrejetora

Uma relação R: A→B é uma relação sobrejetora se, e somente se

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(aRb)$$

Ou seja, em uma relação sobrejetora, todos os elementos do conjunto de chegada devem estar relacionados com algum elemento do conjunto de partida.

Matriz de uma relação sobrejetora: existe, **pelo menos**, um valor verdadeiro em cada **coluna** da matriz.

Exemplo 4: Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$ e R:A→B tal que $R = \{(a, b), (c, a)\}$. R é uma relação sobrejetora?

Monomorfismo

Uma relação R: $A \rightarrow B$ é um monomorfismo se, e somente se for, simultaneamente **total** e **injetora**.

Ou seja, em um monomorfismo, cada elemento do conjunto de chegada, está relacionado com, no máximo, um elemento do conjunto de partida e para cada elemento do conjunto de partida, existe pelo menos, um elemento do conjunto de chegada.

Matriz de um monomorfismo: existe, **pelo menos**, um valor verdadeiro em cada **linha** (total) e **no máximo**, um valor verdadeiro em cada **coluna** (injetora) da matriz.

Exemplo 5: Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e R:$A \rightarrow B$ tal que $R = \{(a, a)\}$. R é um monomorfismo?

Epimorfismo

Uma relação R: $A \rightarrow B$ é um epimorfismo se, e somente se for, simultaneamente **funcional** e **sobrejetora**.

Ou seja, em um epimorfismo, cada elemento do conjunto de partida, está relacionado com, no máximo, um elemento do conjunto de chegada e para cada elemento do conjunto de chegada, existe pelo menos, um elemento do conjunto de partida.

Matriz de um epimorfismo: existe, **pelo menos**, um valor verdadeiro em cada **coluna** (sobrejetora) e **no máximo**, um valor verdadeiro em cada **linha** (funcional) da matriz.

Exemplo 6: Sejam $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ e R:$A \rightarrow B$ tal que $R = \{(0, a), (1, b)\}$. R é um epimorfismo?

Isomorfismo

O conceito de isomorfismo está associado a uma noção de igualdade semântica, no sentido em que se pode definir uma relação tal que, quando composta com a sua inversa, resulta em uma igualdade.

Uma relação R: $A \to B$ é um isomorfismo se, e somente se, existe uma relação S: $B \to A$ tal que:

$$R \circ S = \mathrm{id}_A \qquad \text{e} \qquad S \circ R = \mathrm{id}_B$$

Exemplo 7: Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{e, f, g\}$ e R: $A \to B$ tal que $R = \{(a, e), (b, g), (c, f)\}$. R é um isomorfismo?

Exemplo 8: Sejam $A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e R: $A \to B$ tal que $R = \{(a, 0), (b, 1)\}$. R é um isomorfismo?

Conclusão: Uma relação R: $A \to B$ é um isomorfismo se, e somente se for, simultaneamente **total**, **funcional**, **injetora** e **sobrejetora**.

11. Funções Parciais e Totais

Função Parcial

Uma função parcial é uma relação funcional, isto é, cada elemento do conjunto de partida está relacionado a no máximo um elemento do conjunto de chegada.

Uma função parcial $\mathrm{f} \subseteq A \times B$ é denotada por f: $A \to B$ e o par $(a, b) \in \mathrm{f}$ é denotado por $\mathrm{f}(a) = b$.

Exemplo 1: Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e f: $A \to A$ tal que $\mathrm{f} = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$. f é uma função parcial?

Exemplo 2: Sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e f: $A \to A$ tal que $\mathrm{f} = \{(0, 2), (1, 2)\}$.

a) f é uma função parcial?
b) A função inversa de f é uma função parcial?

Função Total

Uma função total ou simplesmente função é uma função parcial definida para todos os elementos do conjunto de partida.

Matriz de uma função: existe, **exatamente**, um valor verdadeiro em cada **linha** da matriz.

Exemplo 3: Seja $\mathrm{f} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5), (d, 5)\}$ de $A = \{a, b, c, d\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. f é uma função total?

Exemplo 4: Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e f: $A \to B$ tal que $f = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

a) f é uma função total?

b) A função inversa de f é uma função total?

Exercícios

1) Dados os conjuntos $A = B = \{1, 2, 3, 4\}$, determine se as seguintes relações R: $A \to B$ são: funcional, injetora, sobrejetora ou total:

a) $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

c) $R_3 = \{(4, 4), (3, 2), (3, 1)(2, 3), (1, 1)\}$

d) $R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

e) $R_5 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 4)\}$

f) $R_6 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$

2) Dados os conjuntos $A = \{0, 1\}$ e $B = \{0\}$, determine se as seguintes relações são: funcional, injetora, sobrejetora ou total:

a) R: $A \to B$ $R = \{(0, 0), (1, 0)\}$

b) R: $B \to A$ $R = \{(0, 1), (0, 0)\}$

c) R: $A \to B$ $R = \{(1, 0)\}$

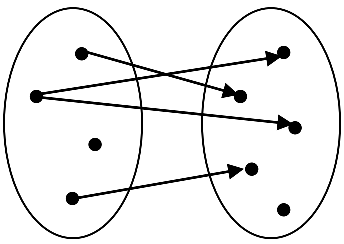
d) R: $B \to A$ $R = \{(0, 0)\}$

3) Determine se as relações definidas pelos matrizes abaixo são: funcional, injetora, sobrejetora ou total:

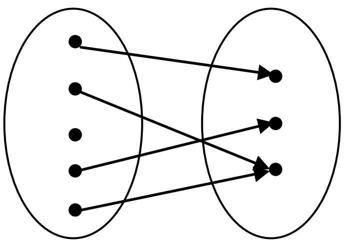
a) $M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $M_{R_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) Determine se as relações dadas pelos diagramas abaixo são: funcional, injetora, sobrejetora ou total:

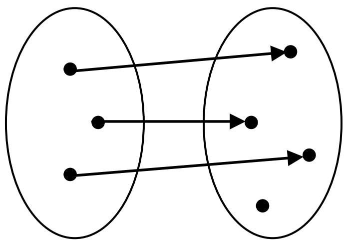
a)



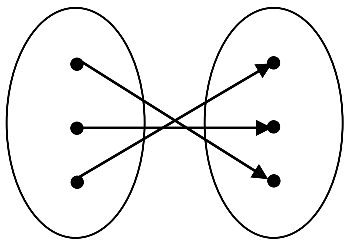
b)



c)



d)



5) Considere as relações dos exercícios 1, 2, 3, 4 e diga quais são monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos.

6) Considere as relações dos exercícios 1, 2, 3, 4 e diga quais são funções parciais e quais são funções totais.

Respostas:

1) a) funcional, injetora b) injetora, sobrejetora c) total, sobrejetora
d) funcional, injetora, total, sobrejetora e) injetora, sobrejetora
f) funcional, injetora, total, sobrejetora

2) a) funcional, total, sobrejetora b) injetora, total, sobrejetora
c) funcional, intetora, sobrejetora d) funcional, injetora, total

3) a) total, sobrejetora b) funcional, injetora, total, sobrejetora c) funcional

4) a) injetora b) funcional, sobrejetora c) funcional, injetora, total
d) funcional, injetora, total, sobrejetora

5) Monomorfismos: 2b, 2d, 4c
Epimorfismos: 2a, 2c, 4b
Isomorfismos: 1d, 1f, 3b, 4d

6) Funções parciais: 1a, 2c, 3c, 4b Funções totais: 1d, 1f, 2a, 2d, 3b, 4c, 4d