UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

FBX5010
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Área do Conhecimento de Ciências Exatas e Engenharias

Professora: Monica Scotti

Período letivo: 2025/2

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Ementa da Disciplina

Estudo do conceito de derivada de funções de uma variável real e sua aplicação na resolução de problemas em Ciências Exatas. Desenvolvimento do conceito de antiderivada e sua aplicação na resolução de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem de variáveis separadas.

- Comportamento de Funções
- Limites e Taxas de variação
- Derivadas e Integrais

Capítulo 1
Limites e Continuidade

- Seção 1.1
- ANTON – p. 67 (livro físico) ou p. 87 (e-book)
- E-book disponível em Minha Biblioteca
- ID: 9788582602263

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Aula 01
Limites: uma abordagem intuitiva

O que entendemos por **limite**?

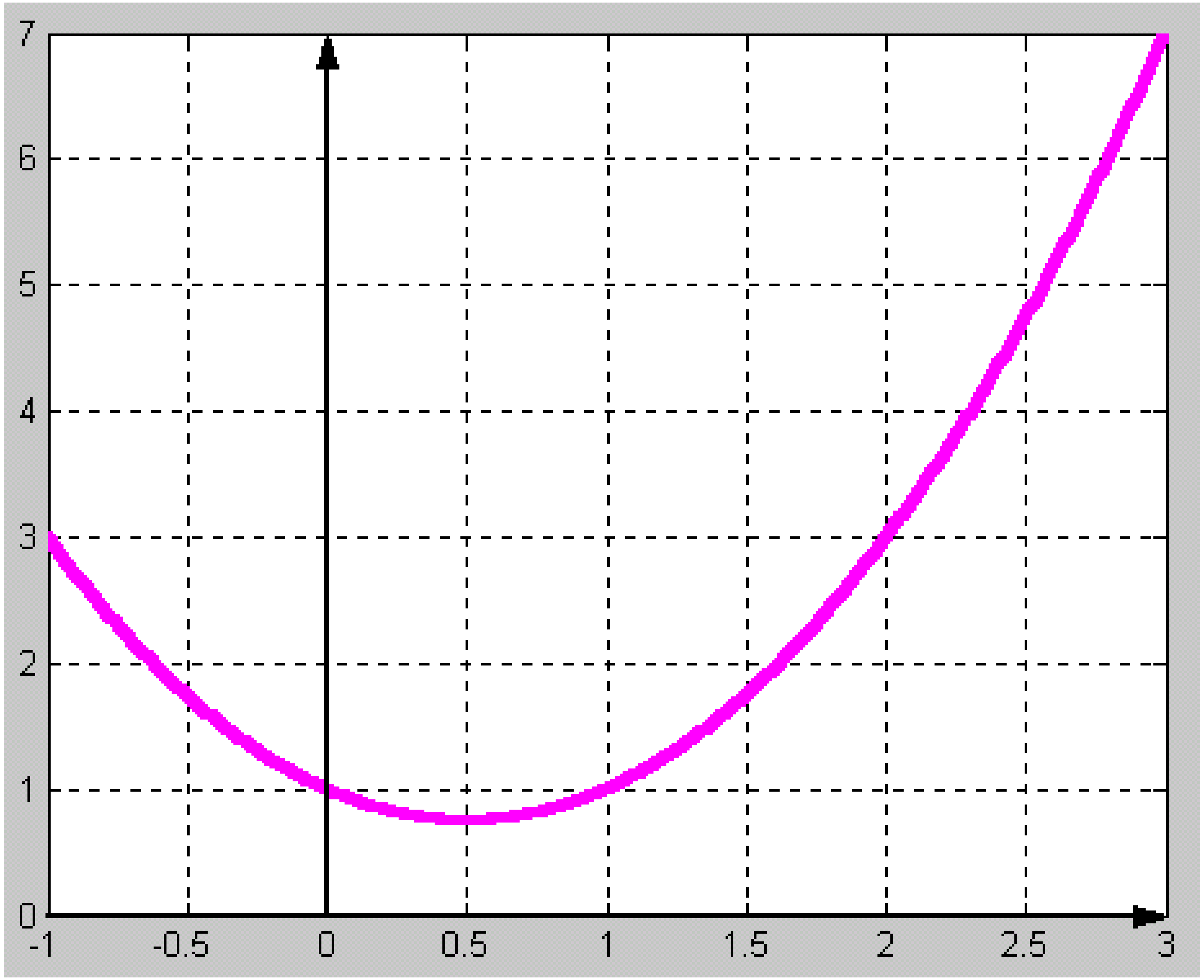
Em **Matemática**, entenderemos **limite** como o <u>comportamento de uma **função**</u> no momento em que a <u>variável independente se *aproxima*</u> de um determinado valor.

Exemplo 1) Qual é o comportamento da função

$$f\ (x) = x^2 - x + 1$$

quando x assume valores cada vez mais próximos de 2?

UCS
UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Exemplo 1) Qual é o comportamento da função

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

quando x assume valores cada vez mais próximos de 2?

Observe que o comportamento (*limite*) da função $f(x) = x^2 - x + 1$ quando x se aproxima 2 é exatamente igual a $f(2)$. Isso não é acidental.

O limite de um polinômio $p(x)$ quando $x \to a$ é igual ao valor do polinômio em a.

- Muitas funções são “*bem comportadas*”.

- São funções cujo gráfico não apresenta nenhuma interrupção (“buracos” ou saltos).

- São ditas <u>funções contínuas</u>.

- Para essas funções o comportamento (limite) será sempre o próprio valor da função.

Limites
(de um ponto de vista informal – p. 70)

Se os valores de $f(x)$ puderem ser tornados tão próximos quanto quisermos de L, fazendo x suficientemente próximo de a (mas não igual a a), então escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que deve ser lido como

O limite de $f(x)$ quando x tende ao valor a é L.

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Porém, nem todas as funções são “*bem comportadas*” como as funções polinomiais...

Exemplo 2) Qual é o $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$?

Observe que neste exemplo ao fazermos a substituição

direta $x = 1$ na equação da função obtém-se $\frac{0}{0}$ que é uma

indeterminação!!!

O que fazer então?

Devemos tentar outra abordagem!

No geral, limites são obtidos de três maneiras:

- **algebricamente**
- **numericamente** (por tabelas) ou
- **geometricamente** (através da análise de gráficos).

Voltando para o limite do Exemplo 2:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

- ~~**Algebricamente**~~
- **Numericamente**
- **Graficamente**

Comportamento de $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, quando x se aproxima de 1?

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0		2	
0,5		1,5	
0,9		1,1	
0,99		1,01	
0,999		1,001	
0,9999		1,0001	
0,99999		1,00001	

Notação:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Ou seja, a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ se aproxima de 2 quando x se aproxima de 1.

$$f(x) \to 2$$
$$x \to 1$$

Podemos confirmar esse resultado numérico, analisando o gráfico de $f(x)$.

Exemplo 3) Encontre o valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Observe que a função exibe comportamentos diferentes em cada um dos lados do ponto $x = 0$, e nesse caso é necessário distinguir se x está próximo de 0 do lado esquerdo ou do lado direito para fins de examinar o limite.

Isso nos leva à ideia geral de ***limites laterais***.

Limites Laterais (p.72)

O limite bilateral de uma função existe em um ponto a, se e somente se, existem os limites laterais naquele ponto e tiverem o mesmo valor, isto é:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ \text{ se, e somente se, } \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Ou seja, para que um limite exista, os limites laterais devem ser iguais!

Exercício 01

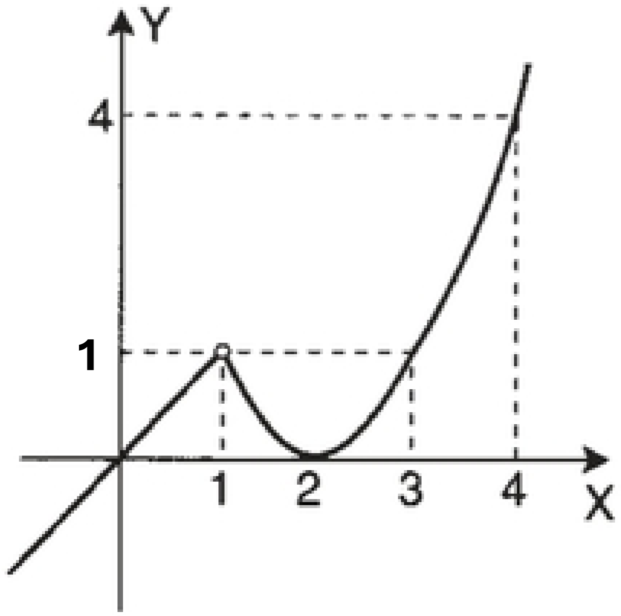
Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico.

Intuitivamente, encontre, se existir:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$



Exercício 02

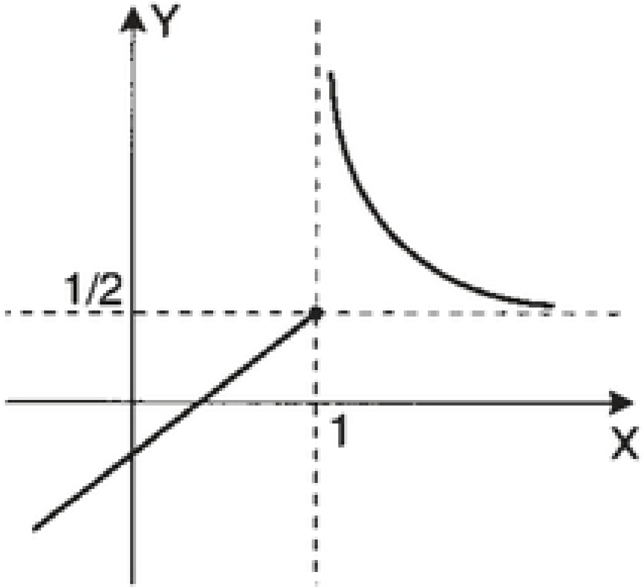
Seja a função $f(x)$ representada pelo gráfico.

Encontre, se existir:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$



Exercício 03

Seja $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ -x+3, & x > 2 \end{cases}$

Esboce o gráfico da função e determine:

$\lim_{x \to 3^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 3} f(x) =$

$\lim_{x \to 2} f(x) =$

Exercício 04

Determine os seguintes limites (observe a estratégia mais adequada: algébrica, numérica ou gráfica)

a) $\lim_{x \to 2} x^3 - 2x^2 - 4 =$

b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 + x - 6} =$

c) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x}{x - 2} =$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Exercício 05

$$\text{Seja } f(x) = \begin{cases} 1/x & , \quad x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ 2 - x, & \quad x > 1. \end{cases}$$

Esboce o gráfico e calcule os limites indicados se existirem:

(*a*) $\lim_{x \to -1} f(x)$.

(*b*) $\lim_{x \to 1} f(x)$.

(*c*) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(*d*) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

(*e*) $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(*f*) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

(*g*) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

(*h*) $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Atividades da Aula 01

- Leitura da Seção 1.1 do livro referência (Howard Anton)
- Exercícios da p. 77: **01 ao 12 (exceto 05) + 13, 15 (com uso de calculadora científica + app gráfico) + 17 ao 20**.
- Leitura Complementar – até p. 18 do e-book “Cálculo em Quadrinhos”, busque pelo ID 9788521208303 ou clique neste link.