Objetivos

- Apresentar o conceito de representação por Soma dos Produtos ou Produto das Somas
- Introduzir os conceitos de Mapas de Karnaugh para simplificação de circuitos lógicos

Representação de circuitos lógicos & Mapa de Karnaugh

Soma dos produtos (SOP)

As expressões lógicas podem ser representadas em uma forma de fácil avaliação.

- Soma de Produtos (SOP): cada expressão consiste em dois ou mais termos AND (produtos) conectados por operações OR.

$$1.\ ABC + (\bar{A}B\bar{C})$$

$$2.\ AB + (\bar{A}B\bar{C}) + \bar{C}\bar{D} + \bar{D}$$

- Os termos da forma de SOP são chamados de **Mintermos**, pois cada termo possui todas as variáveis de entrada (complementadas ou não)

$$F(A,B,C) = (\bar{A}\bar{B}C) + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC$$

$$F(A,B,C) = m_1 + m_3 + m_5 + m_7$$

$$F(A,B,C) = \sum_{i=0}^{7} m_i$$

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. Sistemas digitais: princípios e aplicações, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. P. 141

Produto de somas (POS)

As expressões lógicas podem ser representadas em uma forma de fácil avaliação.

- Produto de Somas (POS): cada expressão consiste em dois ou mais termos OR (somas) conectados por operações AND.

$$1. (A+\bar{B}+C).(A+C)$$

$$2. (A+\bar{B}).(\bar{C}+D).F$$

- Os termos da forma de POS são chamados de **Maxtermos**, pois cada termo possui todas as variáveis de entrada (complementadas ou não)

$$F(A,B,C) = (A+B+C).(A+B+\bar{C}).(A+\bar{B}+C).(\bar{A}+B+C)$$

$$F(A,B,C) = m_0.m_1.m_2.m_4$$

$$F(A,B,C) = \prod_{i=0}^{7} m_i$$

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

FLOYD, Thomas. Sistemas Digitais. [Digite o Local da Editora]: Grupo A, 2011. E-book. 9788577801077. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577801077/. Acesso em: 28 ago. 2022. P. 219

Representação de circuitos lógicos & Mapa de Karnaugh

Produto de somas (POS)

$$F(A,B,C) = (A+B+C).(A+B+\bar{C}).(A+\bar{B}+C).(\bar{A}+B+C)$$

Inversão das entradas

$$F(A,B,C) = m_0.m_1.m_2.m_4$$

$$F(A,B,C) = \prod_{i=0}^{7} m_i$$

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Exemplo 01

A partir da tabela verdade abaixo, determine a expressão de soma de produtos e a expressão equivalente de produto de somas.

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

- SOP

$$F(A,B,C) = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

- POS

$$F(A,B,C) = (A + B + C).(A + B + \bar{C}).(A + \bar{B} + C).(\bar{A} + B + \bar{C})$$

FLOYD, Thomas. Sistemas Digitais. [Digite o Local da Editora]: Grupo A, 2011. E-book. 9788577801077. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577801077/. Acesso em: 28 ago. 2022. P. 224-225

Exemplo 02

Determine a tabela-verdade para a seguinte expressão de produto de somas:

$$F(A,B,C) = (A+B+C).(A+\bar{B}+C).(A+\bar{B}+\bar{C}).(\bar{A}+B+\bar{C}).(\bar{A}+\bar{B}+C)$$

ENTRADAS A	B	C	SAÍDA X	TERMO-SOMA
0	0	0	0	$(A+B+C)$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$(A+\overline{B}+C)$
0	1	1	0	$(A+\overline{B}+\overline{C})$
1	0	0	1	
1	0	1	0	$(\overline{A}+B+\overline{C})$
1	1	0	0	$(\overline{A}+\overline{B}+C)$
1	1	1	1	

FLOYD, Thomas. Sistemas Digitais. [Digite o Local da Editora]: Grupo A, 2011. E-book. 9788577801077. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577801077/. Acesso em: 28 ago. 2022. P. 223

Mapa de Karnaugh

O mapa de Karnaugh é um método sistemático para simplificação de expressões booleanas e, se usado adequadamente, produz a expressão de soma de produtos ou produto de somas mais simples possível, conhecida como expressão mínima.

- Os mapas de Karnaugh podem ser usados para expressões com 2, 3, 4 e 5 variáveis. Para um número maior de variáveis usa-se um outro método denominado Quine-McClusky.
- O número de células em um mapa de Karnaugh é igual ao número total de combinações possíveis das variáveis de entrada. Para o caso de 3 variáveis, por exemplo, tem-se um número de células igual a $2^3=8$.
- Duas células adjacentes entre si diferem apenas em uma variável.

TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. Sistemas digitais: princípios e aplicações, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. P. 155
FLOYD, Thomas. Sistemas Digitais. [Digite o Local da Editora]: Grupo A, 2011. E-book. 9788577801077. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577801077/. Acesso em: 28 ago. 2022. P. 226

Representação de circuitos lógicos & Mapa de Karnaugh

Mapa de Karnaugh

Processo de simplificação:

1. Colocar 1 na célula correspondente ao mintermo, observando-se as variáveis de entrada
   - No caso de utilizar maxtermos, coloca-se 0
2. Agrupa-se as células adjacentes com saídas iguais (1 para mintermos e 0 para maxtermos) de tal maneira que produz o menor número de agrupamentos
   - Começa-se agrupar a partir do maior grupo possível
   - Todos os grupos devem possuir um número de células igual a potência de 2 (isto é, 1, 2, 4, 8,...)
   - O agrupamento é finalizado quando todas as células estiverem agrupadas

Mapa de Karnaugh

Processo de simplificação:

3. Converte-se cada agrupamento em um termo produto que represente o agrupamento
    - Variáveis das células que diferem não fazem parte do termo produto

A expressão será a soma dos termos produtos gerados pelos agrupamentos

Representação de circuitos lógicos & Mapa de Karnaugh

Mapa de Karnaugh

Karnaugh - 2 variáveis

A	B	X	
0	0	1	→ $\bar{A}\bar{B}$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	→ AB

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	1	0
A	0	1

$$X = \bar{A}\bar{B} + AB$$

Karnaugh - 3 variáveis

A	B	C	X	
0	0	0	1	→ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	1	→ $\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	1	→ $\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	→ $AB\bar{C}$
1	1	1	0	

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	1
$\bar{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\bar{B}$	0	0

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C}$$

TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. Sistemas digitais: princípios e aplicações, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. P. 156

Representação de circuitos lógicos & Mapa de Karnaugh

Mapa de Karnaugh

A	B	C	D	X	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	$\rightarrow \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\rightarrow \bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	$\rightarrow AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0	
1	1	1	1	1	$\rightarrow ABCD$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	0	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

Simplificação algébrica

$$X = \bar{A}\bar{C}D(B + \bar{B}) + ABD(C + \bar{C})$$
$$X = \bar{A}\bar{C}D + ABD$$

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}D + ABCD$$
$$X = \bar{A}\bar{C}D + ABD$$

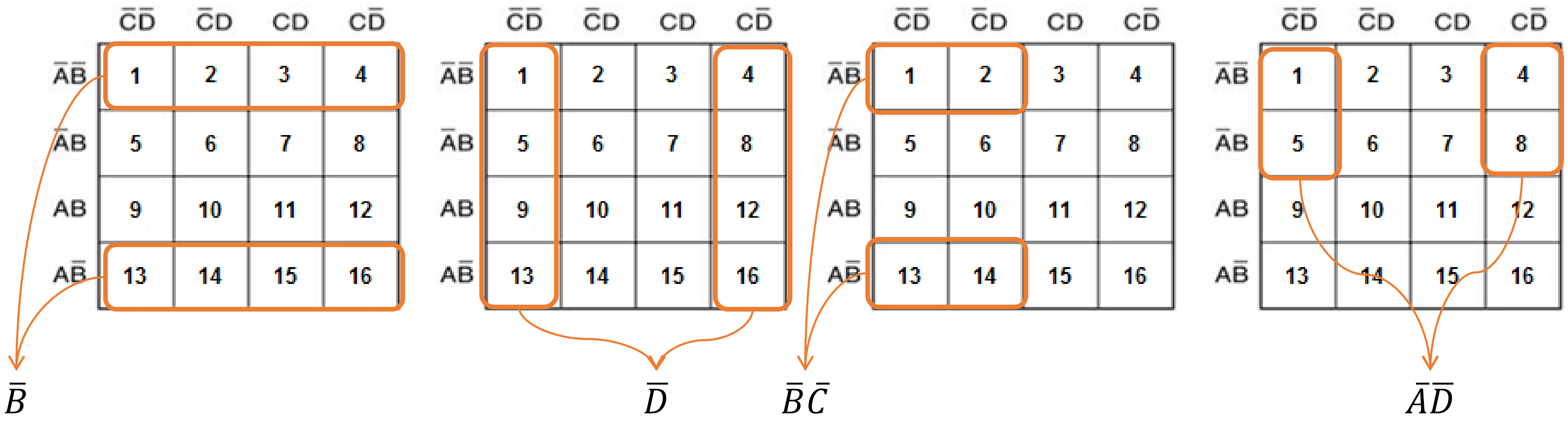
TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. Sistemas digitais: princípios e aplicações, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. P. 156

Representação de circuitos lógicos & Mapa de Karnaugh

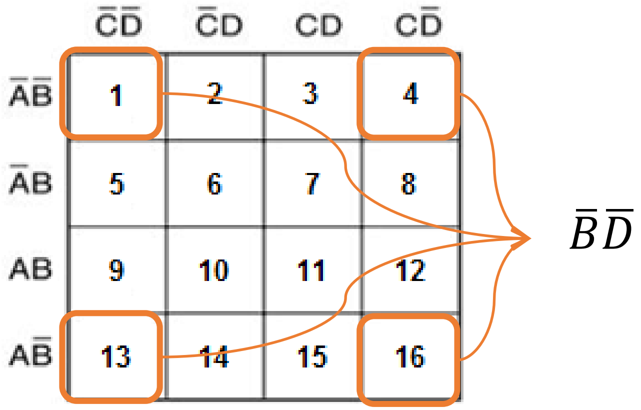
Mapa de Karnaugh

O agrupamento é convertido em um termo formado pelas variáveis que não mudam para todas as células

Mapa de Karnaugh



Como a tabela representa o espaço completo de possibilidades, é possível formar grupos entre células de diferentes extremidades

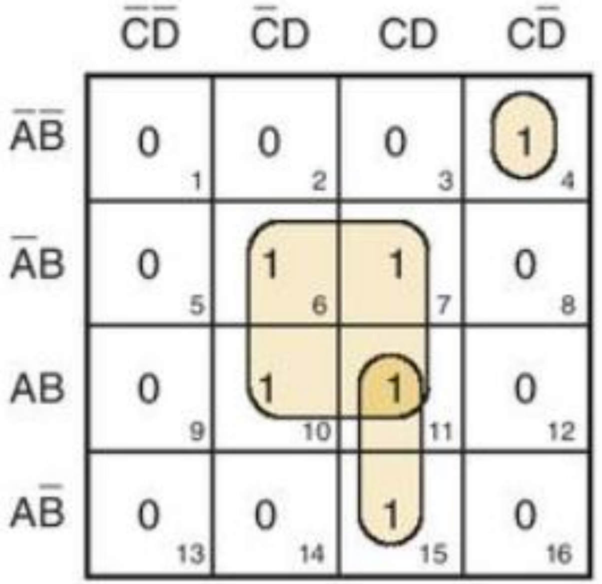


É possível que alguma célula não seja agrupada, formando um agrupamento de uma única célula

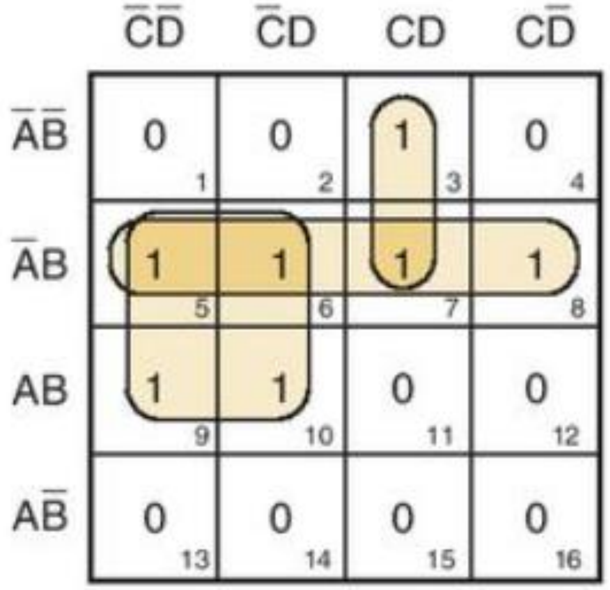
Mapa de Karnaugh

- Quanto menor o número de agrupamentos, menos termos a expressão apresentará.
- Um agrupamento deve ser formado por um número de células igual a potência de 2. (**não** pode existir um agrupamento com 3, 5, 6, 7... Células)
- As células dos agrupamentos sempre formam um retângulo ou quadrado. (não se pode formar um L, por exemplo)

Exemplo 03



$$X = \underbrace{\bar{A}\bar{B}C\bar{D}}_{\text{grupo 4}} + \overbrace{ACD}^{\text{grupo 11, 15}} + \underbrace{BD}_{\text{grupo 6, 7, 10, 11}}$$

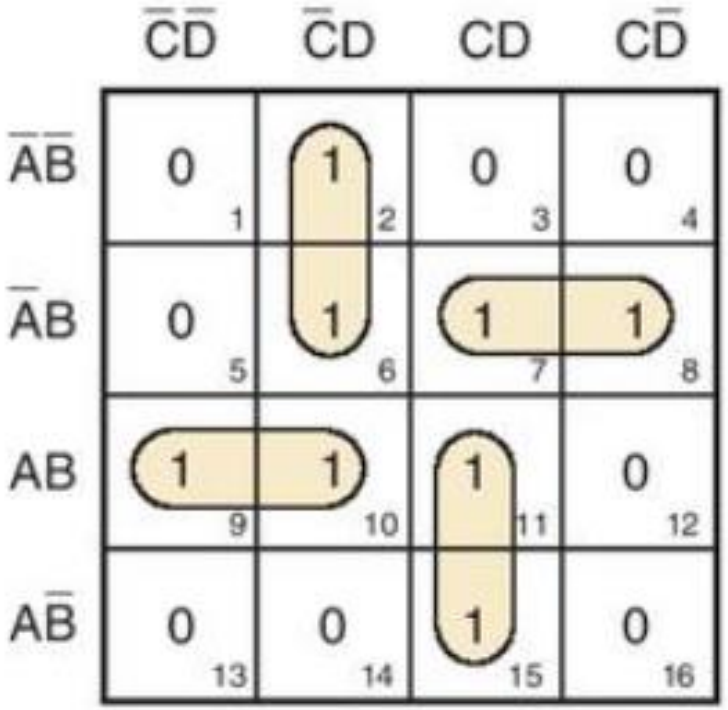


$$X = \underbrace{\bar{A}B}_{\text{grupo 5, 6, 7,8}} + \overbrace{B\bar{C}}^{\text{grupo 5, 6, 9, 10}} + \underbrace{\bar{A}CD}_{\text{grupo 3, 7}}$$

TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. Sistemas digitais: princípios e aplicações, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. P. 161-162

Representação de circuitos lógicos & Mapa de Karnaugh

Exemplo 03



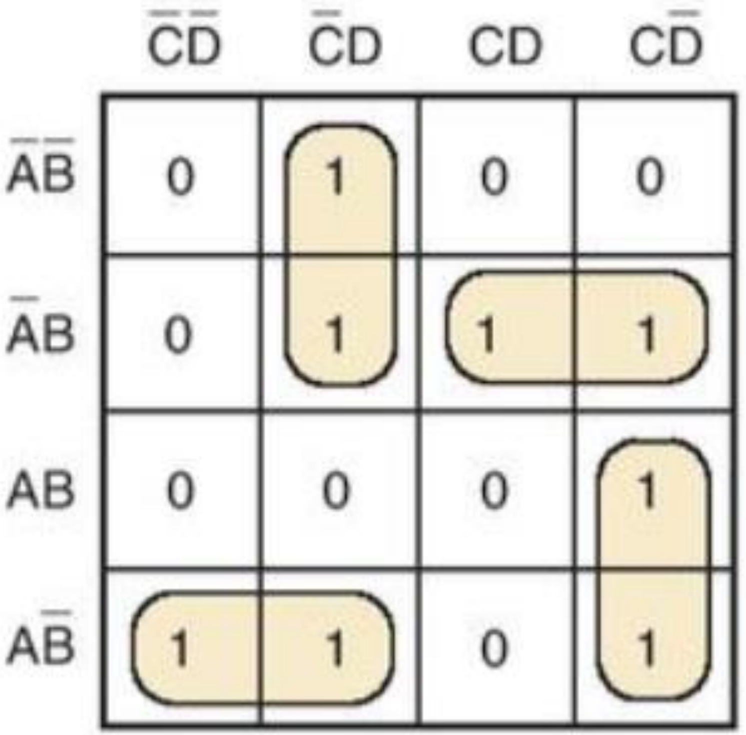
$$X = \underbrace{AB\bar{C}}_{\text{grupo 9, 10}} + \overbrace{\bar{A}\bar{C}D}^{\text{grupo 2, 6}} + \underbrace{\bar{A}BC}_{\text{grupo 7, 8}} + \overbrace{ACD}^{\text{grupo 11, 15}}$$

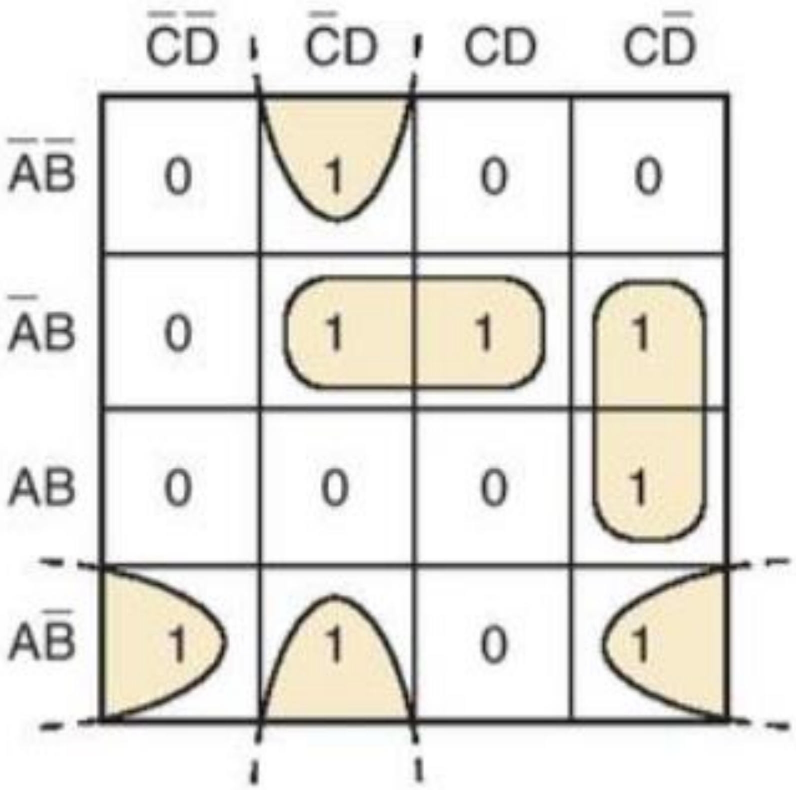
TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. Sistemas digitais: princípios e aplicações, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. P. 161-162

Representação de circuitos lógicos & Mapa de Karnaugh

Exemplo 04

Considere os dois agrupamentos de mapas K. Qual deles é melhor?





$X = \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AC\bar{D}$

$X = \bar{A}BD + BC\bar{D} + \bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}\bar{D}$

Expressões de complexidades equivalentes, nenhuma é melhor que a outra.

TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. Sistemas digitais: princípios e aplicações, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. P. 162-163

Exemplo 05

Use um mapa K a fim de simplificar $y = \bar{C}(\bar{A}\bar{B}\bar{D} + D) + A\bar{B}C + \bar{D}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	1
$\bar{A}B$	1	1	0	1
AB	1	1	0	1
$A\bar{B}$	1	1	1	1

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + D\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{D}$$

$$y = A\bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$$

Simplificação algébrica

$$y = \bar{D}(1 + \bar{A}\bar{B}\bar{C}) + D\bar{C} + A\bar{B}C$$
$$y = \bar{D} + D\bar{C} + A\bar{B}C$$
$$y = \bar{D} + \bar{C} + A\bar{B}C$$
$$y = \bar{D} + \bar{C} + A\bar{B}$$

PROPRIEDADES	
Comutativa:	$A + B = B + A$ $A \cdot B = B \cdot A$
Associativa:	$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$
Distributiva:	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
TEOREMAS de DE MORGAN	
	$\left(\overline{A \cdot B}\right) = \bar{A} + \bar{B}$ $\left(\overline{A + B}\right) = \bar{A} \cdot \bar{B}$
IDENTIDADES AUXILIARES	
	$A + A \cdot B = A$ $A + \bar{A} \cdot B = A + B$ $(A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C$

TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. Sistemas digitais: princípios e aplicações, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. P. 163-164

Mapa de Karnaugh

Condições de irrelevância (*don't care*)

Alguns circuitos lógicos podem ser projetados de modo que existam certas condições de entrada para as quais não há níveis de saída específicos, em geral porque essas condições de entrada nunca ocorrerão.

A	B	C	z	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	x	"don't
1	0	0	x	care"
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0
$\overline{A}B$	0	x
AB	1	1
$A\overline{B}$	x	1

⇒

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0
$\overline{A}B$	0	0
AB	1	1
$A\overline{B}$	1	1

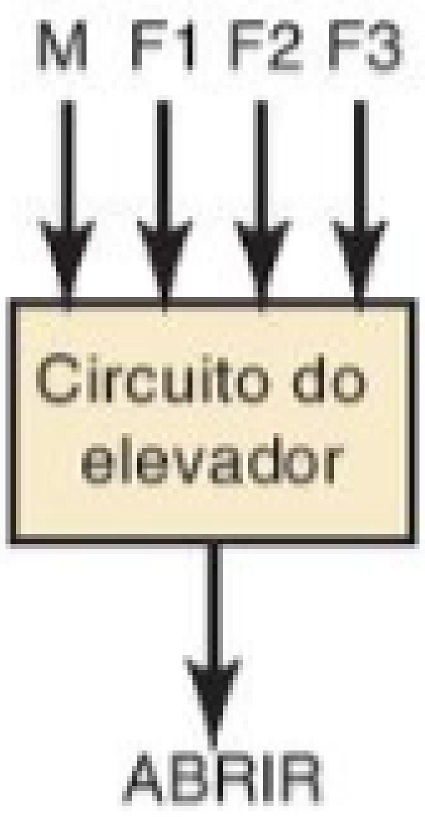
$z = A$

Neste caso pode-se arbitrar '0' ou '1' a fim de se obter a maior simplificação.

TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. Sistemas digitais: princípios e aplicações, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. P. 164

Exemplo 06

Projete um circuito lógico que controla uma porta de elevador em um prédio de três andares. O circuito ao lado tem quatro entradas. M é um sinal lógico que indica quando o elevador está se movendo (M=1) ou parado (M=0). F1, F2 e F3 são os sinais indicadores dos andares, que são, normalmente, nível BAIXO, passando para nível ALTO apenas quando o elevador está posicionado em determinado andar. Por exemplo, quando estiver no segundo andar, F2=1 e F1=F3=0. A saída do circuito é o sinal ABRIR, que, normalmente, é nível BAIXO e vai para o ALTO quando a porta do elevador precisa ser aberta.



TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. Sistemas digitais: princípios e aplicações, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. P. 164-165

Representação de circuitos lógicos & Mapa de Karnaugh

Exemplo 06

M	F1	F2	F3	OPEN
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	X
0	1	0	0	1
0	1	0	1	X
0	1	1	0	X
0	1	1	1	X
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	X
1	1	0	0	0
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

	$\overline{F2}\,\overline{F3}$	$\overline{F2}\,F3$	$F2\,F3$	$F2\,\overline{F3}$
$\overline{M}\,\overline{F1}$	0	1	X	1
$\overline{M}\,F1$	1	X	X	X
$M\,F1$	0	X	X	X
$M\,\overline{F1}$	0	0	X	0

	$\overline{F2}\,\overline{F3}$	$\overline{F2}\,F3$	$F2\,F3$	$F2\,\overline{F3}$
$\overline{M}\,\overline{F1}$	0	1	1	1
$\overline{M}\,F1$	1	1	1	1
$M\,F1$	0	0	0	0
$M\,\overline{F1}$	0	0	0	0

$$\text{ABRIR} = \overline{M}(F1 + F2 + F3)$$

TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. Sistemas digitais: princípios e aplicações, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. P. 164-165

Síntese de circuitos lógicos & Teoremas Booleanos

Referências

TOCCI, Ronald J.; Widmer, Neal S.; Moss, Gregory L. **Sistemas digitais: princípios e aplicações**, 12ª ed. Editora Pearson, 2018. 1056 p. ISBN 9788543025018. Capítulo 4 – Circuitos lógicos combinacionais

FLOYD, Thomas. **Sistemas Digitais**. Grupo A, 2011. E-book. 9788577801077. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577801077/. Acesso em: 28 ago. 2022. Capítulo 4 – Álgebra booleana e simplificação lógica