UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Tópicos de Ciências Exatas

ÁREA DO CONHECIMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E ENGENHARIAS

2024/2

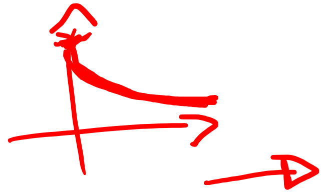
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Aula 10
Introdução às
Funções Exponenciais

Funções Exponenciais

x^2 2^x

- Família de funções
- Comportamento?
- Particularidades?
- Que situações podem ser representadas por funções exponenciais?
- Vamos começar retomando a proposta do professor Heston.



- Que conhecimentos precisamos mobilizar para analisar essa proposta?
- Como podemos proceder para obter um modelo matemático que represente a descarga do capacitor?

Potenciação: uma rápida revisão (TDE 3)

Dados um número real **a** e um número natural **n**, com $n \geqslant 2$, chama-se **potência de base a** e **expoente n** o número $\mathbf{a^n}$ que é o produto de **n** fatores iguais a **a**.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\mathbf{n}\text{ fatores}}$$

Dados um número real **a**, não nulo, e um número **n** natural, chama-se **potência de base a** e **expoente –n** o número $\mathbf{a^{-n}}$, que é o inverso de a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Dados um número real positivo **a**, um número inteiro **m** e um número natural **n** $(n \geqslant 1)$, chama-se **potência de base a** e **expoente** $\mathbf{\frac{m}{n}}$ a raiz enésima (n-ésima) aritmética de a^m.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Potenciação: uma rápida revisão (TDE 3)

<u>Definições:</u>

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n > 1$, temos

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$, se $a \neq 0$
- $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, se $a \neq 0$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, se $m \in \mathbb{Z}$

<u>Propriedades:</u>

Sendo a e b reais, com m e n reais não nulos, são válidas as seguintes propriedades:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^n}$, se $b \neq 0$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

TDE 3 – Equações Exponenciais

Igualdade

Termo desconhecido $\Longrightarrow$ incógnita x

Incógnita nos expoentes

Uma equação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma de suas potências.

Como resolver?

As potências podem ser reduzidas à mesma base?

Propriedades de potências

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

(resolução de exemplos → link para o vídeo no Módulo da Aula 07)

ex

$3^x = \sqrt{27}$

$3^x = \sqrt[2]{3^3}$

$3^x = 3^{3/2}$

$x = 3/2$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Uso da calculadora - Importante!!!

As calculadoras científicas auxiliam no cálculo de potências, que pode ser bastante trabalhoso. Observe a tecla y^x, em que **y** representa a base da potência, e **x**, seu expoente.

- Para calcular $1{,}3^5$, pressionamos:

1 · 3 → y^x → 5 → = → 3.71293

Obtemos 3,71293.

- Para calcular $2{,}3^8$, pressionamos:

2 · 3 → y^x → 8 → = → 783.1098528

Obtemos o valor aproximado 783,1098528.

Cabe ressaltar que existem muitos modelos de calculadora e, em alguns casos, uma ou outra das operações anteriores poderá ser invertida.

Em alguns modelos, a tecla y^x é substituída pela tecla ^.

Exemplos:

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Com auxílio da calculadora científica, determine:

a) $1{,}15^4 = 1{,}74900625$

b) $2^{-8} = \dfrac{1}{2^8} = \dfrac{1}{256}$

c) $7^{0,5} = 7^{1/2} = \sqrt{7}$

exato

d) $3^{0,576} \cong 1{,}883$

e) $4^{-3/5} = \dfrac{1}{4^{3/5}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{4^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{64}}$ (3 casas dec)

e) $4^{-3/5}$

aprox

0,435

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

$\rightarrow \pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \ldots$

O número irracional $\underline{e}$

Euler

A expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, quando n assume valores cada vez maiores, fornece um número irracional conhecido como "número de Euler" e representado por "e".

Qual é a importância deste famoso irracional?

Vamos falar sobre isso hoje e nas próximas aulas também, mas podemos começar com algumas informações históricas: clique **aqui**

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Usando a calculadora científica podemos determinar alguns valores para esta expressão:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	
10	
100	
1 000	
10 000	
100 000	
1 000 000	
10 000 000	

$\downarrow$
$+\infty$

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Usando a calculadora científica podemos determinar alguns valores para esta expressão:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2,5937424601
100	2,704813829421526093267...
1 000	2,716923932235892457383...
10 000	2,718145926825224864037...
100 000	2,718268237174489668035...
1 000 000	2,718280469319376883819...
10 000 000	2,718281692544966271198...

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Utilizando um recurso computacional (planilha, software matemático, calculadora programável, ...):

$$n \to \infty$$

$$f(n) \to e$$

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\ldots$$

é o número de Euler.

$\boxed{\wedge}$

$e^{\wedge}1$

$\boxed{e1}$

ou

e^1

Exemplos:

Com auxílio da calculadora, determine o valor de:

e^{x}

$\cong$

a) $e^0 = 1$

b) $e^2 \cong 7{,}389$

c) $e^{-1} \cong 0{,}368$

d) $e^{0{,}238} \cong 1{,}269$

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Introdução às Funções Exponenciais

Denominamos **função exponencial** a função definida por

$$f(x) = a^{x}$$

$\cancel{y = (-2)^{x}}$

$\cancel{y = 1^{x}}$

com $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ e $a \neq 1$.

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Exercício 01:

$\underline{\underline{a}}^x$ $\mathbb{R}^*_+$ e $a \neq 1$

a) Escreva quatro exemplos de funções exponenciais.

$f(x) = 5^x$; $g(x) = (\sqrt{2})^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $h(x) = \pi^x$; $y = e^x$

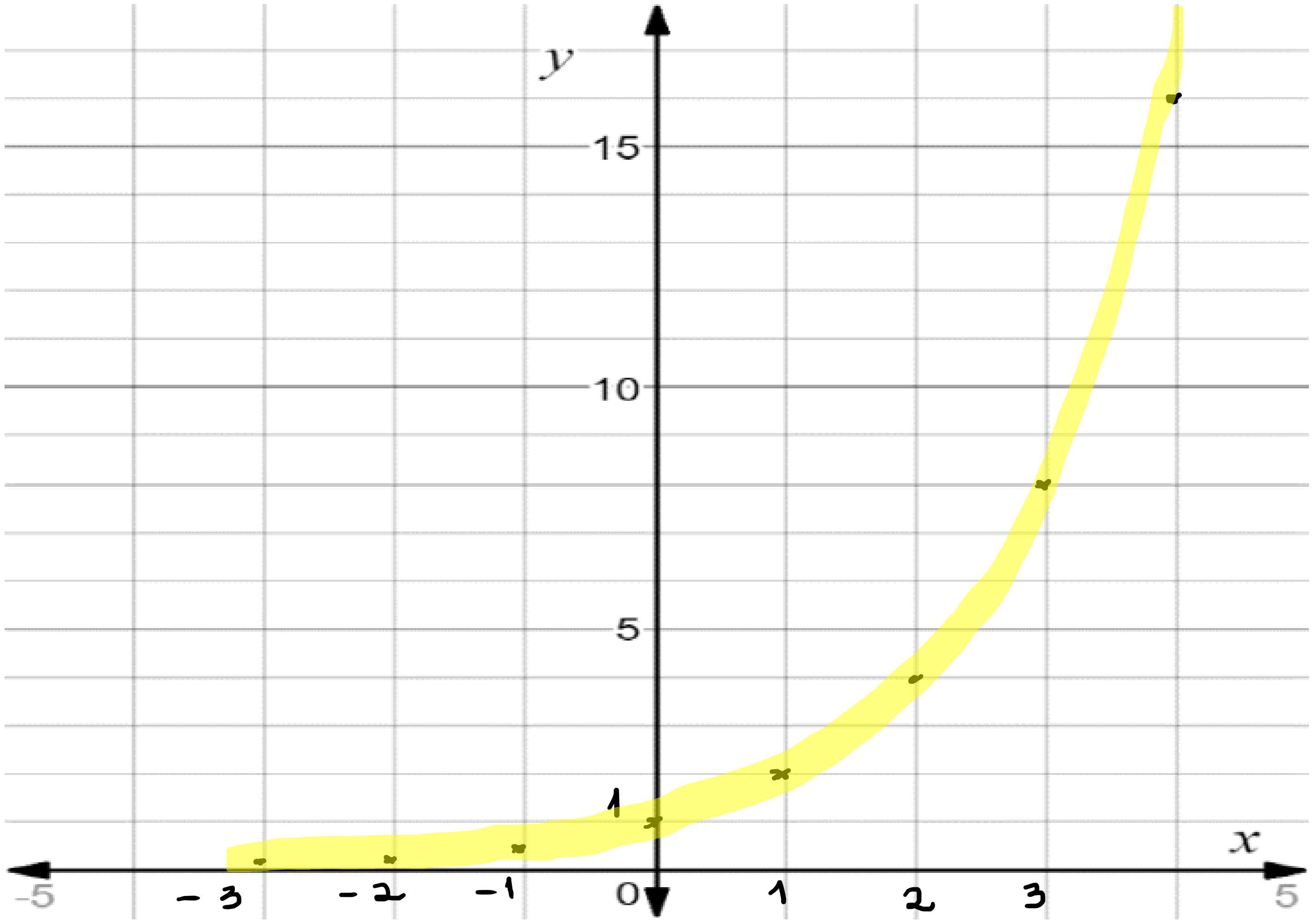
b) Desenvolva a Atividade 01 – da p. 11 (Notas de Aula), itens (a) e (b).

Atividade 1) Para cada uma das funções dadas, complete a tabela e construa o seu respectivo gráfico:

a) $f(x) = 2^x$

DOMÍNIO x	IMAGEM $f(x)$
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8

GRÁFICO

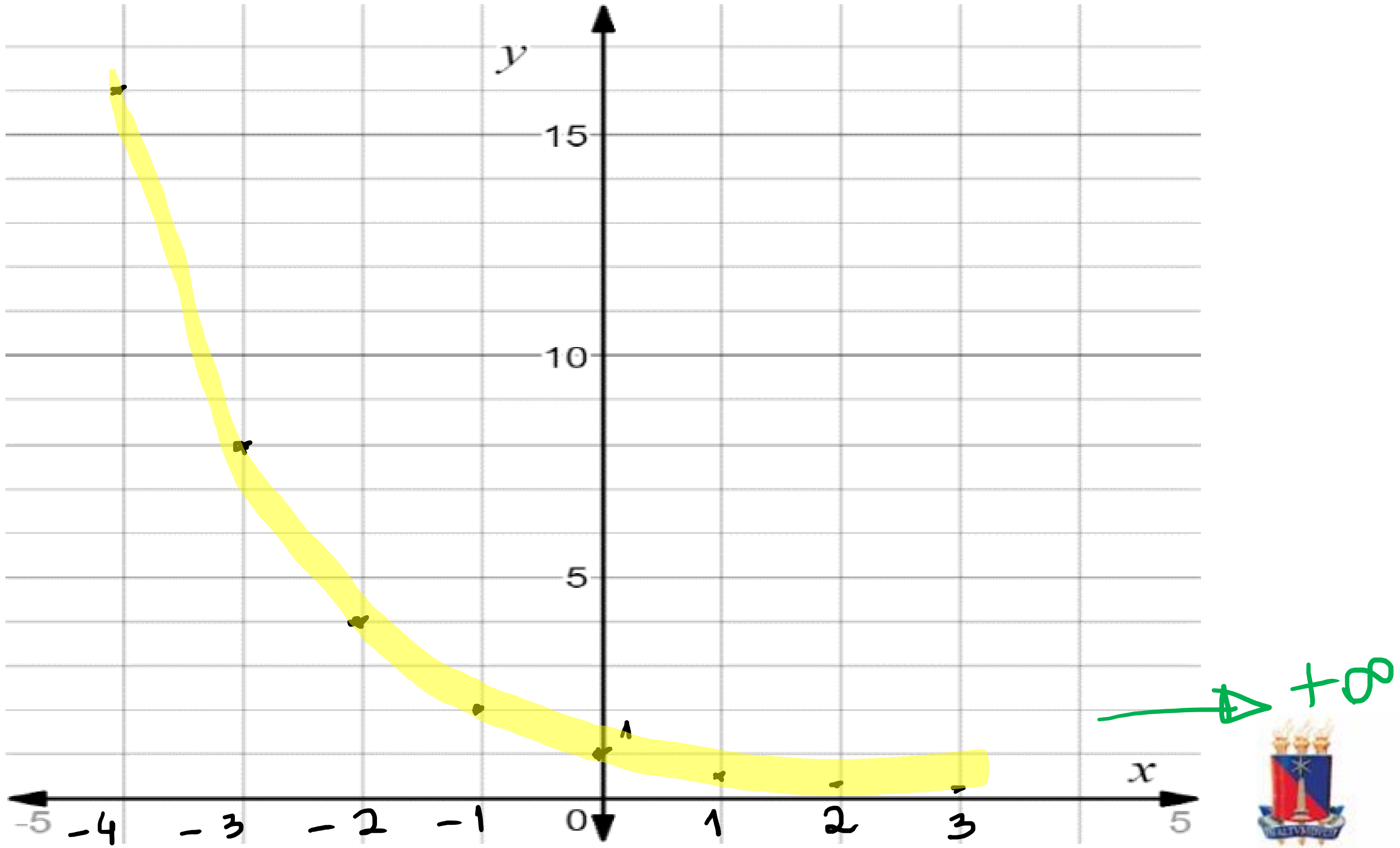


SIDADE
UL

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

DOMÍNIO	IMAGEM
x	$f(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125

GRÁFICO



$-\infty$

UCS
UNIVERSIDADE
DE CAXIAS DO SUL

a^x

c) Qual é o $\underbrace{\text{domínio}}_{\mathbb{R}}$ e $\underbrace{\text{a imagem}}_{\mathbb{R}^*_+}$ das funções exponenciais?

d) Como se associa o crescimento ou decrescimento da função exponencial com o coeficiente a, base da função?

$a > 1 \Rightarrow$ função crescente ; $0 < a < 1 \Rightarrow$ função decrescente

e) Qual é o intercepto vertical e qual é o intercepto horizontal das funções exponenciais?

iV : (0,1)   iH : não existe

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE
DE CAXIAS DO SUL

Exercício 02: tema

Construa o gráfico da função exponencial

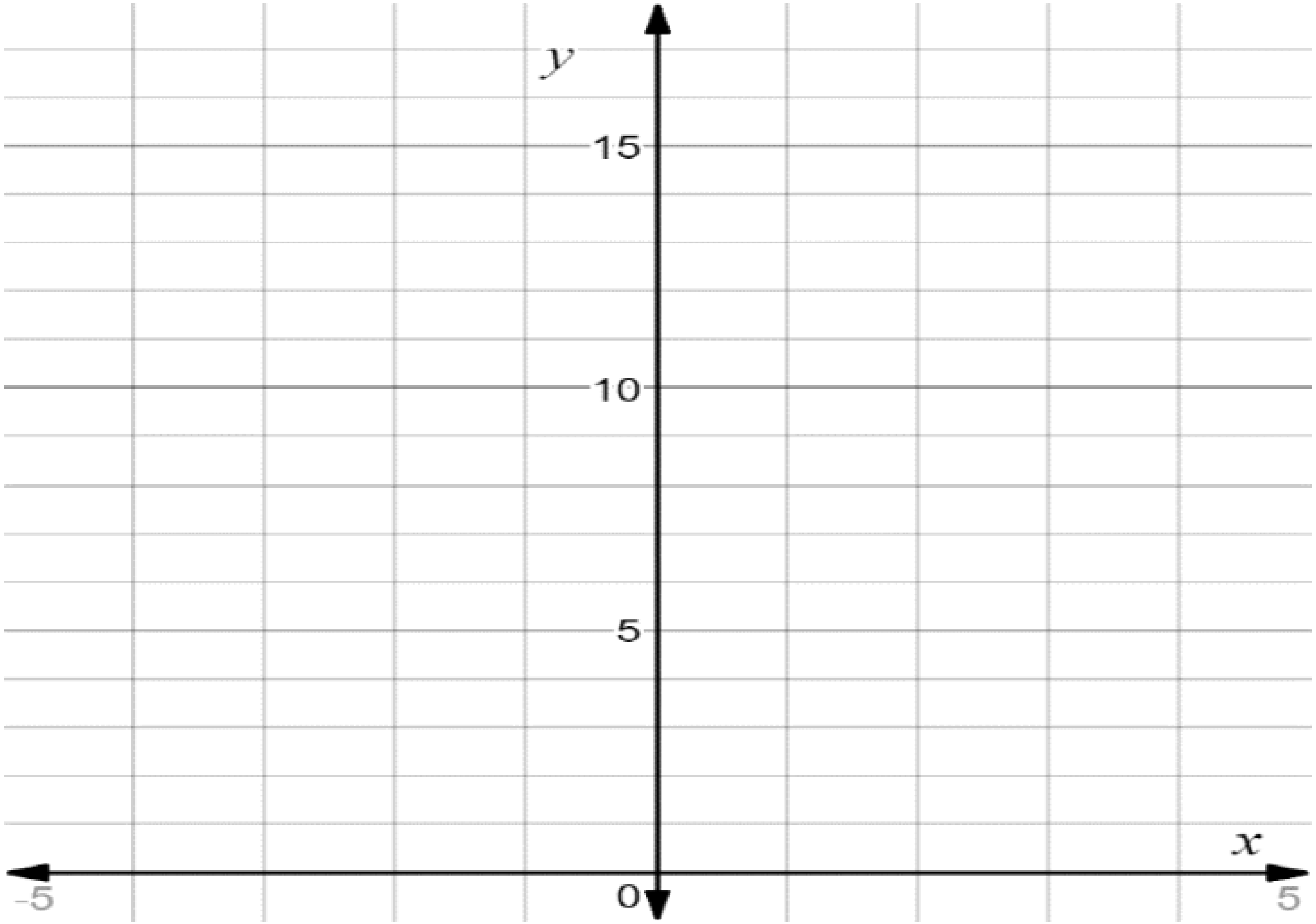
$$f(x) = e^x$$

(Notas de Aula, p. 12 – Atividade 01: item c).

c) $f(x) = e^x$ *tema*

DOMÍNIO x	IMAGEM $f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

GRÁFICO



Exercício 03: tema

Identifique se as expressões representam funções exponenciais.
Em caso positivo, determine se são crescentes ou decrescentes:

a) $y = x^8$

b) $y = 3^x$

c) $y = 5^x$

d) $y = 4^2$

e) $y = x^{1,3}$

f) $y = 2^{-x}$

g) $y = (0,5)^x$

h) $y = x^{2/3}$

i) $y = x^x$

Exercício 04:

tema

Para cada item: construa o gráfico de $f(x) = 2^x$ e $g(x)$ no mesmo plano cartesiano (você pode utilizar um software gráfico). Em seguida, analise crescimento, decrescimento, domínio e imagem das funções.

a) $g(x) = 2^x - 3$

b) $g(x) = 2^x + 2$

c) $g(x) = 3 \cdot 2^x$

d) $g(x) = \frac{2^x}{3}$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Explore outros exemplos, com auxílio de um software gráfico, e identifique a "ação" de cada coeficiente nas funções:

$$f(x) = a^x$$

$$f(x) = B \cdot a^x$$

$$f(x) = a^x + C$$

$$f(x) = B \cdot a^x + C$$

Exercício 05: tema

Com a seca, estima-se que o nível de água (em metros) em um reservatório, daqui a t meses, seja $n(t) = 7{,}6 \cdot 4^{-0{,}2t}$. Qual é o tempo necessário para que o nível de água se reduza à oitava parte do nível atual?

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Exercício 06: turma

Analistas do mercado imobiliário de um município estimam o valor (v), em reais, de um apartamento nesse município seja dado pela lei $v(t) = 250000 \cdot 1{,}05^t$, sendo t o tempo em anos, contados a partir da data de entrega do apartamento.

a) Qual o valor desse imóvel na data de entrega?

b) Qual é a valorização, em reais, desse apartamento, um ano após a entrega?

c) Qual será o valor desse imóvel 6 anos após a entrega?

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Exercício 07:

Vamos fazer juntos, na próxima aula!

Comportamento exponencial do crescimento da bactéria *Escherichia coli*

- A *Escherichia coli* (*E. coli*), é um tipo de bactéria que habita naturalmente o intestino das pessoas e de alguns animais, sem que haja qualquer sinal de doença.
- Porém, há alguns tipos de *E. coli* que são nocivos para as pessoas e que entram no organismo devido ao consumo de alimentos contaminados, causando infecções intestinais e infecções urinárias.

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

- A *E. coli* se reproduz a partir de um processo chamado fissão binária, que começa por uma elongação celular, propiciando a formação de um septo e culmina na separação em duas células-filhas, idênticas àquela original

4 células **8 células** **16 células** **32 células**

https://www.youtube.com/watch?v=KIpcCyuypzg

a) Podemos determinar a população de *E. coli* em 24 horas?

b) Quanto tempo levará para que a população de *E. coli* atinja 1 milhão de células?

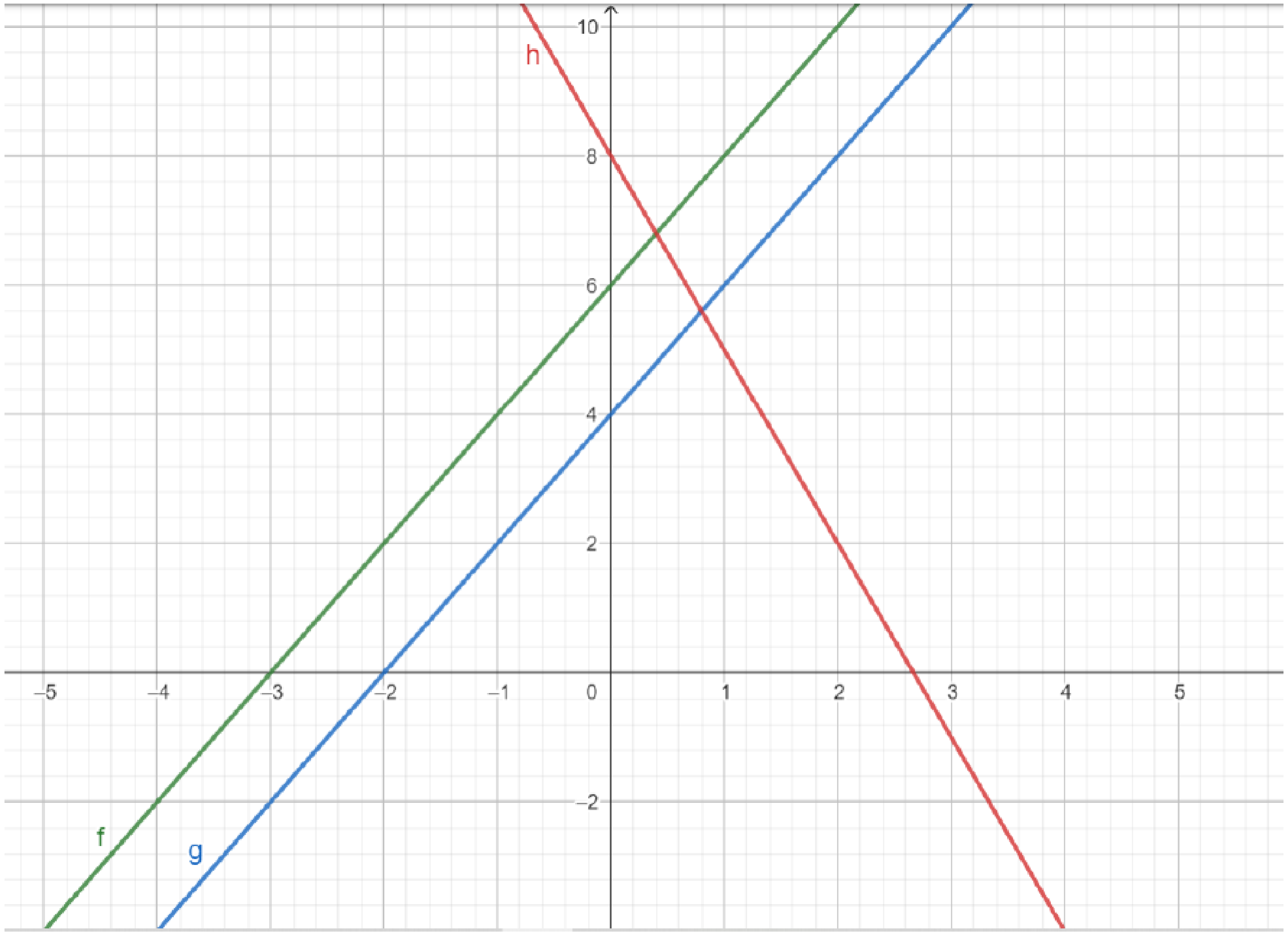
Atividades da Aula 10

- Retome os exemplos do material e desenvolva os exercícios que foram indicados como tarefa da aula.
- Resolva os exercícios propostos nas Atividades 03, 04 e 07, Notas de Aula, p. 13.
- Sobre a AP1:
  - Resultados no AVA (notas)
  - Fórum de correção da prova: orientações para realizar a correção/estudo da prova

Avaliação Parcial 1

Dicas para resolver/corrigir as questões

(1,0 pt) Questão 01) A seguir, estão representados os gráficos das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$:



A partir dos dados exibidos no gráfico, determine (forneça as respostas **exatas**):

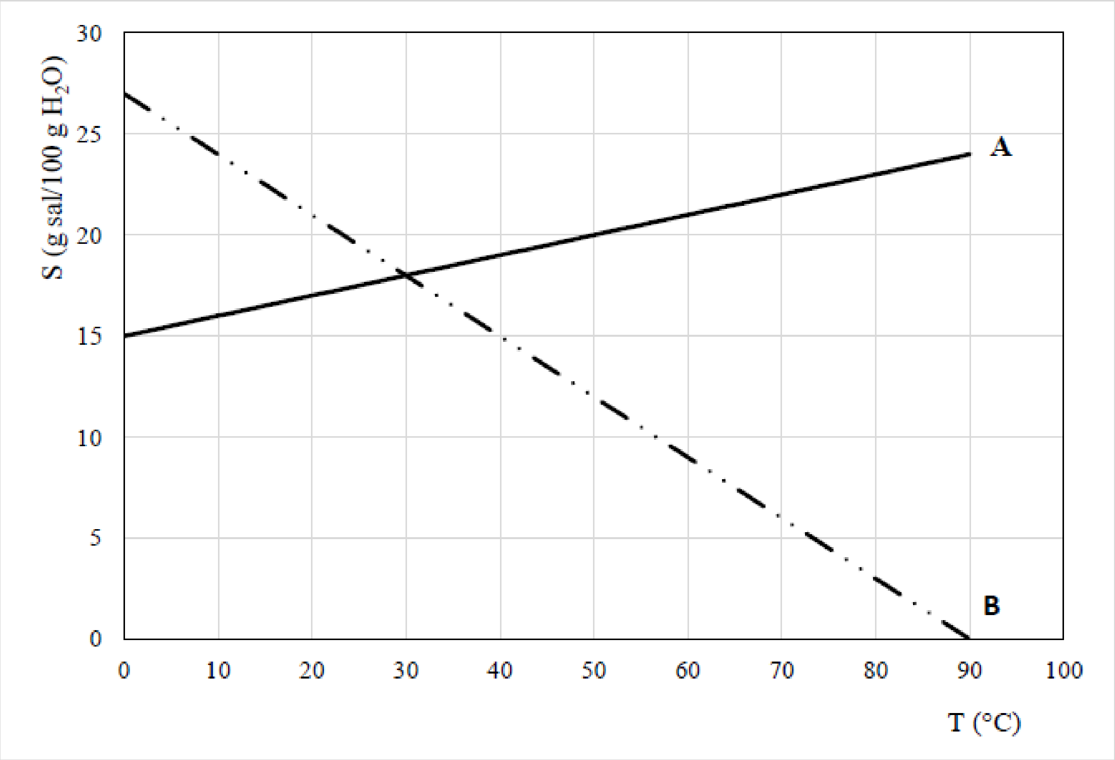
a) a taxa de variação de $f(x)$: ____________________

b) o intercepto vertical de $g(x)$: ____________________

c) a lei matemática que representa a função $h(x)$: ____________________

d) o zero da função $h(x)$: ____________________

(1,5 pt) Questão 02) Você acaba de ser contratado por uma empresa de produtos químicos que atua em diversos ramos. Devido a sua experiência com cálculos envolvendo a solubilidade de sais, você foi direcionado para o setor que faz as medições e o modelamento matemático dessa propriedade. Dois sais, por ora conhecidos como **A** e **B**, estão sendo estudados para serem lançados no mercado. A dependência da solubilidade desses sais com a temperatura é mostrada no gráfico abaixo.



Com base no apresentado, analise cada item e faça o que se pede:

a) Escreva a lei da função para o sal que possui maior taxa de variação da solubilidade com a temperatura.

b) A 10°C, foram adicionados 20 g do sal **A** em um frasco contendo 100 g de água e o mesmo foi feito para o sal **B** (20 g de sal em 100 g de água). Determine se as soluções obtidas são insaturadas, saturadas ou supersaturadas nessas condições, e se possuem corpo de fundo ou não.

c) Umas das demandas comerciais apresentadas para esses sais é que eles possuam uma elevada solubilidade em elevadas temperaturas. Tomando por base esse pressuposto, qual sal deve ser usado em regiões com temperaturas maiores do que 40°C? Por quê?

(1,0 pt) Questão 03) Duas partículas, A e B, se movimentam sobre uma mesma trajetória retilínea, de acordo com as funções:

$$S_A(t) = 35 + 10t$$
$$S_B(t) = 80 + 5t$$

onde a posição, S, é dada em metros e o tempo, t, em segundos.

Considerando as funções apresentadas, faça o que se pede em cada item:

a) Determine as velocidades das partículas A e B.

b) Construa o gráfico das duas funções no intervalo de 0 a 10 segundos, no mesmo sistema de eixos,

c) Calcule a posição e o instante onde ocorre o encontro das duas partículas.

(1,5 pt) Questão 04) A temperatura ambiente T (em graus Celsius) em um ponto de uma cidade pode ser modelada pela função $T(t) = -\frac{1}{6}t^2 + 4t + 10$, onde $0 \leq t \leq 24$ é o tempo (em horas).

a) Qual é a temperatura às 14h?

b) Em que instante a temperatura é mais alta?

c) Faça um esboço do gráfico de $T(t)$, no intervalo dado.

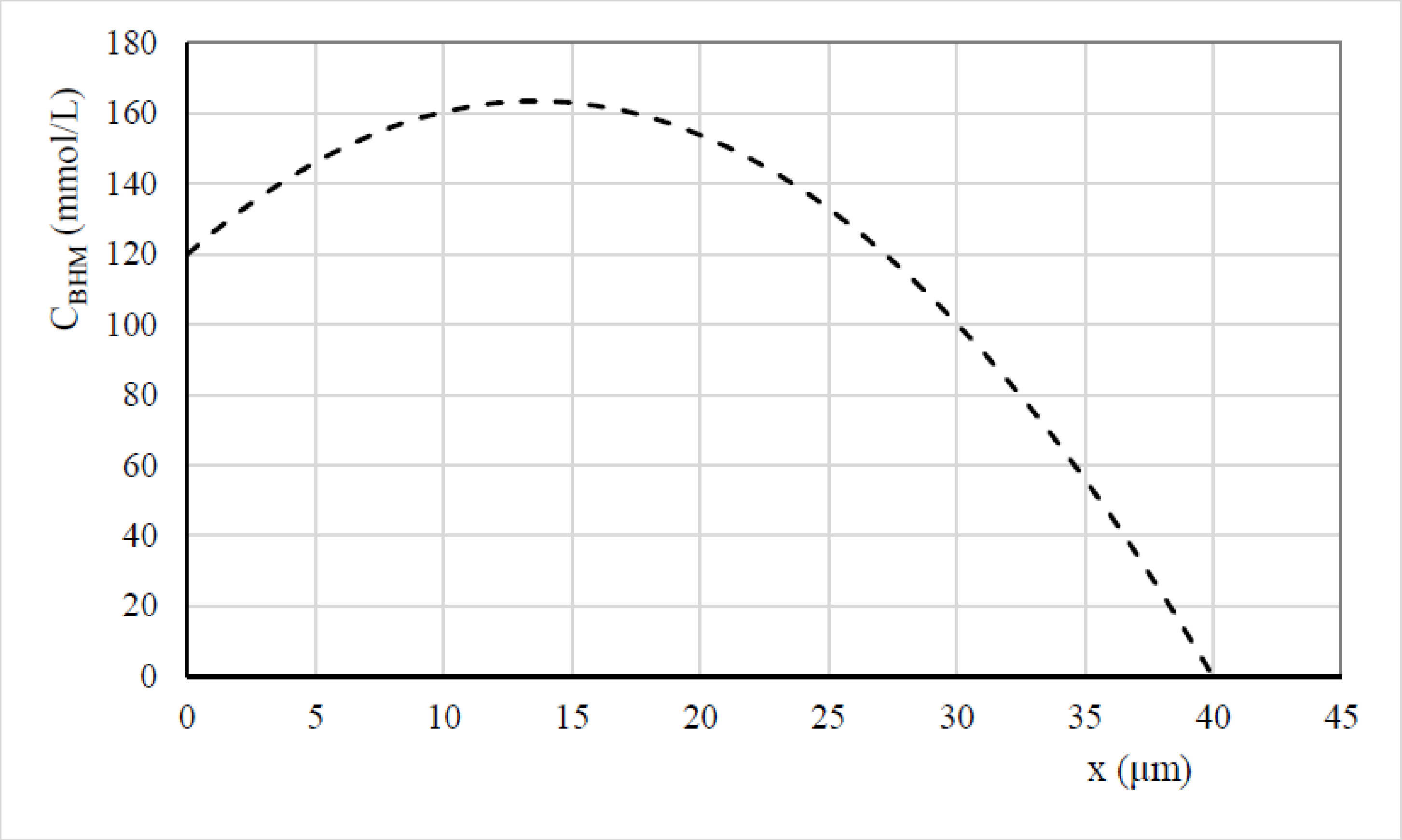
(1,5 pt) Questão 05) Um foguete é atirado para cima de modo que sua altura h, em relação ao solo, é dada, em função do tempo, pela lei matemática $h(t) = -5t^2 + 120t + 10$, em que o tempo é dado em segundos e a altura é dada em metros.

a) Qual é a altura do foguete 2 segundos depois de lançado?

b) Calcule qual é o tempo necessário para o foguete atingir a altura de 485 metros.

c) Determine a altura máxima que o foguete atinge.

(1,5 pts) Questão 06) O perfil de concentração de uma droga experimental, por ora conhecida apenas como **BHM**, na parede de uma cápsula que o envolve, pode ser representado pelo gráfico abaixo:



Com base no apresentado, determine:

a) Encontre a lei da função que relaciona a concentração de **BHM** em função da posição (x).

b) Determine a concentração de **BHM** (em mmol/L) para uma posição igual a 37 µm, utilizando a função obtida em (a).

c) Calcule qual deve ser a espessura da cápsula para que a concentração de **BHM** seja a máxima possível.