UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Tópicos de Ciências Exatas

ÁREA DO CONHECIMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E ENGENHARIAS

2024/2

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

UCS
UNIVERSIDADE
DE CAXIAS DO SUL

Aula 13
Logaritmos e suas propriedades (continuação)
Aplicações dos logaritmos

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE
DE CAXIAS DO SUL

Modelos Exponenciais e Logarítmicos

- Definições
- Propriedades
- Operações
- Uso da calculadora
- Problemas das ciências exatas

Modelos Exponenciais e Logarítmicos

$M = A \cdot e^{kt}$

$Q = Q_0 \cdot e^{-\lambda t}$

$N = N_0 \cdot e^{-kt}$

$$f(x) = B \cdot a^x$$

$$f(x) = B \cdot a^{kx}$$

$$a^x = b \Longrightarrow \log_a b = x$$

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Propriedades – Mudança de Base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

ou

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

ou

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Propriedades Operatórias

P1) $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$

P2) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

P3) $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$

Por quê?

P1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a c = y$

$a^y = c$

$\log_a b = x$

$a^x = b$

$\log_a(bc) = m$

$a^m = b.c$

$a^m = a^x . a^y$

$a^m = a^{x+y} \Rightarrow m = x + y$

Propriedades Operatórias
Exemplos

Ex. 01) Verifique que:

a) $\log 20 = \underbrace{\log 10}_{} + \underbrace{\log 2}_{}$

$1{,}301 = 1 + 0{,}301$ ✓

$\textcircled{*}\ \log 20 = \log(10 \cdot 2) \overset{P1}{=} \log 10 + \log 2$

b) $\log 20 = \underbrace{\log 100}_{} - \log 5$

$1{,}301 = 2 - 0{,}699$ ✓

$\textcircled{*}\ \log 20 = \log\left(\frac{100}{5}\right) \overset{P2}{=} \log 100 - \log 5$

c) $\ln 32 = 5 \ln 2$

$3{,}465 = \underbrace{5 \cdot 0{,}693}_{}$ ✓

$\textcircled{*}\ \ln 32 = \ln 2^5 \overset{P3}{=} 5 \cdot \ln 2$

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Propriedades Operatórias
Exemplos

Ex. 02) Simplifique as expressões, aplicando propriedades de logaritmos:

a) $\ln(3e^x)$ $\overset{P1}{=} \ln 3 + \underbrace{\ln e^x}_{P3} = \underbrace{\ln 3}_{\text{irracional}} + x \cdot \underbrace{\ln e}_{1} = \ln 3 + x$

b) $\log\sqrt{\dfrac{10x}{y}}$ $= \log\left(\dfrac{10x}{y}\right)^{1/2} \overset{P3}{=} \dfrac{1}{2}\cdot\log\left(\dfrac{10x}{y}\right) \overset{P2}{=} \dfrac{1}{2}\left[\log 10x - \log y\right]$

$\overset{P1}{=} \dfrac{1}{2}\left[\log 10 + \log x - \log y\right] = \dfrac{1}{2}\left[1 + \log x - \log y\right]$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Importante!

- Algumas expressões envolvendo multiplicação, divisão ou potenciação, podem ser reescritas em forma de adição, subtração ou multiplicação, utilizando o conceito de logaritmos.
- Porque fazer isto?
- Algumas equações exponenciais podem ser resolvidas utilizando as propriedades operatórias dos logaritmos.

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Correção dos Problemas Contextualizados da Aula 12

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Problemas Contextualizados
Exemplo 01

Um capital de R$ 1.000,00 ficou aplicado em um regime de juros compostos a uma taxa de juros de 1% ao mês. Após um determinado tempo o montante da aplicação era igual R$ 1.269,73. Sabendo que o montante de uma aplicação em juros compostos é obtido pela função $M(t) = C.(1+i)^t$, onde i é a taxa de juros na forma decimal, determine o tempo que o capital ficou aplicado.

$i = 1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

$$M(t) = C.(1+i)^t$$

$$C = 1000$$

$$i = 1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$M = 1269{,}73$$

1ª forma:

$$\frac{1269{,}73}{1000} = \frac{1000.(1+0{,}01)^t}{1000}$$

$$1{,}26973 = (1{,}01)^t$$

$$t = \log_{1{,}01} 1{,}26973$$

$$t = \frac{\log 1{,}26973}{\log 1{,}01}$$

$$t \cong 24 \text{ meses}$$

$$\boxed{b = a^x}$$

$$x = \log_a b$$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

2ª forma: $M = C \cdot (1+i)^t$

$1269{,}73 = \underbrace{1000}_{} \cdot (1{,}01)^t$

$1{,}26973 = (1{,}01)^t$

$\ln 1{,}26973 = \ln (1{,}01)^t$

$\ln 1{,}26973 = t \cdot \ln 1{,}01$

$t = \dfrac{\ln 1{,}26973}{\ln 1{,}01} \Rightarrow t \cong 24 \text{ meses}$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Problemas Contextualizados
Exemplo 02

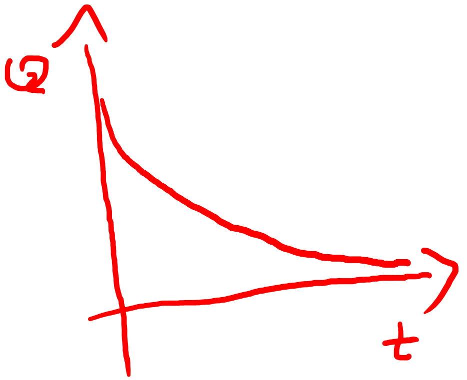
UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

7.10 Do estudo da Química, sabemos que alguns elementos têm a tendência natural de emitir radiação e transformar-se em elementos diferentes. Eles são chamados de elementos *radioativos*. Com o passar do tempo, a quantidade do elemento original presente em uma amostra diminui de acordo com a função

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt},$$

onde Q é a quantidade do elemento presente na amostra (medido em unidades de massa), Q_0 é a quantidade inicial, t é o tempo transcorrido desde a medição inicial e k é uma constante positiva característica de cada elemento. Para o iodo-128 (usado como *contraste* em diagnóstico por imagem) o valor de k é 0,0275 min^{-1} (Halliday; Resnick; Merrill, 1991, p. 263).

(a) Suponha que 5 mg de iodo-128 sejam injetados em um paciente. Desenhe o gráfico mostrando a quantidade de contraste presente no paciente até 2 horas após sua injeção.



t -> 2h, 1h, 30 min

calculamos Q

(b) Qual é a taxa média de decaimento durante a primeira hora? E durante a segunda hora?

(c) Depois de quanto $\boxed{\text{tempo}}$ a quantidade de iodo presente no paciente será ~~1~~ 2,5 mg?

calculo t

Q -> 2,5

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

$$Q = Q_0 e^{-kt}$$

$$Q = 5e^{-0{,}0275t}$$

?

$$\frac{\cancel{2{,}5}}{5} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}} \cdot e^{-0{,}0275 \cdot t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-0{,}0275 \cdot t}$$

$$\log_e \frac{1}{2} = -0{,}0275 \cdot t$$

$$\ln 1/2 = -0{,}0275 \cdot t$$

$$\frac{-0{,}693}{-0{,}0275} = \frac{-\cancel{0{,}0275} \cdot t}{-\cancel{0{,}0275}}$$

$$t \cong \frac{-0{,}693}{-0{,}0275} \rightarrow \boxed{t \cong 25{,}2 \text{ min}}$$

$$Q = 1{,}25$$

$$1{,}25 = 5\, e^{-0{,}0275\, t}$$

$$\frac{1{,}25}{5} = e^{-0{,}0275\, t}$$

$$\ln \frac{1}{4} = \ln e^{-0{,}0275 \cdot t}$$

$$\ln 1/4 = (-0{,}0275 \cdot t)\, \cancel{\ln e}\ 1$$

$$\ln 1/4 = -0{,}0275 \cdot t$$

$$t = \frac{\ln 1/4}{-0{,}0275} \rightarrow$$

$$\boxed{t \cong 50{,}4 \text{ min}}$$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

$Q = 0{,}625\,mg$

$$0{,}625 = 5\,e^{-0{,}0275 \cdot t}$$

$$\frac{0{,}625}{5} = e^{-0{,}0275 \cdot t}$$

$$\ln \frac{1}{8} = \ln e^{-0{,}0275 \cdot t}$$

$$\ln 1/8 = -0{,}0275 \cdot t \cdot \ln e$$

$$t = \frac{\ln 1/8}{-0{,}0275} \to \boxed{t \cong 75{,}6\ min}$$

$\div 2$	$Q = 5\,mg$	$\to$	$t = 0$	
	$Q = 2{,}5$	$\to$	$t = 25{,}2$	$+25{,}2$
$\div 2$	$Q = 1{,}25$	$\to$	$t = 50{,}4$	
$\div 2$	$Q = 0{,}625$	$\to$	$t = 75{,}6$	$+25{,}2$
$\div 2$	$Q = 0{,}3125$	$\to$	$t \cong 100{,}8$	$+25{,}2$

tempo de meia-vida

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

TEMPO DE MEIA-VIDA

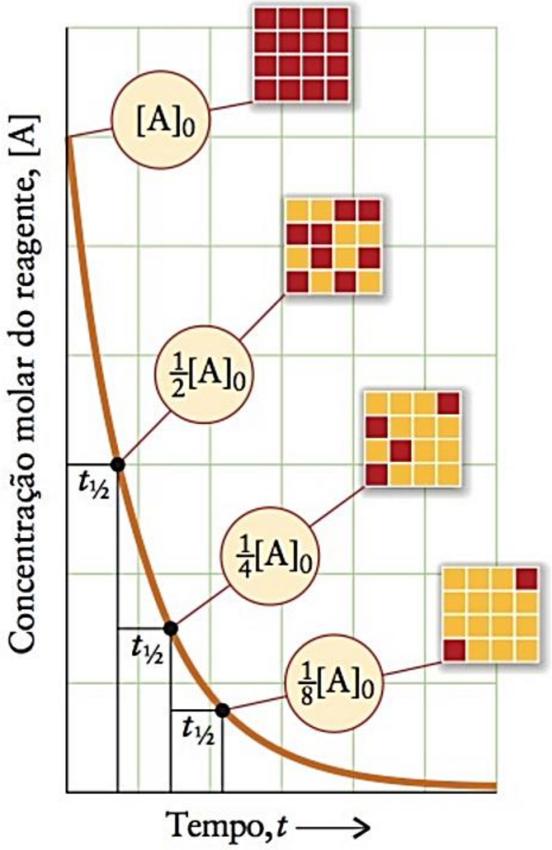
É o tempo em que o reagente atinge a metade de sua concentração inicial.

Seja A + B → R

Alimentação: $C_{A0} = 2$ mol/L
$C_{B0} = 3$ mol/L

	A	B	R
Início	2	3	0
Consumo	-1	-1	+1
Final	1	2	1

A é o limitante
$C_{A\,t1/2}$ = metade de C_{A0} = 1 mol/L



Exemplo para reação de ordem 1.

TEMPO DE MEIA-VIDA

Problemas Contextualizados
Exemplo 03

A tensão de descarga de um capacitor em um circuito RC pode ser determinada a partir da função

$$V = V_0 e^{-kt}$$

onde V é a tensão de descarga, V_0 é a tensão de descarga inicial, k é a constante de tempo e t é o tempo.

Dada a função de descarga de um capacitor $\boxed{V = 6e^{-0,02t}}$, determine qual será a tensão no capacitor após 40 s.

Considerando a função dada, determine qual será o tempo necessário para que a tensão no capacitor seja 2 V.

$$V = 6e^{-0,02t}$$

Considerando a função dada, determine qual será o tempo necessário para que a tensão no capacitor seja 2 V.

$$2 = 6e^{-0,02t}$$

$$\frac{2}{6} = e^{-0,02t}$$

$$b = a^x$$

$$x = \log_a b$$

$$-0,02t = \log_e \left(\frac{2}{6}\right)$$

$$-0,02t = \ln \left(\frac{2}{6}\right)$$

$$-0,02t = -1,09861$$

$$\frac{-1,09861}{-0,02} = t$$

$$t = 54,931\ s$$

$$V = 6e^{-0,02 \cdot 54,931}$$

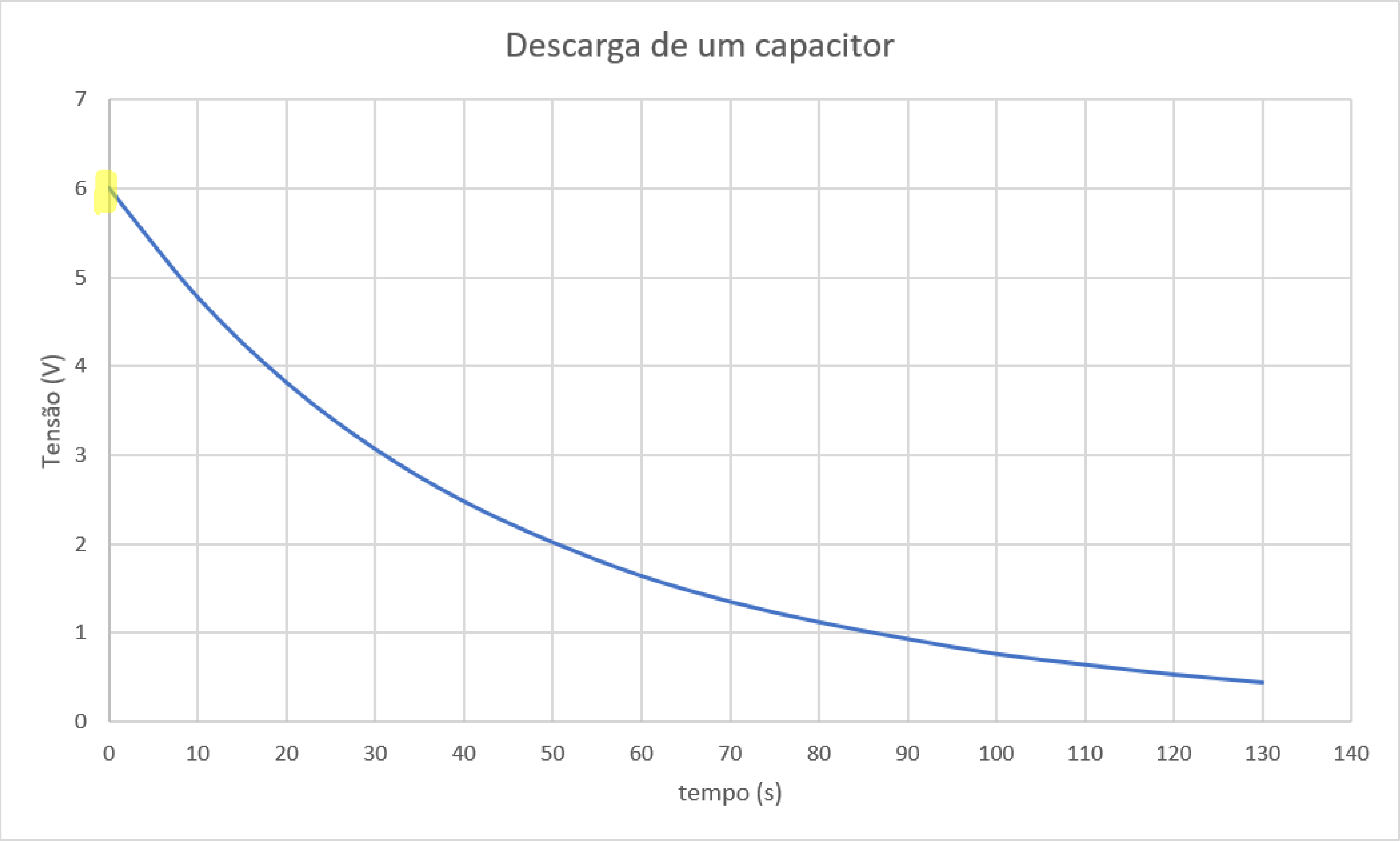
$$V = 1,999985\ \text{V}$$

Definindo modelos exponenciais, a partir de dados (pontos)

Retomando o gráfico da descarga do capacitor

Dados obtidos na Aula 10 (dia 08/maio)

tempo (s)	Tensão (V)
0	6,01
10	4,78
20	3,82
30	3,07
40	2,48
50	2,02
60	1,64
70	1,35
80	1,12
90	0,93
100	0,76
110	0,64
120	0,53
130	0,44



Modelo Matemático

$$y = B \cdot a^{kx}$$

$$y = B \cdot e^{kx} \xrightarrow{P_1} 6{,}01 = B \cdot e^{k \cdot 0}$$

$$B = 6{,}01$$

pontos:

$P_1 (0 ; 6.01)$

$P_2 (80 ; 1.12)$

então:

$$y = 6{,}01 e^{kx}$$

P_2

$$1{,}12 = 6{,}01 \cdot e^{k \cdot 80}$$

$$\frac{1{,}12}{6{,}01} = e^{80 \cdot k}$$

$$80 \cdot k = \ln\left(\frac{1{,}12}{6{,}01}\right)$$

$$k = \frac{\ln(1{,}12/6{,}01)}{80}$$

$$\boxed{k = -0{,}021}$$

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Comparando com o modelo teórico

$$V = V_0 \cdot e^{-t/RC}$$

$$R = 10\ \mathrm{k\Omega} = 10 \cdot 10^3\ \Omega$$

$$C = 4700\ \mu\mathrm{F} = 4700 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}$$

$$\begin{cases} V_0 = 6{,}01 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$V = 6{,}01 \cdot e^{-t/(10 \cdot 10^3 \cdot 4700 \cdot 10^{-6})}$$

$$V = 6{,}01 \cdot e^{-t/47}$$

$$\boxed{V = 6{,}01 \cdot e^{-0{,}0213t}}$$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Atividades da Aula 13

- Resolver os exercícios da apostila, p. 27:

E.01 a E.04, E.09, E.11 a E.16, E.18, E. 19 ao E.25

- Para complementar as discussões da aula de hoje, faça a leitura dos textos complementares disponíveis no AVA:
  - Os terremotos e os logaritmos
  - Os sons, a audição humana e a escala logarítmica
- Aula 14 (05/06): Modelos exponenciais e logarítmicos (continuação) + TDE4 (Estudo das funções logarítmicas)
- Aula 15 (12/06): Avaliação Parcial 2

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL