# FBX5010
# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

## Aula 02 – Limites (continuação)

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

# Limites (continuação)

Retomando:

Limite de $f(x)$ num ponto $x = a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

# Respostas do Exercício 04 – Aula 01

Determine os seguintes limites (observe a estratégia mais adequada: algébrica, numérica ou gráfica)

a) $\lim_{x \to 2} x^3 - 2x^2 - 4 = -4$ (fazendo $p(2)$)

b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2+x-6} = 0{,}2$ (pela análise do gráfico)

c) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x}{x-2} = +\infty$ (pela análise de uma tabela numérica)

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

# Respostas do Exercício 05 – Aula 01

Seja $f(x) = \begin{cases} 1/x & , \quad x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ 2 - x, & \quad x > 1. \end{cases}$

Esboce o gráfico e calcule os limites indicados se existirem:

(a) $\lim_{x \to -1} f(x)$. $-1$

(b) $\lim_{x \to 1} f(x)$. $1$

(c) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. $0$

(d) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. $-\infty$

(e) $\lim_{x \to 0} f(x)$. $\nexists$

(f) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$. $0$

(g) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$. $0$

(h) $\lim_{x \to 2} f(x)$. $0$

# Respostas Exercs (livro) – Aula 01

## No livro: respostas dos ímpares ⇒ R.5

2. (a) 0 (b) 0 (c) 0 (d) 0

4. (a) 2 (b) 0 (c) does not exist (d) 2

6. (a) 1 (b) 1 (c) 1 (d) 0

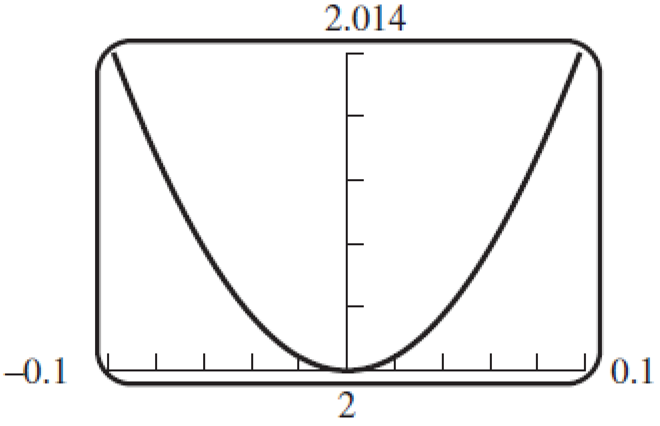
8. (a) $+\infty$ (b) $+\infty$ (c) $+\infty$ (d) can not be found from graph

10. (a) does not exist (b) $-\infty$ (c) 0 (d) $-1$ (e) $+\infty$ (f) 3 (g) $x = -2$, $x = 2$

12. (i)

| $-0.1$ | $-0.01$ | $-0.001$ | $0.001$ | $0.01$ | $0.1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.0135792 | 2.0001334 | 2.0000013 | 2.0000013 | 2.0001334 | 2.0135792 |

(ii)




The limit appears to be 2.

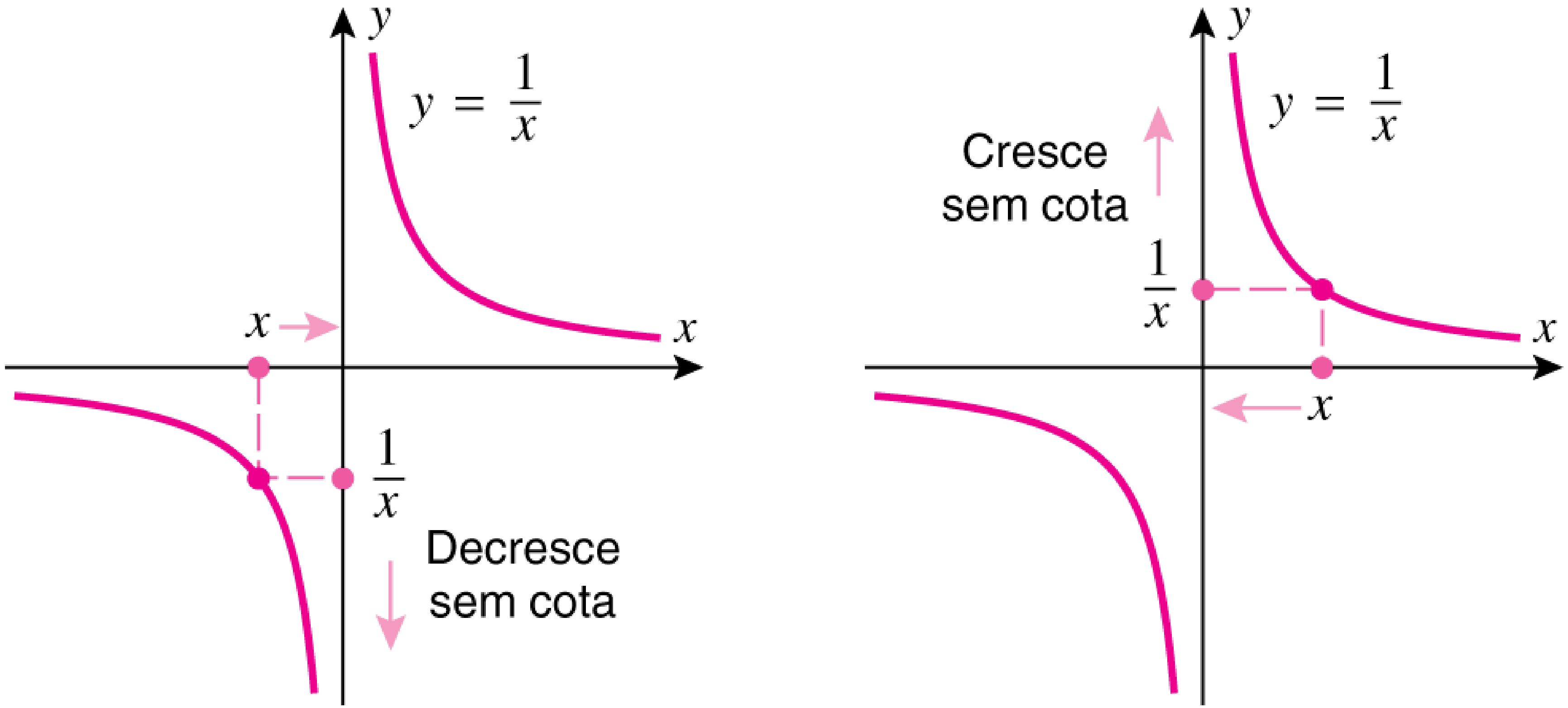
18. True; by 1.1.3.

20. False; define $f(x) = 1/x$ for $x > 0$ and $f(0) = 2$.

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

# Limites infinitos: análise gráfica e numérica




| $x$ | $-1$ | $-0{,}1$ | $-0{,}01$ | $-0{,}001$ | $-0{,}0001$ | $0$ | $0{,}0001$ | $0{,}001$ | $0{,}01$ | $0{,}1$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | $-1$ | $-10$ | $-100$ | $-1000$ | $-10.000$ | | $10.000$ | $1000$ | $100$ | $10$ | $1$ |

Lado esquerdo → ← Lado direito

# Limites infinitos: Notação

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

Logo,

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

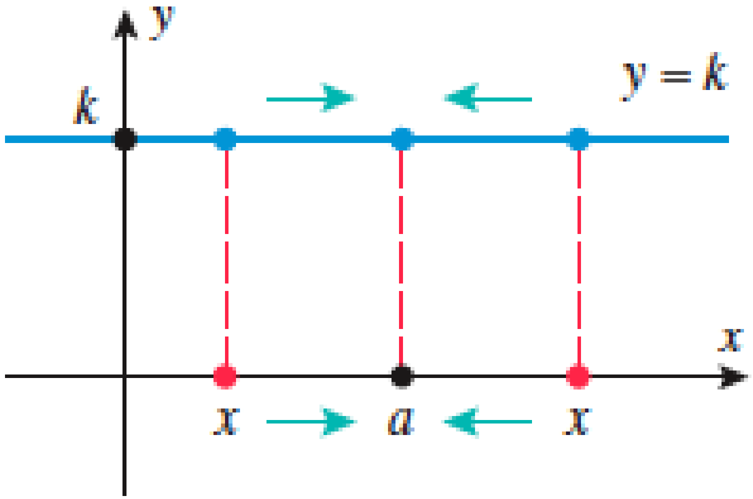
Logo,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

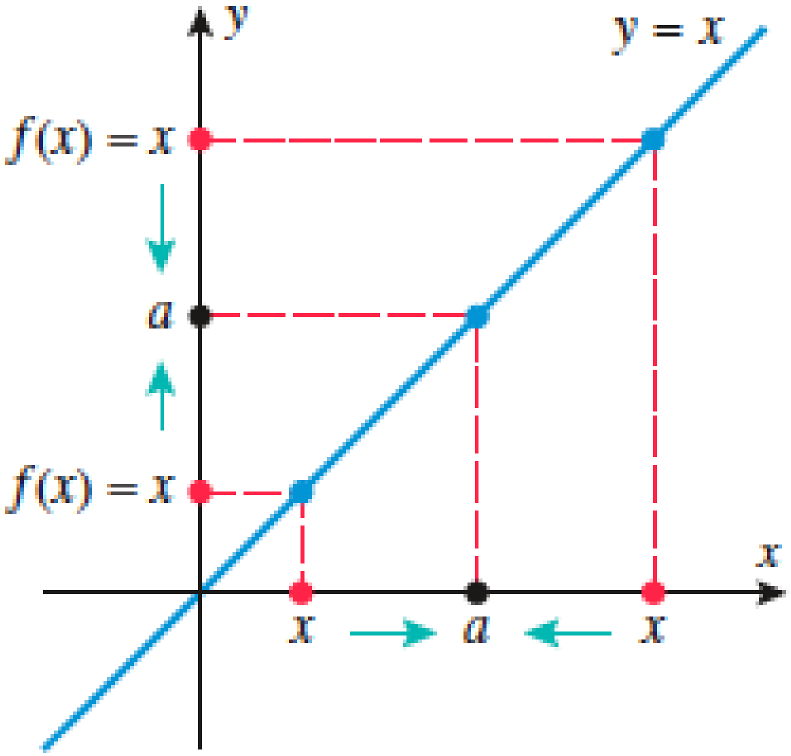
# Seção 1.2 (p. 80)

## Calculando Limites

# Limites importantes (limites básicos)

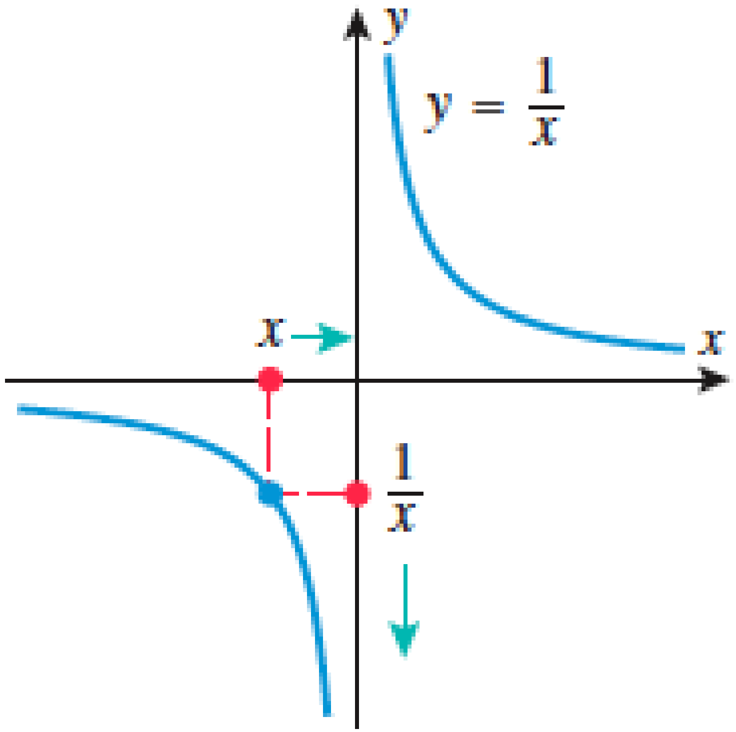



$$\lim_{x \to a} k = k$$

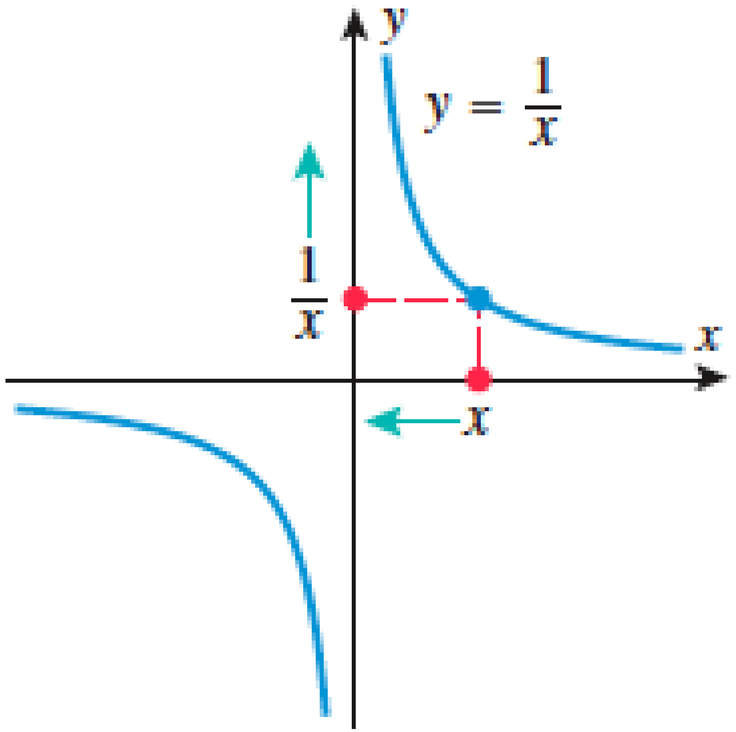



$$\lim_{x \to a} x = a$$

# Limites importantes (limites básicos)

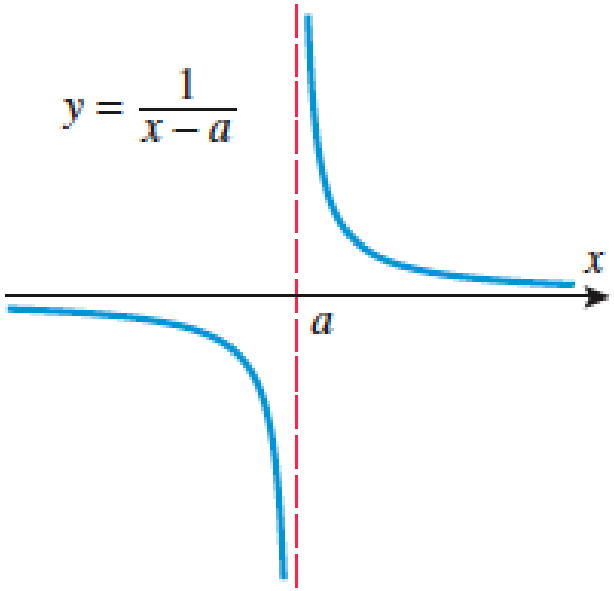


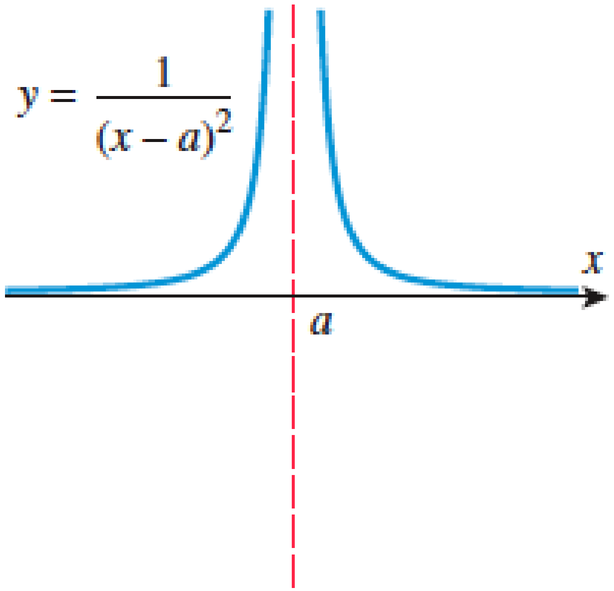

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

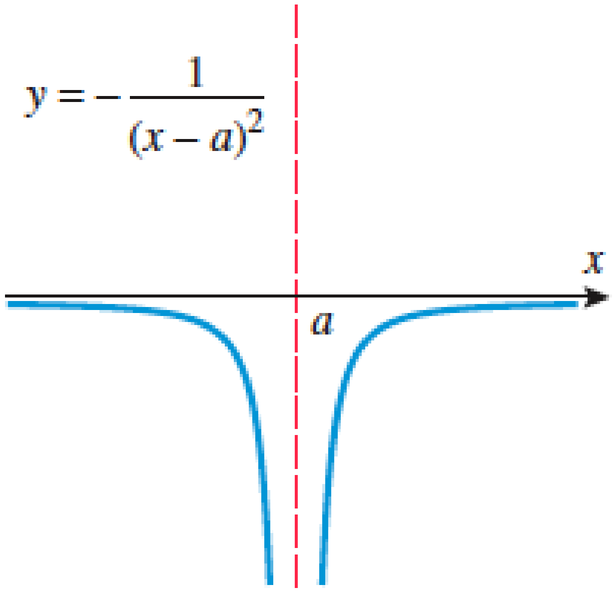



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

# Limite de funções racionais




$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$$
$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to a} -\frac{1}{(x-a)^2} = -\infty$$

# Retomando alguns limites da Aula 01 (Exercício 04)

- Limite de uma função polinomial:

$$\lim_{x \to 2} \; x^3 - 2x^2 - 4 =$$

- Limite de uma função racional:

$$\lim_{x \to 2} \; \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} =$$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

# Observações:

- Todo polinômio de **grau 2**, $P(x) = ax^2 + bx + c$, pode ser representado na forma fatorada por

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

sendo $r_1$ e $r_2$ as raízes da equação $P(x) = 0$.

- Todo polinômio de **grau 3**, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, pode ser representado na forma fatorada por

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

sendo $r_1, r_2$ e $r_3$ as raízes da equação $P(x) = 0$.

- E assim por diante...

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

# Exemplo 01:
# Calcule os limites indicados

a) $\lim_{x \longrightarrow 4} \left( \frac{x^2 - 16}{x - 4} \right) =$

b) $\lim_{x \longrightarrow 3} \left( \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 12} \right) =$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

c) $\lim_{x \to -1} \left( \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} \right) =$

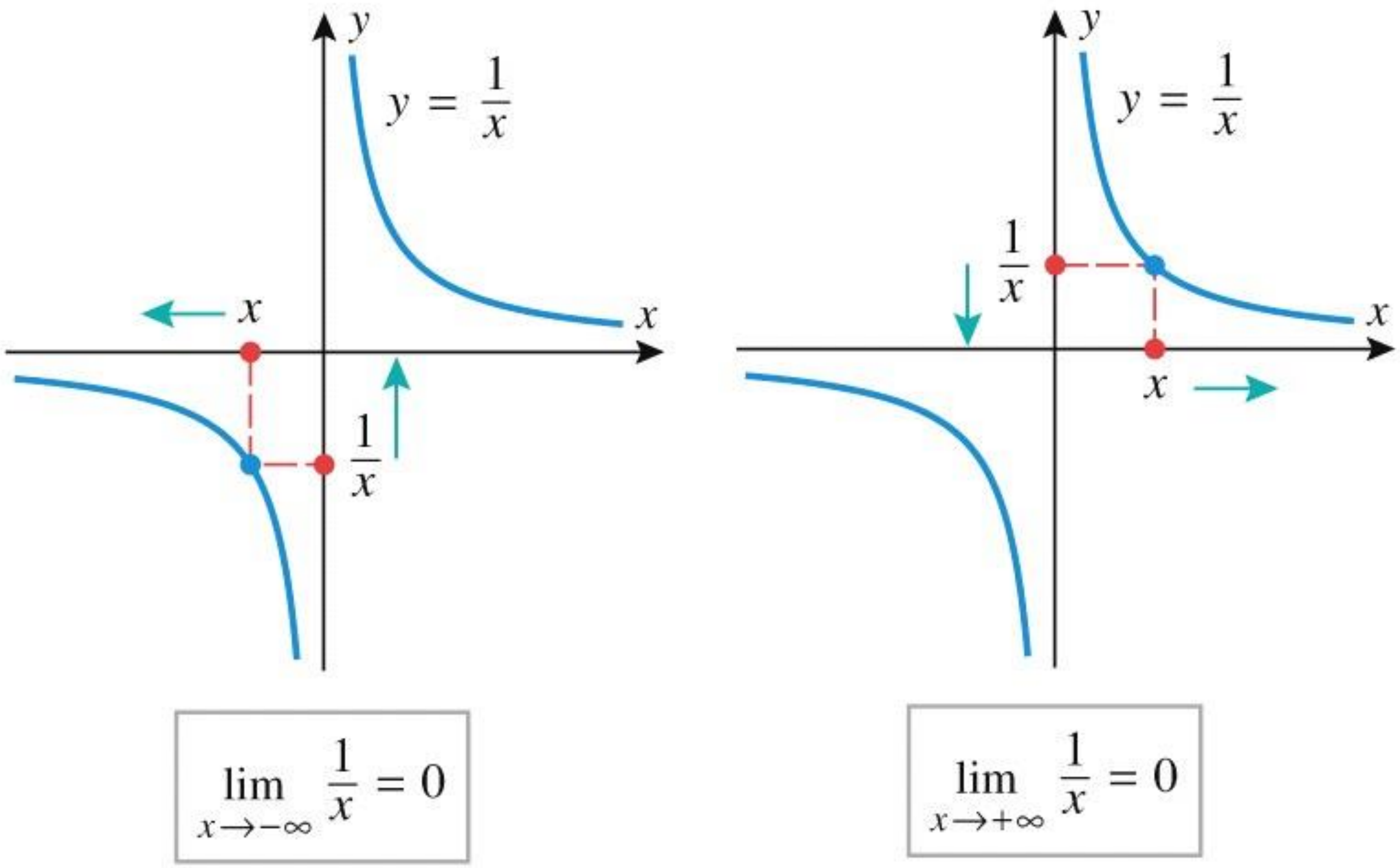
d) $\lim_{x \to 1} \left( \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} \right) =$

e) $\lim_{x \to 0} \left( \frac{x + 1}{x^2 + x} \right) =$

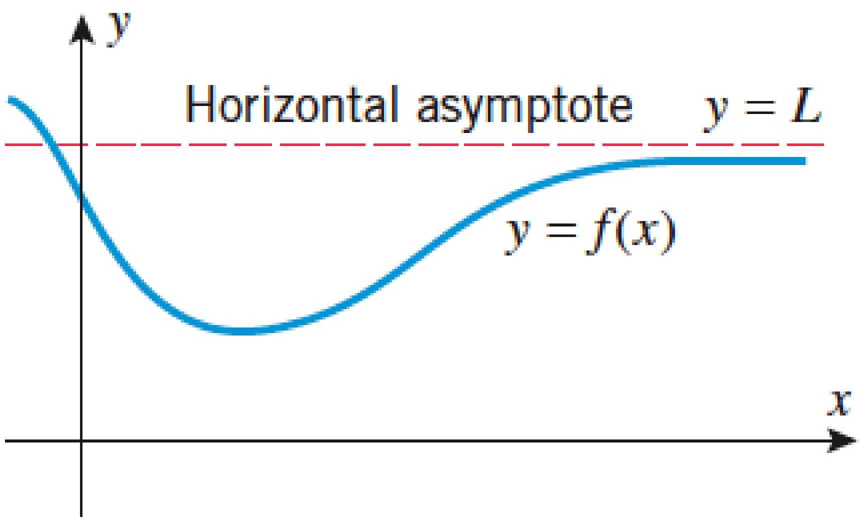
# Seção 1.3 (p. 89)

Limites no infinito: comportamento final de uma função

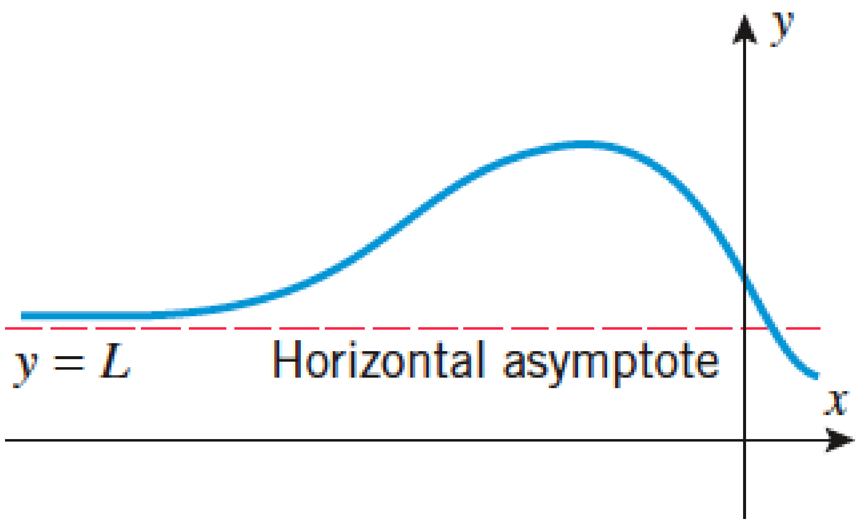
# Limites no infinito e assíntotas horizontais



# Limites no infinito e assíntotas horizontais




$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$




$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

# Limites no infinito: notação

**1.3.1 LIMITES NO INFINITO (PONTO DE VISTA INFORMAL)** Se os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queiramos de um número $L$ à medida que $x$ cresce sem cota, então escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \to L \text{ quando } x \to +\infty \tag{3}$$

Analogamente, se os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queiramos de um número $L$ à medida que $x$ decresce sem cota, então escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \to L \text{ quando } x \to -\infty \tag{4}$$

# Limites infinitos no infinito

**1.3.2 LIMITES INFINITOS NO INFINITO (UM PONTO DE VISTA INFORMAL)** Se os valores de $f(x)$ crescem sem cota quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, então escrevemos

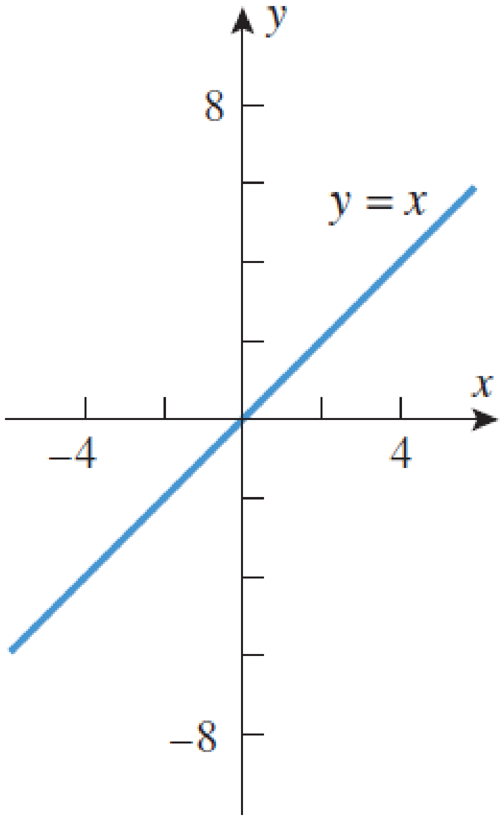
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

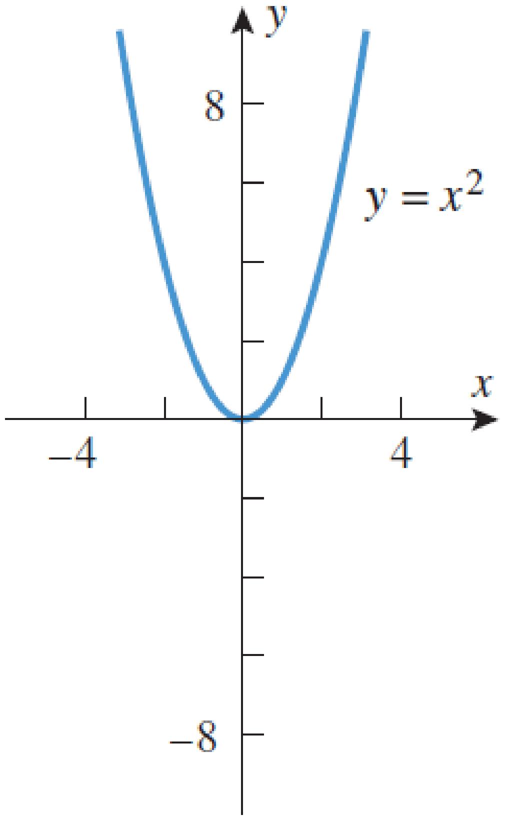
conforme o caso. Se os valores de $f(x)$ decrescem sem cota quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, então escrevemos

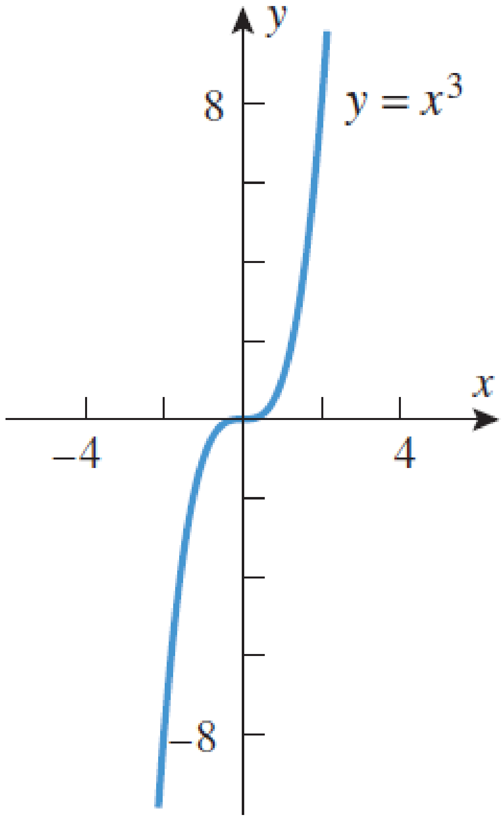
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

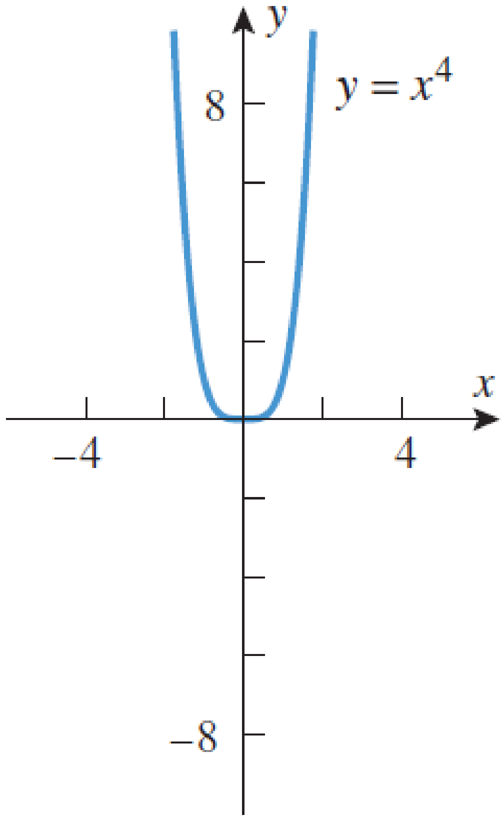
conforme o caso.

# Limites de polinômios no infinito




$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$$

# Importante: sobre limites de polinômios e funções racionais no infinito

*O comportamento final de um polinômio coincide com o comportamento final de seu termo de maior grau.*

*O comportamento final de uma função racional coincide com o comportamento final do quociente do termo de maior grau do numerador dividido pelo termo de maior grau do denominador.*

# Exemplo 02:
# Determine os limites

a) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 - 1) =$

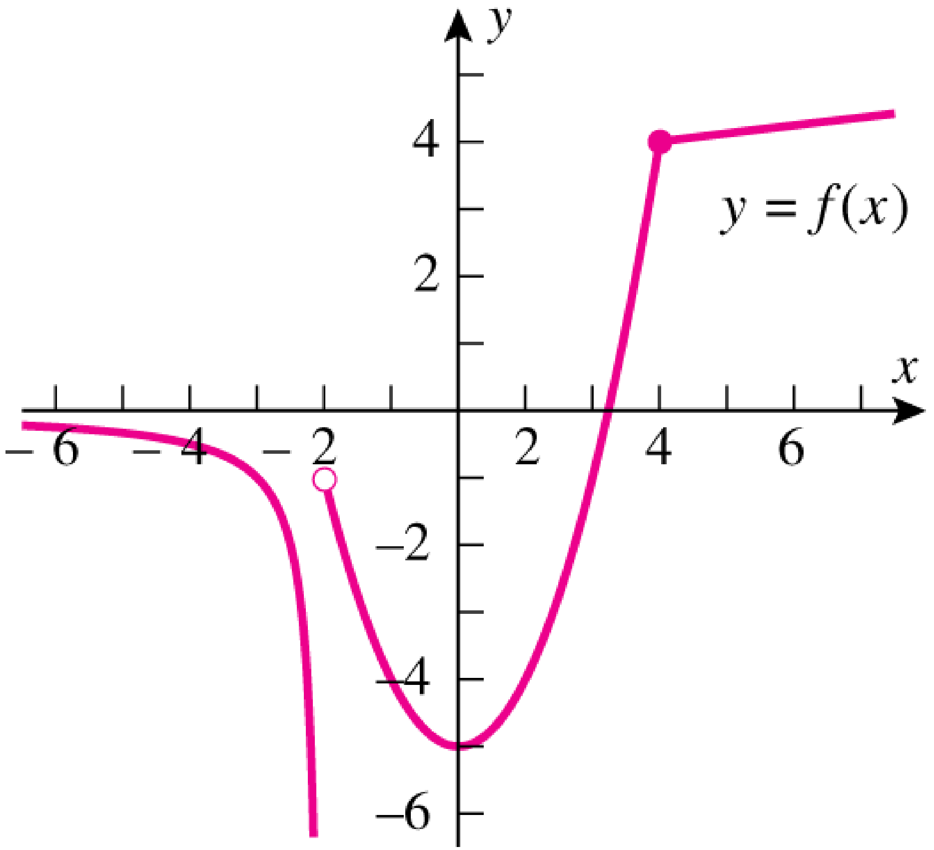
b) $\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{2x + 1}{3x - 1} \right) =$

# **Seção 1.5 (p. 110)**

## Continuidade

# Continuidade

Intuitivamente dizemos que o gráfico de uma função é contínuo quando a sua curva não apresentar “quebras” ou “buracos”.

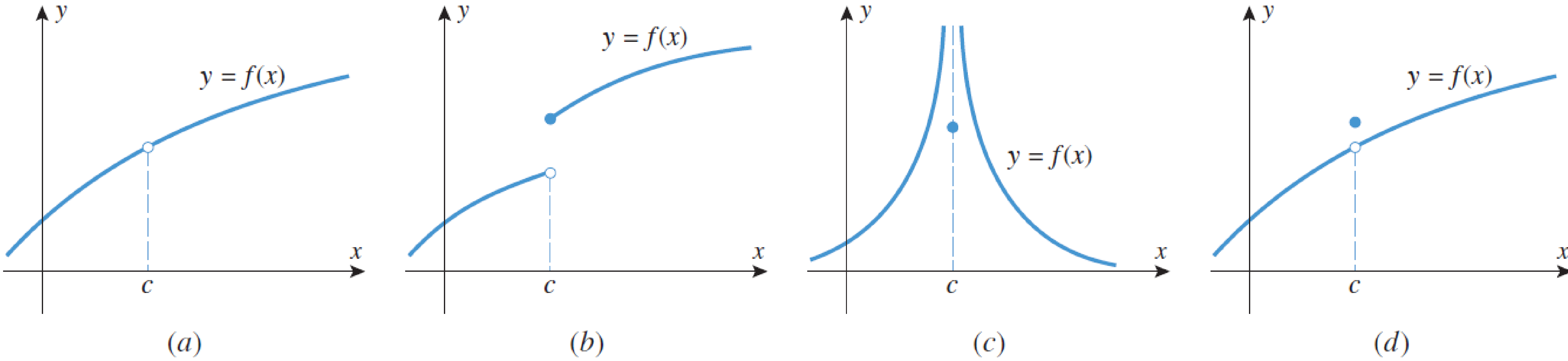


# Definição de continuidade

**1.5.1 DEFIN ÃO** Dizemos que uma função $f$ é ***contínua em $x = c$*** se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

# Por que as funções abaixo são descontínuas?



# Exemplo 03:

a) Verifique se a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ é contínua no ponto de abscissa igual a 2.

b) Para quais valores de $x$ há uma descontinuidade no gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 1$?

c) Para quais valores de $x$ há uma descontinuidade no gráfico de $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } x \leq 2 \\ x^2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$?

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

# Atividades da Aula 02

- Exercícios – p. 87 (Seção 1.2): 3 ao 6 + 9 ao 12 + 21 ao 26
- Exercícios – p. 96 (Seção 1.3): 1 ao 4, 9, 10, 13 ao 22
- Exercícios - p. 118 (Seção 1.5): 11, 13, 15, 17, 21
- Elabore um mapa mental com as ideias e regras discutidas na aula de hoje para auxiliar na resolução das atividades.