

FBX5010

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Aula 03 – Taxas de Variação

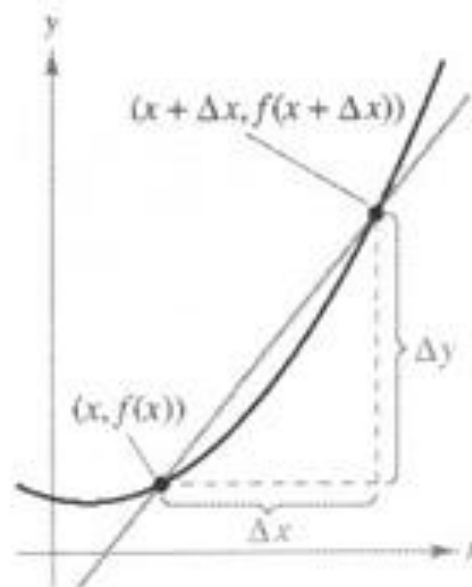
Seção 2.1

Taxas de Variação

① TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA:

$$TVM = \frac{\text{Variação do } y \text{ no intervalo dado}}{\text{Variação do } x \text{ no intervalo dado}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$TVM = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



Exemplo

Para a função $f(x) = x + 2$:

a) Determine a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[1, 3]$:

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$TVM = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

$$TVM = \frac{5 - 3}{3 - 1} = 1$$

b) Determine a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[2, 4]$:

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$TVM = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$$

$$TVM = \frac{6 - 4}{4 - 2} = 1$$

Vamos analisar o gráfico da função dada!

Atividade 1

Suponha que uma partícula tenha sua posição em função do tempo representada pela função:

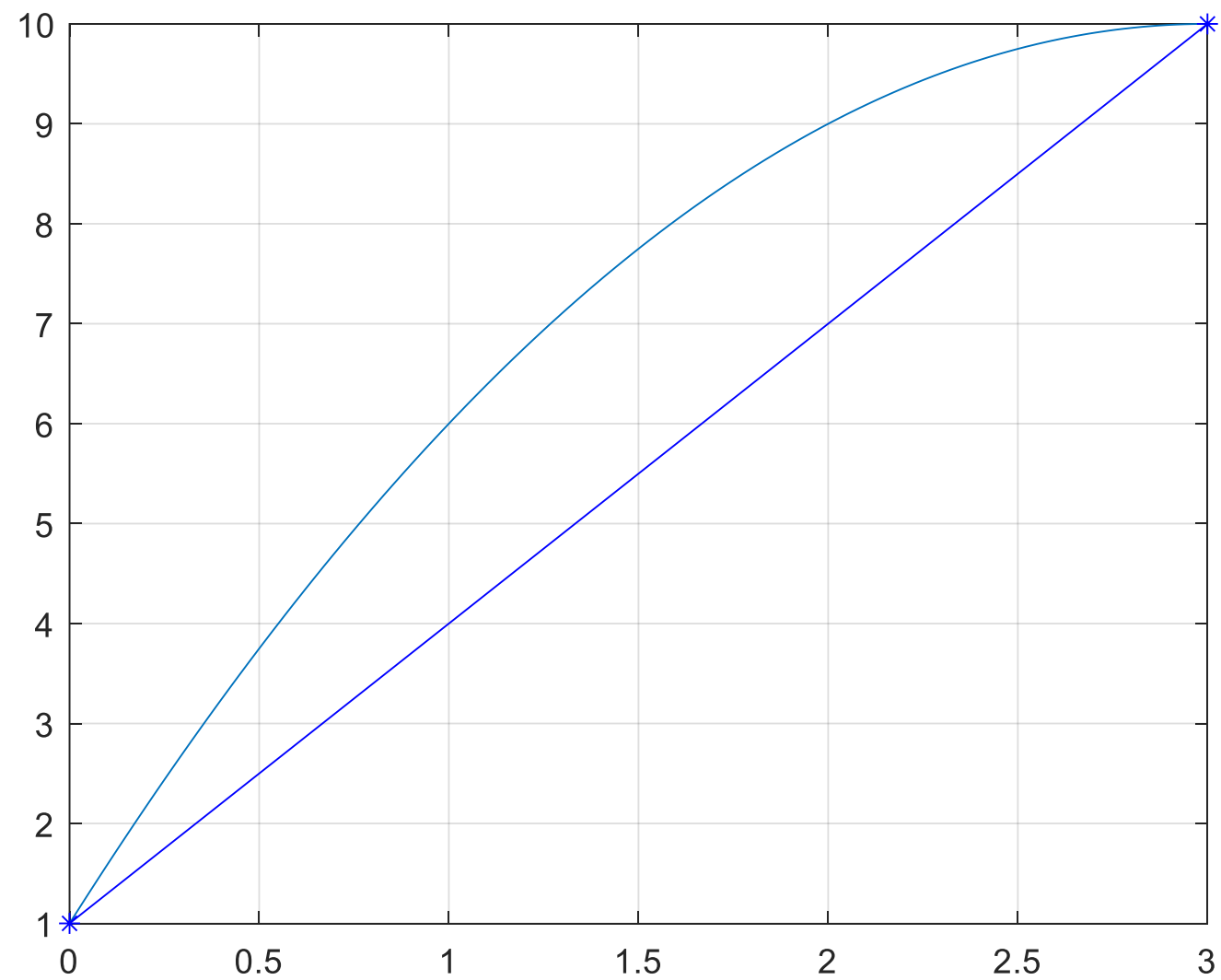
$$s(t) = -t^2 + 6t + 1$$

$$f(x) = -x^2 + 6x + 1$$

a) Encontre a velocidade média da partícula no intervalo $[0, 3]$:

$$TVM = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{(-3^2 + 6(3) + 1) - (-0^2 + 6(0) + 1)}{3 - 0}$$

$$TVM = \frac{10 - 1}{3 - 0} = 3$$

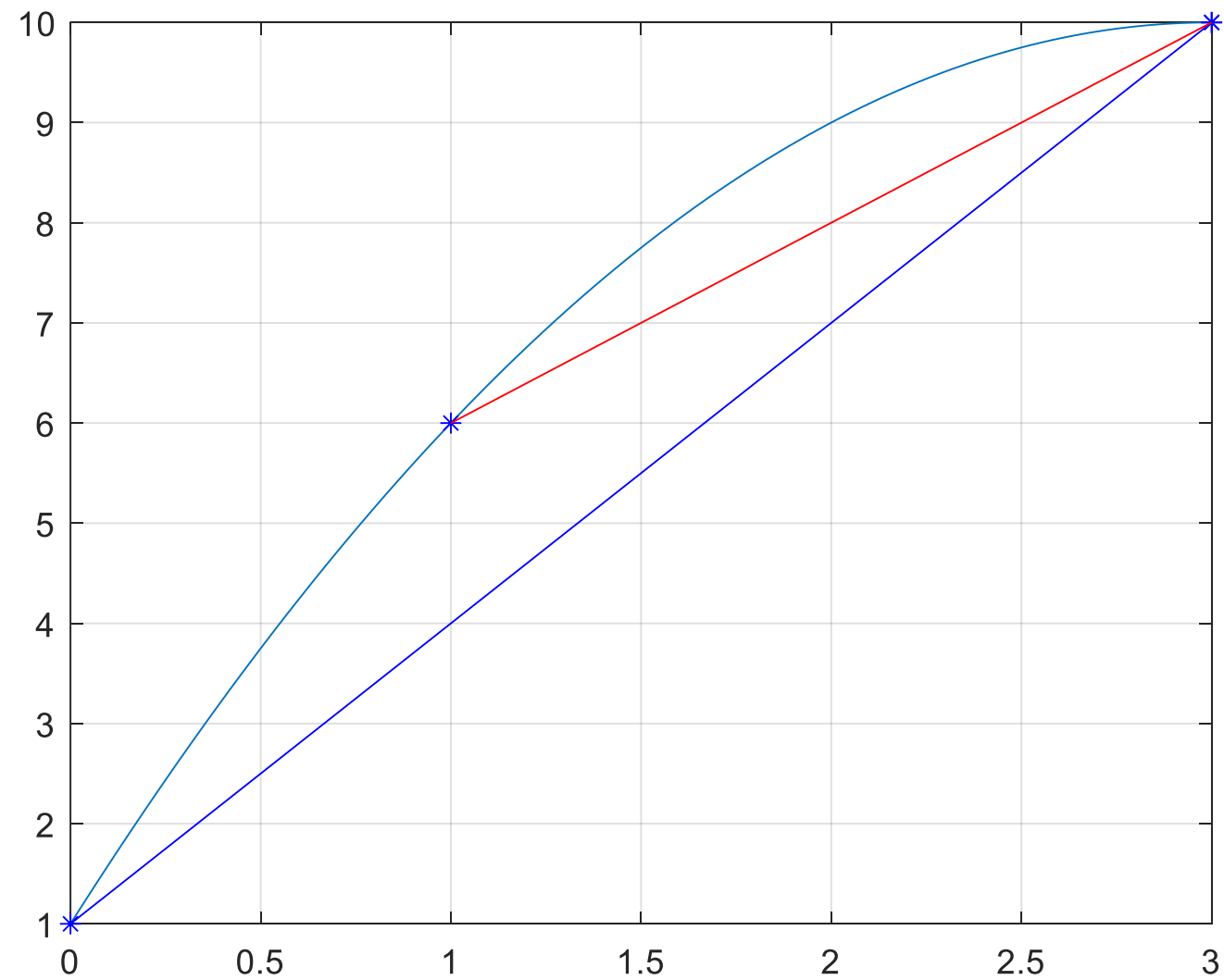


b) Encontre a velocidade média da partícula no intervalo $[1, 3]$:

$$TVM = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

$$TVM = \frac{10 - 6}{3 - 1} = 2$$



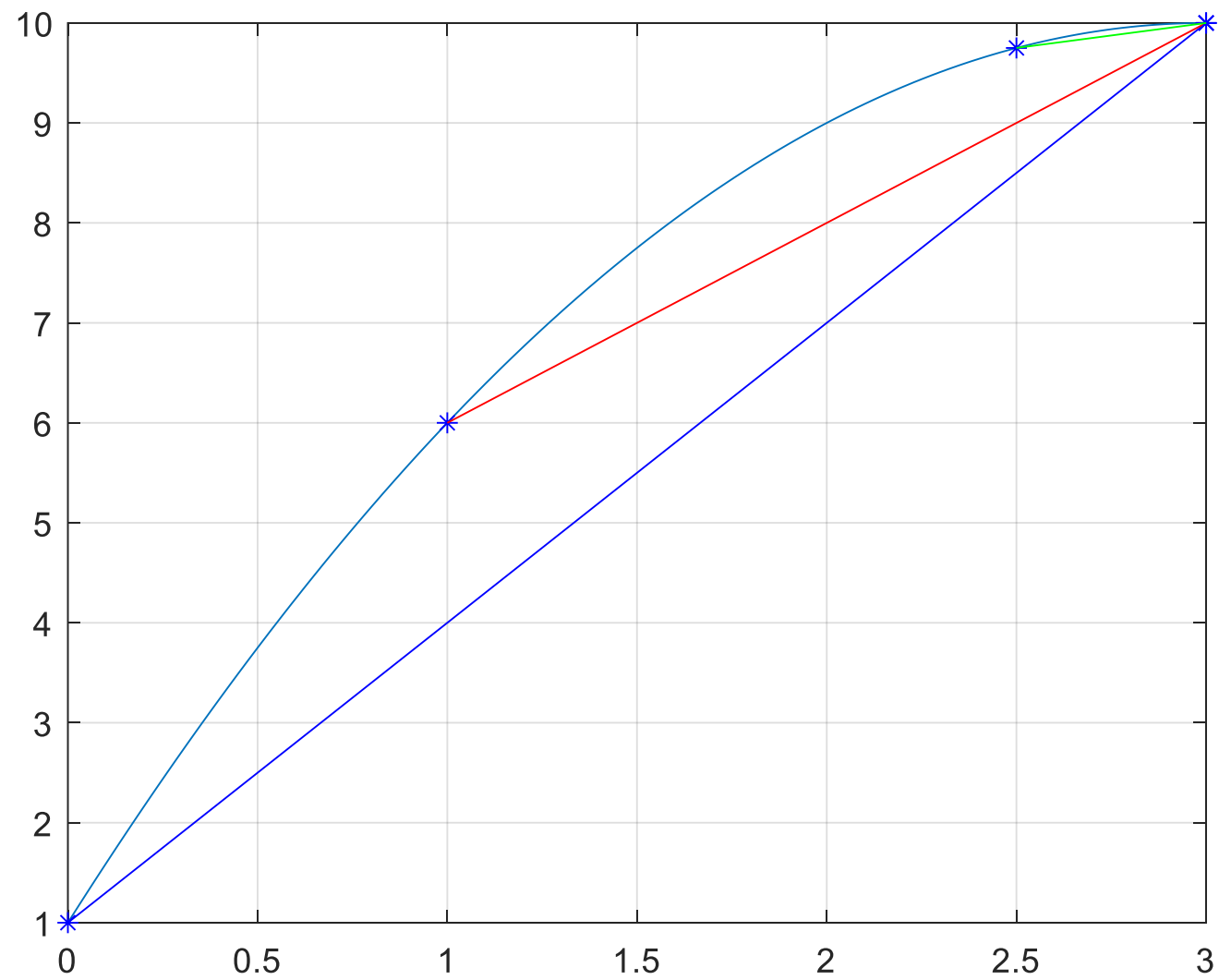


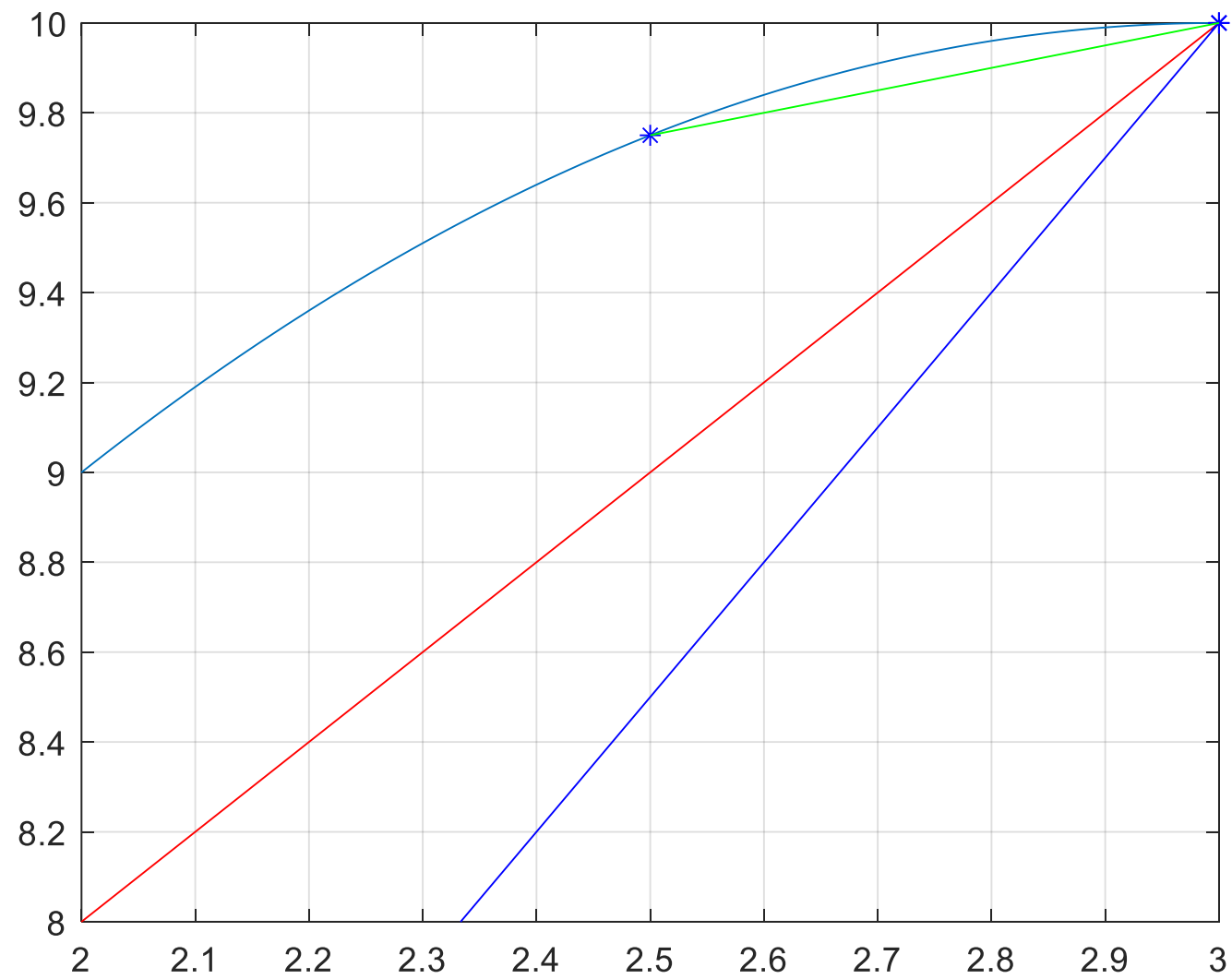
c) Encontre a velocidade média da partícula no intervalo $[2.5, 3]$:

$$TVM = \frac{f(3) - f(2.5)}{3 - 2.5}$$

$$TVM = \frac{10 - 9.75}{3 - 2.5} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$





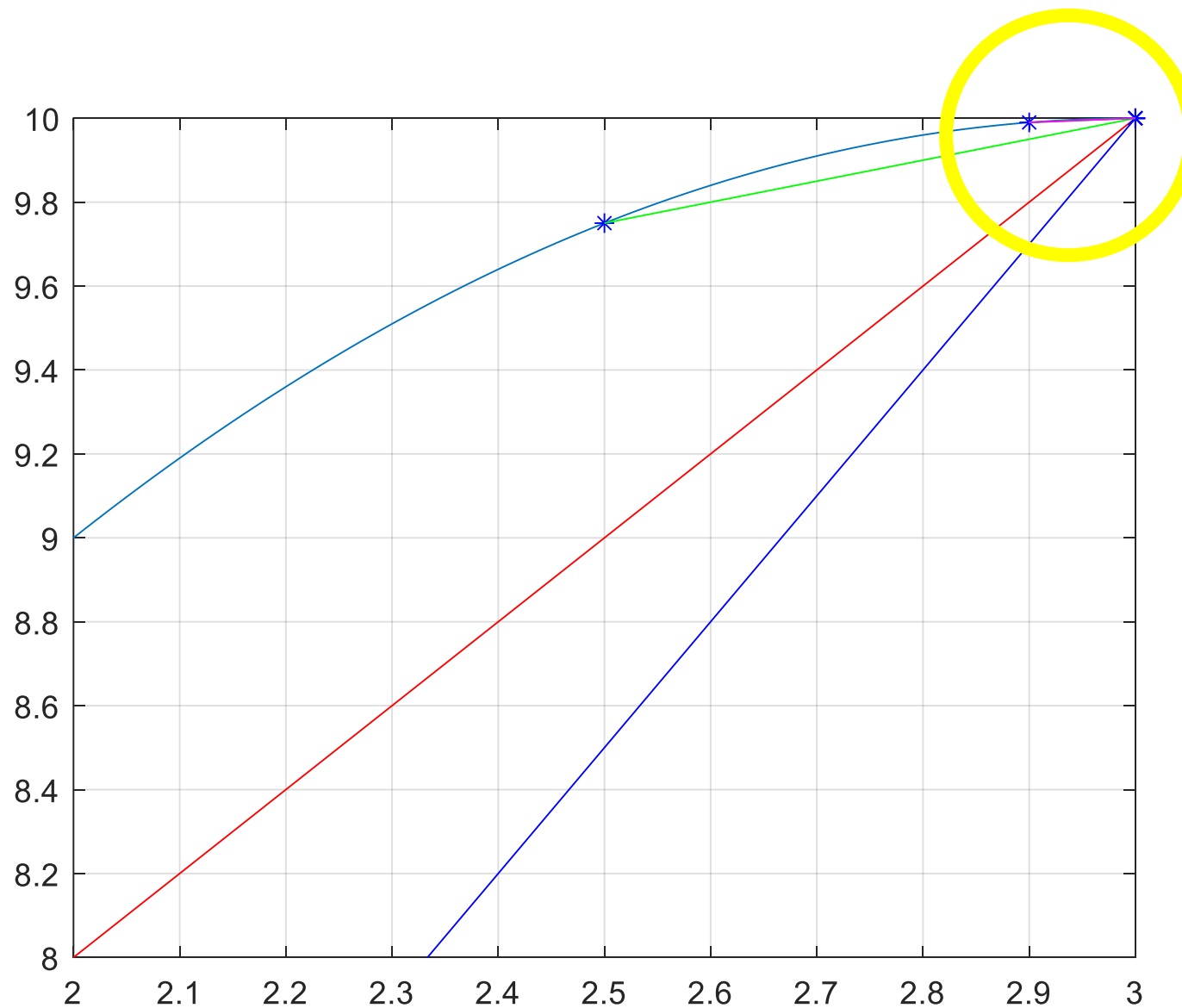


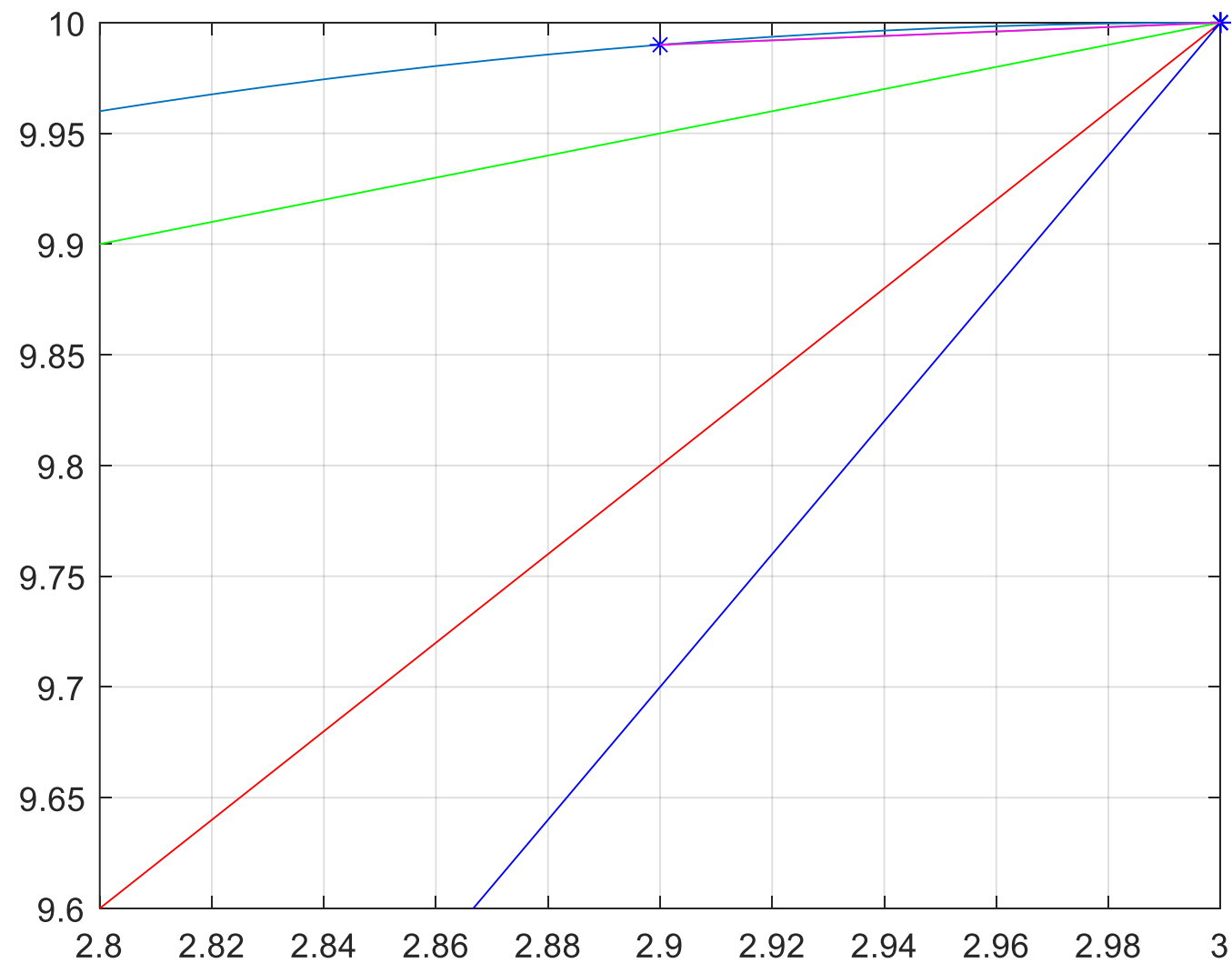
d) Encontre a velocidade média da partícula no intervalo $[2.9, 3]$:

$$TVM = \frac{f(3) - f(2.9)}{3 - 2.9}$$

$$TVM = \frac{10 - 9.99}{3 - 2.9} = \frac{0.01}{0.1} = 0.1$$







e) Encontre a velocidade média da partícula no intervalo $[2.999, 3]$:

$$TVM = \frac{f(3) - f(2.999)}{3 - 2.9}$$

$$TVM = \frac{10 - 9.9999999}{3 - 2.999} = \frac{0.0000001}{0.001} = 0.01$$

Podemos falar em limites, nessa etapa?

Atividade 2

Um corpo se move no sentido vertical de acordo com a equação $f(t) = 50t + 10t^2$, onde $f(t)$ está em metros e t é o tempo em segundos. A tabela abaixo traz a posição $f(t)$ do corpo em função do tempo t .



Vamos calcular algumas
imagens:

$$f(3) = 50(3) + 10(3)^2$$

$$f(3.99) = 50(3.99) + 10(3.99)^2$$

$$f(4) = 50(4) + 10(4)^2$$

$$f(4.01) = 50(4.01) + 10(4.01)^2$$

| t | $f(t)$ |
|--------|-------------|
| 3 | 240 |
| 3,9 | 347,1 |
| 3,99 | 358,701 |
| 3,999 | 359,87001 |
| 3,9999 | 359,9870001 |
| 4 | 360 |
| 4,0001 | 360,0130001 |
| 4,001 | 360,13001 |
| 4,01 | 361,301 |
| 4,1 | 373,1 |

Com base nos dados da tabela anterior, complete a tabela abaixo e responda:

| Intervalos de tempo | Taxa de Variação Média $TVM = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ |
|------------------------|--|
| $3 \leq t \leq 4$ | |
| $3,9 \leq t \leq 4$ | |
| $3,99 \leq t \leq 4$ | |
| $3,999 \leq t \leq 4$ | |
| $3,9999 \leq t \leq 4$ | |



| Intervalos de tempo | Taxa de Variação Média $TVM = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ |
|------------------------|---|
| $4 \leq t \leq 4,0001$ | |
| $4 \leq t \leq 4,001$ | |
| $4 \leq t \leq 4,01$ | |
| $4 \leq t \leq 4,1$ | |

Vamos às questões:

a) Qual o comportamento da **velocidade média** na medida que diminuimos o intervalo de variação do tempo para valores **menores** que 4, mas cada vez mais próximos de 4?

$$\lim_{t \rightarrow 4^-} TVM = \lim_{t \rightarrow 4^-} \frac{\Delta y}{\Delta t} = 130$$

b) Qual o comportamento da **velocidade média** na medida que diminuimos o intervalo de variação do tempo para valores **maiores** que 4, mas cada vez mais próximos de 4?

$$\lim_{t \rightarrow 4^+} TVM = \lim_{t \rightarrow 4^+} \frac{\Delta y}{\Delta t} = 130$$



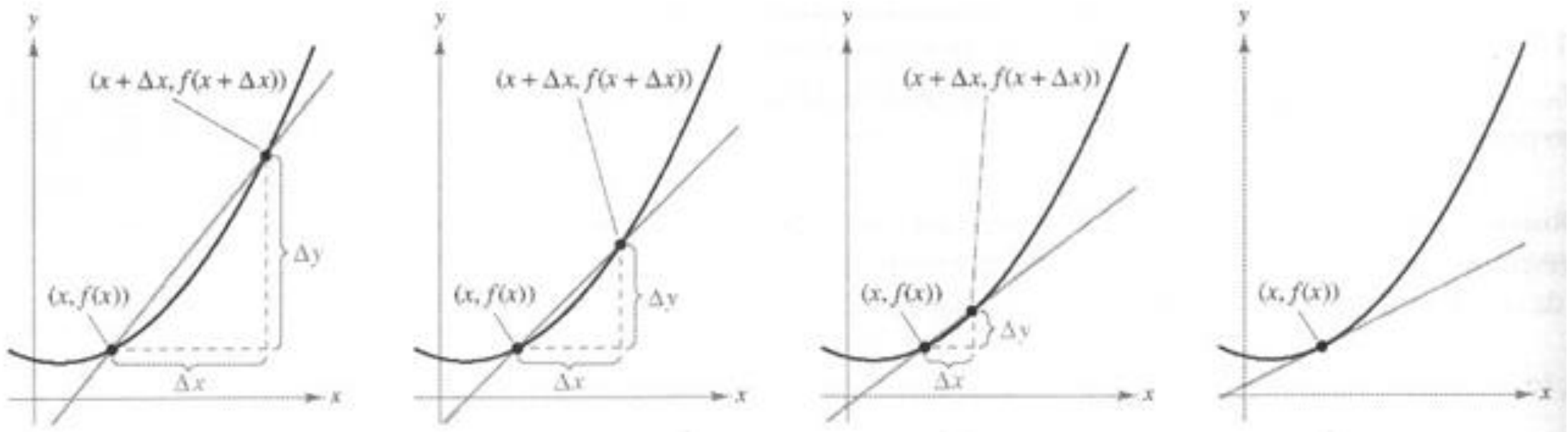
c) Com base nos resultados da tabela determine a velocidade instantânea do corpo quando $t = 4$ segundos?

130 m/s

d) Utilizando a notação de limites represente o comportamento da taxa de variação média na medida que diminuimos o intervalo de variação do tempo.

$$\lim_{t \rightarrow 4} TVM = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{\Delta y}{\Delta t} = 130$$

Graficamente, o que fizemos:



$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos $TVM \rightarrow TVI$.

② TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

$$TVI = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} TVM$$

$$TVI = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$TVI = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Exemplo

Dada a função $f(x) = x^2$, determine:

a) A taxa de variação instantânea em $x = 1$

$$TVI = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$TVI = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Podemos calcular esse limite com as regras definidas até aqui...
Ou analisando uma tabela (abordagem numérica).

Usando uma técnica algébrica:

$$TVI = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$TVI = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$



b) A taxa de variação instantânea em $x = 2$

$$TVI = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$TVI = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)}$$

$$TVI = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$



c) A taxa de variação instantânea num ponto arbitrário x_0 .

$$TVI = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou

$$TVI = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - (x_0)^2}{x - x_0}$$

$$TVI = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$$

$$TVI = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$$



Atividades da Aula 03

- Em grupos: resolver as Atividades 3, 4, 5 e 6 do material Aula 03 – Introdução às Taxas de Variação
- Atividades pós-aula:
 - Leitura da Seção 2.1 do livro – p. 131 (complemento de estudos)
 - Exercícios da p. 141 – 15 ao 18 + 23, 24, 26, 28

Respostas

Atividade 03: a) 5 b) 4

Atividade 04: a) 3 b) 0

Atividade 05: a) -320 L/h b) -640 L/h

Atividade 06: a) 6 b) 4 c) $2x_0 + 2$

