
AULA 03 – INTRODUÇÃO ÀS TAXAS DE VARIAÇÃO

① TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA:

Quando estudamos uma função, estamos estudando a relação de dependência entre duas ou mais variáveis onde, para todo valor da variável independente, devemos encontrar um ÚNICO valor para variável dependente. Esta relação pode ser expressa por $f(x) = y$. Se y não é uma função constante, quando há uma variação da variável x , ocorre uma determinada variação da variável y . Ao analisarmos uma função em um determinado intervalo de valores para x , podemos determinar qual a taxa média de variação do y com relação ao x através da seguinte expressão:

$$\text{Taxa de variação média} = \frac{\text{Variação do } y \text{ no intervalo dado}}{\text{Variação do } x \text{ no intervalo dado}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ou

Taxa de variação média de y em relação a x em um intervalo $[x_0, x_1]$ é dado por:

$$TVM = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Exemplo) Para a função $f(x) = x + 2$

- a) Determine a taxa de variação média de y em relação ao x no intervalo $[1, 3]$
- b) Determine a taxa de variação média de y em relação ao x no intervalo $[2, 4]$.

Atividade 1) Suponha que uma partícula tenha sua posição em função do tempo representada pela função:

$$s(t) = -t^2 + 6t + 1.$$

- a) Encontre a velocidade média da partícula no intervalo $[0, 3]$

$$TVM = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} =$$

- b) Encontre a velocidade média da partícula no intervalo $[1, 3]$

$$TVM = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} =$$

- c) Encontre a velocidade média da partícula no intervalo $[2.5, 3]$

$$TVM = \frac{f(3) - f(2.5)}{3 - 2.5} =$$

- d) Encontre a velocidade média da partícula no intervalo $[2.9, 3]$

$$TVM = \frac{f(3) - f(2.9)}{3 - 2.9} =$$

- e) Encontre a velocidade média da partícula no intervalo $[2.999, 3]$

$$TVM = \frac{f(3) - f(2.999)}{3 - 2.999} =$$

Atividade 2) Um corpo se move no sentido vertical de acordo com a equação $f(t) = 50t + 10t^2$, onde $f(t)$ está em metros e t é o tempo em segundos. A tabela abaixo traz a posição $f(t)$ do corpo em função do tempo t . (verifique essas imagens que foram calculadas – use a calculadora científica que foi solicitada, evite a calculadora do celular)

t	$f(t)$
3	240
3,9	347,1
3,99	358,701
3,999	359,87001
3,9999	359,9870001
4	360
4,0001	360,0130001
4,001	360,13001
4,01	361,301
4,1	373,1

Com base nos dados da tabela anterior, complete a tabela abaixo responda:

Intervalos de tempo	Taxa de Variação Média $TVM = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$
$3 \leq t \leq 4$	
$3,9 \leq t \leq 4$	
$3,99 \leq t \leq 4$	
$3,999 \leq t \leq 4$	
$3,9999 \leq t \leq 4$	
--	--
$4 \leq t \leq 4,0001$	
$4 \leq t \leq 4,001$	
$4 \leq t \leq 4,01$	
$4 \leq t \leq 4,1$	

- Qual o comportamento da **velocidade média** na medida que diminuimos o intervalo de variação do tempo para valores **menores** que 4, mas cada vez mais próximos de 4?
- Qual o comportamento da **velocidade média** na medida que diminuimos o intervalo de variação do tempo para valores **maiores** que 4, mas cada vez mais próximos de 4?
- Com base nos resultados da tabela determine a velocidade instantânea do corpo quando $t = 4$ segundos.
- Utilizando a notação de limites represente o comportamento da taxa de variação média na medida que diminuimos o intervalo de variação do tempo.

Ⓢ TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

Enquanto a taxa de variação média relaciona a variação do y em um determinado intervalo de variação de x , a taxa de variação instantânea define a variação do y em determinado ponto.

A taxa de variação instantânea de y em relação a x em um ponto é dado por:

$$TVI = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} TVM$$

$$TVI = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Ou, de forma resumida:

$$TVI = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Exemplo) Dada a função $f(x) = x^2$, determine:

- A taxa de variação instantânea em $x = 1$.
- A taxa de variação instantânea em $x = 2$.
- A taxa de variação instantânea num ponto arbitrário x_0 .

Atividade 3) Dada a função $f(x) = x^2 + 1$

- Determine a taxa de variação média de y em relação ao x no intervalo $[2, 3]$.
- Determine a taxa de variação instantânea de y em relação ao x no ponto $P(2, 5)$.

Atividade 4) Suponha que uma partícula tenha sua posição em função do tempo representada pela função $s(t) = -t^2 + 6t + 1$.

- Encontre a velocidade média da partícula no intervalo $[0, 3]$.
- Encontre a velocidade instantânea da partícula em $x = 3$.

Atividade 5) Um reservatório de água está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório, em litros, t horas após o escoamento ter começado é dada por $V = 40(50 - t^2)$

- Calcule a taxa de variação média do volume de água no reservatório durante as 4 primeiras horas de escoamento.
- Calcule a taxa de variação instantânea do volume de água no reservatório após 4 horas de escoamento.

Atividade 6) Dada a função $f(x) = x^2 + 2x$, determine:

- A taxa de variação instantânea da função em $x_0 = 2$.
- A taxa de variação instantânea da função em $x_0 = 1$.
- Encontre uma fórmula para calcular a taxa de variação instantânea num ponto arbitrário x_0 .