UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

FBX5010 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Aula 04

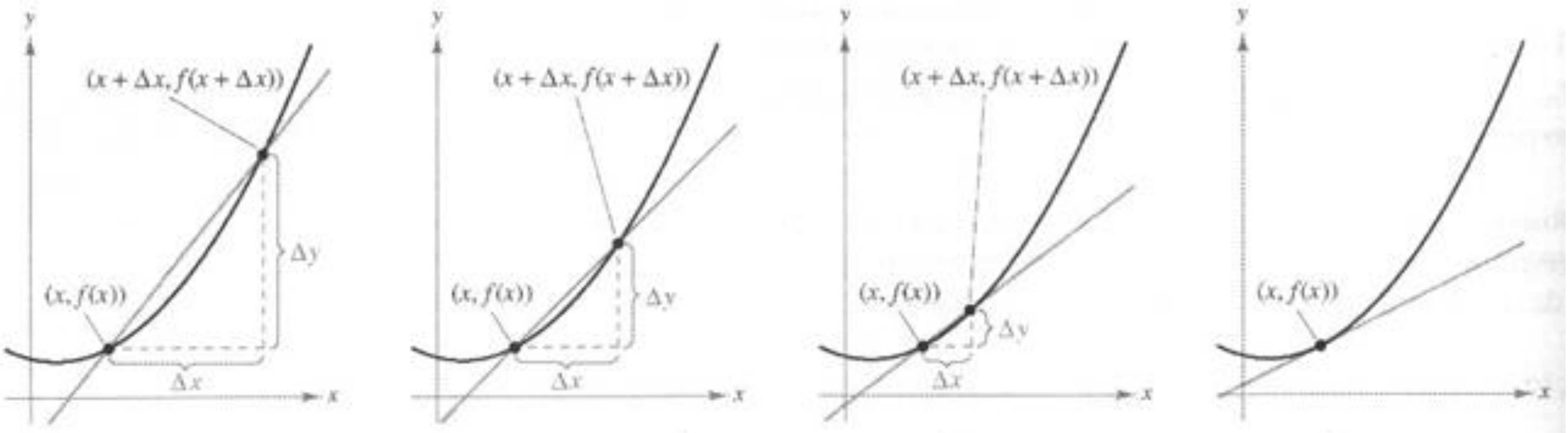
Função derivada

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Seção 2.2 (p. 143)

Função Derivada

Retomando conceitos: TVM e TVI



$$TVM = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$TVI = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

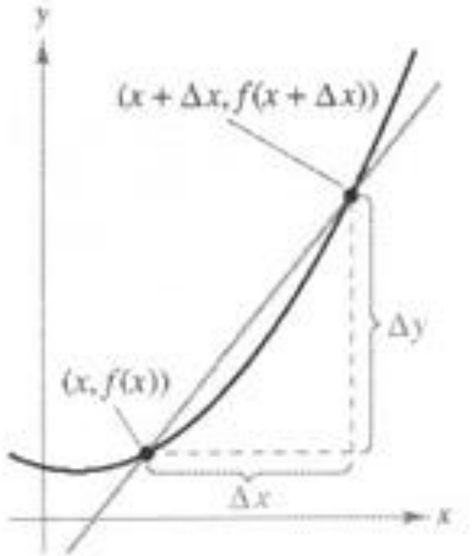
TVM

Taxa de variação média ⇒ inclinação da reta secante

$$TVM = m_{\sec}$$

$$TVM = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$TVM = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

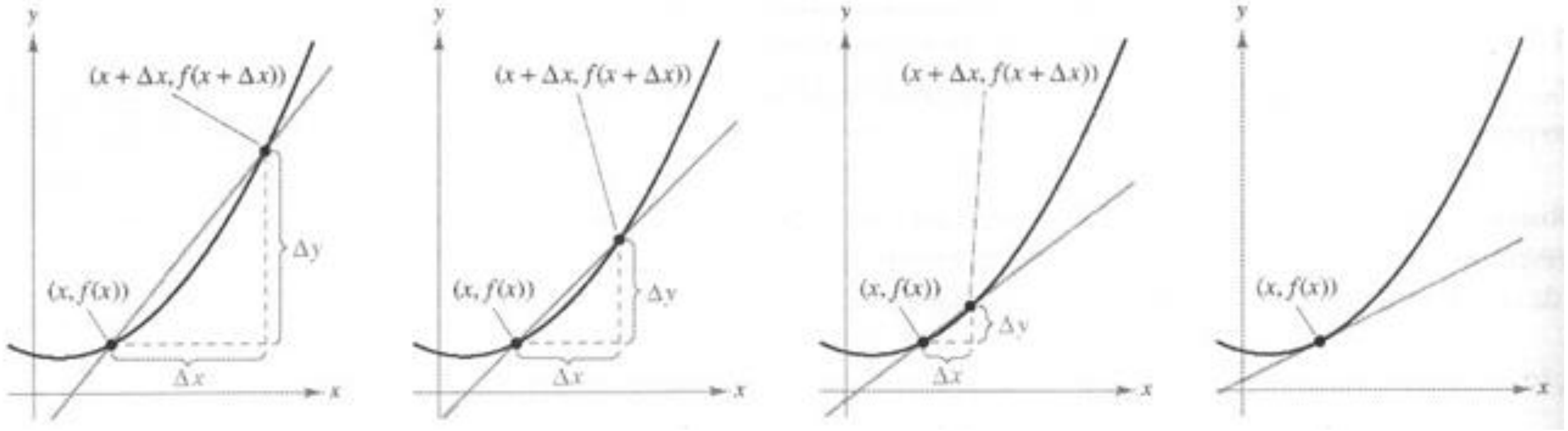


TVI

Taxa variação instantânea ⇒ inclinação da reta tangente

$$TVI = m_{\tan}$$

$$TVI = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{ou} \qquad TVI = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Exemplo

Considere a função dada por $f(t) = -2t^3 + 7t^2 + 4t$, que representa as posições, em quilômetros, de um móvel em cada instante t, em horas, no intervalo de tempo $[0, 2]$. Determine a velocidade do móvel exatamente em $t = 2$ horas, ou seja, calcule a *velocidade instantânea* do objeto quando $t = 2$.

$$TVI = \lim_{t \to 2} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

$$TVI = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$TVI = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$TVI = \lim_{x \to 2} \frac{-2x^3 + 7x^2 + 4x - [-2.2^3 + 7.2^2 + 4.2]}{x - 2}$$

$$TVI = \lim_{x \to 2} \frac{-2x^3 + 7x^2 + 4x - 20}{x - 2}$$

$$TVI = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(-2x^2 + 3x + 10)}{x - 2}$$

$$TVI = \lim_{x \to 2} (-2x^2 + 3x + 10) = 8 \text{ km/h}$$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Função Derivada

$$TVI = m_{\tan} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A TVI pode ser calculada em cada x (com os processos de limites que já foram discutidos)

ou

podemos generalizar os resultados, como uma nova função que deriva de $f(x)$, obtendo uma "expressão algébrica"

A função que representa as taxas de variação instantâneas em cada valor de x é chamada de função derivada.

Notação: $f'(x)$

Definição:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(Observação: em alguns textos de Cálculo você irá encontrar h no lugar de Δx).

Exemplo 01

Calcule a derivada da função $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x.\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

$$f'(x) = 2x$$

Então, se $f(x) = x^2$

temos $f'(x) = 2x$

Exemplo 02

Calcule a derivada da função $f(x) = 3x^2 - 2x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - (3x^2 - 2x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x.\Delta x + 3.(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - 3x^2 + 2x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x.\Delta x + 3.(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x.\Delta x + 3.(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 2)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x - 2)$$

$$f'(x) = 6x - 2$$

Então, se $f(x) = 3x^2 - 2x$

temos $f'(x) = 6x - 2$

E agora, toda função derivada será calculada dessa forma?

Sim e não! Queremos otimizar esse processo!

Seção 2.3 (p. 155)

Introdução às técnicas de diferenciação

Uma breve revisão: Propriedades de potências

- $x^0 = 1$
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

E, ainda, propriedades operatórias:

- $x^m . x^n = x^{m+n}$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $(x^m)^n = x^{m.n}$

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Técnicas de diferenciação

1) Derivada da função constante:

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

Exemplos:

a) $f(x) = 8 \Rightarrow f'(x) = 0$

b) $f(x) = -\sqrt{3} \Rightarrow f'(x) = 0$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

2) Derivada da função potência:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Exemplos:

a) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x^1 = 2x$

b) $f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2 \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3}$ ou $-\frac{2}{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^1} \Rightarrow f(x) = x^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{1/3 - 1} = \frac{1}{3} x^{-2/3}$ ou $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-1/2 - 1}$

$f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2}$

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

3) Derivada de função multiplicada por constante:

$$f(x) = k.g(x) \Rightarrow f'(x) = k.g'(x)$$

Exemplos:

a) $f(x) = 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5.3x^{3-1} = 15x^2$

b) $f(x) = 9x^2 \Rightarrow f'(x) = 9.2x = 18x$

4) Derivada da soma e da diferença de funções:

$$y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$$

Exemplos:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 6x - 2$

b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 6 \Rightarrow y' = 6x^2 + 6x - 4 + 0$

$\therefore y' = 6x^2 + 6x - 4$

Outras definições importantes:

Valor numérico de derivadas:

- Calcule $f'(2)$, sendo $f(x) = 3x^3 - 4x + \frac{5}{x}$

$$f(x) = 3x^3 - 4x + 5x^{-1}$$

$$f'(x) = 3(x^3)' - 4(x)' + 5(x^{-1})'$$

$$f'(x) = 3.(3x^2) - 4.x^0 + 5.(-1)x^{-2}$$

$$f'(x) = 9x^2 - 4 - 5x^{-2}$$

$$f'(2) = 9(2)^2 - 4 - 5(2)^{-2}$$

$$f'(2) = 36 - 4 - \frac{5}{4} = \frac{123}{4} = 30{,}75$$

Outras definições importantes:

Derivadas sucessivas:

- Determine $g''(x)$ para $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

Outras definições importantes:

Derivadas sucessivas:

- Calcule $h''(-1)$, sendo $h(x) = \frac{2x-4x^3}{x^2}$

Exemplo contextualizado

Considere a função dada por $f(t) = -2t^3 + 7t^2 + 4t$, que representa as posições, em quilômetros, de um móvel em cada instante t, em horas, no intervalo de tempo $[0, 2]$. Determine a velocidade do móvel exatamente em $t = 2$ horas, ou seja, calcule a *velocidade instantânea* do objeto quando $t = 2$.

Resumindo

1) Derivada da função constante:

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

2) Derivada da função potência:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

3) Derivada de constante multiplicando função:

$$f(x) = k.g(x) \Rightarrow f'(x) = k.g'(x)$$

4) Derivada de uma soma de funções:

$$y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$$

Notação

$$y' \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}$$

$$f'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$f''(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$$

$$f^{(n)}(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$$

Atividades da Aula 04

- Seção 2.3 – p. 161 (do livro físico): **1 ao 18, 21 ao 24, 41 ao 48**

- TAREFA: Desenvolver as derivadas utilizando as técnicas definidas até aqui: iniciar pelos exercícios ímpares; verificar as respostas; seguir com os exercícios pares; publicar o desenvolvimento de um exercício par no Fórum da Seção 2.3 (pontinhos de arredondamento)

- Aula 05: 02/04 – Seção 2.4 + Exercícios Complementares (T1)

- Aula 06: 09/04 – Avaliação Parcial 1