

Ciência da Computação

Lógica para Computação

Prof. Giovanni Ely Rocco (gerocco@ucs.br)



Um problema inicial...

Você está em uma cela e há duas portas, cada uma vigiada por um guarda.

Uma das porta dá para a morte e a outra porta é a saída para a liberdade.

Você está livre para escolher uma porta para abrir, e poderá fazer apenas uma pergunta a um dos dois guardas. Sabe-se que um dos guardas sempre fala a verdade e o outro sempre mente, mas você não sabe qual deles é.

Que pergunta você faria?



Pergunte a um dos guardas:
- Segundo o outro guarda,
qual a porta sai para a liberdade?
E escolha sair pela outra porta...

Qual o argumento lógico?

Outro problema...

Você é prisioneiro de uma tribo que sabe de tudo, e está prestes a receber sua sentença de morte.

O cacique o desafia:

- Faça uma afirmação qualquer.
Se for mentira, você morrerá na fogueira.
Se for verdade, você morrerá afogado.

E complementa:

- Mas se não soubermos se é verdade ou mentira, nós te libertamos



O que você diria?



Diga:

- Eu vou morrer na fogueira.

Qual o argumento lógico?

O que é Lógica?

Lógica é o estudo de argumentos. (Nolt; Rohatyn, 1991)
Estudo do raciocínio dedutivo.

Todos os homens são mortais.

Sócrates é um homem. **premissas**

Portanto, Sócrates é mortal. **conclusão**

Enunciados ou **Proposições**

Sentenças declarativas.

Sem ambiguidade, nem tempo verbal,
e portadoras de verdade ou falsidade.

Lógica Proposicional

Representação formal de enunciados (discurso),
de maneira precisa e sem ambiguidades.

Sócrates é um homem.

Proposição Simples

Verdadeira ou Falsa

Princípio da Identidade

Uma proposição verdadeira é verdadeira, e uma falsa é falsa.

Princípio da Não Contradição

Nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio do Terceiro Excluído

Uma proposição é verdadeira ou falsa, não há outra possibilidade.

Lógica Proposicional

Representação formal de enunciados (discurso),
de maneira precisa e sem ambiguidades.

p: Sócrates é um homem.

q: Sócrates é mortal.

Proposições Simples

Proposições Compostas

Sócrates é um homem e Sócrates é mortal.

p **∧** **q**

conectivo lógico

Lógica Proposicional

Conectivos Lógicos

Negação (não): \neg

Expressão: Sócrates não é um homem.

$[\neg p]$

Conjunção (e): \wedge

Expressão: Sócrates é um homem e é mortal.

$[p \wedge q]$

Disjunção (ou): \vee

Expressão: Sócrates é homem ou é mortal.

$[p \vee q]$

Implicação (condição suficiente): \rightarrow

Expressão: Se Sócrates é homem então é mortal.

$[p \rightarrow q]$

Equivalência (condição necessária) : \leftrightarrow

Expressão: Sócrates é mortal, se e somente se, é homem. $[q \leftrightarrow p]$

Lógica Proposicional

Fórmulas bem formadas (wff - well formed forms)

Regras:

1. Toda proposição é uma fórmula.
2. Se A é uma fórmula, então sua negação ($\sim A$) também é.
3. Se A e B são fórmulas, então também são fórmulas:
a conjunção ($A \wedge B$), a disjunção ($A \vee B$),
a implicação ($A \rightarrow B$) e a equivalência ($A \leftrightarrow B$).

* As fórmulas bem formadas (wff) são obtidas a partir dessas regras.

Exemplos:

1. Está quente.
2. Não está quente.
3. Está quente e está ensolarado.
Se está ensolarado então está quente.
Não está quente mas está ensolarado.
- . Está quente ensolarado.
- . Está quente e ensolarado ou chovendo.

Fórmula: Q

Fórmula: $\sim Q$

Fórmula: $Q \wedge E$

Fórmula: $E \rightarrow Q$

Fórmula: $\sim Q \wedge E$

Fórmula: $Q \wedge E$ (conectivo?)

Fórmula: $Q \wedge E \vee C$ (parênteses?)

Lógica Proposicional

Exemplos

Sentenças:

- (a) É verão. (c) Faz frio. (e) Neva.
(b) É inverno. (d) Faz calor. (f) Chove.

Expressão na notação de cálculo proposicional:

1. É inverno.	b
2. Não é inverno.	$\sim b$
3. É verão ou é inverno.	$a \vee b$
4. É inverno mas faz calor.	$b \wedge d$
5. Não é o caso de fazer frio.	$\sim c$
6. Se é verão então faz calor.	$a \rightarrow d$
7. Não é o caso de fazer frio então é verão.	$\sim c \rightarrow a$
8. Neva se e somente se é inverno e faz frio.	$e \leftrightarrow (b \wedge c)$
9. Se chove e não faz calor então é inverno.	$(f \wedge \sim d) \rightarrow b$
10. Se neva então é inverno e não chove.	$e \rightarrow (b \wedge \sim f)$
11. Ou faz calor, ou faz frio e chove.	$d \vee (c \wedge f)$
12. Ou chove e faz frio, ou não chove mas neva.	$(f \wedge c) \vee (\sim f \wedge e)$

Lógica Proposicional

Exercícios

Formalizar os enunciados:

1. Pancho contem pão e salsicha.
2. Pancho não contem milho e ervilha.
3. Hoje é segunda-feira ou hoje é terça-feira.
4. Hoje é segunda-feira se hoje não é terça-feira.
5. A comida é deliciosa, porém a porção é pequena.
6. Para de fumar, caso contrário morrerás de câncer.
7. Embora não esteja gelada, a cerveja é muito boa.
8. A menos que saias, essa discussão não se encerrará.
9. Não é verdade que essa música acalma ou agita.
10. Dirigir rápido e sem atenção é perigoso,
assim como o é dirigir sem cinto de segurança.
11. Ela está feliz com o presente, embora
preferisse sair para jantar ou ter uma festa.
12. Se esse assunto fosse tratado em outro momento,
os alunos estariam mais dispostos e participativos.

Lógica Proposicional

Exercícios

Formalizar os enunciados:

1. Pancho contem pão e salsicha.	$P \wedge S$
2. Pancho não contem milho e ervilha.	$\sim M \wedge \sim E$
3. Hoje é segunda-feira ou hoje é terça-feira.	$S \vee T$
4. Hoje é segunda-feira se hoje não é terça-feira.	$\sim T \rightarrow S$
5. A comida é deliciosa, porém a porção é pequena.	$D \wedge P$
6. Para de fumar, caso contrário morrerás de câncer.	$F \vee C$
7. Embora não esteja gelada, a cerveja é muito boa.	$\sim G \wedge B$
8. A menos que saias, essa discussão não se encerrará.	$S \vee \sim E$
9. Não é verdade que essa música acalma ou agita.	$\sim (C \vee A)$
10. Dirigir rápido e sem atenção é perigoso, assim como o é dirigir sem cinto de segurança.	$(R \wedge A) \wedge C$
11. Ela está feliz com o presente, embora preferisse sair para jantar ou ter uma festa.	$P \wedge (J \vee F)$
12. Se esse assunto fosse tratado em outro momento, os alunos estariam mais dispostos e participativos.	$M \rightarrow (D \wedge P)$

Lógica Proposicional

Exercícios

Formalizar os enunciados:

13. Toda vez que vou viajar, chove.
14. Supondo que chova, planeja voltar e ficar por aqui.
15. Teus parentes virão, se ganhares na loteria.
16. Se ganhar pouco ou gastar muito, então vai falir.
17. Não é o caso de reprovar se estás dormindo agora.
18. É aprovado, se e somente se, tiver frequência e nota.
19. Pode sair e ter presença, desde que termine a tarefa.
20. Nem a Honda e nem a Toyota são brasileiras.
21. Não é verdade que Honda e Toyota são brasileiras.
22. Considerando que eu não conclua o curso,
eu vou abrir um negócio ou fazer intercâmbio.
23. Para meu negócio ter sucesso é condição necessária
desenvolver a ideia e conseguir um patrocinador.
24. A lógica é fácil e interessante, a menos que
eu esteja enganado ou o professor esteja mentindo.

Lógica Proposicional

Exercícios

Formalizar os enunciados:

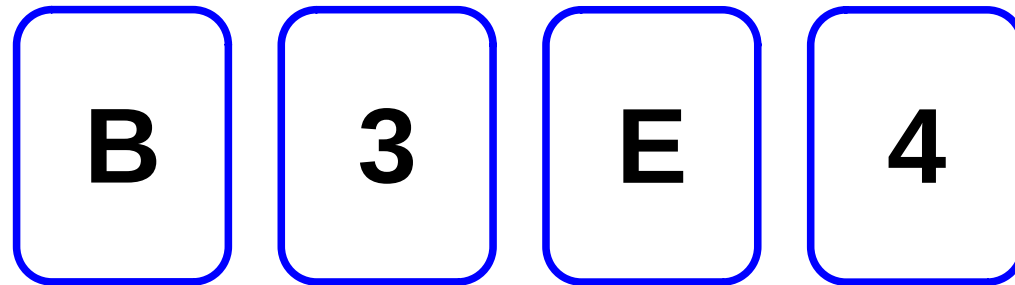
- | | |
|--|----------------------------------|
| 13. Toda vez que vou viajar, chove. | $V \rightarrow C$ |
| 14. Supondo que chova, planeja voltar e ficar por aqui. | $C \rightarrow (V \wedge F)$ |
| 15. Teus parentes virão, se ganhares na loteria. | $L \rightarrow P$ |
| 16. Se ganhar pouco ou gastar muito, então vai falir. | $(P \vee M) \rightarrow F$ |
| 17. Não é o caso de reprovar se estás dormindo agora. | $\sim (D \rightarrow R)$ |
| 18. É aprovado, se e somente se, tiver frequência e nota. | $(F \wedge N) \leftrightarrow A$ |
| 19. Pode sair e ter presença, desde que termine a tarefa. | $T \rightarrow (S \wedge P)$ |
| 20. Nem a Honda e nem a Toyota são brasileiras. | $\sim H \wedge \sim T$ |
| 21. Não é verdade que Honda e Toyota são brasileiras. | $\sim (H \wedge T)$ |
| 22. Considerando que eu não conclua o curso,
eu vou abrir um negócio ou fazer intercâmbio. | $\sim C \rightarrow (N \vee I)$ |
| 23. Para meu negócio ter sucesso é condição necessária
desenvolver a ideia e conseguir um patrocinador. | $S \leftrightarrow (I \wedge P)$ |
| 24. A lógica é fácil e interessante, a menos que
eu esteja enganado ou o professor esteja mentindo. | $(F \wedge I) \vee (E \vee M)$ |

Desafio

Um monte de cartas possuem número em um dos lados e uma letra em outro. Alguém conferiu as cartas e fez uma afirmação: “Descobri um padrão nas cartas. Se há uma vogal em um dos lados, há um número par no outro lado.”

Essa afirmação pode ser verdadeira ou falsa.

Quatro cartas lhe são mostradas:



A tarefa é virar somente as cartas que têm possibilidade de tornar **falsa** a afirmação acima.

Quais cartas você deve virar (ou não virar nenhuma)?

Lógica Proposicional

Tabelas Verdade

Conjunção (e): \wedge

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Negação (não): \neg

p	$\neg p$
V	F
F	V

Disjunção (ou): \vee

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ou exclusivo: \oplus

p	q	$(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Na *disjunção exclusiva*,
a verdade de uma exclui a verdade da outra.

Lógica Proposicional

Tabelas Verdade

Implicação

(se): \rightarrow

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A implicação estabelece uma condição que assegurar a ocorrência do consequente.

Equivalência

(se e somente se) : \leftrightarrow

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Bi-Implicação

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$		
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Lógica Proposicional

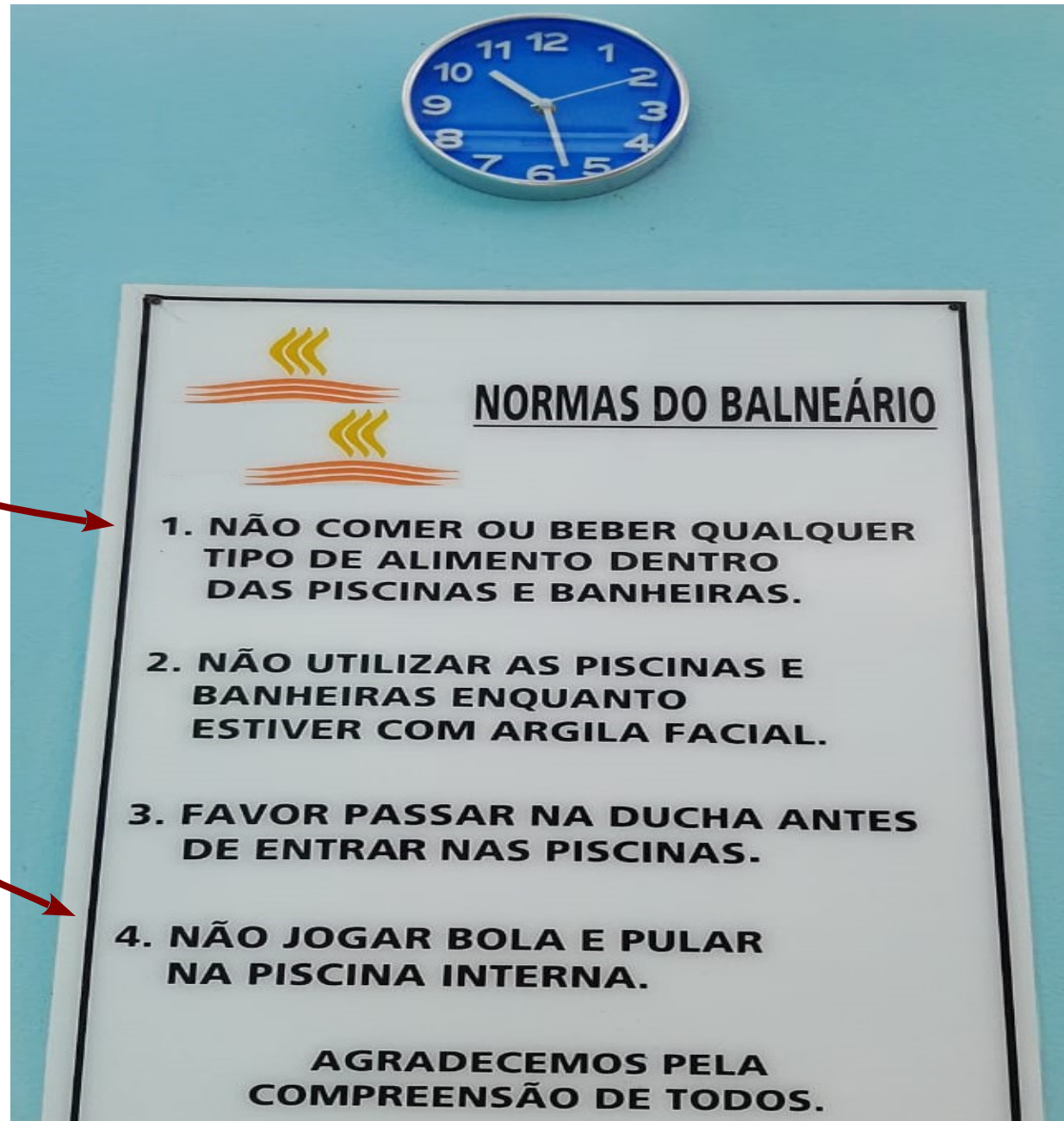
Exercícios

Construir as tabelas verdade:

1. Embora não esteja gelada, a cerveja é muito boa. $\sim G \wedge B$
2. A menos que saias, essa discussão não se encerrará. $S \vee \sim E$
3. Podes sair e ter presença, desde que termine a tarefa. $T \rightarrow (S \wedge P)$
4. É aprovado, se e somente se, tiver frequência e nota. $(F \wedge N) \leftrightarrow A$
5. Se esse assunto fosse tratado em outro momento, os alunos estariam mais dispostos e participativos. $M \rightarrow (D \wedge P)$
6. A lógica é fácil e interessante, a menos que eu esteja enganado ou o professor esteja mentindo. $(F \wedge I) \vee (E \vee M)$
7. Considerando que eu não conclua o curso, eu vou abrir um negócio ou fazer intercâmbio. $\sim C \rightarrow (N \vee I)$
8. Meu negócio terá sucesso, se e somente se, desenvolver a ideia e conseguir um patrocinador. $S \leftrightarrow (I \wedge P)$

Em um balneário...

Vamos
interpretar
essas normas?



Em um balneário...

Analisando a primeira norma...

... pela negação da disjunção (OU)?

... ou pela disjunção das condições negadas
(não comer; não beber)?

c	b	$\sim(c \vee b)$	$\sim c \vee \sim b$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	V

É permitido?

E analisando a quarta norma...

... pela negação da conjunção (E)?

... ou pela conjunção das condições negadas
(não jogar; não pular)?

j	p	$\sim(j \wedge p)$	$\sim j \wedge \sim p$
V	V	F	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	V

É permitido?

Lógica Proposicional

Condições Suficientes e Necessárias

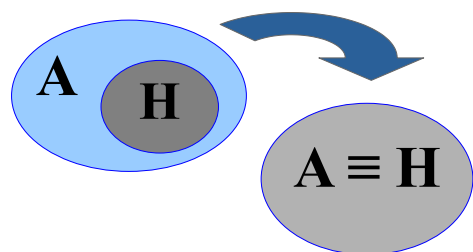
Condição Suficiente

é a condição que satisfaz o requisito mínimo suficiente para assegurar a ocorrência efetiva de um outro evento.

(... se H então A ...)

Condição Necessária

é uma condição requerida (obrigatória) para que um outro evento possa ocorrer. (... H se e somente se A ...)



Ex: A vida humana é condição suficiente para assegurar a existência de água.

Nesta sentença, as condições são necessárias, equivalendo a vida humana com a existência de água.

Situação:

Se comeres bem, então ganharás sorvete.

Analisar a argumentação no caso da criança não comer bem.



Lógica Proposicional

Equivalências Lógicas

Dupla Negação

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

Implicação Material

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Negação

$$p \vee \sim p \equiv V$$

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

Idempotência

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

Comutatividade

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Identidade

$$p \vee F \equiv p$$

$$p \wedge V \equiv p$$

Absorção

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

Associatividade

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

Limite Universal

$$p \vee V \equiv V$$

$$p \wedge F \equiv F$$

De Morgan

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Distributividade

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Lógica Proposicional

Um exemplo

Três meninas, Bia, Mariana e Joanna, estão brincando. Sabe-se que algumas são irmãs. Algumas pessoas, conversando sobre as meninas, fizeram as seguintes afirmações, aceitas como verdadeiras por todos:

- (1) Bia e Mariana não são irmãs.
- (2) Bia não tem irmã, ou Bia e Joanna são irmãs.
- (3) Mariana e Joanna são irmãs.

É possível chegar a alguma conclusão?

Lógica Proposicional

Um exemplo

Afirmações:

- (1) Bia e Mariana não são irmãs.
- (2) Bia não tem irmã, ou Bia e Joanna são irmãs.
- (3) Mariana e Joanna são irmãs.

Proposições:

- (B) Bia tem irmã.
- (M) Mariana tem irmã.
- (J) Joanna tem irmã.

B	M	J	(1) $\sim(B \wedge M)$	(2) $\sim B \vee (B \wedge J)$	(3) $(M \wedge J)$	(1) \wedge (2) \wedge (3)
V	V	V	F (V)	V (F) + (V)	V	F
V	V	F	F (V)	F (F) + (F)	F	F
V	F	V	V (F)	V (F) + (V)	F	F
V	F	F	V (F)	F (F) + (F)	F	F
F	V	V	V (F)	V (V) + (F)	V	V
F	V	F	V (F)	V (V) + (F)	F	F
F	F	V	V (F)	V (V) + (F)	F	F
F	F	F	V (F)	V (V) + (F)	F	F

Lógica Proposicional

Um exemplo

Um outra pessoa chega
e faz a seguinte afirmação:

(4) A Joanna não tem irmã.

Como ficaria a conclusão?

Lógica Proposicional

Um exemplo

Um outra pessoa chega
e faz a seguinte afirmação:

(4) A Joanna não tem irmã.

Como ficaria a conclusão?

B	M	J	$(1) \wedge (2) \wedge (3)$	$^{(4)} \sim J$	$(...) \wedge (4)$
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F

A afirmação é contraditória, ou seja, ...
... não é possível que todas as afirmações sejam verdadeiras.

Lógica Proposicional

Proposições Verofuncionais

Proposições Contingentes

A verdade ou falsidade não se baseia na fórmula lógica.

A proposição pode ser verdade ou falsa, de maneira que é necessário “investigar o mundo”.

Proposições Não Contingentes

A verdade ou falsidade se baseia apenas na fórmula lógica.

A proposição é verdadeira ou é falsa, independente do conteúdo.

» **Tautologias**

» **Autocontradições**

Lógica Proposicional

Proposições Verofuncionais

Tautologia

A proposição é necessariamente verdadeira devido a sua formulação lógica.

Ex: Hoje é sexta-feira ou hoje não é sexta-feira.

Vou comer ou beber, ou não beber e nem comer.

$$S \vee \sim S$$

$$(C \vee B) \vee (\sim B \wedge \sim C)$$

Autocontradição

A proposição é necessariamente falsa devido a sua formulação lógica.

Ex: Ontem foi domingo e ontem não foi domingo.

Vou comer e beber, mas não beber ou não comer.

$$D \wedge \sim D$$

$$(C \wedge B) \wedge (\sim B \vee \sim C)$$

Lógica Proposicional

Proposições Verofuncionais

Proposições Contraditórias

Os valores verdades são opostos em toda tabela verdade.

Ex: (P1) Hoje não chove ou amanhã faz calor.

$$\sim C \vee Q$$

(P2) Hoje chove e amanhã não faz calor.

$$C \wedge \sim Q$$

Proposições Logicamente Equivalentes

Os valores verdades são iguais em toda tabela verdade.

Ex: (P1) Não é verdade que chove ou faz calor.

$$\sim (C \vee Q)$$

(P2) Não está chovendo e não está calor.

$$\sim C \wedge \sim Q$$

Ex: (P1) Se não faz calor então não chove.

$$\sim Q \rightarrow \sim C$$

(P2) Sempre que chove acaba fazendo calor.

$$C \rightarrow Q$$

Lógica Proposicional

Proposições Verofuncionais

Proposições Consistentes

Ao menos um valor verdade é verdadeiro em ambas tabelas.

Ex: (P1) Vou abrir um negócio ou vou viajar.

$$N \vee V$$

(P2) Vou abrir um negócio mas não vou viajar.

$$N \wedge \sim V$$

Proposições Inconsistentes

Não há nenhum valor verdade verdadeiro em ambas tabelas.

Ex: (P1) Vou abrir um negócio e não vou viajar.

$$N \wedge \sim V$$

(P2) Somente viajo se, e somente se, abrir o negócio.

$$N \leftrightarrow V$$

Ex: (P1) Se investir então viajo e abro um negócio.

$$I \rightarrow V \wedge N$$

(P2) Invisto e não viajo, ou invisto e não abro um negócio.

$$(I \wedge \sim V) \vee (I \wedge \sim N)$$

Lógica Proposicional

Desafio

Três meninos, Paulo, Roberto e Silvio, foram acusados de mentir em um situação. O investigador, responsável por apurar quem mentiu, conversou com cada um em separado. Eles afirmaram o seguinte:

Paulo: *Eu não menti.*

Roberto: *Paulo ou Silvio mentiram, mas eu não menti.*

Silvio: *Se eu não menti, então Paulo também não mentiu.*

Qual a conclusão do investigador?
Considerando que todos falam a verdade...

Lógica Proposicional

Desafio

Proposições: (P) Paulo mentiu.
(R) Roberto mentiu.
(S) Silvio mentiu.

Afirmações: (P) Paulo não mentiu.
(R) Paulo ou Silvio mentiram, e Roberto não mentiu.
(S) Se Silvio não mentiu, então Paulo não mentiu.

P	R	S	(P) $\sim P$	(R) $(P \vee S) \wedge \sim R$	(S) $(\sim S \rightarrow \sim P)$
V	V	V	F	(V) F (F)	(F) V (F)
V	V	F	F	(V) F (F)	(V) F (F)
V	F	V	F	(V) V (V)	(F) V (F)
V	F	F	F	(V) V (V)	(V) F (F)
F	V	V	V	(V) F (F)	(F) V (V)
F	V	F	V	(F) F (F)	(V) V (V)
F	F	V	V	(V) V (V)	(F) V (V)
F	F	F	V	(F) F (V)	(V) V (V)

Situação que
ninguém fala
a verdade.

Todos falam
a verdade.