Equipo 7

Integrantes

- Camacho Herrera Jesús Salvador
- Flores Solis Eduardo Elías
- Garcia Robles Viviana
- Mendoza López Luis Ángel

Índice

1. Ejercicio: Propiedad de pérdida de memoria

$$\textbf{Demostrar que si } \mathbf{X} \sim \exp(\lambda)$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{t} + \mathbf{s} \mid \mathbf{X} > \mathbf{t}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{s}) = \mathbf{e}^{-\lambda \mathbf{s}} \quad \forall \mathbf{s}, \mathbf{t} \geq \mathbf{0}.$$

Demostración:

Por definición sabemos que

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s \cap X > t)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

Además note que,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > t + s \quad \text{y} \quad X(\omega) > t\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > t + s\}$$

Así que,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > t + s \cap X > t) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > t + s \quad \text{y} \quad X(\omega) > t\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > t + s\})\end{aligned}$$

De modo que,

$$\mathbb{P}(X > t + s \cap X > t) = \mathbb{P}(X > t + s)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda(t)}} \\ &= e^{-\lambda(s)} \\ &= \mathbb{P}(X > s)\end{aligned}$$

$\blacksquare$

2. Ejercicio: Propiedad de la Varianza

$$\mathbf{Demostrar\ que\ Var(aX+b)=a^2Var(X)}$$

Demostración:

Recordemos ciertas propiedades de la varianza y esperanza de una v.a. X con $a, b \in \mathbb{R}$:

- $Var(Y) = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y])^2\right]$
- $\mathbb{E}(b) = b$
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$

Entonces, considerando a $Y = aX + b$ tendremos que

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= Var(aX+b) \\
&= Var\left[(aX+b) - \mathbb{E}\left(aX+b\right)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[(aX+b) - \mathbb{E}(aX) - \mathbb{E}(b)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[aX + b - a\mathbb{E}(X) - b\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[aX - a\mathbb{E}(X)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[a\left(X - \mathbb{E}(X)\right)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[a^2\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}[a^2]\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] \\
&= a^2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] \\
&= a^2 Var(X)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

■