

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DAMAT  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**EDUARDO FURLAN**

**INFINITOS DE CANTOR: CARDINALIDADE, DIMENSÃO E A  
ESTRUTURA DOS NÚMEROS ORDINAIS**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**PATO BRANCO  
2025**

EDUARDO FURLAN

**INFINITOS DE CANTOR: CARDINALIDADE, DIMENSÃO E A  
ESTRUTURA DOS NÚMEROS ORDINAIS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao **Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná**, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.

Orientador: Prof. Dr. Ivan Italo Gonzales Gargate  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

PATO BRANCO  
2025

Altere este texto inserindo a dedicatória do seu trabalho.

## **AGRADECIMENTOS**

Edite e coloque aqui os agradecimentos às pessoas e/ou instituições que contribuíram para a realização do trabalho.

É obrigatório o agradecimento às instituições de fomento à pesquisa que financiaram total ou parcialmente o trabalho, inclusive no que diz respeito à concessão de bolsas.

*Um barulho no quarto  
Um susto, um rato  
Da minha cama eu avisto  
Livros, teias, traças  
O canto negro de um pássaro*

*(Rogério Skylab, "O Corvo")*

## RESUMO

FURLAN, Eduardo. Infinitos de Cantor: Cardinalidade, Dimensão e a Estrutura dos Números Ordinais. 2025. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso – **Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná**. Pato Branco, 2025.

O Resumo é um elemento obrigatório em tese, dissertação, monografia e TCC, constituído de uma seqüência de frases concisas e objetivas, fornecendo uma visão rápida e clara do conteúdo do estudo. O texto deverá conter no máximo 500 palavras e ser antecedido pela referência do estudo. Também, não deve conter citações. O resumo deve ser redigido em parágrafo único, espaçamento simples e seguido das palavras representativas do conteúdo do estudo, isto é, palavras-chave, em número de três a cinco, separadas entre si por ponto e finalizadas também por ponto. Usar o verbo na terceira pessoa do singular, com linguagem imprecisa, bem como fazer uso, preferencialmente, da voz ativa. Texto contendo um único parágrafo.

**Palavras-chave:** Palavra. Segunda Palavra. Outra palavra.

## ABSTRACT

FURLAN, Eduardo. Cantor's Infinites: Cardinality, Dimension, and the Structure of Ordinal Numbers. 2025. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso – **Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná**. Pato Branco, 2025.

Elemento obrigatório em tese, dissertação, monografia e TCC. É a versão do resumo em português para o idioma de divulgação internacional. Deve ser antecedido pela referência do estudo. Deve aparecer em folha distinta do resumo em língua portuguesa e seguido das palavras representativas do conteúdo do estudo, isto é, das palavras-chave. Sugere-se a elaboração do resumo (Abstract) e das palavras-chave (Keywords) em inglês; para resumos em outras línguas, que não o inglês, consultar o departamento / curso de origem.

**Keywords:** Word. Second Word. Another word.

## **LISTA DE FIGURAS**

Figura 1 – Exemplo de Figura . . . . .	17
--	----

## **LISTA DE QUADROS**

Quadro 1 – Cronograma de desenvolvimento do TCC . . . . .	14
Quadro 2 – Exemplo de Quadro . . . . .	18

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Resultado dos testes . . . . .	18
---	----

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

HC            Hipótese do Contínuo

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathfrak{c}$	Cardinalidade do contínuo
$\mathcal{P}(x)$	Conjunto das partes de $x$
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\supseteq$	Contém
$\neq$	Diferente de
$\subseteq$	Está contido em
$\subsetneq$	Está contido em, mas não igual
$\Rightarrow$	Implica
$\cap$	Interseção
$\aleph$	Letra grega aleph
$>$	Maior que
$\geq$	Maior que ou igual
$<$	Menor que
$\leq$	Menor que ou igual
$\aleph_n$	$n$ -ésima cardinalidade
$\in$	Pertence
$\cup$	União

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS</b>	<b>3</b>
<b>2.1</b>	<b>Axiomas da Teoria dos Conjuntos</b>	<b>3</b>
<b>2.2</b>	<b>Conjunto dos Números Naturais</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>O CONCEITO DE CARDINALIDADE</b>	<b>6</b>
<b>3.1</b>	<b>Conjuntos finitos</b>	<b>6</b>
<b>3.2</b>	<b>Conjuntos infinitos</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>A DESCOBERTA DOS INFINITOS</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>A HIPÓTESE DO CONTÍNUO</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>O INFINITO CARDINAL E A DIMENSÃO</b>	<b>9</b>
<b>6.1</b>	<b>Teoremas de Comparação e Aritmética Cardinal</b>	<b>9</b>
<b>6.2</b>	<b>A Independência entre Dimensão e Cardinalidade</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>NÚMEROS ORDINAIS TRANSFINITOS</b>	<b>10</b>
<b>8</b>	<b>O AXIOMA DA ESCOLHA E O PARADOXO DE BANACH-TARSKI</b>	<b>11</b>
<b>9</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>12</b>
<b>9.1</b>	<b>Delineamento da Pesquisa</b>	<b>12</b>
<b>9.1.1</b>	<b>Quanto à Natureza</b>	<b>12</b>
<b>9.1.2</b>	<b>Quanto aos Objetivos</b>	<b>12</b>
<b>9.1.3</b>	<b>Quanto à Abordagem</b>	<b>13</b>
<b>9.1.4</b>	<b>Quanto aos Procedimentos Técnicos</b>	<b>13</b>
<b>9.2</b>	<b>Coleta e Tratamento dos Dados</b>	<b>13</b>
<b>9.3</b>	<b>Cronograma</b>	<b>14</b>
<b>10</b>	<b>ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS</b>	<b>15</b>
<b>11</b>	<b>SOBRE AS ILUSTRAÇÕES</b>	<b>16</b>
<b>12</b>	<b>FIGURAS</b>	<b>17</b>
<b>13</b>	<b>QUADROS E TABELAS</b>	<b>18</b>
<b>14</b>	<b>EQUAÇÕES</b>	<b>19</b>

15	<b>ALGORITMOS</b>	20
16	<b>SOBRE AS LISTAS</b>	21
17	<b>SOBRE AS CITAÇÕES E CHAMADAS DE REFERÊNCIAS</b>	22
18	<b>CITAÇÕES INDIRETAS</b>	23
19	<b>CITAÇÕES DIRETAS</b>	24
20	<b>DETALHES SOBRE AS CHAMADAS DE REFERÊNCIAS</b>	25
21	<b>SOBRE AS REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	26
22	<b>NOTAS DE RODAPÉ</b>	27
23	<b>CONCLUSÃO</b>	28
23.1	<b>TRABALHOS FUTUROS</b>	28
23.2	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	28
	<b>REFERÊNCIAS</b>	29
	<b>APÊNDICES</b>	30
	<b>APÊNDICE A – NOME DO APÊNDICE</b>	31
	<b>APÊNDICE B – NOME DO OUTRO APÊNDICE</b>	32
	<b>ANEXOS</b>	33
	<b>ANEXO A – NOME DO ANEXO</b>	34
	<b>ANEXO B – NOME DO OUTRO ANEXO</b>	35

## 1 INTRODUÇÃO

Introduzida por Georg Cantor no século XIX como parte de sua Teoria dos Conjuntos, a Teoria da Cardinalidade representa um dos pilares essenciais da matemática moderna. Cantor propôs uma maneira revolucionária de medir e comparar o tamanho de conjuntos, incluindo os infinitos, o que o levou ao resultado contraintuitivo de que existem infinitos de diferentes tamanhos. Embora suas ideias tenham sido inicialmente recebidas com grande ceticismo e hostilidade por muitos matemáticos da época, hoje a Teoria dos Conjuntos, em particular, o conceito de cardinalidade, são fundamentais, fornecendo a linguagem e a estrutura que sustentam praticamente todas as áreas da matemática, por exemplo, na Análise Real, toda a construção rigorosa dos números reais e as próprias definições de limite e continuidade dependem de noções de conjuntos. A distinção entre conjuntos numeráveis e não numeráveis é crucial para entender a estrutura do contínuo. Da mesma forma, a Topologia, que estuda as propriedades dos espaços topológicos, é inteiramente fundamentada na linguagem dos conjuntos, a própria definição de um espaço topológico é baseada em uma coleção de subconjuntos (os "conjuntos abertos").

A escolha deste tema se justifica pelo interesse do autor nos fundamentos da matemática, especialmente nos conceitos relacionados ao infinito. A compreensão das diferentes formas de infinito e dos princípios de cardinalidade é essencial para uma formação matemática sólida e aprofundada. Além disso, o domínio deste conteúdo é um diferencial significativo para o acompanhamento de disciplinas teóricas em programas de mestrado e doutorado em matemática.

O objetivo geral deste trabalho é apresentar os fundamentos e as propriedades dos números cardinais na Teoria dos Conjuntos. Busca-se, com isso, auxiliar estudantes de matemática que planejam seguir carreira acadêmica, oferecendo uma sequência clara e organizada do conteúdo, com foco em Cardinalidade. Para alcançar este objetivo principal, foram delineados os seguintes objetivos específicos:

1. Diferenciar conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis, identificando suas características e propriedades fundamentais.
2. Demonstrar que a dimensão de um espaço não está relacionada ao tamanho (cardinalidade) dos conjuntos envolvidos.
3. Expor o conceito de números ordinais e seu papel na Teoria dos Conjuntos, distinguindo-os dos números cardinais.

Para atingir tais objetivos, o trabalho explorará os conceitos de Cardinalidade e Números Cardinais, a diferença entre Cardinalidade e Dimensão, e os Números Ordinais. A discussão se aprofundará em tópicos avançados e suas consequências, como o Axioma da Escolha, o Paradoxo de Banach-Tarski e os Números Transfinitos de

Cantor.

## 2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS

Neste capítulo, estabelecem-se as bases formais sobre as quais todo o trabalho se sustenta. A Teoria dos Conjuntos fornece a linguagem universal da matemática moderna, mas sua construção requer rigor para evitar contradições. Serão apresentados os axiomas essenciais que definem o comportamento dos conjuntos e suas operações elementares, além da construção axiomática dos números naturais via Axiomas de Peano, que servirá de ponto de partida para a aritmética cardinal.

### 2.1 Axiomas da Teoria dos Conjuntos

A base de toda a matemática moderna pode ser construída sobre o conceito de "conjunto" (que também chamaremos de "coleção", ou "família"). Halmos (2014) menciona os axiomas a seguir.

**Axioma 1** (Axioma da Extensão). *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, ambos possuem os mesmos elementos.*

Se  $A$  e  $B$  são conjuntos e todo elemento de  $A$  está em  $B$  dizemos que  $A$  é um subconjunto de  $B$ ,  $A$  está contido em  $B$ , ou que  $B$  contém  $A$ , e escrevemos  $A \subseteq B$  e  $B \supseteq A$ , respectivamente. Disso temos que  $A = B \iff A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ . Quando temos  $A \subseteq B$  e  $A \neq B$  escrevemos  $A \subsetneq B$  e dizemos que  $A$  é um subconjunto próprio de  $B$ .

**Exemplo 1.** Os conjuntos  $A = \{1,2\}$  e  $B = \{2,1\}$  são iguais, pois  $1 \in B$  e  $2 \in B$ , logo  $A \subseteq B$  e  $2 \in A$  e  $1 \in A$ , logo  $B \subseteq A$ .

**Axioma 2** (Axioma da Especificação). *Para todo conjunto  $A$  e toda condição  $S(x)$ , existe um conjunto  $B$  em que seus elementos são todos os  $x \in A$  tal que a condição  $S(x)$  é verdadeira. Escrevemos  $B$  como*

$$B = \{x \in A : S(x)\}.$$

**Exemplo 2.** Seja  $A = \{1,2,3,4,5\}$  e  $S(x)$  a condição " $x$  é um número ímpar"<sup>1</sup>, então o conjunto  $B$  é:

$$B = \{x \in \{1,2,3,4,5\} : x \text{ é um número ímpar.}\} = \{1,3,5\}.$$

**Axioma 3** (Axioma do Par). *Para quaisquer dois conjuntos  $A$  e  $B$ , existe um conjunto  $C$  tal que  $A \in C$  e  $B \in C$ .*

---

<sup>1</sup>Note que, neste momento, um número "ímpar" não está definido, mas para fins de simplicidade trataremos como se estivesse.

**Exemplo 3.** Sejam  $A = \varphi$  e  $B = \{\varphi\}$  então podemos ter  $C$  como  $C = \{\varphi, \{\varphi\}\}$ , ou também,  $C = \{\varphi, \{\varphi\}, \emptyset\}$ .

**Definição 1** (Par Ordenado). O par ordenado de  $a$  e  $b$  onde a primeira coordenada é  $a$  e a segunda coordenada é  $b$  é o conjunto  $(a, b)$  definido por:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

**Exemplo 4.** O par ordenado  $(7, 3)$  é o conjunto  $\{\{3, 7\}, \{7\}\}$ .

**Definição 2** (Produto Cartesiano). O produto cartesiano de  $A$  e  $B$  é o conjunto  $A \times B$  onde

$$A \times B = \{x : x = (a, b) \text{ para algum } a \in A \text{ e para algum } b \in B\}.$$

**Exemplo 5.** O produto cartesiano de  $A = \{4, 8\}$  com  $B = \{6\}$  é o conjunto

$$A \times B = \{(4, 6), (8, 6)\} = \{\{\{4\}, \{4, 6\}\}, \{\{8\}, \{8, 6\}\}\}.$$

**Axioma 4** (Axioma das Uniões). *Para qualquer coleção de conjuntos, existe um conjunto que contém todos os elementos que pertencem a pelo menos um conjunto da coleção dada.*

Seja  $C$  essa coleção de conjuntos, e  $U$  o conjunto referido no Axioma 4, chamamos  $U$  de **união** da coleção  $C$  de conjuntos e escrevemos como

$$\bigcup C, \quad \bigcup \{X : X \in C\} \quad \text{ou} \quad \bigcup_{X \in C} C.$$

**Exemplo 6.** Seja  $C = \{\{1, 2\}, \{\{2\}, 3, 4\}, \{4, 5\}\}$  então

$$\bigcup_{x \in C} C = \{1, 2, \{2\}, 3, 4, 5\}.$$

**Definição 3** (Interseção). Se  $A$  e  $B$  são conjuntos a interseção de  $A$  e  $B$  é o conjunto  $A \cap B$  definido por  $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ .

De forma análoga à união, chamamos um conjunto  $V$  de **interseção** de  $C$  e escrevemos como

$$\bigcap C, \quad \bigcap \{X : X \in C\} \quad \text{ou} \quad \bigcap_{X \in C} C.$$

**Exemplo 7.** Seja  $C$  o mesmo conjunto do Exemplo 6 então

$$\bigcap_{x \in C} C = \{4\}.$$

**Axioma 5** (Axioma da Potência). *Para todo conjunto existe uma coleção de conjuntos que contém (como elementos) todos os subconjuntos do conjunto dado.*

Em outras palavras, se  $A$  é um conjunto então existe um conjunto  $\mathcal{P}(A)$  tal que se  $X \subseteq A$  então  $X \in \mathcal{P}(A)$ . Note que o conjunto estipulado pode conter mais elementos que apenas os subconjuntos de  $A$ , para remediar isso, usamos o Axioma da Especificação e definimos  $\mathcal{P}(A)$  como  $\{X : X \subseteq A\}$ , e chamamos de "**conjunto das partes** de  $A$ ".

**Exemplo 8.** Seja  $A = \{1,2,3\}$  então

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

## 2.2 Conjunto dos Números Naturais

O ponto de partida para a construção dos números é o conjunto dos números naturais,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , caracterizado pelos axiomas de Peano:

**Axioma 6** (Primeiro Axioma de Peano). *Existe uma função injetiva  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Chamamos a imagem de  $s(n)$  de sucessor de  $n$ .*

**Axioma 7** (Segundo Axioma de Peano). *Existe um único número natural  $1 \in \mathbb{N}$  tal que  $1 \neq s(n)$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Axioma 8** (Terceiro Axioma de Peano). *Se em um conjunto  $X \subseteq \mathbb{N}$ ,  $1 \in X$  e  $s(X) \subseteq X^2$ , então  $X = \mathbb{N}$ .*

Esses axiomas estabelecem a existência de um **primeiro elemento** (que chamamos de 1), uma função "sucessor" injetiva, e o **princípio da indução**, que garante que qualquer número natural pode ser alcançado a partir do 1 por sucessivas aplicações da função sucessor.

---

<sup>2</sup> $n \in X \implies s(n) \in X$ .

### 3 O CONCEITO DE CARDINALIDADE

A partir das definições elementares de conjunto, este capítulo formaliza o conceito intuitivo de tamanho. Serão discutidas as definições rigorosas de conjuntos finitos e infinitos, contrastando as abordagens de autores clássicos como Halmos e Lima. Além disso, estabelecem-se os critérios matemáticos para comparar a magnitude de dois conjuntos através da análise de funções injetoras e bijetoras, fundamentando a noção de equipotência.

#### 3.1 Conjuntos finitos

A noção intuitiva de tamanho de um conjunto é formalizada matematicamente pelo conceito de cardinalidade. [Lima \(2006, p. 3\)](#) define um conjunto  $X$  como **finito** quando  $X$  é vazio, ou existem um  $n \in \mathbb{N}$  e uma bijeção  $f : I_n \rightarrow X$  onde  $I_n = \{p \in \mathbb{N} : p \leq n\}$ . Já [Halmos \(2014, p. 53\)](#) define um conjunto finito como um conjunto equivalente a um número<sup>1</sup> natural, onde equivalência significa uma bijeção. Uma propriedade fundamental dos conjuntos finitos é que não existe uma bijeção entre o conjunto e um de seus subconjuntos próprios.

**Exemplo 9.** O conjunto  $X = \{\text{primeiro}, \text{segundo}, \text{terceiro}\}$  é finito. Para verificar basta encontrar um  $n \in \mathbb{N}$  e uma bijeção  $f : I_n \rightarrow X$ , de fato, tome  $n = 3$ , e  $f : \{1,2,3\} \rightarrow \{\text{primeiro}, \text{segundo}, \text{terceiro}\}$  tal que

$$\begin{aligned}f(1) &\longrightarrow \text{primeiro} \\f(2) &\longrightarrow \text{segundo} \\f(3) &\longrightarrow \text{terceiro}\end{aligned}$$

#### 3.2 Conjuntos infinitos

Um conjunto é dito **infinito** quando não é finito. De forma equivalente, um conjunto é infinito se, e somente se, existe uma bijeção entre o conjunto e um de seus subconjuntos próprios.

Para qualquer conjunto  $X$  escrevemos a cardinalidade de  $X$  como  $|X|$ . Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$  dizemos que  $|X| \leq |Y|$  quando existe uma função injetiva de  $X$  em  $Y$ . Dizemos que  $|X| = |Y|$  quando existe uma bijeção entre  $X$  e  $Y$ .

---

<sup>1</sup>Na Teoria de Conjuntos números são conjuntos.  $0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, n = \{0,1,2,\dots,n-1\}$ .

## 4 A DESCOBERTA DOS INFINITOS

Com as ferramentas de comparação cardinal estabelecidas, este capítulo explora a revolucionária descoberta de Georg Cantor: a existência de diferentes tamanhos de infinito. Investigam-se as propriedades dos conjuntos enumeráveis, demonstrando resultados contraintuitivos sobre os inteiros e racionais, e apresenta-se o célebre Argumento da Diagonal. Este método permite provar a não enumerabilidade dos números reais, revelando um universo de infinitos além da contagem natural.

A aplicação do critério de bijeção em conjuntos infinitos levou à descoberta de que nem todos os infinitos são do mesmo tamanho.

Um conjunto é dito **enumerável** se for finito ou se existir uma bijeção com o conjunto dos números naturais. A cardinalidade dos conjuntos enumeráveis infinitos é o menor número cardinal infinito, denotamos por  $\aleph_0$  (Aleph 0 ou Aleph Nulo). De forma surpreendente, conjuntos que parecem maiores que  $\mathbb{N}$ , como o conjunto dos inteiros ( $\mathbb{Z}$ ) e o dos racionais ( $\mathbb{Q}$ ), também são enumeráveis.

Cantor provou que o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  não é enumerável. A prova clássica utiliza o método da diagonalização (Bertato, 2023, p. 429), que constrói um número real que não pode estar em nenhuma lista pré-definida de reais, mostrando assim que nenhuma enumeração de  $\mathbb{R}$  pode ser completa. A cardinalidade dos números reais é chamada de "**cardinalidade do contínuo**" e denotada por  $\mathfrak{c}$ .

## 5 A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

Uma vez demonstrado que os infinitos não são todos iguais, surge a questão natural sobre como eles se organizam hierarquicamente. Este capítulo discute o Teorema de Cantor, que garante a existência de uma infinidade de cardinais transfinitos sempre crescentes via conjuntos das partes. O foco central recai sobre a Hipótese do Contínuo, conjectura fundamental que indaga sobre a existência de cardinalidades intermediárias entre os números naturais ( $\aleph_0$ ) e os números reais ( $\mathfrak{c}$ ).

O fato de existirem infinitos de tamanhos diferentes ( $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ ) levanta a questão de como esses infinitos se organizam. O Teorema de Cantor estabelece que, para qualquer conjunto  $X$ , sua cardinalidade é estritamente menor que a cardinalidade de seu conjunto das partes  $\mathcal{P}(x)$  (Aigner; Ziegler, 2018, p. 139). Isso garante a existência de uma hierarquia infinita de infinitos, pois sempre podemos formar um conjunto maior tomando o conjunto das partes.

Com a existência de dois infinitos distintos,  $\aleph_0$  e  $\mathfrak{c}$ , surge uma nova pergunta: existe algum conjunto cuja cardinalidade esteja estritamente entre a dos naturais e a dos reais? Ou seja, existe  $S$  tal que  $\aleph_0 < |S| < \mathfrak{c}$ ?

A **Hipótese do Contínuo** é a conjectura de que a resposta é não. Ela postula que  $\mathfrak{c}$  é o próximo cardinal infinito depois de  $\aleph_0$ , denotado por  $\aleph_1$ . Essa conjectura pode ser escrita como  $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ .

## 6 O INFINITO CARDINAL E A DIMENSÃO

Neste capítulo, expande-se a teoria desenvolvida na fundamentação para estabelecer resultados rigorosos sobre a comparação de conjuntos infinitos. O objetivo é demonstrar que a intuição geométrica de tamanho nem sempre corresponde à definição formal de cardinalidade, especialmente quando analisamos espaços de diferentes dimensões.

### 6.1 Teoremas de Comparação e Aritmética Cardinal

Aritmética de cardinais difere substancialmente da aritmética finita. Nesta seção, definem-se as operações de soma, produto e exponenciação para números transfinitos e demonstra-se o Teorema de Cantor ( $|A| < 2^{|A|}$ ), que garante a existência de uma infinidade de cardinais transfinitos distintos.

### 6.2 A Independência entre Dimensão e Cardinalidade

Um dos resultados mais contraintuitivos da Teoria dos Conjuntos é a independência entre a dimensão de um espaço e sua cardinalidade. Demonstra-se aqui que a reta real  $\mathbb{R}$  possui a mesma quantidade de pontos que o plano  $\mathbb{R}^2$  ou qualquer espaço  $\mathbb{R}^n$ . Discute-se como a Curva de Peano preenche o espaço, rompendo com a noção tradicional de dimensão como medida de quantidade.

## 7 NÚMEROS ORDINAIS TRANSFINITOS

Enquanto o capítulo anterior tratou do tamanho dos conjuntos (aspecto cardinal), este capítulo dedica-se à ordem dos elementos (aspecto ordinal). Introduzem-se os Números Ordinais Transfinitos e discutem-se as implicações profundas do Axioma da Escolha na estrutura matemática.

A noção de contagem estende-se ao infinito através dos Números Ordinais. Diferentemente dos cardinais, onde  $1 + \omega = \omega$ , nos ordinais a ordem da soma altera o resultado ( $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$ ). Apresenta-se aqui o conceito de Boa Ordenação e a definição dos primeiros ordinais transfinitos ( $\omega, \omega + 1, \dots$ ).

## 8 O AXIOMA DA ESCOLHA E O PARADOXO DE BANACH-TARSKI

O Axioma da Escolha é independente dos demais axiomas da teoria ZF, mas é essencial para muitos resultados modernos. Sua aceitação, contudo, leva a consequências paradoxais, como o Paradoxo de Banach-Tarski, que demonstra ser possível decompor uma esfera sólida em um número finito de pedaços e remontá-los em duas esferas idênticas à original, violando a intuição física de conservação de volume.

## 9 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta o percurso metodológico adotado para o desenvolvimento deste trabalho. A definição de um desenho metodológico claro é fundamental para estabelecer os caminhos da investigação e garantir a científicidade dos resultados obtidos. A seguir, a pesquisa é classificada quanto à sua natureza, aos seus objetivos, à sua abordagem e aos seus procedimentos técnicos, fundamentando-se na literatura especializada de metodologia científica.

### 9.1 Delineamento da Pesquisa

Para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso, que versa sobre a Teoria da Cardinalidade, a pesquisa classifica-se da seguinte forma:

#### 9.1.1 Quanto à Natureza

Do ponto de vista de sua natureza, esta pesquisa classifica-se como **Pesquisa Pura**. Segundo [Gil \(2002\)](#), a pesquisa Pura objetiva gerar conhecimentos novos, úteis para o avanço da ciência, sem aplicação prática prevista. Ela envolve verdades e interesses universais, onde o pesquisador tem como meta o saber, buscando satisfazer uma necessidade intelectual pelo conhecimento.

"Há muitas razões que determinam a realização de uma pesquisa. Podem, no entanto, ser classificadas em dois grandes grupos: razões de ordem intelectual e razões de ordem prática. As primeiras decorrem do desejo de conhecer pela própria satisfação de conhecer. [...] Tem sido comum designar as pesquisas decorrentes desses dois grupos de questões como "puras" e "aplicadas" [...]" ([Gil, 2002](#), p. 17)

No contexto deste trabalho, o estudo das propriedades dos números cardinais e dos infinitos busca aprofundar a compreensão teórica sobre os fundamentos da matemática, sem a intenção imediata de resolver problemas práticos do cotidiano ou desenvolver tecnologias aplicadas.

#### 9.1.2 Quanto aos Objetivos

Em relação aos seus objetivos, a pesquisa enquadra-se como **Exploratória e Descritiva**.

É **Exploratória**, pois visa proporcionar maior familiaridade com o problema (a comparação de infinitos), tornando-o mais explícito e aprimorando ideias. Este tipo de pesquisa envolve levantamento bibliográfico e análise de exemplos que estimulem a compreensão, sendo muito comum em ambientes acadêmicos para a estruturação de trabalhos teóricos.

É também **Descriptiva**, pois busca descrever, registrar e correlacionar fatos ou fenômenos de uma determinada realidade sem manipulá-los. Neste trabalho, descrevem-se as propriedades dos conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, bem como os teoremas fundamentais da Teoria dos Conjuntos, analisando suas relações lógicas e implicações.

#### 9.1.3 Quanto à Abordagem

Do ponto de vista de sua abordagem, trata-se de uma pesquisa **Qualitativa**. Diferente da pesquisa quantitativa, que se pauta na medição numérica e estatística, a abordagem qualitativa preocupa-se com a compreensão profunda dos fenômenos.

Embora a matemática utilize números, a natureza deste trabalho é conceitual e lógica, não estatística. O foco reside na interpretação das demonstrações, na análise dos argumentos lógicos de Cantor e na compreensão dos significados dos conceitos de cardinalidade e infinito, caracterizando uma análise densa e interpretativa dos objetos matemáticos estudados.

#### 9.1.4 Quanto aos Procedimentos Técnicos

Quanto aos procedimentos técnicos adotados, a pesquisa classifica-se estreitamente como **Pesquisa Bibliográfica**. De acordo com [Gil \(2002, p. 44\)](#), este tipo de pesquisa é desenvolvido com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.

O trabalho foi realizado a partir do levantamento de referências teóricas publicadas em meios escritos e eletrônicos, como livros de Análise Real e Teoria dos Conjuntos, artigos sobre a história da matemática e materiais acadêmicos. O objetivo foi trabalhar com informações levantadas e selecionadas da literatura para explicar o objeto de estudo (Cardinalidade) e os fenômenos relacionados (Hierarquia dos Infinitos, Hipótese do Contínuo).

### 9.2 Coleta e Tratamento dos Dados

Considerando a natureza teórica desta pesquisa, a "coleta de dados" consistiu na seleção criteriosa de fontes bibliográficas que abordam os fundamentos da Teoria dos Conjuntos e a Análise Real. Foram utilizados como base principal as obras de [Halmos \(2014\)](#), [Lima \(2006\)](#) e [Aigner e Ziegler \(2018\)](#).

O tratamento dos dados deu-se através da:

1. **Leitura analítica:** Estudo aprofundado dos textos selecionados para identificar os conceitos-chave (bição, cardinalidade, enumerabilidade).
2. **Reprodução e Análise de Demonstrações:** Estudo passo a passo das provas matemáticas apresentadas pelos autores, como o Argumento da Diagonal de

Cantor, verificando sua consistência lógica.

3. **Síntese e Comparação:** Integração das diferentes visões e notações apresentadas pelos autores (por exemplo, as definições de conjunto finito por Lima e Halmos) para construir uma narrativa coerente e didática no corpo do trabalho.

Não foram utilizados instrumentos como questionários ou entrevistas, nem técnicas estatísticas de análise, dado o caráter puramente bibliográfico e teórico da investigação.

### 9.3 Cronograma

Para organizar o desenvolvimento desta pesquisa e assegurar o cumprimento dos objetivos propostos, foi estabelecido um cronograma de execução para o ano de 2026. O planejamento, detalhado no [Quadro 1](#), contempla as etapas de aprofundamento teórico, análise das demonstrações matemáticas, redação dos capítulos e a defesa final do trabalho.

**Quadro 1 – Cronograma de desenvolvimento do TCC.**

Mês (2026)	Atividade Prevista
Fevereiro	Leitura analítica das obras de base (Halmos, Lima) e fichamento dos fundamentos.
Março	Estudo e diferenciação formal entre conjuntos numeráveis e enumeráveis.
Abril	Reprodução e análise das demonstrações sobre a não-enumerabilidade dos reais (Diagonal de Cantor).
Maio	Investigação teórica sobre a relação entre dimensão e cardinalidade de espaços.
Junho	Estudo dos Números Ordinais e sua distinção em relação aos Números Cardinais.
Julho	Pesquisa sobre o Axioma da Escolha e suas implicações (Paradoxo de Banach-Tarski).
Agosto	Aprofundamento nos Números Transfinitos e na hierarquia dos infinitos.
Setembro	Redação e síntese dos resultados obtidos nos capítulos de desenvolvimento.
Outubro	Escrita e revisão de consistência teórica.
Novembro	Revisão normativa (ABNT), formatação final e depósito do trabalho.
Dezembro	Preparação da apresentação e defesa do Trabalho de Conclusão de Curso.

**Fonte:** Autoria própria. (2025)

## **10 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS**

Cada capítulo deve conter uma pequena introdução (tipicamente, um ou dois parágrafos) que deve deixar claro o objetivo e o que será discutido no capítulo, bem como a organização do capítulo.

## 11 SOBRE AS ILUSTRAÇÕES

A seguir exemplifica-se como inserir ilustrações no corpo do trabalho. As ilustrações serão indexadas automaticamente em suas respectivas listas. A numeração sequencial de figuras, tabelas e equações também ocorre de modo automático.

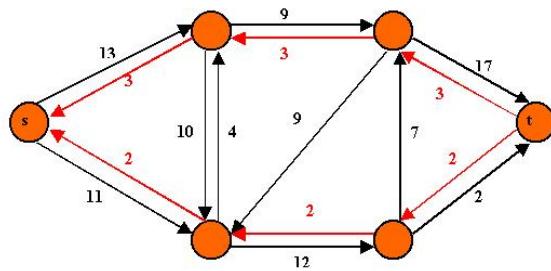
Referências cruzadas são obtidas através dos comandos `\label{}` e `\ref{}`. Sendo assim, não é necessário por exemplo, saber que o número de certo capítulo é ?? para colocar o seu número no texto. Outra forma que pode ser utilizada é esta: ??, facilitando a inserção, remoção e manejo de elementos numerados no texto sem a necessidade de renumerar todos esses elementos.

## 12 FIGURAS

Exemplo de como inserir uma figura. A [Figura 1](#) aparece automaticamente na lista de figuras. Para saber mais sobre o uso de imagens no L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X consulte literatura especializada ([LIMA, 2006](#)).

Os arquivos das figuras devem ser armazenados no diretório de "/dados".

**Figura 1 – Exemplo de Figura**



**Fonte:** [Lima \(2006\)](#)

## 13 QUADROS E TABELAS

Exemplo de como inserir o [Quadro 2](#) e a [Tabela 1](#). Ambos aparecem automaticamente nas suas respectivas listas. Para saber mais informações sobre a construção de tabelas no L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X consulte literatura especializada ([LIMA, 2006](#)).

Ambos os elementos (Quadros e Tabelas) devem ser criados em arquivos separados para facilitar manutenção e armazenados no diretório de "/dados".

**Quadro 2 – Exemplo de Quadro.**

BD Relacionais	BD Orientados a Objetos
Os dados são passivos, ou seja, certas operações limitadas podem ser automaticamente acionadas quando os dados são usados. Os dados são ativos, ou seja, as solicitações fazem com que os objetos executem seus métodos.	Os processos que usam dados mudam constantemente.

**Fonte:** [Lima \(2006\)](#)

A diferença entre quadro e tabela está no fato que um quadro é formado por linhas horizontais e verticais. Deve ser utilizado quando o conteúdo é majoritariamente não-numérico. O número do quadro e o título vem acima do quadro, e a fonte, deve vir abaixo. Uma tabela é formada apenas por linhas verticais. Deve ser utilizada quando o conteúdo é majoritariamente numérico. O número da tabela e o título vem acima da tabela, e a fonte, deve vir abaixo, tal como no quadro.

**Tabela 1 – Resultado dos testes.**

	Valores 1	Valores 2	Valores 3	Valores 4
Caso 1	0,86	0,77	0,81	163
Caso 2	0,19	0,74	0,25	180
Caso 3	1,00	1,00	1,00	170

**Fonte:** [Lima \(2006\)](#)

## 14 EQUAÇÕES

Exemplo de como inserir a [Equação \(1\)](#) e a Eq. 2 no corpo do texto <sup>1</sup>. Observe que foram utilizadas duas formas distintas para referenciar as equações.

$$X(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (1)$$

$$F(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -j2\pi \left( \frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right) \right] \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Deve-se atentar ao fato de a formatação das equações ficar muito boa esteticamente.

## 15 ALGORITMOS

Exemplo de como inserir um algoritmo. Para inserção de algoritmos utiliza-se o pacote `algorithm2e` que já está devidamente configurado dentro do template.

Os algoritmos devem ser criados em arquivos separados para facilitar manutenção e armazenados no diretório de "/dados".

---

### **Algoritmo 1:** Exemplo de Algoritmo

---

**Input:** o número  $n$  de vértices a remover, grafo original  $G(V, E)$

**Output:** grafo reduzido  $G'(V, E)$

$removidos \leftarrow 0$

**while**  $removidos < n$  **do**

$v \leftarrow \text{Random}(1, \dots, k) \in V$

**for**  $u \in \text{adjacentes}(v)$  **do**

remove aresta  $(u, v)$

$removidos \leftarrow removidos + 1$

**end**

**if** *há componentes desconectados* **then**

remove os componentes desconectados

**end**

**end**

---

## 16 SOBRE AS LISTAS

Para construir listas de "*bullets*" ou listas enumeradas, inclusive listas aninhadas, é utilizado o pacote `paralist`.

Exemplo de duas listas não numeradas aninhadas, utilizando o comando `\itemize`. Observe a indentação, bem como a mudança automática do tipo de "*bullet*" nas listas aninhadas.

- item não numerado 1
- item não numerado 2
  - subitem não numerado 1
  - subitem não numerado 2
  - subitem não numerado 3
- item não numerado 3

Exemplo de duas listas numeradas aninhadas, utilizando o comando `\enumerate`. Observe a numeração progressiva e indentação das listas aninhadas.

1. item numerado 1
2. item numerado 2
  - a) subitem numerado 1
  - b) subitem numerado 2
  - c) subitem numerado 3
3. item numerado 3

## 17 SOBRE AS CITAÇÕES E CHAMADAS DE REFERÊNCIAS

Citações são trechos de texto ou informações obtidas de materiais consultados quando da elaboração do trabalho. São utilizadas no texto com o propósito de esclarecer, completar e embasar as ideias do autor. Todas as publicações consultadas e utilizadas (por meio de citações) devem ser listadas, obrigatoriamente, nas referências bibliográficas, para preservar os direitos autorais. São classificadas em citações indiretas e diretas.

## 18 CITAÇÕES INDIRETAS

É a transcrição, com suas próprias palavras, das idéias de um autor, mantendo-se o sentido original. A citação indireta é a maneira que o pesquisador tem de ler, compreender e gerar conhecimento a partir do conhecimento de outros autores. Quanto à chamada da referência, ela pode ser feita de duas maneiras distintas, conforme o nome do(s) autor(es) façam parte do seu texto ou não. Exemplo de chamada fazendo parte do texto:

Enquanto [Lima \(2006\)](#) defendem uma epistemologia baseada na biologia. Para os autores, é necessário rever ....

A chamada de referência foi feita com o comando `\citeonline{chave}`, que produzirá a formatação correta.

A segunda forma de fazer uma chamada de referência deve ser utilizada quando se quer evitar uma interrupção na sequência do texto, o que poderia, eventualmente, prejudicar a leitura. Assim, a citação é feita e imediatamente após a obra referenciada deve ser colocada entre parênteses. Porém, neste caso específico, o nome do autor deve vir em caixa alta, seguido do ano da publicação. Exemplo de chamada não fazendo parte do texto:

Há defensores da epistemologia baseada na biologia que argumentam em favor da necessidade de ... ([LIMA, 2006](#)).

Nesse caso a chamada de referência deve ser feita com o comando `\cite{chave}`, que produzirá a formatação correta.

## 19 CITAÇÕES DIRETAS

É a transcrição ou cópia de um parágrafo, de uma frase, de parte dela ou de uma expressão, usando exatamente as mesmas palavras adotadas pelo autor do trabalho consultado.

Quanto à chamada da referência, ela pode ser feita de qualquer das duas maneiras já mencionadas nas citações indiretas, conforme o nome do(s) autor(es) façam parte do texto ou não. Há duas maneiras distintas de se fazer uma citação direta, conforme o trecho citado seja longo ou curto.

Quando o trecho citado é longo (4 ou mais linhas) deve-se usar um parágrafo específico para a citação, na forma de um texto recuado (4 cm da margem esquerda), com tamanho de letra menor e espaçamento entrelinhas simples. Exemplo de citação longa:

Desse modo, opera-se uma ruptura decisiva entre a reflexividade filosófica, isto é a possibilidade do sujeito de pensar e de refletir, e a objetividade científica. Encontramo-nos num ponto em que o conhecimento científico está sem consciência. Sem consciência moral, sem consciência reflexiva e também subjetiva. Cada vez mais o desenvolvimento extraordinário do conhecimento científico vai tornar menos praticável a própria possibilidade de reflexão do sujeito sobre a sua pesquisa ([LIMA, 2006](#), p. 28).

Para fazer a citação longa deve-se utilizar os seguintes comandos:

```
\begin{citacao}
<texto da citacao>
\end{citacao}
```

No exemplo acima, para a chamada da referência o comando `\cite [p.~28] {Silva2000}` foi utilizado, visto que os nomes dos autores não são parte do trecho citado. É necessário também indicar o número da página da obra citada que contém o trecho citado.

Quando o trecho citado é curto (3 ou menos linhas) ele deve inserido diretamente no texto entre aspas. Exemplos de citação curta:

A epistemologia baseada na biologia parte do princípio de que "assumo que não posso fazer referência a entidades independentes de mim para construir meu explicar"([LIMA, 2006](#), p. 35).

A epistemologia baseada na biologia de [Lima \(2006, p. 35\)](#) parte do princípio de que "assumo que não posso fazer referência a entidades independentes de mim para construir meu explicar".

## 20 DETALHES SOBRE AS CHAMADAS DE REFERÊNCIAS

Outros exemplos de comandos para as chamadas de referências e o resultado produzido por estes:

```
Lima (2006) \citeonline{lima2006}
Aigner e Ziegler (2018) \citeonline{aigner2018}
(Halmos, 2014, 28) \linkcite[28]{Halmos}{halmos2014}
Lima (2006, p. 33) \citeonline[p.~33]{Silva2000}
(Halmos, 2014) \linkcite[]{}{Halmos}{halmos2014}
Lima (2006, p. 35) \citeonline[p.~35]{Maturana2003}
(Halmos, 2014; Lima, 2006) \linkcite{Halmos}{halmos2014}{Lima}{lima2006}
(Halmos, 2014; Lima, 2006; Aigner; Ziegler, 2018) \linkcite{Halmos}{halmos2014}{Lima}
```

## 21 SOBRE AS REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A bibliografia é feita no padrão BIBTEX. As referências são colocadas em um arquivo separado. Neste template as referências são armazenadas no arquivo "base-referencias.bib".

Existem diversas categorias documentos e materiais componentes da bibliografia. A classe abnTEX define as seguintes categorias (entradas):

```
@book
@inbook
@article
@phdthesis
@mastersthesis
@monography
@techreport
@manual
@proceedings
@inproceedings
@journalpart
@booklet
@patent
@unpublished
@misc
```

Cada categoria (entrada) é formatada pelo pacote [Lima \(2006\)](#) de uma forma específica. Algumas entradas foram introduzidas especificamente para atender à norma [Lima \(2006\)](#), são elas: @monography, @journalpart, @patent. As demais entradas são padrão BIBTEX. Para maiores detalhes, refira-se a [Lima \(2006\)](#), [Lima \(2006\)](#), [Lima \(2006\)](#).

## 22 NOTAS DE RODAPÉ

As notas de rodapé pode ser classificadas em duas categorias: notas explicativas<sup>1</sup> e notas de referências. As notas de referências, como o próprio nome já indica, são utilizadas para colocar referências e/ou chamadas de referências sob certas condições.

---

<sup>1</sup>é o tipo mais comum de notas que destacam, explicam e/ou complementam o que foi dito no corpo do texto, como esta nota de rodapé, por exemplo.

## 23 CONCLUSÃO

Parte final do texto, na qual se apresentam as conclusões do trabalho acadêmico. É importante fazer uma análise crítica do trabalho, destacando os principais resultados e as contribuições do trabalho para a área de pesquisa.

### 23.1 TRABALHOS FUTUROS

Também deve indicar, se possível e/ou conveniente, como o trabalho pode ser estendido ou aprimorado.

### 23.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Encerramento do trabalho acadêmico.

## Referências

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. **Proofs from THE BOOK**. 6. ed. Heidelberg: Springer, 2018. Disponível em: <https://dpvipraco.../content/uploads/2023/01/Proofs-from-THE-BOOK-PDFDrive-.pdf>. Acesso em: 10 de novembro de 2025.

BERTATO, F. M. O infinito e o método da diagonal de cantor - tradução de ueber eine elementare frage der mannigfaltigkeitslehre (1890-91). Revista Brasileira de História da Matemática, São Paulo, v. 23, n. 46, p. 421–439, jul. 2023. Disponível em: <https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/441>. Acesso em: 17 de novembro de 2025.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos De pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HALMOS, P. R. **Naive Set Theory**. [S.l.]: Springer, 2014.

LIMA, E. L. **Análise Real**. 8. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2006. v. 1.

## Apêndices

## **APÊNDICE A – Nome do apêndice**

Lembre-se que a diferença entre apêndice e anexo diz respeito à autoria do texto e/ou material ali colocado.

Caso o material ou texto suplementar ou complementar seja de sua autoria, então ele deverá ser colocado como um apêndice. Porém, caso a autoria seja de terceiros, então o material ou texto deverá ser colocado como anexo.

Caso seja conveniente, podem ser criados outros apêndices para o seu trabalho acadêmico. Basta recortar e colar este trecho neste mesmo documento. Lembre-se de alterar o "label" do apêndice.

Não é aconselhável colocar tudo que é complementar em um único apêndice. Organize os apêndices de modo que, em cada um deles, haja um único tipo de conteúdo. Isso facilita a leitura e compreensão para o leitor do trabalho.

**APÊNDICE B – Nome do outro apêndice**

conteúdo do novo apêndice

## Anexos

## **ANEXO A – Nome do anexo**

Lembre-se que a diferença entre apêndice e anexo diz respeito à autoria do texto e/ou material ali colocado.

Caso o material ou texto suplementar ou complementar seja de sua autoria, então ele deverá ser colocado como um apêndice. Porém, caso a autoria seja de terceiros, então o material ou texto deverá ser colocado como anexo.

Caso seja conveniente, podem ser criados outros anexos para o seu trabalho acadêmico. Basta recortar e colar este trecho neste mesmo documento. Lembre-se de alterar o "label" do anexo.

Organize seus anexos de modo a que, em cada um deles, haja um único tipo de conteúdo. Isso facilita a leitura e compreensão para o leitor do trabalho. É para ele que você escreve.

**ANEXO B – Nome do outro anexo**

conteúdo do outro anexo