UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DAMAT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDUARDO FURLAN

INFINITOS DE CANTOR: CARDINALIDADE, DIMENSÃO E A ESTRUTURA DOS NÚMEROS ORDINAIS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO
2025

EDUARDO FURLAN

INFINITOS DE CANTOR: CARDINALIDADE, DIMENSÃO E A ESTRUTURA DOS NÚMEROS ORDINAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no **Curso de Licenciatura em Matemática** da **Universidade Tecnológica Federal do Paraná**, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.

Orientador: Prof. Dr. Ivan Italo Gonzales Gargate
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

PATO BRANCO
2025

Altere este texto inserindo a dedicatória do seu trabalho.

AGRADECIMENTOS

Edite e coloque aqui os agradecimentos às pessoas e/ou instituições que contribuíram para a realização do trabalho.

É obrigatório o agradecimento às instituições de fomento à pesquisa que financiaram total ou parcialmente o trabalho, inclusive no que diz respeito à concessão de bolsas.

Um barulho no quarto
Um susto, um rato
Da minha cama eu avisto
Livros, teias, traças
O canto negro de um pássaro

(Rogério Skylab, "O Corvo")

RESUMO

FURLAN, Eduardo. Infinitos de Cantor: Cardinalidade, Dimensão e a Estrutura dos Números Ordinais. 2025. 20 f. Trabalho de Conclusão de Curso – **Curso de Licenciatura em Matemática**, **Universidade Tecnológica Federal do Paraná**. Pato Branco, 2025.

O Resumo é um elemento obrigatório em tese, dissertação, monografia e TCC, constituído de uma seqüência de frases concisas e objetivas, fornecendo uma visão rápida e clara do conteúdo do estudo. O texto deverá conter no máximo 500 palavras e ser antecedido pela referência do estudo. Também, não deve conter citações. O resumo deve ser redigido em parágrafo único, espaçamento simples e seguido das palavras representativas do conteúdo do estudo, isto é, palavras-chave, em número de três a cinco, separadas entre si por ponto e finalizadas também por ponto. Usar o verbo na terceira pessoa do singular, com linguagem impessoal, bem como fazer uso, preferencialmente, da voz ativa. Texto contendo um único parágrafo.

Palavras-chave: Teoria dos Conjuntos. Cardinalidade. Números Cardinais. Números Ordinais. Números Transfinitos. Axioma da Escolha. Hipótese do Contínuo. Paradoxo de Banach-Tarski. Aritmética Transfinita.

ABSTRACT

FURLAN, Eduardo. Cantor's Infinities: Cardinality, Dimension, and the Structure of Ordinal Numbers. 2025. 20 f. Trabalho de Conclusão de Curso – **Curso de Licenciatura em Matemática**, **Universidade Tecnológica Federal do Paraná**. Pato Branco, 2025.

Elemento obrigatório em tese, dissertação, monografia e TCC. É a versão do resumo em português para o idioma de divulgação internacional. Deve ser antecedido pela referência do estudo. Deve aparecer em folha distinta do resumo em língua portuguesa e seguido das palavras representativas do conteúdo do estudo, isto é, das palavras-chave. Sugere-se a elaboração do resumo (Abstract) e das palavras-chave (Keywords) em inglês; para resumos em outras línguas, que não o inglês, consultar o departamento / curso de origem.

Keywords: Set Theory. Cardinality. Cardinal Numbers. Ordinal Numbers. Transfinite Numbers. Axiom of Choice. Continuum Hypothesis. Banach-Tarski Paradox. Transfinite Arithmetic.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE TEOREMAS

Axiomas

Definições

Teoremas

Corolários

Lemas

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

HC	Hipótese do Contínuo
ZF	Sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel
ZFC	Sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel com escolha
t.q.	tal que

LISTA DE SÍMBOLOS

$\aleph_0$	Aleph zero; Cardinalidade dos naturais
$\|A\|$	Cardinalidade do conjunto A
$\mathfrak{c}$	Cardinalidade do contínuo
$\mathcal{P}(x)$	Conjunto das partes de x
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\varnothing$	Conjunto vazio
$\supseteq$	Contém
$\neq$	Diferente de
$\subseteq$	Está contido em
$\subset$	Está contido em
$\subsetneq$	Está contido em, mas não igual
$\exists!$	Existe um único
$\exists$	Existe um; Para algum
$f : A \to B$	Função f de A em B
$\implies$	Implica; Condicional
$\cap$	Interseção
ω	Letra grega omega; Primeiro ordinal infinito
φ	Letra grega phi
$\aleph$	Letra hebraica aleph
$>$	Maior que

$\geq$	Maior que ou igual
$<$	Menor que
$\leq$	Menor que ou igual
$\aleph_n$	n-ésima cardinalidade
$\notin$	Não pertence
a_n	O n-ésimo valor da sequência (a_n)
(a,b)	Par ordenado (a,b)
$\forall$	Para todo; Dado um
$\in$	Pertence
$\times$	Produto cartesiano
$\iff$	Se, e somente se; Bicondicional
(a_n)	Sequência de valores a_n
$\cup$	União

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Introduzida por Georg Cantor no século XIX como parte de sua Teoria dos Conjuntos, a Teoria da Cardinalidade representa um dos pilares essenciais da matemática moderna. Cantor propôs uma maneira revolucionária de medir e comparar o tamanho de conjuntos, incluindo os infinitos, o que o levou ao resultado contraintuitivo de que existem infinitos de diferentes tamanhos. Embora suas ideias tenham sido recebidas com grande ceticismo e hostilidade por muitos matemáticos da época, hoje a Teoria dos Conjuntos, em particular, o conceito de cardinalidade, são fundamentais, fornecendo a linguagem e a estrutura que sustentam praticamente todas as áreas da matemática, como, por exemplo, na Análise Real, toda a construção rigorosa dos números reais e as próprias definições de limite e continuidade dependem de noções de conjuntos.

A distinção entre conjuntos numeráveis e não numeráveis é crucial para entender a estrutura do contínuo, isto é, a existência de magnitudes de infinito distintas, onde o "contínuo" representa a cardinalidade de $\mathbb{R}$, superior à cardinalidade enumerável de $\mathbb{N}$. Da mesma forma, a Topologia, que estuda as propriedades dos espaços topológicos, é inteiramente fundamentada na linguagem dos conjuntos, a própria definição de um espaço topológico é baseada em uma coleção de subconjuntos (os "conjuntos abertos").

A escolha deste tema se justifica pelo interesse do autor nos fundamentos da matemática, especialmente nos conceitos relacionados ao infinito. A compreensão das diferentes formas de infinito e dos princípios de cardinalidade é essencial para uma formação matemática sólida e aprofundada. Além disso, o domínio deste conteúdo é um diferencial significativo para o acompanhamento de disciplinas teóricas em programas de mestrado e doutorado em matemática.

Dessa forma, considerando o contexto descrito o objetivo geral deste trabalho é apresentar os fundamentos e as propriedades dos números cardinais na Teoria dos Conjuntos. Busca-se, com isso, auxiliar estudantes de matemática que planejam seguir carreira acadêmica, oferecendo uma sequência clara e organizada do conteúdo, com foco em Cardinalidade. Para alcançar este objetivo principal, foram delineados os seguintes objetivos específicos:

1. Diferenciar conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis, identificando suas características e propriedades fundamentais.
2. Demonstrar que a dimensão de um espaço não está relacionada ao tamanho (cardinalidade) dos conjuntos envolvidos.
3. Expor o conceito de números ordinais e seu papel na Teoria dos Conjuntos, distinguindo-os dos números cardinais.

Para atingir tais objetivos, o trabalho explorará os conceitos de Cardinalidade e Números Cardinais, a diferença entre Cardinalidade e Dimensão, e os Números

Ordinais. A discussão se aprofundará em tópicos avançados e suas consequências, como o Axioma da Escolha, o Paradoxo de Banach-Tarski e os Números Transfinitos de Cantor.

2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS

Neste capítulo, estabelecem-se as bases formais sobre as quais todo o trabalho se sustenta. A Teoria dos Conjuntos fornece a linguagem universal da matemática moderna, mas sua construção requer rigor para evitar contradições. Serão apresentados os axiomas essenciais que definem o comportamento dos conjuntos e suas operações elementares, além da construção axiomática dos números naturais via Axiomas de Peano, que servirá de ponto de partida para a aritmética cardinal.

2.1 Axiomas da Teoria dos Conjuntos

A base de toda a matemática moderna pode ser construída sobre o conceito de "conjunto" (que também chamaremos de "coleção", ou "família"). Halmos (2014) menciona os axiomas a seguir.

Axioma 1 (Axioma da Extensão). *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, ambos possuem os mesmos elementos.*

Se A e B são conjuntos e todo elemento de A está em B dizemos que A é um subconjunto de B, A está contido em B, ou que B contém A, e escrevemos $A \subseteq B$ e $B \supseteq A$, respectivamente. Disso temos que $A = B \iff A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Quando temos $A \subseteq B$ e $A \neq B$ escrevemos $A \subsetneq B$ e dizemos que A é um subconjunto próprio de B.

Exemplo 1. Os conjuntos $A = \{1,2\}$ e $B = \{2,1\}$ são iguais, pois $1 \in B$ e $2 \in B$, logo $A \subseteq B$ e $2 \in A$ e $1 \in A$, logo $B \subseteq A$.

Axioma 2 (Axioma da Especificação). *Para todo conjunto A e toda condição $S(x)$, existe um conjunto B em que seus elementos são todos os $x \in A$ tal que a condição $S(x)$ é verdadeira. Escrevemos B como*

$$B = \{x \in A : S(x)\}.$$

Exemplo 2. Seja $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $S(x)$ a condição "x é um número ímpar"[1], então o conjunto B é:

$$B = \{x \in \{1,2,3,4,5\} : x \text{ é um número ímpar.}\} = \{1,3,5\}.$$

[1] Note que, neste momento, um número "ímpar" não está definido, mas para fins de simplicidade trataremos como se estivesse. O mesmo se aplica para todos os exemplos, para não quebrar a fluidez do texto, conceitos, mesmo que ainda não definidos, poderão ser usados em exemplos.

É interessante destacar que esse axioma não está escrito com a rigorosidade necessária, isso se dá, pois a teoria de Halmos, *"Naive Set Theory"*, é uma abordagem "não axiomática"[2] da teoria de conjuntos. Enderton (1977, p. 5) apresenta dois paradoxos interessantes advindos de tal abordagem.

1. Considere o conjunto

$$A = \{x : x \text{ é um inteiro positivo definível em uma linha de texto}\}$$

   O problema aqui é a palavra "definível." Conseguimos definir muitos números em uma linha de texto

$$\begin{gathered} 118, \\ \text{O menor número primo maior que 13,} \\ \text{O 3º número triangular}^3, \\ \text{O menor número maior que qualquer número designado com menos de } 10^{100} \text{ símbolos}^4, \\ \text{A raíz inteira do polinômio } x^3 - 554x^2 + 65530x - 3885000. \end{gathered}$$

   Observe que o conjunto A é um conjunto finito de inteiros (pois há uma quantidade finita de símbolos que podem ser usados, e apenas uma quantidade finita de símbolos cabem em uma linha). Assim, existe um número x tal que

$$x \text{ é o menor número inteiro que não é definível em uma linha de texto.}$$

   Porém, a linha anterior é, precisamente, uma definição em uma linha de tal número, que é, por construção, não definível em uma linha.

2. O clássico paradoxo de Russell. Considere o conjunto

$$B = \{x : x \notin x\}.$$

   Este é o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos, o que nos faz questionar: $B \in B$? Se $B \notin B$, então B satisfaz a condição de entrada, logo $B \in B$. Agora, se $B \in B$, então B não satisfaz a condição de entrada, logo $B \notin B$. Assim temos que ambos $B \in B$ e $B \notin B$ são impossíveis de acontecer.

Axioma 3 (Axioma do Par)**.** *Para quaisquer dois conjuntos A e B, existe um conjunto C tal que $A \in C$ e $B \in C$.*

[2] Apesar de ser uma abordagem não axiomática, Halmos ainda trabalha com alguns axiomas. *"The present treatment might best be described as axiomatic set theory from the naive point of view. It is axiomatic in that some axioms for set theory are stated and used as the basis of all subsequent proofs. It is naive in that the language and notation are those of ordinary informal (but formalizable) mathematics."* (Halmos, 2014, p. v).

[3] O n-ésimo número triangular é $a_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$. Para mais informações, consulte a sequência A000217 na OEIS Foundation Inc. (2025).

[4] O "número de Rayo". Número ganhador do *Big Number Duel*, um duelo organizado pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) entre Adam Elga e Agustín Rayo. Sua definição formal pode ser encontrada em Rayo (2007).

Exemplo 3. Sejam $A = \varphi$ e $B = \{\varphi\}$ então podemos ter C como $C = \{\varphi, \{\varphi\}\}$, ou também, $C = \{\varphi, \{\varphi\},\varnothing\}$.

Definição 1 (Par Ordenado)**.** O par ordenado de a e b onde a primeira coordenada é a e a segunda coordenada é b, é o conjunto (a,b) definido por:

$$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}.$$

Exemplo 4. O par ordenado (7,3) é o conjunto $\{\{3,7\}, \{7\}\}$.

Definição 2 (Produto Cartesiano)**.** O produto cartesiano de A e B é o conjunto $A \times B$ em que

$$A \times B = \{x : x = (a,b) \text{ para algum } a \in A \text{ e para algum } b \in B\}.$$

Exemplo 5. O produto cartesiano de $A = \{4,8\}$ com $B = \{6\}$ é o conjunto

$$A \times B = \{(4,6),(8,6)\} = \{\{\{4\}, \{4,6\}\}, \{\{8\}, \{8,6\}\}\}.$$

Axioma 4 (Axioma das Uniões)**.** *Para qualquer coleção de conjuntos, existe um conjunto que contém todos os elementos que pertencem a pelo menos um conjunto da coleção dada.*

Seja C essa coleção de conjuntos, e U o conjunto referido no Axioma 4, chamamos U de **união** da coleção C de conjuntos e escrevemos como

$$\bigcup C, \quad \bigcup\{X : X \in C\} \quad \text{ou} \quad \bigcup_{X \in C} C.$$

Exemplo 6. Seja $C = \{\{1,2\}, \{\{2\},3,4\}, \{4,5\}\}$ então

$$\bigcup_{x \in C} C = \{1,2,\{2\},3,4,5\}.$$

Definição 3 (Interseção)**.** Se A e B são conjuntos a interseção de A e B é o conjunto $A \cap B$ definido por $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$.

De forma análoga à união, chamamos um conjunto V de **interseção** de C e escrevemos como

$$\bigcap C, \quad \bigcap\{X : X \in C\} \quad \text{ou} \quad \bigcap_{X \in C} C.$$

Exemplo 7. Seja C o mesmo conjunto do Exemplo 6 então

$$\bigcap_{x \in C} C = \{4\}.$$

Axioma 5 (Axioma da Potência)**.** *Para todo conjunto existe uma coleção de conjuntos que contém (como elementos) todos os subconjuntos do conjunto dado.*

Em outras palavras, se A é um conjunto então existe um conjunto $\mathcal{P}(A)$ tal que se $X \subseteq A$ então $X \in \mathcal{P}(A)$. Note que o conjunto estipulado pode conter mais elementos que apenas os subconjuntos de A, para remediar isso, usamos o Axioma da Especificação e definimos $\mathcal{P}(A)$ como $\{X : X \subseteq A\}$, e chamamos de "**conjunto das partes** de A".

Exemplo 8. Seja $A = \{1{,}2{,}3\}$ então

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\},\{2\},\{3\},\{1{,}2\},\{1{,}3\},\{2{,}3\},\{1{,}2{,}3\}\}$$

2.2 Conjunto dos Números Naturais

O ponto de partida para a construção dos números é o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, caracterizado pelos axiomas de Peano:

Axioma 6 (Primeiro Axioma de Peano)**.** *Existe uma função injetiva $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Chamamos a imagem de $s(n)$ de sucessor de n.*

Axioma 7 (Segundo Axioma de Peano)**.** *Existe um único número natural $0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \neq s(n)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*

Axioma 8 (Terceiro Axioma de Peano)**.** *Se em um conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in X$ e $s(X) \subseteq X$[5], então $X = \mathbb{N}$.*

Esses axiomas estabelecem a existência de um **primeiro elemento** (que chamamos de 1), uma função "**sucessor**" injetiva, e o **princípio da indução**, que garante que qualquer número natural pode ser alcançado a partir do 1 por sucessivas aplicações da função sucessor.

Definição 4 (Sucessor)**.** Definimos o sucessor de um número x como

$$x^+ = x \cup \{x\}$$

[5] $n \in X \implies s(n) \in X.$

Definida a função sucessor nós podemos abordar o Axioma 9:

Axioma 9 (Axioma da Infinidade). *Existe um conjunto que contém* 0*, e os sucessores de cada um seus elementos.*

Intuitivamente, esse conjunto é $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$.

3 O CONCEITO DE CARDINALIDADE

A partir das definições elementares de conjunto, este capítulo formaliza o conceito intuitivo de tamanho. Serão discutidas as definições rigorosas de conjuntos finitos e infinitos, contrastando as abordagens de autores clássicos como Halmos (2014) e Lima (2006). Além disso, estabelecem-se os critérios matemáticos para comparar a magnitude de dois conjuntos através da análise de funções injetoras e bijetoras, fundamentando a noção de equipotência.

3.1 Conjuntos finitos

A noção intuitiva de tamanho de um conjunto é formalizada matematicamente pelo conceito de cardinalidade. Lima (2006, p. 3) define um conjunto X como **finito** quando X é vazio, ou existem um $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to X$ onde $I_n = \{p \in \mathbb{N} : p \leq n\}$. Já Halmos (2014, p. 53) define um conjunto finito como um conjunto equivalente a um número[6] natural, onde equivalência significa uma bijeção. Uma propriedade fundamental dos conjuntos finitos é que não existe uma bijeção entre o conjunto e um de seus subconjuntos próprios.

Exemplo 9. O conjunto $X = \{\text{primeiro}, \text{segundo}, \text{terceiro}\}$ é finito. Para verificar basta encontrar um $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to X$, de fato, tome $n = 3$, e $f : \{1,2,3\} \to X$ tal que

$$\begin{aligned} f(1) &\longleftrightarrow \text{primeiro} \\ f(2) &\longleftrightarrow \text{segundo} \\ f(3) &\longleftrightarrow \text{terceiro} \end{aligned}$$

Exemplo 10. Utilizando a definição de Halmos (2014), considere o conjunto das vogais $V = \{a, e, i, o, u\}$. Este conjunto é finito, pois é equivalente ao número natural 5 (que,

[6] Na Teoria de Conjuntos números são conjuntos. $0 = \varnothing, 1 = \{\varnothing\}, n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

como conjunto, é $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$). A bijeção $g : 5 \to V$ é dada por:

$$g(0) \longleftrightarrow a$$
$$g(1) \longleftrightarrow e$$
$$g(2) \longleftrightarrow i$$
$$g(3) \longleftrightarrow o$$
$$g(4) \longleftrightarrow u$$

3.2 Conjuntos infinitos

Um conjunto é dito **infinito** quando não é finito. De forma equivalente, um conjunto é infinito se, e somente se, existe uma bijeção entre o conjunto e um de seus subconjuntos próprios.

Para qualquer conjunto X escrevemos a cardinalidade de X como $|X|$. Dados dois conjuntos X e Y dizemos que $|X| \leq |Y|$ quando existe uma função injetiva de X em Y. Dizemos que $|X| = |Y|$ quando existe uma bijeção entre X e Y.

4 A DESCOBERTA DOS INFINITOS

Com as ferramentas de comparação cardinal estabelecidas, este capítulo explora a revolucionária descoberta de Georg Cantor: a existência de diferentes tamanhos de infinito. Investigam-se as propriedades dos conjuntos enumeráveis, demonstrando resultados contraintuitivos sobre os inteiros e racionais, e apresenta-se o célebre Argumento da Diagonal. Este método permite provar a não enumerabilidade dos números reais, revelando um universo de infinitos além da contagem natural.

A aplicação do critério de bijeção em conjuntos infinitos levou à descoberta de que nem todos os infinitos são do mesmo tamanho.

Um conjunto é dito **enumerável** se for finito ou se existir uma bijeção com o conjunto dos números naturais. A cardinalidade dos conjuntos enumeráveis infinitos é o menor número cardinal infinito, denotamos por $\aleph_0$ (Aleph 0 ou Aleph Nulo). De forma surpreendente, conjuntos que parecem maiores que $\mathbb{N}$, como o conjunto dos inteiros $(\mathbb{Z})$ e o dos racionais ($\mathbb{Q}$), também são enumeráveis.

Cantor provou que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável. A prova clássica utiliza o método da diagonalização (Bertato, 2023, p. 429), que constrói um número real que não pode estar em nenhuma lista pré-definida de reais, mostrando assim que nenhuma enumeração de $\mathbb{R}$ pode ser completa. A cardinalidade dos números reais é chamada de "**cardinalidade do contínuo**" e denotada por $\mathfrak{c}$.

5 A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

Uma vez demonstrado que os infinitos não são todos iguais, surge a questão natural sobre como eles se organizam hierarquicamente. Este capítulo discute o Teorema de Cantor, que garante a existência de uma infinidade de cardinais transfinitos sempre crescentes via conjuntos das partes. O foco central recai sobre a Hipótese do Contínuo, conjectura fundamental que indaga sobre a existência de cardinalidades intermediárias entre os números naturais ($\aleph_0$) e os números reais ($\mathfrak{c}$).

O fato de existirem infinitos de tamanhos diferentes ($\aleph_0 < \mathfrak{c}$) levanta a questão de como esses infinitos se organizam. O Teorema de Cantor estabelece que, para qualquer conjunto X, sua cardinalidade é estritamente menor que a cardinalidade de seu conjunto das partes $\mathcal{P}(x)$ (Aigner; Ziegler, 2018, p. 139). Isso garante a existência de uma hierarquia infinita de infinitos, pois sempre podemos formar um conjunto maior tomando o conjunto das partes.

Com a existência de dois infinitos distintos, $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$, surge uma nova pergunta: existe algum conjunto cuja cardinalidade esteja estritamente entre a dos naturais e a dos reais? Ou seja, existe S tal que $\aleph_0 < |S| < \mathfrak{c}$?

A **Hipótese do Contínuo** é a conjectura de que a resposta é não. Ela postula que $\mathfrak{c}$ é o próximo cardinal infinito depois de $\aleph_0$, denotado por $\aleph_1$. Essa conjectura pode ser escrita como $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.

6 O INFINITO CARDINAL E A DIMENSÃO

Neste capítulo, expande-se a teoria desenvolvida na fundamentação para estabelecer resultados rigorosos sobre a comparação de conjuntos infinitos. O objetivo é demonstrar que a intuição geométrica de tamanho nem sempre corresponde à definição formal de cardinalidade, especialmente quando analisamos espaços de diferentes dimensões.

6.1 Teoremas de Comparação e Aritmética Cardinal

Aritmética de cardinais difere substancialmente da aritmética finita. Nesta seção, definem-se as operações de soma, produto e exponenciação para números transfinitos e demonstra-se o Teorema de Cantor ($|A| < 2^{|A|}$), que garante a existência de uma infinidade de cardinais transfinitos distintos.

6.2 A Independência entre Dimensão e Cardinalidade

Um dos resultados mais contraintuitivos da Teoria dos Conjuntos é a independência entre a dimensão de um espaço e sua cardinalidade. Demonstra-se aqui que a reta real $\mathbb{R}$ possui a mesma quantidade de pontos que o plano $\mathbb{R}^2$ ou qualquer espaço $\mathbb{R}^n$. Discute-se como a Curva de Peano preenche o espaço, rompendo com a noção tradicional de dimensão como medida de quantidade.

Um resultado central na aritmética dos cardinais infinitos diz respeito à união de uma família de conjuntos. Consideremos uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha<\aleph_n}$, com $n \in \mathbb{N}$, indexada por $\aleph_n$, onde cada conjunto A_α possui cardinalidade igual a $\aleph_n$. O teorema estabelece que a cardinalidade da união $\bigcup_{\alpha<\aleph_n} A_\alpha$ é exatamente $\aleph_n$. Para fundamentar tal afirmação, demonstraremos um resultado mais profundo e generalista: para qualquer cardinal infinito κ, vale a igualdade $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. Provar que o produto cartesiano de um conjunto infinito por ele mesmo não altera sua magnitude (idempotência multiplicativa) é a condição suficiente para garantir que a união de κ conjuntos de tamanho κ permaneça com tamanho κ.

Teorema 1. *Para todo cardinal infinito κ, vale a igualdade $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.*

Corolário 1. *Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha<\aleph_n}$ com $n \in \mathbb{N}$ uma família de conjuntos indexada por $\aleph_n$, tal que $|A_\alpha| = \aleph_n$ para todo $\alpha < \aleph_n$. Então, a cardinalidade da união é:*

$$\left| \bigcup_{\alpha<\aleph_n} A_\alpha \right| = \aleph_n.$$

7 NÚMEROS ORDINAIS TRANSFINITOS

Enquanto o capítulo anterior tratou do tamanho dos conjuntos (aspecto cardinal), este capítulo é dedicado à ordem dos elementos (aspecto ordinal). Introduzem-se os Números Ordinais Transfinitos e discutem-se as implicações profundas do Axioma da Escolha na estrutura matemática.

A noção de contagem estende-se ao infinito através dos Números Ordinais. Diferentemente dos cardinais, onde $1 + \omega = \omega$, nos ordinais a ordem da soma altera o resultado ($1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$). Apresenta-se aqui o conceito de Boa Ordenação e a definição dos primeiros ordinais transfinitos ($\omega, \omega + 1, \ldots$).

8 O AXIOMA DA ESCOLHA E O PARADOXO DE BANACH-TARSKI

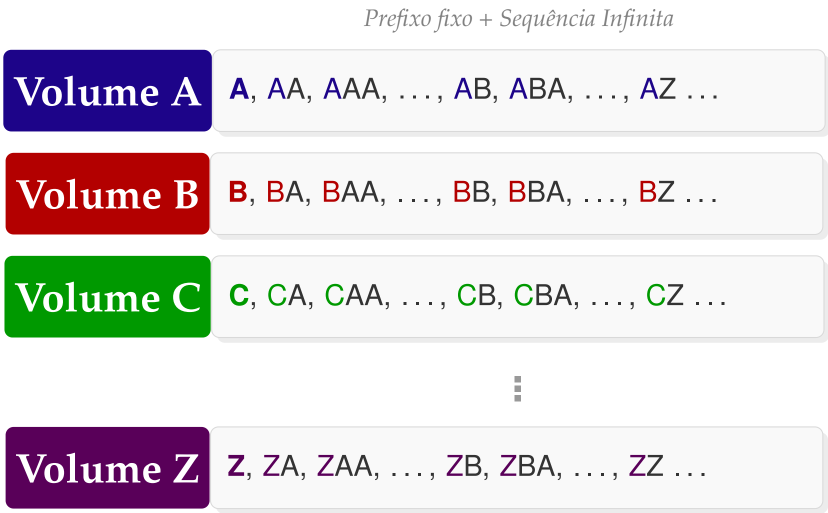
O Axioma da Escolha é independente dos demais axiomas da teoria ZF, mas é essencial para muitos resultados modernos. Sua aceitação, contudo, leva a consequências paradoxais, como o Paradoxo de Banach-Tarski (Wapner, 2007), que demonstra ser possível decompor uma esfera sólida em um número finito de pedaços e remontá-los em duas esferas idênticas à original, violando a intuição física de conservação de volume.

8.1 Analogia do *Hiper-Webster*

Para introduzir as consequências contraintuitivas do infinito na geometria, é elucidativo analisar primeiramente paradoxos em conjuntos enumeráveis. Wapner (2007, p. 135) apresenta a analogia do *"Hiper-Webster"*[7] (originalmente proposta por Ian Stewart), um dicionário infinito contendo todas as palavras possíveis formadas pelas 26 letras do alfabeto inglês. Neste dicionário hipotético, as palavras são listadas em ordem alfabética: A, AA, AAA, AAAA, e assim por diante, seguidas eventualmente por AB, ABA, ABAA, etc. O dicionário contém todas as sequências finitas de letras, independentemente de terem significado ou não.

A propriedade paradoxal deste conjunto é revelada quando tentamos decompor o *Hiper-Webster* em 26 volumes separados, organizados pela letra inicial de cada palavra. O Volume A conteria todas as palavras começando com 'A', o Volume B todas as que começam com 'B', e assim sucessivamente.

Figura 1 – Representação visual dos volumes do *Hiper-Webster*



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), baseado em Wapner (2007, p. 137).

[7] Derivado do nome *Merriam-Webster*, um dicionário estadunidense.

Se tomarmos apenas o Volume A e removermos a primeira letra ('A') de cada palavra nele contida, o resultado é surpreendente: a lista de palavras restante é idêntica ao conteúdo do *Hiper-Webster* original completo. Por exemplo, a palavra 'AA' torna-se 'A', 'AB' torna-se 'B', recuperando assim todas as sequências possíveis.

Este processo demonstra que o *Hiper-Webster* possui a propriedade de ser decomponível em 26 cópias de si mesmo. A distinção crucial, no entanto, reside na natureza do infinito envolvido: enquanto o dicionário lida com um infinito enumerável (palavras discretas), o Teorema de Banach-Tarski opera no contínuo ($\mathbb{R}^3$). A decomposição da esfera não envolve apenas a remoção de um "caractere" inicial, mas sim o uso do Axioma da Escolha para particionar o sólido em conjuntos de pontos não mensuráveis, que são então rotacionados para recompor duas esferas sólidas completas.

9 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta o percurso metodológico adotado para o desenvolvimento deste trabalho. A definição de um desenho metodológico claro é fundamental para estabelecer os caminhos da investigação e garantir a cientificidade dos resultados obtidos. A seguir, a pesquisa é classificada quanto à sua natureza, aos seus objetivos, à sua abordagem e aos seus procedimentos técnicos, fundamentando-se na literatura especializada de metodologia científica.

9.1 Delineamento da Pesquisa

Para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso, que versa sobre a Teoria da Cardinalidade, a pesquisa classifica-se da seguinte forma:

9.1.1 Quanto à Natureza

Do ponto de vista de sua natureza, esta pesquisa classifica-se como **Pesquisa Pura**. Segundo Gil (2002), a pesquisa Pura objetiva gerar conhecimentos novos, úteis para o avanço da ciência, sem aplicação prática prevista. Ela envolve verdades e interesses universais, onde o pesquisador tem como meta o saber, buscando satisfazer uma necessidade intelectual pelo conhecimento.

No contexto deste trabalho, o estudo das propriedades dos números cardinais e dos infinitos busca aprofundar a compreensão teórica sobre os fundamentos da matemática, sem a intenção imediata de resolver problemas práticos do cotidiano ou desenvolver tecnologias aplicadas.

9.1.2 Quanto aos Objetivos

Em relação aos seus objetivos, a pesquisa enquadra-se como **Descritiva**, pois busca descrever, registrar e correlacionar fatos ou fenômenos de uma determinada realidade sem manipulá-los. Neste trabalho, descrevem-se as propriedades dos conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, bem como os teoremas fundamentais da Teoria dos Conjuntos, analisando suas relações lógicas e implicações. Além disso, visa proporcionar maior familiaridade com o problema (a comparação de infinitos), tornando-o mais explícito e aprimorando ideias. Este tipo de pesquisa envolve levantamento bibliográfico e análise de exemplos que estimulem a compreensão, sendo muito comum em ambientes acadêmicos para a estruturação de trabalhos teóricos.

9.1.3 Quanto à Abordagem

Do ponto de vista de sua abordagem, trata-se de uma pesquisa **Qualitativa**. Diferente da pesquisa quantitativa, que se pauta na medição numérica e estatística, a abordagem qualitativa preocupa-se com a compreensão profunda dos fenômenos.

Embora a matemática utilize números, a natureza deste trabalho é conceitual e lógica, não estatística. O foco reside na interpretação das demonstrações, na análise dos argumentos lógicos de Cantor e na compreensão dos significados dos conceitos de cardinalidade e infinito, caracterizando uma análise densa e interpretativa dos objetos matemáticos estudados.

9.1.4 Quanto aos Procedimentos Técnicos

Quanto aos procedimentos técnicos adotados, a pesquisa classifica-se estritamente como **Pesquisa Bibliográfica**. De acordo com Gil (2002, p. 44), este tipo de pesquisa é desenvolvido com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.

O trabalho foi realizado a partir do levantamento de referências teóricas publicadas em meios escritos e eletrônicos, como livros de Análise Real e Teoria dos Conjuntos, artigos sobre a história da matemática e materiais acadêmicos. O objetivo foi trabalhar com informações levantadas e selecionadas da literatura para explicar o objeto de estudo (Cardinalidade) e os fenômenos relacionados (Hierarquia dos Infinitos, Hipótese do Contínuo).

9.2 Coleta e Tratamento dos Dados

Considerando a natureza teórica desta pesquisa, a "coleta de dados" consistiu na seleção criteriosa de fontes bibliográficas que abordam os fundamentos da Teoria dos Conjuntos e a Análise Real. Foram utilizados como base principal as obras de Halmos (2014), Aigner e Ziegler (2018), Doets (2022), Enderton (1977), Hausdorff (1962) e Suppes (1972).

O tratamento dos dados deu-se através da:

1. **Leitura analítica:** Estudo aprofundado dos textos selecionados para identificar os conceitos-chave (bijeção, cardinalidade, enumerabilidade).
2. **Reprodução e Análise de Demonstrações:** Estudo passo a passo das provas matemáticas apresentadas pelos autores, como o Argumento da Diagonal de Cantor, verificando sua consistência lógica.
3. **Síntese e Comparação:** Integração das diferentes visões e notações apresentadas pelos autores (por exemplo, as definições de conjunto finito por Lima e Halmos) para construir uma narrativa coerente e didática no corpo do trabalho.

Não foram utilizados instrumentos como questionários ou entrevistas, nem técnicas estatísticas de análise, dado o caráter puramente bibliográfico e teórico da investigação.

9.3 Cronograma

Para organizar o desenvolvimento desta pesquisa e assegurar o cumprimento dos objetivos propostos, foi estabelecido um cronograma de execução para o ano de 2026. O planejamento, detalhado no Quadro 1, contempla as etapas de aprofundamento teórico, análise das demonstrações matemáticas, redação dos capítulos e a defesa final do trabalho.

Quadro 1 – Cronograma de desenvolvimento do TCC.

Mês (2026)	**Atividade Prevista**
Fevereiro	Leitura analítica das obras de base (Halmos, Lima) e fichamento dos fundamentos.
Março	Estudo e diferenciação formal entre conjuntos numeráveis e enumeráveis.
Abril	Reprodução e análise das demonstrações sobre a não-enumerabilidade dos reais (Diagonal de Cantor).
Maio	Investigação teórica sobre a relação entre dimensão e cardinalidade de espaços.
Junho	Estudo dos Números Ordinais e sua distinção em relação aos Números Cardinais.
Julho	Pesquisa sobre o Axioma da Escolha e suas implicações (Paradoxo de Banach-Tarski).
Agosto	Aprofundamento nos Números Transfinitos e na hierarquia dos infinitos.
Setembro	Redação e síntese dos resultados obtidos nos capítulos de desenvolvimento.
Outubro	Escrita e revisão de consistência teórica.
Novembro	Revisão normativa (ABNT), formatação final e depósito do trabalho.
Dezembro	Preparação da apresentação e defesa do Trabalho de Conclusão de Curso.

Fonte: Autoria própria. (2025)

9.4 Resultados Esperados

Com a execução das etapas descritas no cronograma e o aprofundamento na literatura selecionada, esperam-se alcançar os seguintes resultados ao término desta pesquisa:

1. **Consolidação Teórica:** A elaboração de um texto monográfico que sintetize, de forma rigorosa e didática, os fundamentos da Teoria dos Conjuntos (ZFC), ser-

vindo como material de consulta para estudantes de graduação interessados na transição entre a matemática intuitiva e a formal.

2. **Demonstração da Hierarquia de Infinitos:** A apresentação clara das provas que estabelecem a distinção entre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, evidenciando a existência de diferentes magnitudes de infinito (os números Alephs), superando a noção de senso comum de que "tudo que não tem fim é igual".
3. **Desmistificação da Relação Dimensão-Cardinalidade:** A exposição detalhada da prova de que a dimensão espacial não altera a cardinalidade de um conjunto contínuo. Espera-se demonstrar formalmente que a reta real ($\mathbb{R}$) possui a mesma quantidade de pontos que o plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$) ou qualquer espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, explorando as bijeções de Cantor e as curvas de preenchimento de espaço.
4. **Distinção entre Cardinais e Ordinais:** A clarificação das diferenças estruturais e aritméticas entre Números Cardinais (que medem quantidade) e Números Ordinais (que medem posição/ordem), demonstrando como a aritmética transfinita se comporta de maneira distinta em cada caso (por exemplo, a não comutatividade da soma ordinal).
5. **Análise do Axioma da Escolha e Paradoxos:** Uma discussão crítica sobre o papel do Axioma da Escolha na matemática moderna, culminando na explicação do Paradoxo de Banach-Tarski. Espera-se elucidar como a aceitação desse axioma permite conclusões geometricamente contraintuitivas sobre a decomposição e medida de conjuntos.
6. **Contribuição Acadêmica:** A aprovação do Trabalho de Conclusão de Curso e a possível submissão de artigos ou resumos expandidos em eventos acadêmicos, divulgando a beleza e a complexidade da matemática transfinita.

Referências

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. **Proofs from THE BOOK**. 6. ed. Heidelberg: Springer, 2018. Disponível em: https://dpvipracollege.ac.in/wp-content/uploads/2023/01/Proofs-from-THE-BOOK-PDFDrive-.pdf. Acesso em: 10 de novembro de 2025.

BERTATO, F. M. O infinito e o método da diagonal de cantor - tradução de ueber eine elementare frage der mannigfaltigkeitslehre (1890-91). **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 23, n. 46, p. 421–439, jul. 2023. Disponível em: https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/441. Acesso em: 17 de novembro de 2025.

DOETS, H. C. **Zermelo-Fraenkel Set Theory**. 2022. Notas de Aula. Institute for Logic, Language and Computation (ILLC), University of Amsterdam. Disponível em: https://resources.illc.uva.nl/emeriti/uploaded_files/inlineitem/zf.pdf. Acesso em: 12 dez. 2025.

ENDERTON, H. B. **Elements of Set Theory**. Nova Iorque: Academic Press, 1977.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos De pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HALMOS, P. R. **Naive Set Theory**. Nova Iorque: Springer, 2014.

HAUSDORFF, F. **Set Theory**. Nova Iorque: Chelsea, 1962.

LIMA, E. L. **Análise Real**. 8. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2006. v. 1.

OEIS Foundation Inc. **Sequence A000217: Triangular numbers**. 2025. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Disponível em: https://oeis.org/A000217. Acesso em: 11 dez. 2025.

RAYO, A. **Big Number Duel**. 2007. Website. Massachusetts Institute of Technology. Disponível em: https://web.mit.edu/arayo/www/bignums.html. Acesso em: 11 dez. 2025.

SUPPES, P. **Axiomatic Set Theory**. Nova Iorque: Dover Publications, Inc., 1972.

WAPNER, L. M. **The Pea and the Sun**. Massachusetts: A K Peters/CRC Press, 2007.