UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DAMAT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDUARDO FURLAN

INFINITOS DE CANTOR: CARDINALIDADE, DIMENSÃO E A ESTRUTURA DOS NÚMEROS ORDINAIS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO
2025

EDUARDO FURLAN

INFINITOS DE CANTOR: CARDINALIDADE, DIMENSÃO E A ESTRUTURA DOS NÚMEROS ORDINAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no **Curso de Licenciatura em Matemática** da **Universidade Tecnológica Federal do Paraná**, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.

Orientador: Prof. Dr. Ivan Italo Gonzales Gargate
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

PATO BRANCO
2025

Altere este texto inserindo a dedicatória do seu trabalho.

AGRADECIMENTOS

Edite e coloque aqui os agradecimentos às pessoas e/ou instituições que contribuíram para a realização do trabalho.

É obrigatório o agradecimento às instituições de fomento à pesquisa que financiaram total ou parcialmente o trabalho, inclusive no que diz respeito à concessão de bolsas.

Um barulho no quarto
Um susto, um rato
Da minha cama eu avisto
Livros, teias, traças
O canto negro de um pássaro

(Rogério Skylab, "O Corvo")

RESUMO

FURLAN, Eduardo. Infinitos de Cantor: Cardinalidade, Dimensão e a Estrutura dos Números Ordinais. 2025. 38 f. Trabalho de Conclusão de Curso – **Curso de Licenciatura em Matemática**, **Universidade Tecnológica Federal do Paraná**. Pato Branco, 2025.

O Resumo é um elemento obrigatório em tese, dissertação, monografia e TCC, constituído de uma seqüência de frases concisas e objetivas, fornecendo uma visão rápida e clara do conteúdo do estudo. O texto deverá conter no máximo 500 palavras e ser antecedido pela referência do estudo. Também, não deve conter citações. O resumo deve ser redigido em parágrafo único, espaçamento simples e seguido das palavras representativas do conteúdo do estudo, isto é, palavras-chave, em número de três a cinco, separadas entre si por ponto e finalizadas também por ponto. Usar o verbo na terceira pessoa do singular, com linguagem impessoal, bem como fazer uso, preferencialmente, da voz ativa. Texto contendo um único parágrafo.

Palavras-chave: Teoria dos Conjuntos. Cardinalidade. Números Cardinais. Números Ordinais. Números Transfinitos. Axioma da Escolha. Hipótese do Contínuo. Paradoxo de Banach-Tarski. Aritmética Transfinita.

ABSTRACT

FURLAN, Eduardo. Cantor's Infinities: Cardinality, Dimension, and the Structure of Ordinal Numbers. 2025. 38 f. Trabalho de Conclusão de Curso – **Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná**. Pato Branco, 2025.

Elemento obrigatório em tese, dissertação, monografia e TCC. É a versão do resumo em português para o idioma de divulgação internacional. Deve ser antecedido pela referência do estudo. Deve aparecer em folha distinta do resumo em língua portuguesa e seguido das palavras representativas do conteúdo do estudo, isto é, das palavras-chave. Sugere-se a elaboração do resumo (Abstract) e das palavras-chave (Keywords) em inglês; para resumos em outras línguas, que não o inglês, consultar o departamento / curso de origem.

Keywords: Set Theory. Cardinality. Cardinal Numbers. Ordinal Numbers. Transfinite Numbers. Axiom of Choice. Continuum Hypothesis. Banach-Tarski Paradox. Transfinite Arithmetic.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE TEOREMAS

Axiomas

Definições

Teoremas

Corolários

Lemas

Proposições

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

HC	Hipótese do Contínuo
ZF	Sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel
ZFC	Sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel com escolha
t.q.	tal que

LISTA DE SÍMBOLOS

$\aleph_0$	Aleph zero; Cardinalidade dos naturais
$\|A\|$	Cardinalidade do conjunto A
$\mathfrak{c}$	Cardinalidade do contínuo
$\mathcal{P}(x)$	Conjunto das partes de x
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\varnothing$	Conjunto vazio
$\supseteq$	Contém
$\neq$	Diferente de
$\subseteq$	Está contido em
$\subset$	Está contido em
$\subsetneq$	Está contido em, mas não igual
$\exists!$	Existe um único
$\exists$	Existe um; Para algum
$f : A \to B$	Função f de A em B
$\implies$	Implica; Condicional
$\cap$	Interseção
ω	Letra grega omega; Primeiro ordinal infinito
φ	Letra grega phi
$\aleph$	Letra hebraica aleph
$>$	Maior que

$\geq$	Maior que ou igual
$<$	Menor que
$\leq$	Menor que ou igual
$\aleph_n$	n-ésima cardinalidade
$\notin$	Não pertence
a_n	O n-ésimo valor da sequência (a_n)
(a,b)	Par ordenado (a,b)
$\forall$	Para todo; Dado um
$\in$	Pertence
$\times$	Produto cartesiano
$\iff$	Se, e somente se; Bicondicional
(a_n)	Sequência de valores a_n
$\cup$	União

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Introduzida por Georg Cantor no século XIX como parte de sua Teoria dos Conjuntos, a Teoria da Cardinalidade representa um dos pilares essenciais da matemática moderna. Cantor propôs uma maneira revolucionária de medir e comparar o tamanho de conjuntos, incluindo os infinitos, o que o levou ao resultado contraintuitivo de que existem infinitos de diferentes tamanhos. Embora suas ideias tenham sido recebidas com grande ceticismo e hostilidade por muitos matemáticos da época, hoje a Teoria dos Conjuntos, em particular, o conceito de cardinalidade, são fundamentais, fornecendo a linguagem e a estrutura que sustentam praticamente todas as áreas da matemática, como, por exemplo, na Análise Real, toda a construção rigorosa dos números reais e as próprias definições de limite e continuidade dependem de noções de conjuntos.

A distinção entre conjuntos numeráveis e não numeráveis é crucial para entender a estrutura do contínuo, isto é, a existência de magnitudes de infinito distintas, onde o "contínuo" representa a cardinalidade de $\mathbb{R}$, superior à cardinalidade enumerável de $\mathbb{N}$. Da mesma forma, a Topologia, que estuda as propriedades dos espaços topológicos, é inteiramente fundamentada na linguagem dos conjuntos, a própria definição de um espaço topológico é baseada em uma coleção de subconjuntos (os "conjuntos abertos").

A escolha deste tema se justifica pelo interesse do autor nos fundamentos da matemática, especialmente nos conceitos relacionados ao infinito. A compreensão das diferentes formas de infinito e dos princípios de cardinalidade é essencial para uma formação matemática sólida e aprofundada. Além disso, o domínio deste conteúdo é um diferencial significativo para o acompanhamento de disciplinas teóricas em programas de mestrado e doutorado em matemática.

Dessa forma, considerando o contexto descrito o objetivo geral deste trabalho é apresentar os fundamentos e as propriedades dos números cardinais na Teoria dos Conjuntos. Busca-se, com isso, auxiliar estudantes de matemática que planejam seguir carreira acadêmica, oferecendo uma sequência clara e organizada do conteúdo, com foco em Cardinalidade. Para alcançar este objetivo principal, foram delineados os seguintes objetivos específicos:

1. Diferenciar conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis, identificando suas características e propriedades fundamentais.
2. Demonstrar que a dimensão de um espaço não está relacionada ao tamanho (cardinalidade) dos conjuntos envolvidos.
3. Expor o conceito de números ordinais e seu papel na Teoria dos Conjuntos, distinguindo-os dos números cardinais.

Para atingir tais objetivos, o trabalho explorará os conceitos de Cardinalidade e Números Cardinais, a diferença entre Cardinalidade e Dimensão, e os Números

Ordinais. A discussão se aprofundará em tópicos avançados e suas consequências, como o Axioma da Escolha, o Paradoxo de Banach-Tarski e os Números Transfinitos de Cantor.

2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS

Neste capítulo, estabelecem-se as bases formais sobre as quais todo o trabalho se sustenta. A Teoria dos Conjuntos fornece a linguagem universal da matemática moderna, mas sua construção requer rigor para evitar contradições. Serão apresentados os axiomas essenciais que definem o comportamento dos conjuntos e suas operações elementares, além da construção axiomática dos números naturais via Axiomas de Peano, que servirá de ponto de partida para a aritmética cardinal.

2.1 Axiomas da Teoria dos Conjuntos

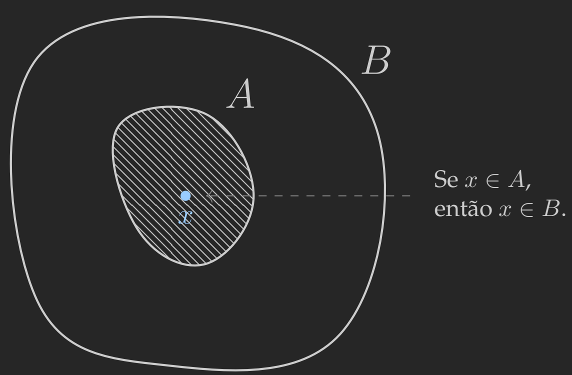
A base de toda a matemática moderna pode ser construída sobre o conceito de "conjunto" (que também chamaremos de "coleção", ou "família"). Enderton (1977) menciona os axiomas a seguir.

Axioma 1 (Axioma da Extensão)**.** *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, ambos possuem os mesmos elementos.*

$$\forall A \forall B \left(\forall x (x \in A \iff x \in B\right) \implies A = B)$$

Definição 1 (Subconjunto)**.** Se A e B são conjuntos e todo elemento de A está em B, dizemos que A é um subconjunto de B, A está contido em B, ou que B contém A, e escrevemos $A \subseteq B$ e $B \supseteq A$, respectivamente.

Figura 1 – Representação visual de Subconjunto



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

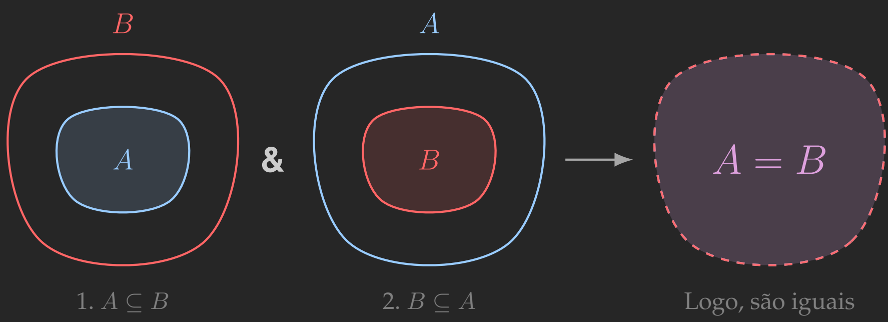
Exemplo 1 (Biblioteca de Babel)**.** Considere $\mathscr{L}$ como o conjunto imagem[1] do algoritmo da *Library of Babel*, desenvolvido por Basile (2015). Visto que este algoritmo gera todas as permutações possíveis de livros com 1312000 caracteres, definimos o subconjunto $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{L}$ contendo os livros que descrevem a realidade.

Especificamente, deve existir um elemento $d \in \mathscr{D}$ que narra, com exatidão jornalística, todos os passos que você tomou desde o momento em que acordou hoje, suas refeições e pensamentos, culminando na descrição detalhada do exato instante em que você encontrou e leu este livro que descreve seus passos.

A completude combinatória de $\mathscr{L}$ assegura que esse texto recursivo existe, embora a probabilidade de encontrá-lo aleatoriamente seja infinitesimal.

Definição 2 (Igualdade de Conjuntos)**.** $A = B \iff A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Figura 2 – A Igualdade de Conjuntos como consequência da dupla inclusão



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Exemplo 2. Os conjuntos $A = \{1{,}2\}$ e $B = \{2{,}1\}$ são iguais, pois $1 \in B$ e $2 \in B$, logo $A \subseteq B$ e $2 \in A$ e $1 \in A$, logo $B \subseteq A$.

Exemplo 3. O conjunto A que contém todas as soluções naturais para a equação $x+1 = 0$ é igual ao conjunto B que contém todas as soluções reais para a equação $x = x + 1$.

Exemplo 4. Nenhum par dos três conjuntos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ e $\{\{\varnothing\}\}$ são iguais.

Para mostrar que nenhum par dos três conjuntos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ e $\{\{\varnothing\}\}$ são iguais, analisamos cada caso separadamente utilizando o princípio da extensão:

1. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$: O conjunto vazio $\varnothing$ não possui elementos. Já o conjunto $\{\varnothing\}$ é um *singleton* que contém um elemento (o próprio vazio). Como um é vazio e o outro não, eles não podem ser iguais.
2. $\varnothing \neq \{\{\varnothing\}\}$: Pelo mesmo argumento anterior, $\varnothing$ não tem elementos, enquanto $\{\{\varnothing\}\}$ possui um elemento (o conjunto $\{\varnothing\}$). Logo, são distintos.

[1] Note que, rigorosamente, o conceito de "Imagem" de uma função será definido apenas na Seção 2.3. Entretanto, conceitos ainda não definidos podem ser utilizados nos exemplos para fins didáticos e intuitivos.

3. $\{\varnothing\} \neq \{\{\varnothing\}\}$: Ambos são *singletons*, então precisamos comparar seus elementos. O único elemento do primeiro conjunto é $\varnothing$. O único elemento do segundo conjunto é $\{\varnothing\}$. Como já provamos no item 1 que $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, conclui-se que os elementos são diferentes. Consequentemente, os conjuntos que os contêm também são diferentes.

Portanto, os três conjuntos são distintos dois a dois.

Definição 3 (Subconjunto Próprio)**.** Quando temos $A \subseteq B$ e $A \neq B$ escrevemos $A \subsetneq B$ e dizemos que A é um subconjunto próprio de B.

Exemplo 5 (Números Surreais e Jogos)**.** Em sua obra *On Numbers and Games*, Conway (2001) define um universo vasto de "Jogos" construídos recursivamente a partir do conjunto vazio. Um jogo G é definido por dois conjuntos de jogos anteriores, $G = \{L \mid R\}$, representando as opções do jogador da Esquerda e da Direita.

Seja $\mathcal{G}$ a classe de todos os jogos possíveis. Seja $\mathbb{N}\mathbf{o}$ a classe dos Números Surreais.

Para que um jogo seja considerado um número ($G \in \mathbb{N}\mathbf{o}$), ele deve obedecer a uma regra de ordem estrita: nenhum membro do conjunto da esquerda (L) pode ser maior ou igual a qualquer membro do conjunto da direita (R).

Considere o jogo "*Star*" ($*$), definido como $* = \{0 \mid 0\}$. Em $*$, o jogador da esquerda pode mover para 0 e o da direita também. Como $0 \not< 0$, a condição fundamental é violada. Portanto, $*$ é um elemento de $\mathcal{G}$ que existe perfeitamente como jogo (o primeiro jogador ganha), mas não é um número: $\mathbb{N}\mathbf{o} \subsetneq \mathcal{G}$.

Definição 4 (Notação de Construção de Conjuntos)**.** Seja A um conjunto e $\varphi(x)$ uma fórmula[2] ou condição sobre x. O conjunto formado por todos os elementos de A que satisfazem $\varphi(x)$ é denotado por

$$\{x \in A : \varphi(x)\}.$$

Esta notação define o subconjunto de A cujos membros tornam a condição $\varphi(x)$ verdadeira.

Nota. Muitas vezes, a condição $x \in A$ pode fazer parte de $\varphi(x)$, ou o conjunto A pode estar subentendido, nesses casos podemos escrever apenas $\{x : \varphi(x)\}$.

Exemplo 6. Seja $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $\varphi(x)$ a condição "x é um número ímpar", então o conjunto B é:

$$B = \{x \in \{1,2,3,4,5\} : x \text{ é um número ímpar.}\} = \{1,3,5\}.$$

[2]Neste contexto, uma "fórmula" (ou condição) refere-se a uma sentença bem formada na linguagem da lógica de primeira ordem da teoria dos conjuntos (que inclui os símbolos lógicos $\in$, $=$, &, ou, $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$). Informalmente, $\varphi(x)$ é qualquer afirmação matemática sobre a variável x que pode ser julgada como verdadeira ou falsa para cada elemento do conjunto A.

Exemplo 7. Dado qualquer conjunto A, podemos usar uma condição lógica que é sempre falsa, como $x \neq x$, para construir um subconjunto sem elementos. O conjunto resultante é o conjunto vazio:

$$\varnothing = \{x \in A : x \neq x\}.$$

Exemplo 8 (Corte de Dedekind)**.** A notação de construção é fundamental para preencher as "lacunas" dos números racionais e construir os números reais. Podemos definir o número $\sqrt{2}$ (que não existe em $\mathbb{Q}$) como o subconjunto de todos os racionais cujo quadrado é menor que 2 (Enderton, 1977, 114). Este conjunto é chamado de Corte de Dedekind:

$$D_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x^2 < 2\}.$$

Note que $D_{\sqrt{2}}$ é um conjunto puramente de racionais, mas representa um número irracional, ilustrando como subconjuntos de um sistema podem modelar elementos de um sistema mais complexo.

Exemplo 9 (Números Primos)**.** A condição $\varphi(x)$ pode encapsular propriedades lógicas complexas envolvendo quantificadores. O conjunto P de todos os números primos pode ser construído a partir dos Naturais impondo que seus únicos divisores sejam triviais:

$$P = \{n \in \mathbb{N} : n > 1 \ \& \ \forall d \in \mathbb{N}((d \text{ divide } n) \to (d = 1 \text{ ou } d = n))\}.$$

Aqui, a "fórmula" exige que para todo candidato a divisor d, ele deve necessariamente ser a unidade ou o próprio número, caso contrário, n não entra no conjunto.

É fundamental observar que esta definição de construção impõe uma restrição: os novos conjuntos devem ser formados a partir de elementos de um conjunto A preexistente. A ausência dessa restrição rigorosa é característica da teoria de Halmos, *"Naive Set Theory"*, que adota uma abordagem "não axiomática"[3] da teoria de conjuntos. Essa liberdade excessiva na criação de conjuntos permite a formulação de paradoxos, como os apresentados por Enderton (1977, p. 5):

1. Considere o conjunto

$$A = \{x : x \text{ é um inteiro positivo definível em uma linha de texto}\}$$

O problema aqui é a palavra "definível." Conseguimos definir muitos números em uma linha de texto

118,

O menor número primo maior que 13,

[3]Apesar de ser uma abordagem não axiomática, Halmos ainda trabalha com alguns axiomas. *"The present treatment might best be described as axiomatic set theory from the naive point of view. It is axiomatic in that some axioms for set theory are stated and used as the basis of all subsequent proofs. It is naive in that the language and notation are those of ordinary informal (but formalizable) mathematics."* (Halmos, 2014, p. v).

O 3º número triangular[4],
O menor número maior que qualquer número designado com menos de 10^{100} símbolos[5],
A raiz inteira do polinômio $x^3 - 554x^2 + 65530x - 3885000$.

Observe que o conjunto A é um conjunto finito de inteiros (pois há uma quantidade finita de símbolos que podem ser usados, e apenas uma quantidade finita de símbolos cabem em uma linha). Assim, existe um número x tal que

x é o menor número inteiro postivio que não é definível em uma linha de texto.

Porém, a linha anterior é, precisamente, uma definição em uma linha de tal número, que é, por construção, não definível em uma linha.

2. O clássico paradoxo de Russell. Considere o conjunto

$$B = \{x : x \notin x\}.$$

Este é o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos, o que nos faz questionar: $B \in B$? Se $B \notin B$, então B satisfaz a condição de entrada, logo $B \in B$. Agora, se $B \in B$, então B não satisfaz a condição de entrada, logo $B \notin B$. Assim temos que ambos $B \in B$ e $B \notin B$ são impossíveis de acontecer.

Axioma 2 (Axioma do Vazio)**.** *Existe um conjunto que não contém elementos.*

$$\exists A\, \forall x (x \notin A).$$

Definição 5 (Conjunto Vazio)**.** $\varnothing$ é o conjunto que não contém elementos.

Axioma 3 (Axioma do Par)**.** *Para quaisquer dois conjuntos x e y, existe um conjunto contendo apenas x e y.*

Definição 6 (Conjunto Par)**.** Para quaisquer conjuntos u e v, o conjunto par $\{u,v\}$ é o conjunto cujos únicos elementos são u e v.

Exemplo 10. Sejam $x = \phi$ e $y = \{\varphi\}$ então temos esse conjunto como $\{\phi, \{\varphi\}\}$.

Definição 7 (*Singleton*; Conjunto Unitário)**.** Para evitar a necessidade de um "Axioma do *Singleton*" que diz "Para qualquer conjunto x existe um conjunto cujo único elemento é x" definimos o conjunto contendo apenas x como o conjunto

$$\{x\} = \{x,x\}$$

[4] O n-ésimo número triangular é $a_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$. Para mais informações, consulte a sequência A000217 na OEIS Foundation Inc. (2025).

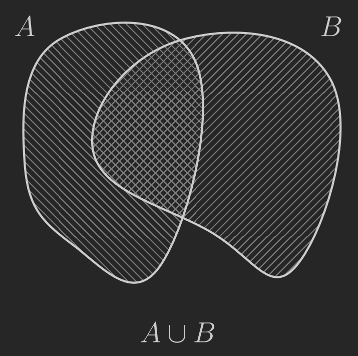
[5] O "número de Rayo". Número ganhador do *Big Number Duel*, um duelo organizado pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) entre Adam Elga e Agustín Rayo. Sua definição formal pode ser encontrada em Rayo (2007).

Axioma 4 (Axioma da União)**.** *Para qualquer conjunto A, existe um conjunto B no qual seus elementos são exatamente os elementos dos elementos de A.*

$$\forall x \, (x \in B \iff (\, \exists b \in A) x \in b) \, .$$

Definição 8 (União Finita de Conjuntos)**.** Para quaisquer conjuntos A e B, a união de A e B é o conjunto $A \cup B$ cujos elementos são aqueles que pertencem a A ou a B (ou a ambos).

Figura 3 – Representação visual da União Finita de conjuntos



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Definição 9 (Conjuntos Finitos)**.** Dados quaisquer x_1, x_2, x_3 nós definimos

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_3\}.$$

Da mesma forma podemos definir $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Em geral, dados n conjuntos, definimos

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{x_n\}.$$

Axioma 5 (Axioma da Potência)**.** *Para qualquer conjunto A, existe um conjunto no qual seus membros são exatamente os subconjuntos de A.*

$$\forall A \, \exists B \, \forall x (x \in B \iff x \subseteq A).$$

Definição 10 (Conjunto das Partes)**.** Para qualquer conjunto A, o conjunto das partes de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto cujos elementos são exatamente os subconjuntos de A.

Exemplo 11. Seja $A = \{1,2,3\}$ então

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

Proposição 1. *Sejam B e C conjuntos. Se $B \subseteq C$, então $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$.*

Demonstração.

Suponha que $B \subseteq C$. Queremos mostrar que todo elemento de $\mathcal{P}(B)$ também é elemento de $\mathcal{P}(C)$.

Seja $x \in \mathcal{P}(B)$. Pela definição de conjunto das partes, isso significa que $x \subseteq B$.

Como temos por hipótese que $B \subseteq C$, e sabendo que a inclusão de conjuntos é transitiva, concluímos que $x \subseteq C$.

Pela definição de conjunto das partes, se $x \subseteq C$, então $x \in \mathcal{P}(C)$.

Como x foi escolhido arbitrariamente em $\mathcal{P}(B)$, concluímos que $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$.

□

Proposição 2. *Sejam B e C conjuntos. Se $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$, então $B \subseteq C$.*

Demonstração.

Suponha que $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$. Queremos mostrar que todo elemento de B também é elemento de C.

Seja $x \in B$. Considere o *singleton* $\{x\}$.

Como $x \in B$, temos que $\{x\} \subseteq B$. Pela definição de conjunto das partes, isso implica que $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$.

Por hipótese, sabemos que $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$. Logo, como $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$, concluímos que $\{x\} \in \mathcal{P}(C)$.

Novamente pela definição de conjunto das partes, $\{x\} \in \mathcal{P}(C)$ significa que $\{x\} \subseteq C$.

Finalmente, se $\{x\} \subseteq C$, então o elemento x deve pertencer a C.

Como x foi escolhido arbitrariamente em B, concluímos que $B \subseteq C$. □

Proposição 3. *$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ se, e somente se, $A = B$.*

Demonstração.

- ($\Longleftarrow$) Trivial.
- ($\Longrightarrow$) Suponha que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. Para provar que $A = B$, devemos mostrar que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.
  - ($\subseteq$) Sabemos que todo conjunto é subconjunto de si mesmo, $A \subseteq A$. Pela definição de conjunto das partes, isso implica que $A \in \mathcal{P}(A)$. Utilizando a hipótese de que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, podemos substituir para obter $A \in \mathcal{P}(B)$. Novamente pela definição de conjunto das partes, se $A \in \mathcal{P}(B)$, então $A \subseteq B$.

($\supseteq$) Análogo.

Como provamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, concluímos que $A = B$. $\square$

Proposição 4. *Sejam $x, y \in B$. Então $\{\{x\}, \{x,y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$.*

Demonstração.

Queremos mostrar que o conjunto $P = \{\{x\}, \{x,y\}\}$ é um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$.

Pela definição de conjunto das partes, dizer que $P \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$ é equivalente a dizer que $P \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Para que $P \subseteq \mathcal{P}(B)$, todo elemento de P deve pertencer a $\mathcal{P}(B)$. Os elementos de P são $\{x\}$ e $\{x,y\}$. Vamos analisar cada um:

1. Como $x \in B$, temos que o subconjunto unitário $\{x\} \subseteq B$. Pela definição de potência, isso implica que $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$.

2. Como $x \in B$ e $y \in B$, temos que o subconjunto $\{x,y\} \subseteq B$. Logo, $\{x,y\} \in \mathcal{P}(B)$.

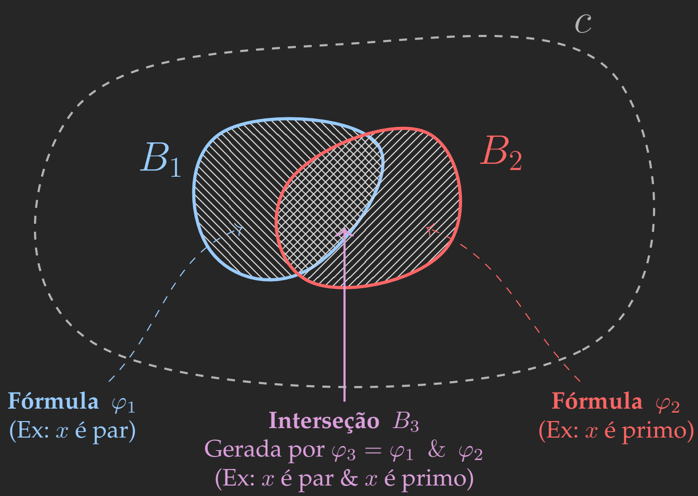
Visto que ambos os elementos de P pertencem a $\mathcal{P}(B)$, concluímos que $P \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Portanto, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$. $\square$

Axioma 6 (Axiomas de Subconjunto)**.** *Para cada fórmula φ que não contenha o símbolo B, a seguinte sentença é um axioma:*

$$\forall t_1 \ldots \forall t_k \forall c \exists B \forall x (x \in B \iff x \in c \ \& \ \varphi(x,t_1,\ldots,t_k)).$$

Figura 4 – $\varphi(x)$ atua como um filtro lógico sobre o conjunto c



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Nota. Também conhecido como *Aussonderung Axioms*, cunhado por Zermelo. A palavra *Aussonderung* combina *aus* (fora) e *sondern* (separar), transmitindo a ideia de "separar para fora" ou "selecionar".

Diferentemente dos axiomas anteriores, este não é um único axioma, mas sim um esquema infinito de axiomas, existe um axioma distinto para cada fórmula φ possível na linguagem da teoria dos conjuntos. Isso deve-se ao fato de que, na lógica de primeira ordem, não podemos quantificar sobre fórmulas (não podemos escrever "$\forall\varphi$"). Portanto, para cada condição lógica φ (como "x é par", "$x \notin x$", etc.), geramos um axioma específico.

Este esquema afirma que, dados quaisquer conjuntos $t_1, \ldots, t_k$ (parâmetros da fórmula) e um conjunto c, existe um subconjunto B formado exatamente pelos elementos de c que satisfazem a condição φ. Esta formulação evita o Paradoxo de Russell ao impedir a construção de conjuntos irrestritos, todo novo conjunto deve ser "separado" de um conjunto c previamente existente. A exigência de que φ não contenha B é técnica, para evitar definições circulares onde o conjunto a ser criado apareceria na própria condição que o define.

Este princípio é a resposta axiomática de ZFC aos paradoxos da teoria ingênua. Na teoria ingênua, supunha-se que para qualquer propriedade $\varphi(x)$, existia o conjunto $\{x : \varphi(x)\}$. O esquema impõe uma restrição fundamental: só podemos construir um novo conjunto separando elementos de um conjunto c já existente.

Assim, a notação de construção de conjuntos que definimos anteriormente:

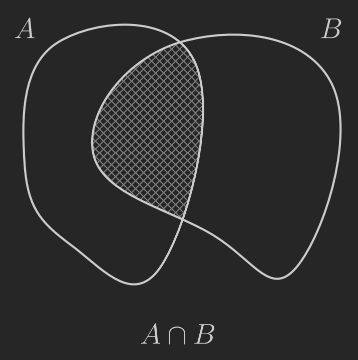
$$\{x \in c : \varphi(x)\}$$

é, na verdade, a representação simbólica do conjunto B cuja existência é garantida por este axioma.

Definição 11 (Interseção Finita de Conjuntos)**.** Para quaisquer conjuntos A e B, a interseção de A e B é o conjunto $A \cap B$ cujos elementos são aqueles que pertencem a A e a B simultaneamente.

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$$

Figura 5 – Representação visual da Interseção Finita de conjuntos



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Exemplo 12 (Existência da Interseção)**.** Considere a fórmula φ dada por "$x \in a$". Aqui, a atua como um parâmetro (na notação do axioma, $t_1 = a$). O axioma correspondente a esta fórmula no Esquema de Separação é:

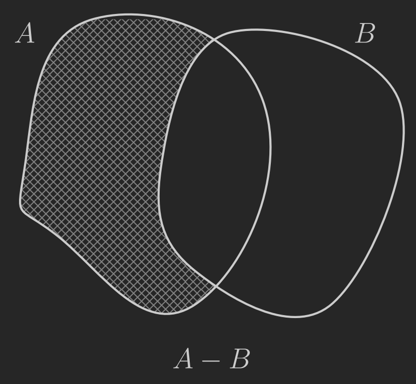
$$\forall a \, \forall c \, \exists B \, \forall x (x \in B \iff x \in c \;\; \& \;\; x \in a)$$

Este axioma garante que, dados dois conjuntos c e a, existe um conjunto B contendo exatamente os elementos que pertencem a ambos. Esse conjunto B é a interseção $c \cap a$.

Definição 12 (Complemento Relativo; Diferença)**.** Para quaisquer conjuntos A e B, o complementar relativo de B em A (também chamado de diferença de conjuntos) é o conjunto $A - B$ formado pelos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B.

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}$$

Figura 6 – Representação visual do Complemento Relativo



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Exemplo 13 (Existência do Complementar Relativo)**.** Considere a fórmula φ dada por "$x \notin a$". Novamente, a é um parâmetro. O axioma gerado é:

$$\forall a \, \forall c \, \exists B \, \forall x (x \in B \iff x \in c \ \& \ x \notin a)$$

Este axioma assegura a existência do conjunto B formado pelos elementos que estão em c mas não estão em a. Este conjunto é o complementar relativo de a em c (ou a diferença entre conjuntos), denotado por $c - a$.

Exemplo 14 (O Conjunto de Russell Relativizado)**.** Considere a fórmula φ dada por "$x \notin x$". Esta fórmula não possui parâmetros adicionais. O axioma resultante é:

$$\forall c \, \exists B \, \forall x (x \in B \iff x \in c \ \& \ x \notin x)$$

Este exemplo é historicamente crucial. Ele define o subconjunto $B = \{x \in c : x \notin x\}$. Ao contrário da Teoria Ingênua, isso não gera uma contradição, mas sim prova que $B \notin c$. Isso é usado para demonstrar que não existe um "conjunto de todos os conjuntos" (pois se c fosse tal conjunto, teríamos $B \in c$ e chegaríamos ao Paradoxo de Russell).

Teorema 1. *Não existe um conjunto ao qual todo conjunto pertença*

$$\nexists A \, \forall x (x \in A).$$

Demonstração.

Seja A um conjunto arbitrário, para mostrar que A não contém todos os conjuntos, basta construir um conjunto B não pertencente à A. Seja

$$B = \{x \in A : x \notin x\}.$$

Nós temos por construção de B que

$$c \in B \iff c \in A \ \& \ c \notin c.$$

Considere $c = B$, então

$$B \in B \iff B \in A \ \& \ B \notin B.$$

Assuma que $B \in A$, então a fórmula se reduz para

$$B \in B \iff B \notin B.$$

O que é uma contradição, pois para que um lado seja verdadeiro o outro precisa ser falso, logo o problema está em assumir que $B \in A$, isso prova que $B \notin A$. □

Definição 13 (União de Conjuntos)**.** Suponha que temos uma coleção infinita de conjuntos $A = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$ e queremos fazer a união de todos os b_i. Precisamos de uma operação geral de união:

$$\begin{aligned} \bigcup A &= \bigcup_i b_i \\ &= \{x : x \text{ é membro de algum elemento de } A\} \\ &= \{x : (\exists b \in A) x \in b\}. \end{aligned}$$

Exemplo 15.

$$\begin{aligned} \bigcup\{a,b\} &= \{x : x \text{ é elemento de algum membro de } \{a,b\}\} \\ &= \{x : x \text{ é membro de } a \text{ ou } b\} \\ &= a \cup b. \end{aligned}$$

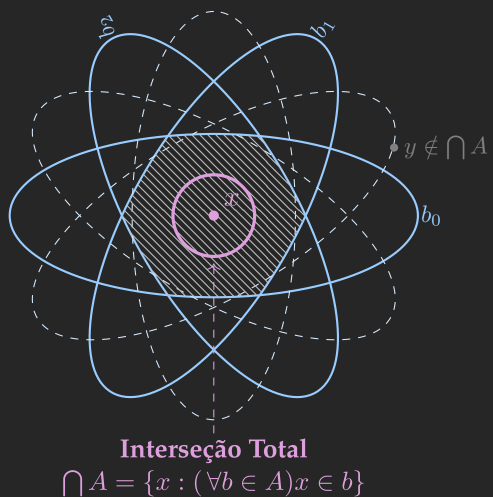
Exemplo 16. Em casos extremos nós temos

$$\cup\{a\} = a \qquad \text{e} \qquad \cup \varnothing = \varnothing.$$

Definição 14 (Interseção de Conjuntos)**.** Considere A como sendo o mesmo conjunto da Definição 13. Definimos a interseção $\bigcap A$ de A como

$$x \in \bigcap A \iff x \text{ é elemento de todo membro de } A.$$

Figura 7 – Interseção Infinita



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Teorema 2. *Para qualquer conjunto não vazio A, existe um único conjunto B t.q. para qualquer x,*

$$x \in B \iff x \text{ é elemento de todos os membros de } A.$$

Demonstração.

Como A é não vazio, tome algum elemento c fixo de A. Então por um Axioma de Subconjunto existe um conjunto B t.q. para todo x,

$$\begin{aligned} x \in B &\iff x \in c \;\; \& \;\; x \text{ é elemento de todo outro membro de } A \\ &\iff x \text{ é elemento de todo membro de } A. \end{aligned}$$

A unicidade segue do Axioma 1. □

O Teorema 2 serve para definirmos $\bigcap A$ como sendo esse conjunto B. Temos também que

$$B = \{x : (\forall b \in A)x \in b\}.$$

Proposição 5. *Se $b \in A$, então $b \subseteq \bigcup A$.*

Demonstração.

Seja x um elemento qualquer tal que $x \in b$. Como $b \in A$, pela definição de união de um conjunto de conjuntos, segue-se que $x \in \bigcup A$. Portanto, todo elemento de b é um elemento de $\bigcup A$, o que implica que $b \subseteq \bigcup A$. □

Proposição 6. *Se $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in A$, então $\{x, y\} \in \bigcup A$, $x \in \bigcup\bigcup A$ e $y \in \bigcup\bigcup A$.*

Demonstração.

Seja $u = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Por hipótese, $u \in A$. Visto que $\{x, y\} \in u$, pela definição de união, temos que $\{x, y\} \in \bigcup A$.

Agora considere o conjunto $\{x, y\}$. Como $\{x, y\} \in \bigcup A$, qualquer elemento pertencente a $\{x, y\}$ pertence a $\bigcup(\bigcup A)$, denotado como $\bigcup\bigcup A$. Como $x \in \{x, y\}$, segue-se que $x \in \bigcup\bigcup A$. De modo análogo, como $y \in \{x, y\}$, segue-se que $y \in \bigcup\bigcup A$. □

Proposição 7. *Seja $S = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Então $\bigcup\bigcap S = a$ e $\bigcap\bigcup S = a \cap b$.*

Demonstração.

Primeiro, calculamos a interseção dos elementos de S:

$$\bigcap\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$$

Logo, aplicando a operação de união ao resultado:

$$\bigcup\bigcap\{\{a\}, \{a, b\}\} = \bigcup\{a\} = a$$

Por outro lado, calculamos primeiro a união dos elementos de S:

$$\bigcup\{\{a\},\{a,b\}\} = \{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\}$$

Portanto, aplicando a operação de interseção ao resultado (assumindo que a e b são conjuntos):

$$\bigcap\bigcup\{\{a\},\{a,b\}\} = \bigcap\{a,b\} = a \cap b$$

□

Proposição 8. *Se todo membro de $\mathcal{A}$ é um subconjunto de B, então $\bigcup \mathcal{A} \subseteq B$*

$$(a \in \mathcal{A} \implies a \subseteq B) \implies \bigcup \mathcal{A} \subseteq B.$$

Demonstração.

Para provar que $\bigcup \mathcal{A} \subseteq B$ precisamos mostrar que para qualquer $x \in \bigcup \mathcal{A}$ necessariamente $x \in B$. Pela Definição 13, $x \in \bigcup \mathcal{A} \iff \exists a \in \mathcal{A}$ t.q. $x \in a$.

$$\begin{aligned} x \in \bigcup \mathcal{A} &\implies \exists a \in \mathcal{A} \text{ t.q. } x \in a, \\ a \in \mathcal{A} &\implies a \subseteq B, \\ x \in a \subseteq B &\implies x \in B. \end{aligned}$$

□

Proposição 9. *Para todo conjunto A, tem-se que $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$.*

Demonstração.

Devemos demonstrar a dupla inclusão entre os conjuntos.

($\subseteq$) Seja $x \in \bigcup \mathcal{P}(A)$. Pela definição de união, existe algum $S \in \mathcal{P}(A)$ tal que $x \in S$. Pela definição de conjunto das partes, $S \in \mathcal{P}(A) \implies S \subseteq A$. Logo, se $x \in S$ e $S \subseteq A$, então necessariamente $x \in A$.

($\supseteq$) Seja $x \in A$. Sabemos que $A \subseteq A$, logo $A \in \mathcal{P}(A)$. Como existe um conjunto em $\mathcal{P}(A)$ (o próprio A) que contém x, concluímos por definição que $x \in \bigcup \mathcal{P}(A)$.

Portanto, vale a igualdade $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$. □

Proposição 10. *Para todo conjunto A, vale a inclusão $A \subseteq \mathcal{P}(\bigcup A)$. A igualdade $A = \mathcal{P}(\bigcup A)$ ocorre se, e somente se, existe um conjunto B tal que $A = \mathcal{P}(B)$ (ou seja, se A é um conjunto das partes).*

Demonstração.

Seja $x \in A$. Para demonstrar que $x \in \mathcal{P}(\bigcup A)$, devemos mostrar que $x \subseteq \bigcup A$.

Tome um elemento arbitrário $y \in x$. Visto que $y \in x$ e $x \in A$, pela definição de união, temos que $y \in \bigcup A$.

Como a escolha de y foi arbitrária, concluímos que todo elemento de x pertence a $\bigcup A$, ou seja, $x \subseteq \bigcup A$.

Finalmente, pela definição de conjunto das partes, $x \subseteq \bigcup A \implies x \in \mathcal{P}(\bigcup A)$. Portanto, $A \subseteq \mathcal{P}(\bigcup A)$.

A demonstração da igualdade fica a cargo do leitor. □

Proposição 11. *Para quaisquer conjuntos A e B, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.*

Demonstração.

Para demonstrar a igualdade, mostraremos que um conjunto qualquer pertence ao lado esquerdo se, e somente se, pertence ao lado direito.

Seja S um conjunto qualquer. Temos que:

$$\begin{aligned} S \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) &\iff S \in \mathcal{P}(A) \text{ e } S \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff S \subseteq A \text{ e } S \subseteq B \\ &\iff S \subseteq (A \cap B) \\ &\iff S \in \mathcal{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$. □

Proposição 12. *Para quaisquer conjuntos A e B, vale a inclusão $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. A igualdade ocorre se, e somente se, $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.*

Demonstração.

Seja $S \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Pela definição de união, temos que $S \in \mathcal{P}(A)$ ou $S \in \mathcal{P}(B)$. Analisaremos os dois casos:

- Se $S \in \mathcal{P}(A)$, então $S \subseteq A$. Como sabemos que $A \subseteq A \cup B$, pela transitividade da inclusão temos $S \subseteq A \cup B$. Logo, $S \in \mathcal{P}(A \cup B)$.
- Analogamente, se $S \in \mathcal{P}(B)$, então $S \subseteq B$. Como $B \subseteq A \cup B$, segue que $S \subseteq A \cup B$. Logo, $S \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Em qualquer caso, concluímos que $S \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Portanto, a inclusão $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ é válida.

A demonstração da igualdade é deixada a cargo do leitor. □

Proposição 13. *Não existe um conjunto ao qual pertença todo singleton (ou seja, todo conjunto da forma $\{x\}$).*

Demonstração.

Suponha, por absurdo, que exista um conjunto $\mathscr{A}$ que contenha todos os *singletons*. Ou seja, para qualquer conjunto x, temos que $\{x\} \in \mathscr{A}$.

Considere agora o conjunto $\bigcup \mathscr{A}$. Dado um conjunto qualquer y, podemos formar o conjunto unitário $\{y\}$. Pela nossa hipótese, $\{y\} \in \mathscr{A}$.

Pela definição de união, $z \in \bigcup \mathscr{A} \iff \exists S \in \mathscr{A}$ t.q. $z \in S$. Como $\{y\} \in \mathscr{A}$ e $y \in \{y\}$, conclui-se que $y \in \bigcup \mathscr{A}$.

Visto que y é um conjunto arbitrário, isso implica que $\bigcup \mathscr{A}$ contém todos os conjuntos existentes. Portanto, $\bigcup \mathscr{A}$ seria o conjunto de todos os conjuntos, cuja existência entra em contradição com o Teorema 1.

Essa contradição mostra que tal conjunto $\mathscr{A}$ não pode existir. $\square$

Proposição 14. *Se $a \in B$, então $\mathcal{P}(a) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup B))$.*

Demonstração.

A demonstração segue da aplicação sucessiva das definições de união e conjunto das partes.

Primeiro, observe que $a \subseteq \bigcup B$. De fato, se $x \in a$, como $a \in B$, então x pertence a um conjunto que está em B, o que implica $x \in \bigcup B$.

Agora, mostraremos que $\mathcal{P}(a) \subseteq \mathcal{P}(\bigcup B)$. Seja $S \in \mathcal{P}(a)$. Então $S \subseteq a$. Como $a \subseteq \bigcup B$, pela transitividade da inclusão, temos $S \subseteq \bigcup B$. Logo, $S \in \mathcal{P}(\bigcup B)$.

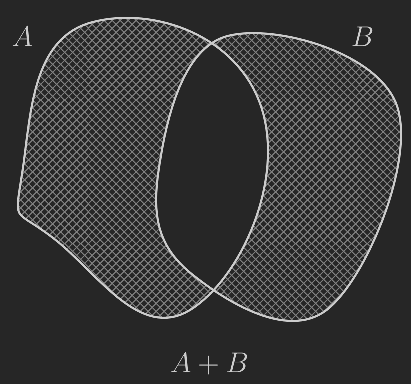
Visto que todo elemento de $\mathcal{P}(a)$ é também elemento de $\mathcal{P}(\bigcup B)$, concluímos que $\mathcal{P}(a) \subseteq \mathcal{P}(\bigcup B)$.

Finalmente, pela definição de conjunto das partes, se $\mathcal{P}(a) \subseteq \mathcal{P}(\bigcup B)$, então $\mathcal{P}(a) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup B))$. $\square$

Proposição 15. *A diferença de conjuntos não é associativa. Isto é, existem conjuntos A, B e C tais que $A - (B - C) \neq (A - B) - C$.*

Definição 15 (Diferença Simétrica)**.** A diferença simétrica $A + B$ dos conjuntos A e B é o conjunto definido por $(A - B) \cup (B - A)$.

Figura 8 – Representação visual da Diferença Simétrica



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Proposição 16. *Para quaisquer conjuntos A, B e C, a interseção é distributiva em relação à diferença simétrica:*

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$$

Proposição 17. *Para quaisquer conjuntos A, B e C, a diferença simétrica é associativa:*

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Proposição 18. *Para quaisquer conjuntos A e B, as seguintes quatro condições são equivalentes:*

(a) $A \subseteq B$;

(b) $A - B = \varnothing$;

(c) $A \cup B = B$;

(d) $A \cap B = A$.

Proposição 19. *Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$. Então, $B = C$.*

Proposição 20. *Para quaisquer famílias de conjuntos A e B, tem-se que:*

$$\bigcup(A \cup B) = \bigcup A \cup \bigcup B$$

Proposição 21. *Se A e B são famílias não vazias de conjuntos, então:*

$$\bigcap(A \cup B) = \bigcap A \cap \bigcap B$$

Proposição 22. *Se $\mathscr{B}$ é uma família não vazia de conjuntos, então a união distribui sobre a interseção da seguinte forma:*

$$A \cup \bigcap \mathscr{B} = \bigcap \{A \cup X : X \in \mathscr{B}\}$$

Proposição 23. *Se $\mathscr{A}$ é uma família não vazia de conjuntos, então o conjunto das partes da interseção é igual à interseção dos conjuntos das partes:*

$$\mathcal{P}(\bigcap \mathscr{A}) = \bigcap \{\mathcal{P}(X) : X \in \mathscr{A}\}$$

Proposição 24. *Para qualquer família de conjuntos $\mathscr{A}$, a união dos conjuntos das partes está contida no conjunto das partes da união:*

$$\bigcup \{\mathcal{P}(X) : X \in \mathscr{A}\} \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \mathscr{A})$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{A}$ (ou seja, existe um conjunto $M \in \mathscr{A}$ tal que todos os outros membros de $\mathscr{A}$ são subconjuntos de M).

Proposição 25. *A igualdade*

$$A \cup \bigcup \mathscr{B} = \bigcup \{A \cup X : X \in \mathscr{B}\}$$

é válida se, e somente se, a família $\mathscr{B}$ não for vazia (ou se A for vazio). Caso $\mathscr{B} = \varnothing$ e $A \neq \varnothing$, a igualdade não se verifica.

Axioma 7 (Esquema de Axiomas de Substituição)**.** *Para cada fórmula $\varphi(x,y)$ que não contenha o símbolo B, a seguinte sentença é um axioma:*

$$\begin{aligned} &\forall A[(\forall x \in A)\,\forall y_1\,\forall y_2(\varphi(x,y_1)\ \&\ \varphi(x,y_2) \implies y_1 = y_2) \\ &\implies \exists B\,\forall y(\exists y \in B \iff (\exists x \in A)\varphi(x,y))]. \end{aligned}$$

Axioma 8 (Axioma do Infinito)**.** *Existe um conjunto indutivo:*

$$(\exists A)[\varnothing \in A\ \&\ (\forall a \in A)a^+ \in A].$$

Axioma 9 (Axioma da Regularidade)**.** *Todo conjunto não vazio A possui um membro m tal que $m \cap A = \varnothing$:*

$$(\forall A \neq \varnothing)(\exists m \in A)m \cap A = \varnothing.$$

2.2 Álgebra de Conjuntos

Para iniciar essa seção, relembramos as operações básicas de conjuntos já definidas:

União	$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$,
Interseção	$A \cap B = \{x : x \in A\ \&\ x \in B\}$,
Complemento Relativo	$A - B = \{x \in A : x \notin B\}$,
Diferença Simétrica	$A + B = \{x \in A \cup B : x \notin A \cap B\}$.

As seguintes propriedades são fundamentais para a álgebra de conjuntos, as demonstrações ficam a cargo do leitor:

Comutatividade:

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

Associatividade:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Distributiva:

$$A \cup \bigcap B = \bigcap \{A \cup x : x \in B\},$$
$$A \cap \bigcup B = \bigcup \{A \cap x : x \in B\}.$$

Leis de De Morgan:

$$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B),$$
$$C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B).$$

Identidades Com $\varnothing$:

$$A \cup \varnothing = A,$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing,$$
$$A \cap (C - A) = \varnothing.$$

Nota. Muitas vezes quando trabalhando Com Conjuntos, estaremos Apenas trabalhando Com subconjuntos de um "espaço" maior E, nesses Casos, podemos Abreviar $E - A$ Apenas Como $-A$.

Considerando um espaço E nós temos As seguintes identidades:

$$A \cup E = E \quad \text{e} \quad A \cap E = A,$$
$$A \cup -A = E \quad \text{e} \quad A \cap -A = \varnothing.$$

Para a relação de inclusão, temos as seguintes propriedades monótonas[6]:

$$A \subseteq B \implies A \cup C \subseteq B \cup C,$$
$$A \subseteq B \implies A \cap C \subseteq B \cap C,$$
$$A \subseteq B \implies \bigcup A \subseteq \bigcup B,$$

[6] Refere-se a operações que preservam a ordem.

e as propriedades antimonótonas[7]:

$$A \subseteq B \implies C - B \subseteq C - A,$$
$$\varnothing \neq A \subseteq B \implies \bigcap B \subseteq \bigcap A.$$

2.3 Relações e Funções

Definição 16 (Par Ordenado)**.** Definimos o par ordenado (a,b) onde a primeira coordenada de (a,b) é a e a segunda coordenada de (a,b) é b como

$$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}.$$

Teorema 3. *Os pares ordenados (u,v) e (x,y) são iguais se, e somente se, $u = x$ e $v = y$*

$$(u,v) = (x,y) \iff u = x \text{ e } v = y.$$

Demonstração.

($\Longleftarrow$) Trivial.

($\Longrightarrow$) Assuma que $(u,v) = (x,y)$, então

$$\{\{u\}, \{u,v\}\} = \{\{x\}, \{x,y\}\}.$$

Disso temos

$$(1)\ \{u\} \in \{\{x\}, \{x,y\}\} \qquad \text{e} \qquad (2)\ \{u,v\} \in \{\{x\}, \{x,y\}\}.$$

De (1) temos que

$$(a)\ \{u\} = \{x\} \qquad \text{ou} \qquad (b)\ \{u\} = \{x,y\},$$

de (2) temos que

$$(c)\ \{u,v\} = \{x\} \qquad \text{ou} \qquad (d)\ \{u,v\} = \{x,y\}.$$

Precisamos analisar caso a caso, assumindo cada um como verdadeiro:

(b) Suponha (b) verdadeiro. Então $u = x = y$. Logo (c) e (d) são equivalentes e nos dizem que $u = v = x = y$. Neste caso, a conclusão do teorema é válida.

[7] Refere-se a operações que não preservam a ordem.

(c) Análogo a (b).

(a) Suponha (a) verdadeiro. Temos $u = x$. De (d), obtemos que $u = y$ ou $v = y$. No primeiro caso, (b) é válida, esse caso já foi considerado. No segundo caso, temos $v = y$, como desejado.

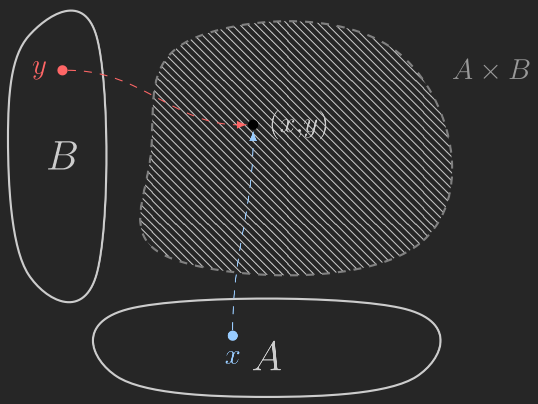
(d) Análogo a (a).

□

Definição 17 (Produto Cartesiano)**.** Sejam A e B conjuntos, podemos fazer pares ordenados (x,y) com $x \in A$ e $y \in B$. A coleção de todos esses pares é o Produto Cartesiano $A \times B$ de A e B:

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \ \ \& \ \ y \in B\}.$$

Figura 9 – Representação visual do Produto Cartesiano $A \times B$



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Lema 1. *Se $x \in C$ e $y \in C$, então $(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$*

$$(x \in C \ \ \& \ \ y \in C) \implies (x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C)).$$

Demonstração.

Suponha que $x \in C$ e $y \in C$. Pela Definição 16, o par ordenado (x,y) é o conjunto $\{\{x\}, \{x,y\}\}$.

Para mostrar que $\{\{x\}, \{x,y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$, devemos mostrar que $\{\{x\}, \{x,y\}\} \subseteq \mathcal{P}(C)$, o que exige que $\{x\} \in \mathcal{P}(C)$ e $\{x,y\} \in \mathcal{P}(C)$. Analisamos os dois elementos:

1. Como $x \in C$, o *singleton* $\{x\}$ é um subconjunto de C ($\{x\} \subseteq C$). Pela definição de conjunto das partes, isso implica que $\{x\} \in \mathcal{P}(C)$.
2. Como $x \in C$ e $y \in C$, o conjunto par $\{x,y\}$ é um subconjunto de C ($\{x,y\} \subseteq C$). Logo, $\{x,y\} \in \mathcal{P}(C)$.

Visto que ambos os elementos de (x,y) pertencem a $\mathcal{P}(C)$, concluímos que $(x,y) \subseteq \mathcal{P}(C)$. Portanto, pela definição de conjunto das partes aplicada novamente, $(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$. □

Corolário 1. *Para quaisquer conjuntos A e B, existe um conjunto no qual seus elementos são exatamente os pares ordenados (x,y) com $x \in A$ e $y \in B$*

$$\forall A \, \forall B \, \exists C \, \forall z (z \in C \iff \exists x \, \exists y (x \in A \ \& \ y \in B \ \& \ z = (x,y))).$$

Demonstração.

De um Axioma de Axioma 6 nós podemos construir o conjunto

$$\mathscr{A} = \{w \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : \exists x \in A \ \& \ \exists y \in B \text{ t.q. } w = (x,y)\}.$$

Como $x \in A \cup B$ e $y \in A \cup B$, temos pelo Lema 1 que $\{\{x\}, \{x,y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, ou seja, $(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, assim sabemos que todos os pares ordenados (x,y) com $x \in A$ e $y \in B$ estão em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, precisamos agora garantir que apenas pares ordenados fazem parte de $\mathscr{A}$. Pela construção de $\mathscr{A}$ temos que

$$w \in \mathscr{A} \iff w = (x,y) \text{ para algum } x \in A \text{ e algum } y \in B,$$

ou seja, w está em $\mathscr{A}$ se, e somente se é um par ordenado com $x \in A$ e $y \in B$. □

2.4 Conjunto dos Números Naturais

O ponto de partida para a construção dos números é o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, caracterizado pelos axiomas de Peano:

Axioma 10 (Primeiro Axioma de Peano)**.** *Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Chamamos a imagem de $s(n)$ de sucessor de n.*

Axioma 11 (Segundo Axioma de Peano)**.** *Existe um único número natural $0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \neq s(n)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*

Axioma 12 (Terceiro Axioma de Peano)**.** *Se em um conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in X$ e $s(X) \subseteq X$*[8]*, então $X = \mathbb{N}$.*

Esses axiomas estabelecem a existência de um **primeiro elemento** (que chamamos de 1), uma função "**sucessor**" injetiva, e o **princípio da indução**, que garante que qualquer número natural pode ser alcançado a partir do 1 por sucessivas aplicações da função sucessor.

[8] $n \in X \implies s(n) \in X$.

Definição 18 (Sucessor)**.** Definimos o sucessor de um número x como

$$x^+ = x \cup \{x\}$$

3 O CONCEITO DE CARDINALIDADE

A partir das definições elementares de conjunto, este capítulo formaliza o conceito intuitivo de tamanho. Serão discutidas as definições rigorosas de conjuntos finitos e infinitos, contrastando as abordagens de autores clássicos como Halmos (2014) e Lima (2006). Além disso, estabelecem-se os critérios matemáticos para comparar a magnitude de dois conjuntos através da análise de funções injetoras e bijetoras, fundamentando a noção de equipotência.

3.1 Conjuntos finitos

A noção intuitiva de tamanho de um conjunto é formalizada matematicamente pelo conceito de cardinalidade. Lima (2006, p. 3) define um conjunto X como **finito** quando X é vazio, ou existem um $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to X$ onde $I_n = \{p \in \mathbb{N} : p \leq n\}$. Já Halmos (2014, p. 53) define um conjunto finito como um conjunto equivalente a um número[9] natural, onde equivalência significa uma bijeção. Uma propriedade fundamental dos conjuntos finitos é que não existe uma bijeção entre o conjunto e um de seus subconjuntos próprios.

Exemplo 17. O conjunto $X = \{\text{primeiro}, \text{segundo}, \text{terceiro}\}$ é finito. Para verificar basta encontrar um $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to X$, de fato, tome $n = 3$, e $f : \{1,2,3\} \to X$ tal que

$$f(1) \longleftrightarrow \text{primeiro}$$
$$f(2) \longleftrightarrow \text{segundo}$$
$$f(3) \longleftrightarrow \text{terceiro}$$

Exemplo 18. Utilizando a definição de Halmos (2014), considere o conjunto das vogais $V = \{a, e, i, o, u\}$. Este conjunto é finito, pois é equivalente ao número natural 5 (que,

[9] Na Teoria de Conjuntos números são conjuntos. $0 = \varnothing, 1 = \{\varnothing\}, n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

como conjunto, é $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$). A bijeção $g : 5 \to V$ é dada por:

$$g(0) \longleftrightarrow a$$
$$g(1) \longleftrightarrow e$$
$$g(2) \longleftrightarrow i$$
$$g(3) \longleftrightarrow o$$
$$g(4) \longleftrightarrow u$$

3.2 Conjuntos infinitos

Um conjunto é dito **infinito** quando não é finito. De forma equivalente, um conjunto é infinito se, e somente se, existe uma bijeção entre o conjunto e um de seus subconjuntos próprios.

Para qualquer conjunto X escrevemos a cardinalidade de X como $|X|$. Dados dois conjuntos X e Y dizemos que $|X| \leq |Y|$ quando existe uma função injetiva de X em Y. Dizemos que $|X| = |Y|$ quando existe uma bijeção entre X e Y.

4 A DESCOBERTA DOS INFINITOS

Com as ferramentas de comparação cardinal estabelecidas, este capítulo explora a revolucionária descoberta de Georg Cantor: a existência de diferentes tamanhos de infinito. Investigam-se as propriedades dos conjuntos enumeráveis, demonstrando resultados contraintuitivos sobre os inteiros e racionais, e apresenta-se o célebre Argumento da Diagonal. Este método permite provar a não enumerabilidade dos números reais, revelando um universo de infinitos além da contagem natural.

A aplicação do critério de bijeção em conjuntos infinitos levou à descoberta de que nem todos os infinitos são do mesmo tamanho.

Um conjunto é dito **enumerável** se for finito ou se existir uma bijeção com o conjunto dos números naturais. A cardinalidade dos conjuntos enumeráveis infinitos é o menor número cardinal infinito, denotamos por $\aleph_0$ (Aleph 0 ou Aleph Nulo). De forma surpreendente, conjuntos que parecem maiores que $\mathbb{N}$, como o conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$) e o dos racionais ($\mathbb{Q}$), também são enumeráveis.

Cantor provou que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável. A prova clássica utiliza o método da diagonalização (Bertato, 2023, p. 429), que constrói um número real que não pode estar em nenhuma lista pré-definida de reais, mostrando assim que nenhuma enumeração de $\mathbb{R}$ pode ser completa. A cardinalidade dos números reais é chamada de "**cardinalidade do contínuo**" e denotada por $\mathfrak{c}$.

5 A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

Uma vez demonstrado que os infinitos não são todos iguais, surge a questão natural sobre como eles se organizam hierarquicamente. Este capítulo discute o Teorema de Cantor, que garante a existência de uma infinidade de cardinais transfinitos sempre crescentes via conjuntos das partes. O foco central recai sobre a Hipótese do Contínuo, conjectura fundamental que indaga sobre a existência de cardinalidades intermediárias entre os números naturais ($\aleph_0$) e os números reais ($\mathfrak{c}$).

O fato de existirem infinitos de tamanhos diferentes ($\aleph_0 < \mathfrak{c}$) levanta a questão de como esses infinitos se organizam. O Teorema de Cantor estabelece que, para qualquer conjunto X, sua cardinalidade é estritamente menor que a cardinalidade de seu conjunto das partes $\mathcal{P}(x)$ (Aigner; Ziegler, 2018, p. 139). Isso garante a existência de uma hierarquia infinita de infinitos, pois sempre podemos formar um conjunto maior tomando o conjunto das partes.

Com a existência de dois infinitos distintos, $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$, surge uma nova pergunta: existe algum conjunto cuja cardinalidade esteja estritamente entre a dos naturais e a dos reais? Ou seja, existe S tal que $\aleph_0 < |S| < \mathfrak{c}$?

A **Hipótese do Contínuo** é a conjectura de que a resposta é não. Ela postula que $\mathfrak{c}$ é o próximo cardinal infinito depois de $\aleph_0$, denotado por $\aleph_1$. Essa conjectura pode ser escrita como $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.

6 O INFINITO CARDINAL E A DIMENSÃO

Neste capítulo, expande-se a teoria desenvolvida na fundamentação para estabelecer resultados rigorosos sobre a comparação de conjuntos infinitos. O objetivo é demonstrar que a intuição geométrica de tamanho nem sempre corresponde à definição formal de cardinalidade, especialmente quando analisamos espaços de diferentes dimensões.

6.1 Teoremas de Comparação e Aritmética Cardinal

Aritmética de cardinais difere substancialmente da aritmética finita. Nesta seção, definem-se as operações de soma, produto e exponenciação para números transfinitos e demonstra-se o Teorema de Cantor ($|A| < 2^{|A|}$), que garante a existência de uma infinidade de cardinais transfinitos distintos.

6.2 A Independência entre Dimensão e Cardinalidade

Um dos resultados mais contraintuitivos da Teoria dos Conjuntos é a independência entre a dimensão de um espaço e sua cardinalidade. Demonstra-se aqui que a reta real $\mathbb{R}$ possui a mesma quantidade de pontos que o plano $\mathbb{R}^2$ ou qualquer espaço $\mathbb{R}^n$. Discute-se como a Curva de Peano preenche o espaço, rompendo com a noção tradicional de dimensão como medida de quantidade.

Um resultado central na aritmética dos cardinais infinitos diz respeito à união de uma família de conjuntos. Consideremos uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha<\aleph_n}$, com $n \in \mathbb{N}$, indexada por $\aleph_n$, onde cada conjunto A_α possui cardinalidade igual a $\aleph_n$. O teorema estabelece que a cardinalidade da união $\bigcup_{\alpha<\aleph_n} A_\alpha$ é exatamente $\aleph_n$. Para fundamentar tal afirmação, demonstraremos um resultado mais profundo e generalista: para qualquer cardinal infinito κ, vale a igualdade $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. Provar que o produto cartesiano de um conjunto infinito por ele mesmo não altera sua magnitude (idempotência multiplicativa) é a condição suficiente para garantir que a união de κ conjuntos de tamanho κ permaneça com tamanho κ.

Teorema 4 (Idempotência da Multiplicação de Cardinais Infinitos). *Para todo cardinal infinito κ, vale a igualdade $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.*

Corolário 2 (União de $\aleph_n$ Conjuntos). *Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha<\aleph_n}$ com $n \in \mathbb{N}$ uma família de conjuntos indexada por $\aleph_n$, tal que $|A_\alpha| = \aleph_n$ para todo $\alpha < \aleph_n$. Então, a cardinalidade da união é:*

$$\left| \bigcup_{\alpha<\aleph_n} A_\alpha \right| = \aleph_n.$$

7 NÚMEROS ORDINAIS TRANSFINITOS

Enquanto o capítulo anterior tratou do tamanho dos conjuntos (aspecto cardinal), este capítulo é dedicado à ordem dos elementos (aspecto ordinal). Introduzem-se os Números Ordinais Transfinitos e discutem-se as implicações profundas do Axioma da Escolha na estrutura matemática.

A noção de contagem estende-se ao infinito através dos Números Ordinais. Diferentemente dos cardinais, onde $1 + \omega = \omega$, nos ordinais a ordem da soma altera o resultado ($1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$). Apresenta-se aqui o conceito de Boa Ordenação e a definição dos primeiros ordinais transfinitos ($\omega, \omega + 1, \ldots$).

8 O AXIOMA DA ESCOLHA E O PARADOXO DE BANACH-TARSKI

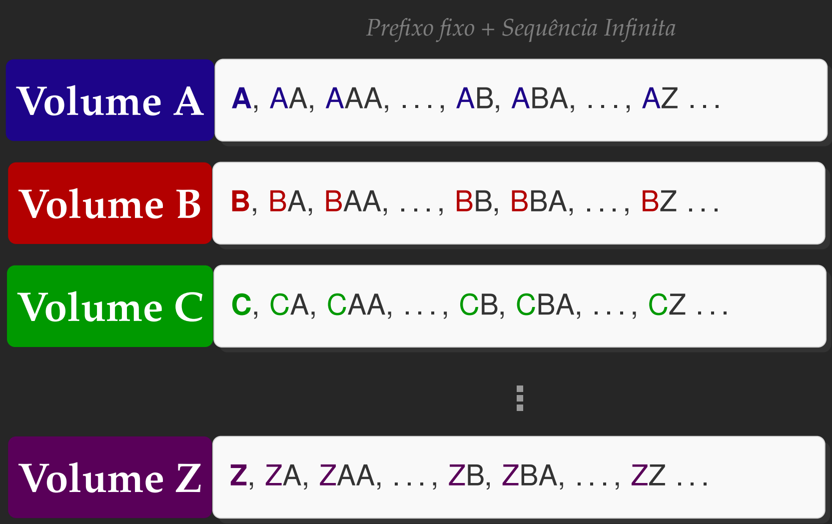
O Axioma da Escolha é independente dos demais axiomas da teoria ZF, mas é essencial para muitos resultados modernos. Sua aceitação, contudo, leva a consequências paradoxais, como o Paradoxo de Banach-Tarski (Wapner, 2007), que demonstra ser possível decompor uma esfera sólida em um número finito de pedaços e remontá-los em duas esferas idênticas à original, violando a intuição física de conservação de volume.

8.1 Analogia do *Hiper-Webster*

Para introduzir as consequências contraintuitivas do infinito na geometria, é elucidativo analisar primeiramente paradoxos em conjuntos enumeráveis. Wapner (2007, p. 135) apresenta a analogia do *"Hiper-Webster"*[10] (originalmente proposta por Ian Stewart), um dicionário infinito contendo todas as palavras possíveis formadas pelas 26 letras do alfabeto inglês. Neste dicionário hipotético, as palavras são listadas em ordem alfabética: A, AA, AAA, AAAA, e assim por diante, seguidas eventualmente por AB, ABA, ABAA, etc. O dicionário contém todas as sequências finitas de letras, independentemente de terem significado ou não.

A propriedade paradoxal deste conjunto é revelada quando tentamos decompor o *Hiper-Webster* em 26 volumes separados, organizados pela letra inicial de cada palavra. O Volume A conteria todas as palavras começando com 'A', o Volume B todas as que começam com 'B', e assim sucessivamente.

Figura 10 – Representação visual dos volumes do *Hiper-Webster*



Fonte: Elaborado pelo autor (2025), baseado em Wapner (2007, p. 137).

[10] Derivado do nome *Merriam-Webster*, um dicionário estadunidense.

Se tomarmos apenas o Volume A e removermos a primeira letra ('A') de cada palavra nele contida, o resultado é surpreendente: a lista de palavras restante é idêntica ao conteúdo do *Hiper-Webster* original completo. Por exemplo, a palavra 'AA' torna-se 'A', 'AB' torna-se 'B', recuperando assim todas as sequências possíveis.

Este processo demonstra que o *Hiper-Webster* possui a propriedade de ser decomponível em 26 cópias de si mesmo. A distinção crucial, no entanto, reside na natureza do infinito envolvido: enquanto o dicionário lida com um infinito enumerável (palavras discretas), o Teorema de Banach-Tarski opera no contínuo ($\mathbb{R}^3$). A decomposição da esfera não envolve apenas a remoção de um "caractere" inicial, mas sim o uso do Axioma da Escolha para particionar o sólido em conjuntos de pontos não mensuráveis, que são então rotacionados para recompor duas esferas sólidas completas.

9 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta o percurso metodológico adotado para o desenvolvimento deste trabalho. A definição de um desenho metodológico claro é fundamental para estabelecer os caminhos da investigação e garantir a cientificidade dos resultados obtidos. A seguir, a pesquisa é classificada quanto à sua natureza, aos seus objetivos, à sua abordagem e aos seus procedimentos técnicos, fundamentando-se na literatura especializada de metodologia científica.

9.1 Delineamento da Pesquisa

Para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso, que versa sobre a Teoria da Cardinalidade, a pesquisa classifica-se da seguinte forma:

9.1.1 Quanto à Natureza

Do ponto de vista de sua natureza, esta pesquisa classifica-se como **Pesquisa Pura**. Segundo Gil (2002), a pesquisa Pura objetiva gerar conhecimentos novos, úteis para o avanço da ciência, sem aplicação prática prevista. Ela envolve verdades e interesses universais, onde o pesquisador tem como meta o saber, buscando satisfazer uma necessidade intelectual pelo conhecimento.

No contexto deste trabalho, o estudo das propriedades dos números cardinais e dos infinitos busca aprofundar a compreensão teórica sobre os fundamentos da matemática, sem a intenção imediata de resolver problemas práticos do cotidiano ou desenvolver tecnologias aplicadas.

9.1.2 Quanto aos Objetivos

Em relação aos seus objetivos, a pesquisa enquadra-se como **Descritiva**, pois busca descrever, registrar e correlacionar fatos ou fenômenos de uma determinada realidade sem manipulá-los. Neste trabalho, descrevem-se as propriedades dos conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, bem como os teoremas fundamentais da Teoria dos Conjuntos, analisando suas relações lógicas e implicações. Além disso, visa proporcionar maior familiaridade com o problema (a comparação de infinitos), tornando-o mais explícito e aprimorando ideias. Este tipo de pesquisa envolve levantamento bibliográfico e análise de exemplos que estimulem a compreensão, sendo muito comum em ambientes acadêmicos para a estruturação de trabalhos teóricos.

9.1.3 Quanto à Abordagem

Do ponto de vista de sua abordagem, trata-se de uma pesquisa **Qualitativa**. Diferente da pesquisa quantitativa, que se pauta na medição numérica e estatística, a abordagem qualitativa preocupa-se com a compreensão profunda dos fenômenos.

Embora a matemática utilize números, a natureza deste trabalho é conceitual e lógica, não estatística. O foco reside na interpretação das demonstrações, na análise dos argumentos lógicos de Cantor e na compreensão dos significados dos conceitos de cardinalidade e infinito, caracterizando uma análise densa e interpretativa dos objetos matemáticos estudados.

9.1.4 Quanto aos Procedimentos Técnicos

Quanto aos procedimentos técnicos adotados, a pesquisa classifica-se estritamente como **Pesquisa Bibliográfica**. De acordo com Gil (2002, p. 44), este tipo de pesquisa é desenvolvido com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.

O trabalho foi realizado a partir do levantamento de referências teóricas publicadas em meios escritos e eletrônicos, como livros de Análise Real e Teoria dos Conjuntos, artigos sobre a história da matemática e materiais acadêmicos. O objetivo foi trabalhar com informações levantadas e selecionadas da literatura para explicar o objeto de estudo (Cardinalidade) e os fenômenos relacionados (Hierarquia dos Infinitos, Hipótese do Contínuo).

9.2 Coleta e Tratamento dos Dados

Considerando a natureza teórica desta pesquisa, a "coleta de dados" consistiu na seleção criteriosa de fontes bibliográficas que abordam os fundamentos da Teoria dos Conjuntos e a Análise Real. Foram utilizados como base principal as obras de Halmos (2014), Aigner e Ziegler (2018), Doets (2022), Enderton (1977), Hausdorff (1962) e Suppes (1972).

O tratamento dos dados deu-se através da:

1. **Leitura analítica:** Estudo aprofundado dos textos selecionados para identificar os conceitos-chave (bijeção, cardinalidade, enumerabilidade).
2. **Reprodução e Análise de Demonstrações:** Estudo passo a passo das provas matemáticas apresentadas pelos autores, como o Argumento da Diagonal de Cantor, verificando sua consistência lógica.
3. **Síntese e Comparação:** Integração das diferentes visões e notações apresentadas pelos autores (por exemplo, as definições de conjunto finito por Lima e Halmos) para construir uma narrativa coerente e didática no corpo do trabalho.

Não foram utilizados instrumentos como questionários ou entrevistas, nem técnicas estatísticas de análise, dado o caráter puramente bibliográfico e teórico da investigação.

9.3 Cronograma

Para organizar o desenvolvimento desta pesquisa e assegurar o cumprimento dos objetivos propostos, foi estabelecido um cronograma de execução para o ano de 2026. O planejamento, detalhado no Quadro 1, contempla as etapas de aprofundamento teórico, análise das demonstrações matemáticas, redação dos capítulos e a defesa final do trabalho.

Quadro 1 – Cronograma de desenvolvimento do TCC.

Mês (2026)	**Atividade Prevista**
Fevereiro	Leitura analítica das obras de base (Halmos, Lima) e fichamento dos fundamentos.
Março	Estudo e diferenciação formal entre conjuntos numeráveis e enumeráveis.
Abril	Reprodução e análise das demonstrações sobre a não-enumerabilidade dos reais (Diagonal de Cantor).
Maio	Investigação teórica sobre a relação entre dimensão e cardinalidade de espaços.
Junho	Estudo dos Números Ordinais e sua distinção em relação aos Números Cardinais.
Julho	Pesquisa sobre o Axioma da Escolha e suas implicações (Paradoxo de Banach-Tarski).
Agosto	Aprofundamento nos Números Transfinitos e na hierarquia dos infinitos.
Setembro	Redação e síntese dos resultados obtidos nos capítulos de desenvolvimento.
Outubro	Escrita e revisão de consistência teórica.
Novembro	Revisão normativa (ABNT), formatação final e depósito do trabalho.
Dezembro	Preparação da apresentação e defesa do Trabalho de Conclusão de Curso.

Fonte: Autoria própria. (2025)

9.4 Resultados Esperados

Com a execução das etapas descritas no cronograma e o aprofundamento na literatura selecionada, esperam-se alcançar os seguintes resultados ao término desta pesquisa:

1. **Consolidação Teórica:** A elaboração de um texto monográfico que sintetize, de forma rigorosa e didática, os fundamentos da Teoria dos Conjuntos (ZFC), ser-

vindo como material de consulta para estudantes de graduação interessados na transição entre a matemática intuitiva e a formal.

2. **Demonstração da Hierarquia de Infinitos:** A apresentação clara das provas que estabelecem a distinção entre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, evidenciando a existência de diferentes magnitudes de infinito (os números Alephs), superando a noção de senso comum de que "tudo que não tem fim é igual".
3. **Desmistificação da Relação Dimensão-Cardinalidade:** A exposição detalhada da prova de que a dimensão espacial não altera a cardinalidade de um conjunto contínuo. Espera-se demonstrar formalmente que a reta real ($\mathbb{R}$) possui a mesma quantidade de pontos que o plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$) ou qualquer espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, explorando as bijeções de Cantor e as curvas de preenchimento de espaço.
4. **Distinção entre Cardinais e Ordinais:** A clarificação das diferenças estruturais e aritméticas entre Números Cardinais (que medem quantidade) e Números Ordinais (que medem posição/ordem), demonstrando como a aritmética transfinita se comporta de maneira distinta em cada caso (por exemplo, a não comutatividade da soma ordinal).
5. **Análise do Axioma da Escolha e Paradoxos:** Uma discussão crítica sobre o papel do Axioma da Escolha na matemática moderna, culminando na explicação do Paradoxo de Banach-Tarski. Espera-se elucidar como a aceitação desse axioma permite conclusões geometricamente contraintuitivas sobre a decomposição e medida de conjuntos.
6. **Contribuição Acadêmica:** A aprovação do Trabalho de Conclusão de Curso e a possível submissão de artigos ou resumos expandidos em eventos acadêmicos, divulgando a beleza e a complexidade da matemática transfinita.

Referências

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. **Proofs from THE BOOK**. 6. ed. Heidelberg: Springer, 2018. Disponível em: https://dpvipracollege.ac.in/wp-content/uploads/2023/01/Proofs-from-THE-BOOK-PDFDrive-.pdf. Acesso em: 10 de novembro de 2025.

BASILE, J. **The Library of Babel**. 2015. Website. Acesso à implementação digital da biblioteca universal. Disponível em: https://libraryofbabel.info. Acesso em: 24 dez. 2025.

BERTATO, F. M. O infinito e o método da diagonal de cantor - tradução de ueber eine elementare frage der mannigfaltigkeitslehre (1890-91). **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 23, n. 46, p. 421–439, jul. 2023. Disponível em: https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/441. Acesso em: 17 de novembro de 2025.

CONWAY, J. H. **On Numbers and Games**. 2. ed. Massachusetts: A K Peters, 2001.

DOETS, H. C. **Zermelo-Fraenkel Set Theory**. 2022. Notas de Aula. Institute for Logic, Language and Computation (ILLC), University of Amsterdam. Disponível em: https://resources.illc.uva.nl/emeriti/uploaded_files/inlineitem/zf.pdf. Acesso em: 12 dez. 2025.

ENDERTON, H. B. **Elements of Set Theory**. Nova Iorque: Academic Press, 1977.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos De pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HALMOS, P. R. **Naive Set Theory**. Nova Iorque: Springer, 2014.

HAUSDORFF, F. **Set Theory**. Nova Iorque: Chelsea, 1962.

LIMA, E. L. **Análise Real**. 8. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2006. v. 1.

OEIS Foundation Inc. **Sequence A000217: Triangular numbers**. 2025. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Disponível em: https://oeis.org/A000217. Acesso em: 11 dez. 2025.

RAYO, A. **Big Number Duel**. 2007. Website. Massachusetts Institute of Technology. Disponível em: https://web.mit.edu/arayo/www/bignums.html. Acesso em: 11 dez. 2025.

SUPPES, P. **Axiomatic Set Theory**. Nova Iorque: Dover Publications, Inc., 1972.

WAPNER, L. M. **The Pea and the Sun**. Massachusetts: A K Peters/CRC Press, 2007.