

Análise Real volume 1

Funções de Uma Variável



Elon Lages Lima

Lima, Elon Lages

Análise real volume 1. Funções de uma variável / Elon
Lages Lima. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

189 p. : il. ; 23 cm. (Coleção Matemática Universitária)

Inclui bibliografia.

ISBN 85-244-0048-X

1. Análise Matemática. I. Título. II. Série.

CDD-517

Análise Real volume 1

Funções de Uma Variável

Oitava Edição
(segunda impressão)

Elon Lages Lima

Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Rodolfo Capeto e Noni Geiger

Coleção Matemática Universitária

Comissão Editorial:

Elon Lages Lima (Editor)

S. Collier Coutinho

Paulo Sad

Títulos Publicados:

- Análise Real, Volume 1. Funções de Uma Variável – Elon Lages Lima
- EDP: Um Curso de Graduação – Valéria Iório
- Curso de Álgebra, Volume 1 – Abramo Hefez
- Álgebra Linear – Elon Lages Lima
- Introdução às Curvas Algébricas Planas – Israel Vainsencher
- Equações Diferenciais Aplicadas – Djairo G. de Figueiredo e Aloisio Freiria Neves
- Geometria Diferencial – Paulo Ventura Araújo
- Introdução à Teoria dos Números – José Plínio de Oliveira Santos
- Cálculo em uma Variável Complexa – Marcio G. Soares
- Geometria Analítica e Álgebra Linear – Elon Lages Lima
- Números Primos: Mistérios e Recordes – Paulo Ribenboim
- Análise no Espaço R^n – Elon Lages Lima
- Análise Real, Volume 2. Funções de n Variáveis – Elon Lages Lima
- Álgebra Exterior – Elon Lages Lima
- Equações Diferenciais Ordinárias – Claus Ivo Doering e Artur Oscar Lopes

Distribuição:

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: ddic@impa.br
<http://www.impa.br>

Capítulo 1. Conjuntos Finitos e Infinitos	1
1. Números naturais	1
2. Conjuntos finitos	3
3. Conjuntos infinitos	5
4. Conjuntos enumeráveis	6
5. Exercícios	9
Capítulo 2. Números Reais	11
1. \mathbb{R} é um corpo	11
2. \mathbb{R} é um corpo ordenado	12
3. \mathbb{R} é um corpo ordenado completo	15
4. Exercícios	19
Capítulo 3. Seqüências de Números Reais	22
1. Límite de uma seqüência	22
2. Límites e desigualdades	26
3. Operações com limites	27
4. Limites infinitos	31
5. Exercícios	33
Capítulo 4. Séries Numéricas	37
1. Sériess convergentes	37
2. Sériess absolutamente convergentes	39
3. Testes de convergência	41
4. Comutatividade	43
5. Exercícios	45
Capítulo 5. Algumas Noções Topológicas	48
1. Conjuntos abertos	48
2. Conjuntos fechados	49
3. Pontos de acumulação	52
4. Conjuntos compactos	53
5. O conjunto de Cantor	55
6. Exercícios	58
Capítulo 6. Limites de Funções	61
1. Definição e primeiras propriedades	61
2. Limites laterais	66
3. Limites no infinito, limites infinitos, expressões indeterminadas	68
4. Exercícios	71
Capítulo 7. Funções Contínuas	73
1. Definição e primeiras propriedades	73

2. Funções contínuas num intervalo	76
3. Funções contínuas em conjuntos compactos	79
4. Continuidade uniforme	82
5. Exercícios	85
Capítulo 8. Derivadas	88
1. A noção de derivada	88
2. Regras operacionais	91
3. Derivada e crescimento local	93
4. Funções deriváveis num intervalo	95
5. Exercícios	97
Capítulo 9. Fórmula de Taylor e Aplicações da Derivada	101
1. Fórmula de Taylor	101
2. Funções convexas e côncavas	105
3. Aproximações sucessivas e método de Newton	110
4. Exercícios	114
Capítulo 10. A Integral de Riemann	117
1. Revisão sobre sup e inf	117
2. Integral de Riemann	119
3. Propriedades da integral	123
4. Condições suficientes de integrabilidade	127
5. Exercícios	129
Capítulo 11. Cálculo com Integrais	132
1. Os teoremas clássicos do Cálculo Integral	132
2. A Integral como limite de somas de Riemann	136
3. Logaritmos e exponenciais	137
4. Integrais impróprias	141
5. Exercícios	146
Capítulo 12. Seqüências e séries de funções	151
1. Convergência simples e convergência uniforme	151
2. Propriedades da convergência uniforme	154
3. Séries de potências	158
4. Funções trigonométricas	162
5. Séries de Taylor	164
6. Exercícios	167
Capítulo 13. Sugestões e Respostas	171
Sugestões de leitura	190
Índice	191

Prefácio

A finalidade deste livro é servir de texto para um primeiro curso de Análise Matemática. Os assuntos nele tratados são expostos de maneira simples e direta, evitando-se maiores digressões. Assim, espero facilitar o trabalho do professor que, ao adotá-lo, não precisará perder muito tempo selecionando os tópicos que ensinará e os que vai omitir. Turmas especiais, estudantes com mais experiência, leitores que desejem uma apresentação mais completa ou alunos normais em busca de leituras complementares poderão consultar o “Curso de Análise”, vol. 1, que trata de matéria semelhante sob forma mais abrangente e é aproximadamente duas vezes mais longo.

Os leitores que tenho em mente são alunos com conhecimento equivalente a dois períodos letivos de Cálculo, de modo a terem familiaridade com as idéias de derivada e integral em seus aspectos mais elementares, principalmente o cálculo das funções mais conhecidas e a resolução de exercícios simples. Espero, além disso, que eles tenham uma noção razoavelmente clara do que seja uma demonstração matemática. A lista de pre-requisitos termina dizendo que o leitor deve estar habituado às notações costumeiras sobre conjuntos, tais como $x \in A$, $A \subset B$, $A \cup B$ e $A \cap B$, etc.

Uma parte importante do livro são seus 260 exercícios. Eles servem para fixação da aprendizagem, desenvolvimento de alguns temas esboçados no texto e como oportunidade para o leitor verificar se realmente entendeu o que acabou de ler. Soluções de 190 desses exercícios, de forma completa ou resumida, são apresentadas no capítulo final. Naturalmente, gostaria que o recurso às soluções que ofereço fosse feito somente depois de um sério esforço para resolver cada problema. É precisamente esse esforço que, bem ou mal sucedido, conduz ao êxito no processo de treinamento.

O processamento do manuscrito, pelo sistema TeX foi feito por Maria Celano Maia e Solange Villar Visgueiro sob a supervisão de Jonas de Miranda Gomes, ao qual devo vários conselhos e opiniões sensatas durante a preparação do livro. A revisão do texto foi feita por Levi Lopes de Lima, Ricardo Galdo Camelier e Rui Tojeiro. A todas estas pessoas, meus agradecimentos cordiais.

A publicação deste livro foi financiada pela CAPES, a cujo Diretor Geral, professor José Ubyrajara Alves, muito devo pelo apoio e compreensão demonstrados.

Rio de Janeiro, agosto de 1989.

Elon Lages Lima

Prefácio da terceira edição

Embora tardiamente, registro aqui meus agradecimentos a Lorenzo Diaz pelo cuidadoso trabalho de revisão que fez na segunda edição. Agradeço igualmente a Florêncio Guimarães pelas correções minuciosas que fez para esta edição, com sua habitual acuidade.

Rio de Janeiro, 7 de Janeiro de 1997.

Elon Lages Lima

Conjuntos Finitos e Infinitos

Neste capítulo, será estabelecida com precisão a diferença entre conjunto finito e conjunto infinito. Será feita também a distinção entre conjunto enumerável e conjunto não-enumerável. O ponto de partida é o conjunto dos números naturais.

1. Números Naturais

O conjunto \mathbb{N} dos números naturais é caracterizado pelos seguintes fatos:

1. Existe uma função injetiva $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o *sucessor* de n .
2. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \implies s(n) \in X$) então $X = \mathbb{N}$.

Essas afirmações podem ser reformuladas assim:

- 1'. Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural; números diferentes têm sucessores diferentes.
- 2'. Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.
- 3'. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

As propriedades 1, 2, 3 acima chamam-se os *axiomas de Peano*. O axioma 3 é conhecido como o *princípio da indução*. Intuitivamente, ele significa que todo número natural n pode ser obtido a partir de 1, tomando-se seu sucessor $s(1)$,

o sucessor deste, $s(s(1))$, e assim por diante, com um número finito de etapas. (Evidentemente “número finito” é uma expressão que, neste momento, não tem ainda significado. A formulação do axioma 3 é uma maneira extremamente hábil de evitar a petição de princípio até que a noção de conjunto finito seja esclarecida.)

O princípio da indução serve de base para um método de demonstração de teoremas sobre números naturais, conhecido como o *método de indução* (ou *recorrência*), o qual funciona assim: “se uma propriedade P é válida para o número 1 e se, supondo P válida para o número n daí resultar que P é válida também para seu sucessor $s(n)$, então P é válida para todos os números naturais”.

Como exemplo de demonstração por indução, provemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $s(n) \neq n$. Esta afirmação é verdadeira para $n = 1$ porque, pelo axioma 2, tem-se $1 \neq s(n)$ para todo n logo, em particular, $1 \neq s(1)$. Supondo-a verdadeira para um certo $n \in \mathbb{N}$, vale $n \neq s(n)$. Como a função s é injetiva, daí resulta $s(n) \neq s(s(n))$, isto é, a afirmação é verdadeira para $s(n)$.

No conjunto \mathbb{N} dos números naturais são definidas duas operações fundamentais: a *adição*, que associa a cada par de números (m, n) sua *soma* $m + n$, e a *multiplicação*, que faz corresponder ao par (m, n) seu *produto* $m.n$. Essas operações são caracterizadas pelas seguintes igualdades, que lhes servem de definição:

$$\begin{aligned} m + 1 &= s(m); \\ m + s(n) &= s(m + n), \text{ isto é, } m + (n + 1) = (m + n) + 1; \\ m.1 &= m; \\ m.(n + 1) &= m.n + m. \end{aligned}$$

Noutros termos: somar 1 a m significa tomar o sucessor de m . E se já conhecemos a soma $m + n$ também conheceremos $m + (n + 1)$, que é o sucessor de $m + n$. Quanto à multiplicação: multiplicar por 1 não altera o número. E se conhecemos o produto $m.n$, conheceremos $m.(n + 1) = m.n + m$. A demonstração da existência das operações + e . com as propriedades acima, bem como sua unicidade, se faz por indução. Os detalhes serão omitidos aqui. O leitor interessado pode consultar o “Curso de Análise”, vol. 1, ou as referências

propriedades da adição e da multiplicação:

associatividade: $(m + n) + p = m + (n + p)$, $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$;

distributividade: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$;

comutatividade: $m + n = n + m$, $m \cdot n = n \cdot m$;

lei do corte: $m + n = m + p \Rightarrow n = p$, $m \cdot n = m \cdot p \Rightarrow n = p$.

Dados os números naturais m, n , escreve-se $m < n$ quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Diz-se então que m é *menor do que* n . A notação $m \leq n$ significa que $m < n$ ou $m = n$. Prova-se que $m < n, n < p \Rightarrow m < p$ (transitividade) e que, dados $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer, vale uma, e somente uma, das três alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.

Uma das mais importantes propriedades da *relação de ordem* $m < n$ entre os números naturais é o chamado *princípio da boa-ordenação*, abaixo enunciado e provado.

Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$.

A fim de provar esta afirmação, para cada número $n \in \mathbb{N}$, chamemos de I_n o conjunto dos números naturais $\leq n$. Se $1 \in A$ então 1 será o menor elemento de A . Se, porém, $1 \notin A$, então consideremos o conjunto X dos números naturais n tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Como $I_1 = \{1\} \subset \mathbb{N} - A$, vemos que $1 \in X$. Por outro lado, como A não é vazio, concluimos que $X \neq \mathbb{N}$. Logo a conclusão do axioma 3 não é válida. Segue-se que deve existir $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$. Então $I_n = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N} - A$ mas $n_0 = n + 1 \in A$. Portanto n_0 é o menor elemento do conjunto A .

2. Conjuntos finitos

Continuaremos usando a notação $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$.

Um conjunto X diz-se *finito* quando é vazio ou então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f: I_n \rightarrow X$. Escrevendo $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n)$ temos então $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. A bijeção f chama-se uma *contagem* dos elementos de X e o número n chama-se o *número de elementos*, ou *número cardinal* do conjunto finito X . O Corolário 1 abaixo prova que o número cardinal está bem definido, isto é, não depende da particular contagem f .

Teorema 1. *Se A é um subconjunto próprio de I_n , não pode existir uma bijeção $f: A \rightarrow I_n$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que o teorema seja falso e considere $n_0 \in \mathbb{N}$, o menor número natural para o qual existem um subconjunto próprio $A \subset I_{n_0}$ e uma bijeção $f: A \rightarrow I_{n_0}$. Tem-se, evidentemente, $n_0 > 1$. Seja $a \in A$ tal que $f(a) = n_0$. A restrição de f ao subconjunto próprio $A - \{a\} \subset I_{n_0-1}$ será uma bijeção sobre I_{n_0-1} , o que contraria a minimalidade de n_0 . \square

Corolário 1. Se $f: I_m \rightarrow X$ e $g: I_n \rightarrow X$ são bijeções então $m = n$.

Com efeito, se fosse $m < n$ então I_m seria um subconjunto próprio de I_n , o que violaria o Teorema 1, pois $g^{-1} \circ f: I_m \rightarrow I_n$ é uma bijeção. Analogamente se mostra que não é possível $n < m$. Logo $m = n$. \square

Corolário 2. Seja X um conjunto finito. Uma aplicação $f: X \rightarrow X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.

Com efeito, existe uma bijeção $\varphi: I_n \rightarrow X$. A aplicação $f: X \rightarrow X$ é injetiva ou sobrejetiva se, e somente se, $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi: I_n \rightarrow I_n$ o é. Logo podemos considerar $f: I_n \rightarrow I_n$. Se f for injetiva então, pondo $A = f(I_n)$, teremos uma bijeção $f^{-1}: A \rightarrow I_n$. Pelo Teorema 1, $A = I_n$ e f é sobrejetiva. Reciprocamente, se f for sobrejetiva então, para cada $x \in I_n$, podemos escolher $y = g(x) \in I_n$ tal que $f(y) = x$. Isto define uma aplicação $g: I_n \rightarrow I_n$ tal que $f(g(x)) = x$ para todo $x \in I_n$. Então g é injetiva e, pelo que acabamos de provar, g é sobrejetiva. Assim, se $y_1, y_2 \in I_n$ forem tais que $f(y_1) = f(y_2)$ tomamos $x_1, x_2 \in I_n$ com $g(x_1) = y_1$, $g(x_2) = y_2$ e teremos $x_1 = f(g(x_1)) = f(y_1) = f(y_2) = f(g(x_2)) = x_2$, donde $y_1 = g(x_1) = g(x_2) = y_2$ logo f é injetiva. \square

Corolário 3. Não pode existir uma bijeção entre um conjunto finito e uma sua parte própria.

Com efeito, sejam X finito e $Y \subset X$ uma parte própria. Existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $\varphi: I_n \rightarrow X$. Então o conjunto $A = \varphi^{-1}(Y)$ é uma parte própria de I_n . Chamemos de $\varphi_A: A \rightarrow Y$ a bijeção obtida por restrição de φ a A . Se existisse uma bijeção $f: Y \rightarrow X$, a composta $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_A: A \rightarrow I_n$ seria também uma bijeção, contrariando o Teorema 1. \square

Lema. Se existe uma bijeção $f: X \rightarrow Y$ então, dados $a \in X$ e $b \in Y$, existe também uma bijeção $g: X \rightarrow Y$ tal que $g(a) = b$.

Demonstração: Seja $b' = f(a)$. Como f é sobrejetiva, existe $a' \in X$ tal que $f(a') = b$. Definamos $g: X \rightarrow Y$ pondo $g(a) = b$, $g(a') = b'$ e $g(x) = f(x)$ se $x \in X$ não é igual a a nem a a' . É fácil ver que g é uma bijeção. \square

Teorema 2. Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

Demonstração: Provaremos inicialmente o seguinte caso particular: se X é finito e $a \in X$ então $X - \{a\}$ é finito. Com efeito, existe uma bijeção $f: I_n \rightarrow X$ a qual, pelo Lema, podemos supor que cumpre $f(n) = a$. Se $n = 1$ então $X - \{a\} = \emptyset$ é finito. Se $n > 1$, a restrição de f a I_{n-1} é uma bijeção sobre $X - \{a\}$, logo $X - \{a\}$ é finito e tem $n - 1$ elementos. O caso geral se prova por indução no número n de elementos de X . Ele é evidente quando $X = \emptyset$ ou $n = 1$. Supondo o Teorema verdadeiro para conjuntos com n elementos, sejam X um conjunto com $n + 1$ elementos e Y um subconjunto de X . Se $Y = X$, nada há o que provar. Caso contrário, existe $a \in X$ com $a \notin Y$. Então, na realidade, $Y \subset X - \{a\}$. Como $X - \{a\}$ tem n elementos, segue-se que Y é finito. \square

Corolário 1. Dada $f: X \rightarrow Y$, se Y é finito e f é injetiva então X é finito; se X é finito e f é sobrejetiva então Y é finito.

Com efeito, se f é injetiva então ela é uma bijeção de X sobre um subconjunto $f(X)$ do conjunto finito Y . Por outro lado, se f é sobrejetiva e X é finito então, para cada $y \in Y$ podemos escolher um $x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$. Isto define uma aplicação $g: Y \rightarrow X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Segue-se que g é injetiva logo, pelo que acabamos de provar, Y é finito. \square

Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ diz-se *limitado* quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p$ para todo $x \in X$.

Corolário 2. Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.

Com efeito, se $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{N}$ é finito, pondo $p = x_1 + \dots + x_n$ vemos que $x \in X \Rightarrow x \leq p$ logo X é limitado. Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{N}$ é limitado então $X \subset I_p$ para algum $p \in \mathbb{N}$, segue-se pois do Teorema 2 que X é finito. \square

3. Conjuntos infinitos

Diz-se que um conjunto é *infinito* quando não é finito. Assim, X é

Por exemplo, o conjunto \mathbb{N} dos números naturais é infinito, em virtude do Corolário 2 do Teorema 2. Pelo mesmo motivo, se $k \in \mathbb{N}$ então o conjunto $k.\mathbb{N}$ dos múltiplos de k é infinito.

Teorema 3. *Se X é um conjunto infinito, então existe uma aplicação injetiva $f: \mathbb{N} \rightarrow X$*

Demonstração: Para cada subconjunto não vazio $A \subset X$, escolhemos um elemento $x_A \in A$. Em seguida, definimos $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ indutivamente. Pomos $f(1) = x_X$ e, supondo já definidos $f(1), \dots, f(n)$, escrevemos $A_n = X - \{f(1), \dots, f(n)\}$. Como X é infinito, A_n não é vazio. Definimos então $f(n+1) = x_{A_n}$. Isto completa a definição de f . Para provar que f é injetiva, sejam $m, n \in \mathbb{N}$, digamos com $m < n$. Então $f(m) \in \{f(1), \dots, f(n-1)\}$ enquanto $f(n) \in X - \{f(1), \dots, f(n-1)\}$. Logo $f(m) \neq f(n)$. \square

Corolário. *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $\varphi: X \rightarrow Y$ sobre um subconjunto próprio $Y \subset X$.*

Com efeito, sejam X infinito e $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ uma aplicação injetiva. Escrevemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n$. Consideremos o subconjunto próprio $Y = X - \{x_1\}$. Definamos a bijeção $\varphi: X \rightarrow Y$ pondo $\varphi(x) = x$ se x não é um dos x_n e $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Reciprocamente, se existe uma bijeção de X sobre um seu subconjunto próprio então X é infinito, em virtude do Corolário 3 do Teorema 1. \square

Se $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} - \{1\}$ então $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_1$, $\varphi(n) = n + 1$, é uma bijeção de \mathbb{N} sobre seu subconjunto $\mathbb{N}_1 = \{2, 3, \dots\}$. Mais geralmente, fixando $p \in \mathbb{N}$ podemos considerar $\mathbb{N}_p = \{p+1, p+2, \dots\}$ e definir a bijeção $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_p$, $\varphi(n) = n + p$. Fenômenos desse tipo já tinham sido observado por Galileu, que foi o primeiro a notar que “há tantos números pares quantos números naturais”, mostrando que se $P = \{2, 4, 6, \dots\}$ é o conjunto dos números pares então $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow P$, dada por $\varphi(n) = 2n$, é uma bijeção. Evidentemente, se $I = \{1, 3, 5, \dots\}$ é o conjunto dos números ímpares, então $\psi: \mathbb{N} \rightarrow I$, com $\psi(n) = 2n - 1$, também é uma bijeção. Nestes dois últimos exemplos, $\mathbb{N} - P = I$ e $\mathbb{N} - I = P$ são infinitos, enquanto $\mathbb{N} - \mathbb{N}_p = \{1, 2, \dots, p\}$ é finito.

4. Conjuntos enumeráveis

Um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Neste caso, f chama-se uma *enumeração* dos elementos

de X . Escrevendo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots$ tem-se então $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Teorema 4. Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração: Se X é finito, nada há para demonstrar. Caso contrário, enumeraremos os elementos de X pondo $x_1 =$ menor elemento de X , e supondo definidos $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, escrevemos $A_n = X - \{x_1, \dots, x_n\}$. Observando que $A_n \neq \emptyset$, pois X é infinito, definimos $x_{n+1} =$ menor elemento de A_n . Então $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Com efeito, se existisse algum elemento $x \in X$ diferente de todos os x_n , teríamos $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo x seria um número natural maior do que todos os elementos do conjunto infinito $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, contrariando o Corolário 2 do Teorema 2. \square

Corolário 1. Seja $f: X \rightarrow Y$ injetiva. Se Y é enumerável então X também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.

Com efeito, basta considerar o caso em que existe uma bijeção $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{N}$. Então $\varphi \circ f: X \rightarrow \mathbb{N}$ é uma bijeção de X sobre um subconjunto de \mathbb{N} , o qual é enumerável, pelo Teorema 4. No caso particular de $X \subset Y$, tomamos $f: X \rightarrow Y$ igual à aplicação de inclusão. \square

Corolário 2. Seja $f: X \rightarrow Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável então Y também é.

Com efeito, para cada $y \in Y$ podemos escolher um $x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$. Isto define uma aplicação $g: Y \rightarrow X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Segue-se daí que g é injetiva. Pelo Corolário 1, Y é enumerável.

Corolário 3. O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Com efeito, se X e Y são enumeráveis então existem sobrejeções $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow Y$, logo $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X \times Y$, dada por $\varphi(m, n) = (f(m), g(n))$ é sobrejetiva. Portanto, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isto, consideraremos a aplicação $\psi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por $\psi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Pela unicidade da decomposição de um número em fatores primos, ψ é injetiva. Segue-se que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. \square

Corolário 4. A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Com efeito, dados $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ enumeráveis, existem sobrejeções $f_1: \mathbb{N} \rightarrow X_1, f_2: \mathbb{N} \rightarrow X_2, \dots, f_n: \mathbb{N} \rightarrow X_n, \dots$. Tomando $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, definimos a sobrejeção $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$ pondo $f(m, n) = f_n(m)$. O caso de uma reunião finita $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ reduz-se ao anterior porque então $X = X_1 \cup \dots \cup X_n \cup X_n \cup \dots$. \square

O Teorema 3 acima significa que o enumerável é o “menor” dos infinitos. Com efeito, ele pode ser reformulado assim:

Todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável.

Exemplo 1. O conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ dos números *inteiros* é enumerável. Uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ pode ser definida pondo $f(n) = (n-1)/2$ para n ímpar e $f(n) = -n/2$ para n par.

Exemplo 2. O conjunto $\mathbb{Q} = \{m/n; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ dos números *racionais* é enumerável. Com efeito, escrevendo $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, podemos definir uma função sobrejetiva $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ pondo $f(m, n) = m/n$.

Exemplo 3. (Um conjunto não-enumerável.) Seja S o conjunto de todas as sequências infinitas, como $s = (01100010\dots)$, formadas com os símbolos 0 e 1. Noutras palavras, S é o conjunto de todas as funções $s: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o valor $s(n)$, igual a 0 ou 1, é o n -ésimo termo da seqüência s . Afirmamos que nenhum subconjunto enumerável $X = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\} \subset S$ é igual a S . Com efeito, dado X , indiquemos com s_{nm} o n -ésimo termo da seqüência $s_m \in X$. Formamos uma nova seqüência $s^* \in S$ tomando o n -ésimo termo de s^* igual a 0 se for $s_{nn} = 1$, ou igual a 1 se for $s_{nn} = 0$. A seqüência s^* não pertence ao conjunto X porque seu n -ésimo termo é diferente do n -ésimo termo de s_n . (Este raciocínio, devido a G. Cantor, é conhecido como “método da diagonal”.)

No capítulo seguinte mostraremos que o conjunto \mathbb{R} dos números reais não é enumerável.

5. Exercícios

Seção 1: Números naturais

1. Usando indução, prove:
 - (a) $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$.
 - (b) $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$.
2. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m$, prove que ou n é múltiplo de m ou existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = mq + r$ e $r < m$. Prove que q e r são únicos com esta propriedade.
3. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto não-vazio tal que $m, n \in X \Leftrightarrow m, m+n \in X$. Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que X é o conjunto dos múltiplos de k .
4. Dado $n \in \mathbb{N}$, prove que não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n + 1$.
5. Prove o princípio de indução como uma consequência do princípio da boa ordenação.

Seção 2: Conjuntos finitos

1. Indicando com $\text{card } X$ o número de elementos do conjunto finito X , prove:
 - (a) Se X é finito e $Y \subset X$ então $\text{card } Y \leq \text{card } X$.
 - (b) Se X e Y são finitos então $X \cup Y$ é finito e
$$\text{card}(X \cup Y) = \text{card } X + \text{card } Y - \text{card}(X \cap Y).$$
 - (c) Se X e Y são finitos então $X \times Y$ é finito e
$$\text{card}(X \times Y) = \text{card } X \cdot \text{card } Y.$$
2. Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de X . Prove por indução que se X é finito então $\text{card } \mathcal{P}(X) = 2^{\text{card } X}$.
3. Seja $\mathcal{F}(X; Y)$ o conjunto das funções $f: X \rightarrow Y$. Se $\text{card } X = m$ e $\text{card } Y = n$, prove que $\text{card } \mathcal{F}(X; Y) = n^m$.
4. Prove que todo conjunto finito não-vazio X de números naturais contém um elemento máximo (isto é, existe $x_0 \in X$ tal que $x \leq x_0 \forall x \in X$).

Seção 3: Conjuntos infinitos

1. Dada $f: X \rightarrow Y$, prove:
 - (a) Se X é infinito e f é injetiva então Y é infinito.
 - (b) Se Y é infinito e f é sobrejetiva, então X é infinito.
2. Sejam X um conjunto finito e Y um conjunto infinito. Prove que existe uma função injetiva $f: X \rightarrow Y$ e uma função sobrejetiva $g: Y \rightarrow X$.
3. Prove que o conjunto \mathcal{P} dos números primos é infinito.
4. Dê exemplo de uma seqüência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ de conjuntos infinitos cuja interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ seja vazia.

Seção 4: Conjuntos enumeráveis

1. Defina $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pondo $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1)$. Prove que f é uma bijeção.
2. Prove que existe $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sobrejetiva tal que $g^{-1}(n)$ é infinito, para cada $n \in \mathbb{N}$.
3. Exprima $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \dots \cup \mathbb{N}_n \cup \dots$ como união infinita de subconjuntos infinitos, dois a dois disjuntos.
4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\wp_n = \{X \subset \mathbb{N}; \text{card } X = n\}$. Prove que \wp_n é enumerável. Conclua que o conjunto \wp_f dos subconjuntos finitos de \mathbb{N} é enumerável.
5. Prove que o conjunto $\wp(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos de \mathbb{N} não é enumerável.
6. Sejam Y enumerável e $f: X \rightarrow Y$ tal que, para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é enumerável. Prove que X é enumerável.

Números Reais

O conjunto dos números reais será indicado por \mathbb{R} . Faremos neste capítulo uma descrição de suas propriedades que, juntamente com suas consequências, serão utilizadas nos capítulos seguintes.

1. \mathbb{R} é um corpo

Isto significa que estão definidas em \mathbb{R} duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que cumprem certas condições, abaixo especificadas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, sua *soma* $x + y \in \mathbb{R}$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu *produto* $x.y \in \mathbb{R}$.

Os axiomas a que essas operações obedecem são:

Associatividade: para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x.y).z = x.(y.z)$.

Comutatividade: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $x + y = y + x$ e $x.y = y.x$.

Elementos neutros: existem em \mathbb{R} dois elementos distintos 0 e 1 tais que $x+0 = x$ e $x.1 = x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Inversos: todo $x \in \mathbb{R}$ possui um *inverso aditivo* $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ e, se $x \neq 0$, existe também um *inverso multiplicativo* $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x.x^{-1} = 1$.

Distributividade: para $x, y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $x.(y + z) = x.y + x.z$.

Dos axiomas acima resultam todas as regras familiares de manipulação com os números reais. A título de exemplo, estabeleceremos algumas delas.

Da comutatividade resulta que $0 + x = x$ e $-x + x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

indicada por $x - y$ e chamada a *diferença* entre x e y . Se $y \neq 0$, o produto $x.y^{-1}$ será representado também por x/y e chamado o *quociente* de x por y . As operações $(x, y) \mapsto x - y$ e $(x, y) \mapsto x/y$ chamam-se, respectivamente, *subtração* e *divisão*. Evidentemente, a divisão de x por y só faz sentido quando $y \neq 0$, pois o número 0 não possui inverso multiplicativo.

Da distributividade segue-se que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale $x.0 + x = x.0 + x.1 = x(0+1) = x.1 = x$. Somando $-x$ a ambos os membros da igualdade $x.0 + x = x$ obtemos $x.0 = 0$.

Por outro lado, de $x.y = 0$ podemos concluir que $x = 0$ ou $y = 0$. Com efeito, se for $y \neq 0$ então podemos multiplicar ambos os membros desta igualdade por y^{-1} e obtemos $x.y.y^{-1} = 0.y^{-1}$, donde $x = 0$.

Da distributividade resultam também as “regras dos sinais”: $x.(-y) = (-x).y = -(x.y)$ e $(-x).(-y) = xy$. Com efeito, $x.(-y) + x.y = x.(-y+y) = x.0 = 0$. Somando $-(x.y)$ a ambos os membros da igualdade $x.(-y) + x.y = 0$ vem $x.(-y) = -(x.y)$. Analogamente, $(-x).y = -(x.y)$. Logo $(-x).(-y) = -[x.(-y)] = -[-(x.y)] = x.y$. Em particular, $(-1).(-1) = 1$. (Observação: a igualdade $-(-z) = z$, acima empregada, resulta de somar-se z a ambos os membros da igualdade $-(-z) + (-z) = 0$.)

Se dois números reais x, y têm quadrados iguais, então $x = \pm y$. Com efeito, de $x^2 = y^2$ decorre que $0 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ e, como sabemos, o produto de dois números reais só é zero quando pelo menos um dos fatores é zero.

2. \mathbb{R} é um corpo ordenado

Isto significa que existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado o conjunto dos *números reais positivos*, que cumpre as seguintes condições:

- P1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x.y \in \mathbb{R}^+$.
- P2. Dado $x \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Se indicarmos com \mathbb{R}^- o conjunto dos números $-x$ onde $x \in \mathbb{R}^+$, a condição P2. diz que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ e os conjuntos $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos. Os números $y \in \mathbb{R}^-$ chamam-se *negativos*.

Todo número real $x \neq 0$ tem quadrado positivo. Com efeito, se $x \in \mathbb{R}^+$ então $x^2 = x.x \in \mathbb{R}^+$ por P1. Se $x \notin \mathbb{R}^+$ então (como $x \neq 0$) $-x \in \mathbb{R}^+$ logo,

ainda por causa de P1., temos $x^2 = (-x).(-x) \in \mathbb{R}^+$. Em particular, 1 é um número positivo porque $1 = 1^2$.

Escreve-se $x < y$ e diz-se que x é *menor do que* y quando $y - x \in \mathbb{R}^+$, isto é, $y = x + z$ onde z é positivo. Neste caso, escreve-se também $y > x$ e diz-se que y é *maior do que* x . Em particular, $x > 0$ significa que $x \in \mathbb{R}^+$, isto é, que x é positivo, enquanto $x < 0$ quer dizer que x é negativo, ou seja, que $-x \in \mathbb{R}^+$.

Valem as seguintes propriedades da relação de ordem $x < y$ em \mathbb{R} :

- O1. *Transitividade:* se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.
- O2. *Tricotomia:* dados $x, y \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.
- O3. *Monotonicidade da adição:* se $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z < y + z$.
- O4. *Monotonicidade da multiplicação:* se $x < y$ então, para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$. Se, porém, $z < 0$ então $x < y$ implica $yz < xz$.

Demonstração: O1. $x < y$ e $y < z$ significam $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z - y \in \mathbb{R}^+$. Por P1 segue-se que $(y - x) + (z - y) \in \mathbb{R}^+$, isto é, $z - x \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $x < z$.

O2. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, ou $y - x \in \mathbb{R}^+$, ou $y - x = 0$ ou $y - x \in \mathbb{R}^-$ (isto é, $x - y \in \mathbb{R}^+$). No primeiro caso tem-se $x < y$, no segundo $x = y$ e no terceiro $y < x$. Estas alternativas se excluem mutuamente, por P2.

O3. Se $x < y$ então $y - x \in \mathbb{R}^+$, donde $(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}^+$, isto é, $x + z < y + z$.

O4. Se $x < y$ e $z > 0$ então $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z \in \mathbb{R}^+$, logo $(y - x).z \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $yz - xz \in \mathbb{R}^+$, o que significa $xz < yz$. Se $x < y$ e $z < 0$ então $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $-z \in \mathbb{R}^+$, donde $xz - yz = (y - x)(-z) \in \mathbb{R}^+$, o que significa $yz < xz$. \square

Mais geralmente, $x < y$ e $x' < y'$ implicam $x + x' < y + y'$. Com efeito $(y + y') - (x + x') = (y - x) + (y' - x') \in \mathbb{R}^+$.

Analogamente, $0 < x < y$ e $0 < x' < y'$ implicam $xx' < yy'$ pois $yy' - xx' = yy' - yx' + yx' - xx' = y(y' - x') + (y - x)x' > 0$.

Se $0 < x < y$ então $y^{-1} < x^{-1}$. Para provar, nota-se primeiro que $x > 0 \Rightarrow x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 > 0$. Em seguida, multiplicando ambos os membros da desigualdade $x < y$ por $x^{-1}y^{-1}$ vem $y^{-1} < x^{-1}$.

Como $1 \in \mathbb{R}$ é positivo, segue-se que $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \dots$. Podemos então considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Segue-se que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ pois $0 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R} \Rightarrow -n \in \mathbb{R}$. Além disso, se $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$ então $m/n = m \cdot n^{-1} \in \mathbb{R}$, o que nos permite concluir que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Assim, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Na seção seguinte, veremos que a inclusão $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é própria.

Exemplo 1. (*Desigualdade de Bernoulli.*) Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $(1+x)^n \geq 1+nx$. Isto se prova por indução em n , sendo óbvio para $n=1$. Supondo a desigualdade válida para n , multiplicamos ambos os membros pelo número $1+x \geq 0$ e obtemos

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento, vê-se que $(1+x)^n > 1+nx$ quando $n > 1$, $x > -1$ e $x \neq 0$.

A relação de ordem em \mathbb{R} permite definir o *valor absoluto* (ou *módulo*) de um número real $x \in \mathbb{R}$ assim: $|x| = x$ se $x > 0$, $|0| = 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$. Noutras palavras, $|x| = \max\{x, -x\}$ é o maior dos números reais x e $-x$.

Tem-se $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, a desigualdade $x \leq |x|$ é óbvia, enquanto $-|x| \leq x$ resulta de multiplicar por -1 ambos os membros da desigualdade $-x \leq |x|$. Podemos caracterizar $|x|$ como o único número ≥ 0 cujo quadrado é x^2 .

Teorema 1. Se $x, y \in \mathbb{R}$ então $|x+y| \leq |x| + |y|$ e $|x.y| = |x|.|y|$.

Demonstração: Somando membro a membro as desigualdades $|x| \geq x$ e $|y| \geq y$ vem $|x| + |y| \geq x + y$. Analogamente, de $|x| \geq -x$ e $|y| \geq -y$ resulta $|x| + |y| \geq -(x+y)$. Logo $|x| + |y| \geq |x+y| = \max\{x+y, -(x+y)\}$. Para provar que $|x.y| = |x|.|y|$, basta mostrar que estes dois números têm o mesmo quadrado, já que ambos são ≥ 0 . Ora o quadrado de $|x.y|$ é $(x.y)^2 = x^2.y^2$, enquanto $(|x|.|y|)^2 = |x|^2|y|^2 = x^2.y^2$. \square

Teorema 2. Sejam $a, x, \delta \in \mathbb{R}$. Tem-se $|x-a| < \delta$ se, e somente se, $a-\delta < x < a+\delta$.

Demonstração: Como $|x-a|$ é o maior dos dois números $x-a$ e $-(x-a)$, afirmar que $|x-a| < \delta$ equivale a dizer que se tem $x-a < \delta$

$c -(x - a) < \delta$, ou seja, $x - a < \delta$ e $x - a > -\delta$. Somando a , vem: $|x - a| < \delta \iff x < a + \delta$ e $x > a - \delta \iff a - \delta < x < a + \delta$. \square

De modo análogo se vê que $|x - a| \leq \delta \iff a - \delta \leq x \leq a + \delta$.

Usaremos as seguintes notações para representar tipos especiais de conjuntos de números reais, chamados *intervalos*:

$$\begin{array}{ll} [a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} & (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\} \\ (a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} & (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\} \\ [a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} & [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \\ (a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} & (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\} \\ & (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \end{array}$$

Os quatro intervalos da esquerda são *limitados*, com extremos a, b : $[a, b]$ é um intervalo *fechado*, (a, b) é *aberto*, $[a, b)$ é *fechado à esquerda* e $(a, b]$ é *fechado à direita*. Os cinco intervalos à direita são *ilimitados*: $(-\infty, b]$ é a semi-reta esquerda fechada de origem b . Os demais têm denominações análogas. Quando $a = b$, o intervalo fechado $[a, b]$ reduz-se a um único elemento e chama-se um *intervalo degenerado*.

Em termos de intervalos, o Teorema 2 diz que $|x - a| < \varepsilon$ se, e somente se, x pertence ao intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Analogamente, $|x - a| \leq \varepsilon \iff x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

É muito conveniente imaginar o conjunto \mathbb{R} como uma reta (a “reta real”) e os números reais como pontos dessa reta. Então a relação $x < y$ significa que o ponto x está à esquerda de y (e y à direita de x), os intervalos são segmentos de reta e $|x - y|$ é a distância do ponto x ao ponto y . O significado do Teorema 2 é de que o intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ é formado pelos pontos que distam menos de δ do ponto a . Tais interpretações geométricas constituem um valioso auxílio para a compreensão dos conceitos e teoremas da Análise.

3. \mathbb{R} é um corpo ordenado completo

Nada do que foi dito até agora permite distinguir \mathbb{R} de \mathbb{Q} pois os números racionais também constituem um corpo ordenado. Acabaremos agora nossa caracterização de \mathbb{R} , descrevendo-o como um corpo ordenado completo, propriedade que \mathbb{Q} não tem.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *limitado superiormente* quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que b é uma *cota superior* de X . Analogamente, diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *limitado inferiormente* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. O número a chama-se então uma *cota inferior* de X . Se X é limitado superior e inferiormente, diz-se que X é um conjunto *limitado*. Isto significa que X está contido em algum intervalo limitado $[a, b]$ ou, equivalentemente, que existe $k > 0$ tal que $x \in X \implies |x| \leq k$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se o *supremo* do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X . Mais explicitamente, b é o supremo de X quando cumpre as duas condições:

- S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;
- S2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.

A condição S2 admite a seguinte reformulação:

- S2'. Se $c < b$ então existe $x \in X$ com $c < x$.

Com efeito, S2' diz que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de X . Às vezes se exprime S2' assim: para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Escreveremos $b = \sup X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X .

Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio, limitado inferiormente, um número real a chama-se o *ínfimo* do conjunto X , e escreve-se $a = \inf X$, quando é a maior das cotas inferiores de X . Isto equivale às duas afirmações:

- I1. Para todo $x \in X$ tem-se $a \leq x$;
- I2. Se $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$.

A condição I2 pode também ser formulada assim:

- I2'. Se $a < c$ então existe $x \in X$ tal que $x < c$.

De fato, I2' diz que nenhum número maior do que a é cota inferior de X . Equivalentemente: para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

Diz-se que um número $b \in X$ é o *maior elemento* (ou *elemento máximo*) do conjunto X quando $b \geq x$ para todo $x \in X$. Isto quer dizer que b é uma cota superior de X , *pertencente a* X . Por exemplo, b é o elemento máximo do intervalo fechado $[a, b]$ mas o intervalo (a, b) não possui maior elemento. Evidentemente, se um conjunto X possui elemento máximo este será seu supremo. A

noção de supremo serve precisamente para substituir a idéia de maior elemento de um conjunto quando esse maior elemento não existe. O supremo do conjunto $[a, b)$ é b . Considerações inteiramente análogas podem ser feitas em relação ao ínfimo.

A afirmação de que o corpo ordenado \mathbb{R} é *completo* significa que todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo $b = \sup X \in \mathbb{R}$.

Não é necessário estipular também que todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possua ínfimo. Com efeito, neste caso o conjunto $Y = \{-x; x \in X\}$ é não vazio, limitado superiormente, logo possui um supremo $b \in \mathbb{R}$. Então, como se vê sem dificuldade, o número $a = -b$ é o ínfimo de Y .

Em seguida veremos algumas consequências da completeza de \mathbb{R} .

Teorema 3.

- i) O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ dos números naturais não é limitado superiormente;
- ii) O ínfimo do conjunto $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ é igual a 0;
- iii) Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.a > b$.

Demonstração: Se $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ fosse limitado superiormente, existiria $c = \sup \mathbb{N}$.

Então $c - 1$ não seria cota superior de \mathbb{N} , isto é, existiria $n \in \mathbb{N}$ com $c - 1 < n$. Daí resultaria $c < n + 1$, logo c não seria cota superior de \mathbb{N} . Esta contradição prova i). Quanto a ii), 0 é evidentemente uma cota inferior de X . Basta então provar que nenhum $c > 0$ é cota inferior de X . Ora, dado $c > 0$, existe, por i), um número natural $n > 1/c$, donde $1/n < c$, o que prova ii). Finalmente, dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ usamos i) para obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > b/a$. Então $n.a > b$, o que demonstra iii). \square

As propriedades i), ii) e iii) do teorema acima são equivalentes e significam que \mathbb{R} é um corpo *arquimediano*. Na realidade, iii) é devida ao matemático grego Eudoxo, que viveu alguns séculos antes de Arquimedes.

Teorema 4. (Intervalos encaixados.) Dada uma seqüência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: As inclusões $I_n \supset I_{n+1}$ significam que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

O conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ é, portanto, limitado superiormente. Seja $c = \sup A$. Evidentemente, $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como cada b_n é cota superior de A , temos $c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $c \in I_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. \square

Teorema 5. *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

Demonstração: Mostraremos que nenhuma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser sobrejetiva. Para isto, supondo f dada, construiremos uma seqüência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de intervalos limitados e fechados tais que $f(n) \notin I_n$. Então, se c é um número real pertencente a todos os I_n , nenhum dos valores $f(n)$ pode ser igual a c , logo f não é sobrejetiva. Para obter os intervalos, começamos tomando $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $f(1) < a_1$ e, supondo obtidos $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$ tais que $f(j) \notin I_j$, olhamos para $I_n = [a_n, b_n]$. Se $f(n+1) \notin I_n$, podemos simplesmente tomar $I_{n+1} = I_n$. Se, porém, $f(n+1) \in I_n$, pelo menos um dos extremos, digamos a_n , é diferente de $f(n+1)$, isto é, $a_n < f(n+1)$. Neste caso, tomamos $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, com $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = (a_n + f(n+1))/2$. \square

Um número real chama-se *irracional* quando não é racional. Como o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é enumerável, resulta do teorema acima que existem números irracionais e, mais ainda, sendo $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, os irracionais constituem um conjunto não-enumerável (portanto formam a maioria dos reais) porque a reunião de dois conjuntos enumeráveis seria enumerável. Evidentemente, números irracionais podem ser exibidos explicitamente. No Capítulo 3, Exemplo 15, veremos que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = x^2$, é sobrejetiva. Logo existe um número real positivo, indicado por $\sqrt{2}$, cujo quadrado é igual a 2. Pitágoras e seus discípulos mostraram que o quadrado de nenhum número racional pode ser 2. (Com efeito, de $(p/q)^2 = 2$ resulta $2q^2 = p^2$, com p, q inteiros, um absurdo porque o fator primo 2 aparece um número par de vezes na decomposição de p^2 em fatores primos e um número ímpar de vezes em $2q^2$.)

Corolário. *Todo intervalo não-degenerado é não-enumerável.*

Com efeito, todo intervalo não degenerado contém um intervalo aberto

é uma bijeção, basta mostrar que o intervalo aberto $(-1, 1)$ é não-enumerável. Ora, a função $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, dada por $\varphi(x) = x/(1 + |x|)$, é uma bijeção cuja inversa é $\psi: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\psi(y) = y/(1 - |y|)$, pois $\varphi(\psi(y)) = y$ e $\psi(\varphi(x)) = x$ para quaisquer $y \in (-1, 1)$ e $x \in \mathbb{R}$, como se pode verificar facilmente. \square

Teorema 6. *Todo intervalo não-degenerado I contém números racionais e irracionais.*

Demonstração: Certamente I contém números irracionais pois do contrário seria enumerável. Para provar que I contém números racionais, tomamos $[a, b] \subset I$, onde $a < b$ podem ser supostos irracionais. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < b - a$. Os intervalos $I_m = [m/n, (m+1)/n]$, $m \in \mathbb{Z}$, cobrem a reta, isto é $\mathbb{R} = \cup_{m \in \mathbb{Z}} I_m$. Portanto existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in I_m$. Como a é irracional, temos $m/n < a < (m+1)/n$. Sendo o comprimento $1/n$ do intervalo I_m menor do que $b - a$, segue-se que $(m+1)/n < b$. Logo o número racional $(m+1)/n$ pertence ao intervalo $[a, b]$ e portanto ao intervalo I . \square

4. Exercícios

Seção 1: \mathbb{R} é um corpo

1. Prove as seguintes unicidades:

- (a) Se $x + \theta = x$ para algum $x \in \mathbb{R}$ então $\theta = 0$;
- (b) Se $x.u = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $u = 1$;
- (c) Se $x + y = 0$ então $y = -x$;
- (d) Se $x.y = 1$ então $y = x^{-1}$.

2. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$ prove que $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$ e $(a/b)(c/d) = ac/bd$

3. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ em \mathbb{R} , prove que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ e conclua que $(a/b)^{-1} = b/a$.

4. Prove que $(1 - x^{n+1})/(1 - x) = 1 + x + \dots + x^n$ para todo $x \neq 1$.

Seção 2: \mathbb{R} é um corpo ordenado

2. Prove que $\|x| - |y\| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x^2 + y^2 = 0$ prove que $x = y = 0$
4. Prove por indução que $(1+x)^n \geq 1 + nx + [n(n-1)/2]x^2$ se $x \geq 0$.
5. Para todo $x \neq 0$ em \mathbb{R} , prove que $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx$.
6. Prove que $|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b| + \varepsilon$.
7. Use o fato de que o trinômio do segundo grau $f(\lambda) = \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i)^2$ é ≥ 0 para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

Prove ainda que vale a igualdade se, e somente se, existe λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, ou $y_1 = \dots = y_n = 0$.

8. Se $a_1/b_1, \dots, a_n/b_n$ pertencem ao intervalo (α, β) e b_1, \dots, b_n são positivos, prove que $(a_1 + \dots + a_n)/(b_1 + \dots + b_n)$ pertence a (α, β) . Nas mesmas condições, se $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+$, prove que $(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n)/(t_1 b_1 + \dots + t_n b_n)$ também pertence ao intervalo (α, β) .

Seção 3: \mathbb{R} é um corpo ordenado completo

1. Diz-se que uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é *limitada superiormente* quando sua imagem $f(X) = \{f(x); x \in X\}$ é um conjunto limitado superiormente. Então põe-se $\sup f = \sup\{f(x); x \in X\}$. Prove que se $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ são limitadas superiormente o mesmo ocorre com a soma $f+g: X \rightarrow \mathbb{R}$ e tem-se $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$. Dê um exemplo com $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$. Enuncie e prove um resultado análogo para inf.
2. Dadas as funções $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ limitadas superiormente, prove que o produto $f.g: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função limitada (superior e inferiormente) com $\sup(f.g) \leq \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f.g) \geq \inf f \cdot \inf g$. Dê exemplos onde se tenha $<$ e não $=$.
3. Nas condições do exercício anterior mostre que $\sup(f^2) = (\sup f)^2$ e $\inf(f^2) = (\inf f)^2$.
4. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ com $a^2 < 2 < b^2$, tome $x, y \in \mathbb{R}^+$ tais que $x < 1$, $x < (2-a^2)/(2a+1)$ e $y < (b^2-2)/2b$. Prove que $(a+x)^2 < 2 < (b-y)^2$ e $b-y > 0$. Em seguida, considere o conjunto limitado $X = \{a \in \mathbb{R}^+; a^2 < 2\}$ e conclua que o número real $c = \sup X$ cumpre $c^2 = 2$.

5. Prove que o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros é enumerável. Um número real chama-se *algébrico* quando é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Prove que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Um número real chama-se *transcendente* quando não é algébrico. Prove que existem números transcendentos.
6. Prove que um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, $a < x < b$, $a, b \in I \Rightarrow x \in I$.

Seqüências de números reais

Neste capítulo será apresentada a noção de limite sob sua forma mais simples, o limite de uma seqüência. A partir daqui, todos os conceitos importantes da Análise, de uma forma ou de outra, reduzir-se-ão a algum tipo de limite.

1. Limite de uma seqüência.

Uma *seqüência* de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado o *n-ésimo termo* da seqüência.

Escreve-se $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n) , para indicar a seqüência cujo *n-ésimo termo* é x_n .

Não se confunda a seqüência (x_n) com o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ dos seus termos. Por exemplo, a seqüência $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ não é o mesmo que o conjunto $\{1\}$. Ou então: as seqüências $(0, 1, 0, 1, \dots)$ e $(0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ são diferentes mas o conjunto dos seus termos é o mesmo, igual a $\{0, 1\}$.

Uma seqüência (x_n) diz-se *limitada superiormente* (respectivamente *inferiormente*) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a seqüência (x_n) é *limitada* quando ela é limitada superior e inferiormente. Isto equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1. Se $a > 1$ então a seqüência $(a, a^2, \dots, a^n, \dots)$ é limitada inferiormente porém não superiormente. Com efeito, multiplicando ambos os membros da desigualdade $1 < a$ por a^n obtemos $a^n < a^{n+1}$. Segue-se que $a < a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo (a^n) é limitada inferiormente por a . Por outro lado, temos $a = 1 + d$, com $d > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli,

para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $a^n > 1 + nd$. Portanto, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$ podemos obter $a^n > c$ desde que tomemos $1 + nd > c$, isto é, $n > (c - 1)/d$.

Dada uma seqüência $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma *subseqüência* de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ de \mathbb{N} . Escreve-se $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$, ou $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ para indicar a subseqüência $x' = x|_{\mathbb{N}'}$. A notação $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mostra como uma subseqüência pode ser considerada como uma seqüência, isto é, uma função cujo domínio é \mathbb{N} .

Lembremos que $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado, isto é, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}'$ com $n_k > n_0$.

Exemplo 2. Dado o número real $a < -1$, formemos a seqüência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números ímpares então a subseqüência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é limitada apenas inferiormente enquanto a subseqüência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}''}$ é limitada apenas superiormente.

Diz-se que o número real a é *limite* da seqüência (x_n) quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$.

Esta importante definição significa que, para valores muito grandes de n , os termos x_n tornam-se e se mantêm tão próximos de a quanto se deseje. Mais precisamente, estipulando-se uma margem de erro $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n da seqüência com índice $n > n_0$ são valores aproximados de a com erro menor do que ε .

Simbolicamente, escreve-se:

$$a = \lim x_n \quad . \equiv . \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Acima, o símbolo $. \equiv .$ significa que o que vem depois é a definição do que vem antes. \forall significa “para todo” ou “qualquer que seja”. \exists significa “existe”. O ponto-e-vírgula quer dizer “tal que” e a seta \Rightarrow significa “implica”.

Convém lembrar que $|x_n - a| < \varepsilon$ é o mesmo que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, isto é, x_n pertence ao intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Assim, dizer que $a = \lim x_n$ significa afirmar que qualquer intervalo aberto de centro a contém todos os termos x_n da seqüência, salvo para um número

finito de índices n (a saber, os índices $n \leq n_0$, onde n_0 é escolhido em função do raio ε do intervalo dado).

Em vez de $a = \lim x_n$, escreve-se também $a = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ou $x_n \rightarrow a$. Esta última expressão lê-se “ x_n tende para a ” ou “converge para a ”. Uma seqüência que possui limite diz-se *convergente*. Caso contrário, ela se chama *divergente*.

Teorema 1. **(Unicidade do limite.)** *Uma seqüência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$. Dado $b \neq a$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sejam disjuntos. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in I$. Então, para todo $n > n_0$, temos $x_n \notin J$. Logo não é $\lim x_n = b$. \square

Teorema 2. *Se $\lim x_n = a$ então toda subseqüência de (x_n) converge para o limite a .*

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ a subseqüência. Dado qualquer intervalo aberto I de centro a , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n , com $n > n_0$, pertencem a I . Em particular, todos os termos x_{n_k} , com $n_k > n_0$ também pertencem a I . Logo $\lim x_{n_k} = a$. \square

Teorema 3. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $a = \lim x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - 1, a + 1)$. Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, \dots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$. Todos os termos x_n da seqüência estão contidos no intervalo $[b, c]$, logo ela é limitada. \square

Exemplo 3. A seqüência $(2, 0, 2, 0, \dots)$, cujo n -ésimo termo é $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$, é limitada mas não é convergente porque possui duas subseqüências constantes, $x_{2n-1} = 2$ e $x_{2n} = 0$, com limites distintos.

Exemplo 4. A seqüência $(1, 2, 3, \dots)$, com $x_n = n$, não converge porque não é limitada.

Uma seqüência (x_n) chama-se *monótona* quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$ para

monótona não-decrescente e, no segundo, que (x_n) é *monótona não-crescente*. Se, mais precisamente, tivermos $x_n < x_{n+1}$ (respect. $x_n > x_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos que a seqüência é *crescente* (respectivamente, *decrescente*).

Toda seqüência monótona não-decrescente (respect. não-crescente) é limitada inferiormente (respect. superiormente) pelo seu primeiro termo. A fim de que ela seja limitada é suficiente que possua uma subseqüência limitada. Com efeito, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma subseqüência limitada da seqüência monótona (digamos, não-decrescente) (x_n) . Temos $x_{n'} \leq c$ para todo $n' \in \mathbb{N}'$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $n' \in \mathbb{N}'$ tal que $n < n'$. Então $x_n \leq x_{n'} \leq c$.

O teorema seguinte dá uma condição suficiente para que uma seqüência converja. Foi tentando demonstrá-lo ao preparar suas aulas, na metade do século 19, que R. Dedekind percebeu a necessidade de uma conceituação precisa de número real.

Teorema 4. *Toda seqüência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) monótona, digamos não decrescente, limitada. Escrevemos $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ e $a = \sup X$. afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X . Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e daí $\lim x_n = a$. \square

Semelhantemente, se (x_n) é não-crescente, limitada então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores x_n .

Corolário. *(Teorema de Bolzano-Weierstrass.) Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.*

Com efeito, basta mostrar que toda seqüência (x_n) possui uma subseqüência monótona. Digamos que um termo x_n da seqüência dada é *destacado* quando $x_n > x_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$, então a subseqüência $(x_n)_{n \in D}$ será monótona não-crescente. Se, entretanto, D for finito seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez, x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos

$x_n/y_n > c.A/c = A$ e daí $\lim(x_n/y_n) = +\infty$.

(4) Existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n > c/\varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow |x_n/y_n| < c.\varepsilon/c = \varepsilon$, logo $\lim(x_n/y_n) = 0$. \square

As hipóteses feitas nas diversas partes do teorema anterior têm por objetivo evitar algumas das chamadas “expressões indeterminadas”. No item (1) procura-se evitar a expressão $+\infty - \infty$. De fato, se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$ nenhuma afirmação geral pode ser feita sobre $\lim(x_n + y_n)$. Este limite pode não existir (como no caso em que $x_n = n + (-1)^n$ e $y_n = -n$), pode ser igual a $+\infty$ (se $x_n = 2n$ e $y_n = -n$), pode ser $-\infty$ (tome $x_n = n$ e $y_n = -2n$) ou pode assumir um valor arbitrário $c \in \mathbb{R}$ (por exemplo, se $x_n = n + c$ e $y_n = -n$). Por causa desse comportamento errático, diz-se que $+\infty - \infty$ é uma expressão indeterminada. Nos ítems (2), (3) e (4), as hipóteses feitas excluem os limites do tipo $0 \times \infty$ (também evitado no Teorema 7), $0/0$ e ∞/∞ , respectivamente, os quais constituem expressões indeterminadas no sentido que acabamos de explicar. Outras expressões freqüentemente encontradas são ∞^0 , 1^∞ e 0^0 .

Os limites mais importantes da Análise quase sempre se apresentam sob forma de uma expressão indeterminada. Por exemplo, o número $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ é da forma 1^∞ . E, como veremos mais adiante, a derivada é um limite do tipo $0/0$.

Agora, uma observação sobre ordem de grandeza. Se $k \in \mathbb{N}$ e a é um número real > 1 então $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n! = \lim_{n \rightarrow \infty} n^n$. Todas estas seqüências têm limite infinito. Mas o Exemplo 9 nos diz que, para valores muito grandes de n temos $n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$, onde o símbolo \ll quer dizer “é uma fração muito pequena de” ou “é insignificante diante de”. Por isso diz-se que o crescimento exponencial supera o polinomial, o crescimento factorial supera o exponencial com base constante mas é superado pelo crescimento exponencial com base crescente. Por outro lado, o crescimento de n^k (mesmo quando $k = 1$) supera o crescimento logarítmico, como mostraremos agora.

No Capítulo 11 provaremos a existência de uma função crescente $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\log(xy) = \log x + \log y$ e $\log x < x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Daí resulta que $\log x = \log(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = 2 \log \sqrt{x}$, donde $\log \sqrt{x} = (\log x)/2$. Além disso, $\log x = \log(1 \cdot x) = \log 1 + \log x$, donde $\log 1 = 0$. Como \log é crescente, tem-se $\log x > 0$ para todo $x > 1$. Vale também $\log(2^n) = n \cdot \log 2$, portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2^n) = +\infty$. Como \log é crescente, segue-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n = +\infty$.

Provaremos agora que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\log \sqrt{n} < \sqrt{n}$. Como $\log \sqrt{n} = \frac{1}{2} \log n$, segue-se que $\log n < 2\sqrt{n}$. Dividindo por n resulta que $0 < \log n/n < 2/\sqrt{n}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, vem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$.

6. Exercícios

Seção 1: Limite de uma seqüência

1. Uma seqüência (x_n) diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+p} = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que toda seqüência periódica convergente é constante.
2. Dadas as seqüências (x_n) e (y_n) , defina (z_n) pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.
3. Se $\lim x_n = a$, prove que $\lim |x_n| = |a|$.
4. Se uma seqüência monótona tem uma subseqüência convergente, prove que a seqüência é, ela própria, convergente.
5. Um número a chama-se *valor de aderência* da seqüência (x_n) quando é limite de uma subseqüência de (x_n) . Para cada um dos conjuntos A , B e C abaixo ache uma seqüência que o tenha como conjunto dos seus valores de aderência. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{N}$, $C = [0, 1]$.
6. A fim de que o número real a seja valor de aderência de (x_n) é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$ dados, exista $n > k$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$.
7. A fim de que o número real b não seja valor de aderência da seqüência (x_n) é necessário e suficiente que existam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - b| \geq \varepsilon$.

Seção 2: Limites e desigualdades

1. Se $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ e $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, prove que $|a - b| \geq \varepsilon$.
2. Sejam $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Se $a < b$, prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n$.

3. Se o número real a não é o limite da seqüência limitada (x_n) , prove que alguma subseqüência de (x_n) converge para um limite $b \neq a$.
4. Prove que uma seqüência limitada converge se, e somente se, possui um único valor de aderência.
5. Quais são os valores de aderência da seqüência (x_n) tal que $x_{2n-1} = n$ e $x_{2n} = 1/n$? Esta seqüência converge?
6. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, defina indutivamente as seqüências (x_n) e (y_n) pondo $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = (a + b)/2$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$. Prove que (x_n) e (y_n) convergem para o mesmo limite.
7. Diz-se que (x_n) é uma *seqüência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.
- Prove que toda seqüência de Cauchy é limitada.
 - Prove que uma seqüência de Cauchy não pode ter dois valores de aderência distintos.
 - Prove que uma seqüência (x_n) é convergente se, e somente se, é de Cauchy.

Seção 3: Operações com limites

- Prove que, para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+p]{n} = 1$.
- Se existem $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\varepsilon \leq x_n \leq n^k$ para todo n suficientemente grande, prove que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$. Use este fato para calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+k}$, $\lim \sqrt[n]{n+\sqrt{n}}$, $\lim \sqrt[n]{\log n}$ e $\lim \sqrt[n]{n \log n}$.
- Dado $a > 0$, defina indutivamente a seqüência (x_n) pondo $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Prove que (x_n) é convergente e calcule seu limite

$$L = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}$$

- Seja $e_n = (x_n - \sqrt{a})/\sqrt{a}$ o *erro relativo* na n -ésima etapa do cálculo de \sqrt{a} . Prove que $e_{n+1} = e_n^2/2(1 + e_n)$. Conclua que $e_n \leq 0,01 \Rightarrow e_{n+1} \leq 0,00005 \Rightarrow e_{n+2} \leq 0,0000000125$ e observe a rapidez de convergência do método.
- Dado $a > 0$, defina indutivamente a seqüência (x_n) pondo $x_1 = 1/a$ e $x_{n+1} = 1/(a + x_n)$. Considere o número c , raiz positiva da equação $x^2 +$

$a \cdot x - 1 = 0$, único número positivo tal que $c = 1/(a + c)$. Prove que

$$x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < \cdots < c < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < x_3 < x_1,$$

e que $\lim x_n = c$. O número c pode ser considerado como a soma da *fração contínua*

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cdots}}}}$$

6. Dado $a > 0$, defina indutivamente a seqüência (y_n) , pondo $y_1 = a$ e $y_{n+1} = a + 1/y_n$. Mostre que $\lim y_n = a + c$, onde c é como no exercício anterior.
7. Defina a seqüência (a_n) indutivamente, pondo $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escreva $x_n = a_n/a_{n+1}$ e prove que $\lim x_n = c$, onde c é único número positivo tal que $1/(c+1) = c$. O termo a_n chama-se o n -ésimo número de Fibonacci e $c = (-1 + \sqrt{5})/2$ é o número de ouro da Geometria Clássica.

Resumo 4: Limites infinitos

1. Prove que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.
2. Se $\lim x_n = +\infty$ e $a \in \mathbb{R}$, prove: $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{\log(x_n + a)} - \sqrt{\log x_n}] = 0$.
3. Dados $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$, determine o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^k \cdot a^n}.$$

Supondo $a > 0$ e $a \neq e$ calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k \cdot a^n \cdot n!}{n^n}.$$

(Para o caso $a = e$, ver exercício 9, seção 1, capítulo 11.)

4. Mostre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(n+1)/\log n = 1$.
5. Sejam (x_n) uma seqüência arbitrária e (y_n) uma seqüência crescente, com $\lim y_n = +\infty$. Supondo que $\lim(x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n) = a$, prove que $\lim x_n/y_n = a$. Conclua que se $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$ então $\lim x_n/n = a$. Em particular, de $\lim \log(1 + 1/n) = 0$, conclua que $\lim(\log n)/n = 0$.

6. Se $\lim x_n = a$ e (t_n) é uma seqüência de números positivos com

$$\lim(t_1 + \cdots + t_n) = +\infty,$$

prove que

$$\lim \frac{t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n}{t_1 + \cdots + t_n} = a.$$

Em particular, se $y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, tem-se ainda $\lim y_n = a$.

Séries numéricas

Uma série é uma soma $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ com um número infinito de parcelas. Para que isto faça sentido, poremos $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \cdots + a_n)$. Como todo limite, este pode existir ou não. Por isso há séries convergentes e séries divergentes. Aprender a distinguir umas das outras é a principal finalidade deste capítulo.

1. Séries convergentes

Dada uma seqüência (a_n) de números reais, a partir dela formamos uma nova seqüência (s_n) onde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \text{ etc.}$$

Os números s_n chamam-se as *reduzidas* ou *somas parciais* da série $\sum a_n$. A parcela a_n é o n -ésimo termo ou termo geral da série.

Se existir o limite $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, diremos que a série $\sum a_n$ é *convergente* e $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ será chamado a *soma* da série. Se $\lim s_n$ não existir, diremos que $\sum a_n$ é uma série *divergente*.

Às vezes é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, que começam com a_0 em vez de a_1 .

Exemplo 1. Como já vimos (Exemplos 11 e 12, Capítulo 3), quando $|a| < 1$ a série geométrica $1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$ é convergente, com soma igual a $1/(1 - a)$, e a série $1 + 1 + 1/2! + \cdots + 1/n! + \cdots$ também converge, com soma igual a e .

Exemplo 2. A série $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, de termo geral $(-1)^{n+1}$, é divergente pois a soma parcial s_n é igual a zero quando n é par, e igual a

1 quando n é ímpar. Portanto não existe $\lim s_n$.

Exemplo 3. A série $\sum 1/n(n+1)$, cujo termo geral é $a_n = 1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$, tem n -ésima soma parcial

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto $\lim s_n = 1$, isto é, $\sum 1/n(n+1) = 1$.

Se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, as reduzidas da série $\sum a_n$ formam uma seqüência não-decrescente. Portanto uma série $\sum a_n$, de termos não-negativos, converge se, e somente se, existe uma constante k tal que $a_1 + \cdots + a_n \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por isso usaremos a notação $\sum a_n < +\infty$ para significar que a série $\sum a_n$, com $a_n \geq 0$, é convergente.

Se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e (a'_n) é uma subseqüência de (a_n) então $\sum a_n < +\infty$ implica $\sum a'_n < +\infty$.

Exemplo 4. (*A série harmônica.*) A série $\sum 1/n$ é divergente. De fato, se $\sum 1/n = s$ fosse convergente então $\sum 1/2n = t$ e $\sum 1/(2n-1) = u$ também seriam convergentes. Além disso, como $s_{2n} = t_n + u_n$, fazendo $n \rightarrow \infty$ teríamos $s = t + u$. Mas $t = \sum 1/2n = (1/2)\sum 1/n = s/2$, portanto $u = t = s/2$. Por outro lado

$$\begin{aligned} u - t &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} \right) > 0, \end{aligned}$$

logo $u > t$. Contradição.

Teorema 1. (**Critério de comparação.**) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não-negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq cb_n$ para todo $n > n_0$ então a convergência de $\sum b_n$ implica a de $\sum a_n$ enquanto a divergência de $\sum a_n$ implica a de $\sum b_n$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor $a_n \leq cb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então as reduzidas s_n e t_n , de $\sum a_n$ e $\sum b_n$ respectivamente, formam seqüências não-decrescentes tais que $s_n \leq ct_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $c > 0$, (t_n) limitada implica (s_n) limitada e (s_n) ilimitada implica (t_n) ilimitada, pois $t_n \geq s_n/c$. \square

Exemplo 5. Se $r > 1$, a série $\sum 1/n^r$ converge. Com efeito, seja c a soma da série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} (2/2^r)^n$. Mostraremos que toda reunião s_m da série $\sum 1/n^r$ é $< c$. Seja n tal que $m \leq 2^n - 1$. Então

$$\begin{aligned}s_m &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} \right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r} \right) + \\&\quad + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^r} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^r} \right), \\s_m &< 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)r}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2^r} \right)^i < c.\end{aligned}$$

Como a série harmônica diverge, resulta do critério de comparação que $\sum 1/n^r$ diverge quando $r < 1$ pois, neste caso, $1/n^r > 1/n$.

Teorema 2. O termo geral de uma série convergente tem limite zero.

Demonstração: Se a série $\sum a_n$ é convergente então, pondo $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, existe $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Consideremos a seqüência (t_n) , com $t_1 = 0$ e $t_n = s_{n-1}$ quando $n > 1$. Evidentemente, $\lim t_n = s$ e $s_n - t_n = a_n$. Portanto $\lim a_n = \lim(s_n - t_n) = \lim s_n - \lim t_n = s - s = 0$. \square

O critério contido no Teorema 2 constitui a primeira coisa a verificar quando se quer saber se uma série é ou não convergente. Se o termo geral não tende a zero, a série diverge. A série harmônica mostra que a condição $\lim a_n = 0$ não é suficiente para a convergência de $\sum a_n$. \square

2. Séries absolutamente convergentes

Uma série $\sum a_n$ diz-se *absolutamente convergente* quando $\sum |a_n|$ converge.

Exemplo 6. Uma série convergente cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente. Quando $-1 < a < 1$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é absolutamente convergente, pois $|a^n| = |a|^n$, com $0 \leq |a| < 1$.

O exemplo clássico de uma série convergente $\sum a_n$ tal que $\sum |a_n| = +\infty$ é dado por $\sum (-1)^{n+1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$. Quando tomamos a soma dos valores absolutos, obtemos a série harmônica, que diverge. A convergência da série dada segue-se do

grande e daí resulta que o termo geral a_n não tende para zero. Se $L = 1$, o teste é inconclusivo. A série pode convergir (como no caso $\sum 1/n^2$) ou divergir (como no caso $\sum 1/n$).

Exemplo 8. Seja $a_n = 1/(n^2 - 3n + 1)$. Considerando a série convergente $\sum(1/n^2)$, como $\lim[n^2/(n^2 - 3n + 1)] = \lim[1/(1 - 3/n + 1/n^2)] = 1$, concluímos que $\sum a_n$ é convergente.

Exemplo 9. Segue-se do Exemplo 9 do Capítulo 3 e do teste de d'Alembert que as séries $\sum(a^n/n!)$, $\sum(n!/n^n)$ e $\sum(n^k/a^n)$, esta última com $a > 1$, são convergentes.

Teorema 6. (**Teste de Cauchy.**) Quando existe um número real c tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (em particular, quando $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$), a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Demonstração: Se $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ então $|a_n| \leq c^n$ para todo n suficientemente grande. Como a série geométrica $\sum c^n$ é convergente, segue-se do critério de comparação que $\sum a_n$ converge absolutamente. No caso particular de existir $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, escolhemos c tal que $L < c < 1$ e teremos $\sqrt[n]{|a_n|} < c$ para todo n suficientemente grande (Teorema 5, Capítulo 3), recaindo assim no caso anterior. \square

Observação. Também no teste de Cauchy, tenta-se calcular $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Se $L > 1$, a série $\sum a_n$ diverge. Com efeito, neste caso, tem-se $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ para todo n suficientemente grande, donde $|a_n| > 1$, logo a série $\sum a_n$ diverge pois seu termo geral não tende a zero. Quando $L = 1$, a série pode divergir (como no caso $\sum(1/n)$) ou convergir (como $\sum(1/n^2)$).

Exemplo 10. Seja $a_n = (\log n/n)^n$. Como $\sqrt[n]{a_n} = \log n/n$ tende a zero, a série $\sum a_n$ é convergente.

O teorema seguinte relaciona os testes de d'Alembert e Cauchy.

Teorema 7. Seja (a_n) uma seqüência cujos termos são diferentes de zero. Se $\lim |a_{n+1}|/|a_n| = L$ então $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Demonstração: Para simplificar a notação, suporemos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, fixemos K, M tais que $L - \varepsilon < K <$

$L < M < L + \varepsilon$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p \Rightarrow K < a_{n+1}/a_n < M$. Multiplicando membro a membro as $n-p$ desigualdades $K < a_{p+i}/a_{p+i-1} < M$, $i = 1, \dots, n-p$, obtemos $K^{n-p} < a_n/a_p < M^{n-p}$ para todo $n > p$. Ponhamos $\alpha = a_p/K^p$ e $\beta = a_p/M^p$. Então $K^n\alpha < a_n < M^n\beta$. Extraíndo raízes, vem $K \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{a_n} < M \sqrt[n]{\beta}$ para todo $n > p$. Levando em conta que $L - \varepsilon < K, M < L + \varepsilon, \lim \sqrt[n]{\alpha} = 1$ e $\lim \sqrt[n]{\beta} = 1$, concluímos que $\exists n_0 > p$ tal que $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < K \sqrt[n]{\alpha} < M \sqrt[n]{\beta} < L + \varepsilon$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n) = L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$, o que prova o teorema quando $L > 0$. Se $L = 0$, basta considerar M em vez de K e M . \square

Exemplo 10. Resulta do Teorema 7 que $\lim n/\sqrt[n]{n!} = e$. Com efeito, pondo $a_n = n^n/n!$ vem $n/\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{a_n}$. Ora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

logo $\lim(a_{n+1}/a_n) = e$, e daí $\lim \sqrt[n]{a_n} = e$.

4. Comutatividade

Uma série $\sum a_n$ diz-se *comutativamente convergente* quando, para qualquer bijeção $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, pondo $b_n = a_{\varphi(n)}$, a série $\sum b_n$ é convergente. (Em particular, tomando $\varphi(n) = n$, vemos que $\sum a_n$ é convergente.) Resulta do que mostraremos a seguir que se $\sum a_n$ é comutativamente convergente então $\sum b_n = \sum a_n$ qualquer que seja a bijeção φ . Esta é a maneira precisa de afirmar que a soma $\sum a_n$ não depende da ordem das parcelas. Mas isto nem sempre ocorre.

Exemplo 11. A série

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

converge, mas não comutativamente. Com efeito, temos

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

Podemos então escrever

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots$$

Somando termo a termo vem

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

A série acima, cuja soma é $3s/2$, tem os mesmos termos da série inicial, cuja soma é s , apenas com uma mudança na sua ordem.

Teorema 8. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então para toda bi-jeção $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, pondo $b_n = a_{\varphi(n)}$, tem-se $\sum b_n = \sum a_n$.

Demonstração: Supomos inicialmente $a_n \geq 0$ para todo n . Escrevamos $s_n = a_1 + \dots + a_n$ e $t_n = b_1 + \dots + b_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, os números $\varphi(1), \dots, \varphi(n)$ pertencem todos ao conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$, onde m é o maior dos $\varphi(i)$. Então

$$t_n = \sum_{i=1}^n a_{\varphi(i)} \leq \sum_{j=1}^m a_j = s_m.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \leq s_m$. Reciprocamente, (considerando-se φ^{-1} em vez de φ) para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s_m \leq t_n$. Segue-se que $\lim t_n = \lim s_n$, isto é, $\sum b_n = \sum a_n$. No caso geral, temos $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$, onde p_n é a parte positiva e q_n a parte negativa de a_n . Toda reordenação (b_n) dos termos a_n determina uma reordenação (u_n) para os p_n e uma reordenação (v_n) dos q_n , de modo que u_n é a parte positiva e v_n a parte negativa de b_n . Pelo que acabamos de ver, $\sum u_n = \sum p_n$ e $\sum v_n = \sum q_n$. Logo $\sum a_n = \sum u_n - \sum v_n = \sum b_n$. \square

O teorema seguinte implica que somente as séries absolutamente convergentes são comutativamente convergentes.

Teorema 9. (Riemann.) Alterando-se convenientemente a ordem dos termos de uma série condicionalmente convergente, pode-se fazer com que sua soma fique igual a qualquer número real pré-fixado.

Demonstração: Seja $\sum a_n$ a série dada. Fixado o número c , começamos a somar os termos positivos de $\sum a_n$, na sua ordem natural, um a um, parando quando, ao somar a_{n_1} , a soma pela primeira vez ultrapasse c . (Isto é possível porque a soma dos termos positivos de $\sum a_n$ é $+\infty$.) A esta soma acrescentamos os termos negativos, também na sua ordem natural, um a um, parando logo que, ao somar $a_{n_2} (< 0)$, o total resulte inferior a c (o que é possível porque a soma dos termos negativos é $-\infty$). Prosseguindo analogamente, obtemos uma

mais uma série, cujos termos são os mesmos de $\sum a_n$, numa ordem diferente. As reduzidas desta nova série oscilam em torno do valor c de tal modo que (a partir daí a ordem n_1) a diferença entre cada uma delas e c é inferior, em valor absoluto, ao termo a_{n_k} onde houve a última mudança de sinal. Ora, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = 0$ porque a série $\sum a_n$ converge. Logo as reduzidas da nova série convergem para c . \square

6. Exercícios

M oção 1: Séries convergentes

- Dadas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, com $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ e $b_n = \log(1 + \frac{1}{n})$, mostre que $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Calcule explicitamente as n -ésimas reduzidas s_n e t_n destas séries e mostre que $\lim s_n = \lim t_n = +\infty$, logo as séries dadas são divergentes.
- Use o critério de comparação para provar que $\sum 1/n^2$ é convergente, a partir da convergência de $\sum 2/n(n+1)$.
- Seja s_n a n -ésima reduzida da série harmônica. Prove que para $n = 2^m$ tem-se $s_n > 1 + \frac{m}{2}$ e conclua daí que a série harmônica é divergente.
- Mostre que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge.
- Mostre que se $r > 1$ a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^r}$ converge.
- Prove que a série $\sum \frac{\log n}{n^2}$ converge.
- Prove: se $a_1 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ e $\sum a_n$ converge então $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

M oção 2: Séries absolutamente convergentes

- Se $\sum a_n$ é convergente e $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in [-1, 1]$ e

$$\sum a_n \sin(nx), \quad \sum a_n \cos(nx)$$

são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

- A série $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \dots$ tem termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende para zero. Entretanto é divergente. Por que isto não contradiz o Teorema de Leibniz?
- Dê exemplo de uma série convergente $\sum a_n$ e de uma seqüência limitada

(x_n) tais que a série $\sum a_n x_n$ seja divergente. Examine o que ocorre se uma das hipóteses seguintes for verificada: (a) (x_n) é convergente; (b) $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

4. Prove que é convergente a série obtida alterando-se os sinais dos termos da série harmônica, de modo que fiquem p termos positivos ($p \in \mathbb{N}$ fixado) seguidos de p termos negativos, alternadamente.
5. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e $\lim b_n = 0$, ponha $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ e prove que $\lim c_n = 0$.
6. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, prove que $\sum a_n^2$ converge.
7. Se $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergem, prove que $\sum a_n b_n$ converge absolutamente.
8. Prove: uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente se, e somente se, é limitado o conjunto de todas as somas finitas formadas com os termos a_n .

Seção 3: Testes de convergência

1. Prove que se existir uma infinidade de índices n tais que $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ então a série $\sum a_n$ diverge. Se $a_n \neq 0$ para todo n e $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ para todo $n > n_0$ então $\sum a_n$ diverge. Por outro lado, a série $1/2 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^3 + \cdots$ converge mas se tem $a_{n+1}/a_n = 1$ para todo n ímpar.
 2. Se $0 < a < b < 1$, a série $a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots$ é convergente. Mostre que o teste de Cauchy conduz a este resultado mas o teste de d'Alembert é inconclusivo.
 3. Determine se a série $\sum (\log n/n)^n$ é convergente usando ambos os testes, de d'Alembert e Cauchy.
 4. Dada uma seqüência de números positivos x_n , com $\lim x_n = a$, prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = a$.
 5. Determine para quais valores de x cada uma das séries abaixo é convergente:
- $$\sum n^k x^n, \quad \sum n^n x^n, \quad \sum x^n/n^n, \quad \sum n! x^n, \quad \sum x^n/n^2.$$

Seção 4: Comutatividade

1. Se uma série é condicionalmente convergente, prove que existem alterações da ordem dos seus termos de modo a tornar sua soma igual a $+\infty$ e a $-\infty$.

3. Efetue explicitamente uma reordenação dos termos da série $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots$ de modo que sua soma se torne igual a zero.
4. Diz-se que a seqüência (a_n) é *somável*, com soma s , quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um subconjunto finito $J_0 \subset \mathbb{N}$ tal que, para todo J finito com $J_0 \subset J \subset \mathbb{N}$, tem-se $|s - \sum_{n \in J} a_n| < \varepsilon$. Prove:
- (a) Se a seqüência (a_n) é somável então, para toda bijeção $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, a seqüência (b_n) , definida por $b_n = a_{\varphi(n)}$, é somável, com a mesma soma.
 - (b) Se a seqüência (a_n) é somável, com soma s , então a série $\sum a_n = s$ é absolutamente convergente.
 - (c) Reciprocamente, se $\sum a_n$ é uma série absolutamente convergente, então a seqüência (a_n) é somável.

Algumas Noções Topológicas

A Topologia é um ramo da Matemática no qual são estudadas, com grande generalidade, as noções de limite, de continuidade e as idéias com elas relacionadas. Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos topológicos elementares referentes a subconjuntos de \mathbb{R} , visando estabelecer a base adequada para desenvolver os capítulos seguintes. Adotaremos uma linguagem geométrica, dizendo “ponto” em vez de “número real”, “a reta” em vez de “o conjunto \mathbb{R} ”.

1. Conjuntos abertos

Diz-se que o ponto a é *interior* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe um número $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em X . O conjunto dos pontos interiores a X chama-se o *interior* do conjunto X e representa-se pela notação $\text{int } X$. Quando $a \in \text{int } X$ diz-se que o conjunto X é uma *vizinhança* do ponto a . Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se *aberto* quando $A = \text{int } A$, isto é, quando todos os pontos de A são interiores a A .

Exemplo 1. Todo ponto c do intervalo aberto (a, b) é um ponto interior a (a, b) . Os pontos a e b , extremos do intervalo fechado $[a, b]$ não são interiores a $[a, b]$. O interior do conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é vazio. Por outro lado, $\text{int}[a, b] = (a, b)$. O intervalo fechado $[a, b]$ não é uma vizinhança de a nem de b . Um intervalo aberto é um conjunto aberto. O conjunto vazio é aberto. Todo intervalo aberto (limitado ou não) é um conjunto aberto.

O limite de uma seqüência pode ser reformulado em termos de conjuntos abertos: tem-se $a = \lim x_n$ se, e somente se, para todo aberto A contendo a existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies x_n \in A$.

Teorema 1.

- a) Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos então a interseção $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.
- b) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos abertos, a reunião $\Lambda = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração: a) Se $x \in A_1 \cap A_2$ então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como A_1 e A_2 são abertos, existem $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tais que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset A_2$. Seja ε o menor dos dois números $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Então $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_2$ logo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1 \cap A_2$. Assim todo ponto $x \in A_1 \cap A_2$ é um ponto interior, ou seja, o conjunto $A_1 \cap A_2$ é aberto.

b) Se $x \in A$ então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda \subset A$, logo todo ponto $x \in A$ é interior, isto é, A é aberto. \square

Exemplo 2. Resulta imediatamente de a) no Teorema 1 que a interseção $A_1 \cap \dots \cap A_n$ de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Mas, embora por b) a reunião de uma infinidade de conjuntos abertos seja ainda aberta, a interseção de um número infinito de abertos pode não ser aberta. Por exemplo, se $A_1 = (-1, 1), A_2 = (-1/2, 1/2), \dots, A_n = (-1/n, 1/n), \dots$ então $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \{0\}$. Com efeito, se $x \neq 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| > 1/n$ logo $x \notin A_n$, donde $x \notin A$.

2. Conjuntos fechados

Diz-se que um ponto a é *aderente* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma seqüência de pontos $x_n \in X$. Evidentemente, todo ponto $a \in X$ é aderente a X : basta tomar todos os $x_n = a$.

Chama-se *fecho* de um conjunto X ao conjunto \overline{X} formado por todos os pontos aderentes a X . Tem-se $X \subset \overline{X}$. Se $X \subset Y$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$. Um conjunto X diz-se *fechado* quando $X = \overline{X}$, isto é, quando todo ponto aderente a X pertence a X . Seja $X \subset Y$. Diz-se que X é *denso* em Y quando $Y \subset \overline{X}$, isto é, quando todo $b \in Y$ é aderente a X . Por exemplo, \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} .

Teorema 2. Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X .

Demonstração: Seja a aderente a X . Então $a = \lim x_n$, onde $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada uma vizinhança qualquer $V \ni a$ temos

$x_n \in V$ para todo n suficientemente grande (pela definição de limite), logo $V \cap X \neq \emptyset$. Reciprocamente, se toda vizinhança de a contém pontos de X podemos escolher, em cada intervalo $(a - 1/n, a + 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X$. Então $|x_n - a| < 1/n$, logo $\lim x_n = a$ e a é aderente a X . \square

Pelo teorema acima, a fim de que um ponto a não pertença a \overline{X} é necessário e suficiente que exista uma vizinhança $V \ni a$ tal que $V \cap X = \emptyset$.

Corolário. *O fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado. (Ou seja, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ para todo $X \subset \mathbb{R}$.)*

Com efeito, se a é aderente a \overline{X} então todo conjunto aberto A contendo a contém algum ponto $b \in \overline{X}$. A é uma vizinhança de b . Como b é aderente a X , segue-se que A contém algum ponto de X . Logo qualquer ponto a , aderente a \overline{X} , é também aderente a X , isto é, $a \in \overline{X}$. \square

Teorema 3. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.*

Demonstração: Sejam F fechado e $a \in A$, isto é, $a \notin F$. Pelo Teorema 2, existe alguma vizinhança $V \ni a$ que não contém pontos de F , isto é, $V \subset A$. Assim, todo ponto $a \in A$ é interior a A , ou seja, A é aberto. Reciprocamente, se o conjunto A é aberto e o ponto a é aderente a $F = \mathbb{R} - A$ então toda vizinhança de a contém pontos de F , logo a não é interior a A . Sendo A aberto, temos $a \notin A$, ou seja, $a \in F$. Assim, todo ponto a aderente a F pertence a F , logo F é fechado. \square

Teorema 4.

- a) *Se F_1 e F_2 são fechados então $F_1 \cup F_2$ é fechado.*
- b) *Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados então a interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.*

Demonstração: a) Os conjuntos $A_1 = \mathbb{R} - F_1$ e $A_2 = \mathbb{R} - F_2$ são abertos, pelo Teorema 3. Logo, pelo Teorema 1, $A_1 \cap A_2 = \mathbb{R} - (F_1 \cup F_2)$ é aberto. Novamente pelo Teorema 3, $F_1 \cup F_2$ é fechado.

b) Para cada $\lambda \in L$, $A_\lambda = \mathbb{R} - F_\lambda$ é aberto. Segue-se que $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto. Mas $A = \mathbb{R} - F$. Logo F é fechado. \square

Exemplo 3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado, não-vazio. Então $a = \inf X$ e $b = \sup X$ são aderentes a X . Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in X$ com $a \leq x_n < a + 1/n$, logo $a = \lim x_n$. Analogamente, vê-se que $b = \lim y_n$, $y_n \in X$. Em particular, a e b são aderentes a (a, b) .

Exemplo 4. O fecho dos intervalos (a, b) , $[a, b]$ e $(a, b]$ é o intervalo $[a, b]$. \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} e, para todo intervalo I , $\mathbb{Q} \cap I$ é denso em I . Uma reunião infinita de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado; com efeito, todo conjunto (fechado ou não) é reunião dos seus pontos, que são conjuntos fechados.

Uma *cisão* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$ tal que $A \cap \bar{B} = \emptyset$ e $\bar{A} \cap B = \emptyset$, isto é, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A . (Em particular, A e B são disjuntos.) A decomposição $X = X \cup \emptyset$ chama-se a *cisão trivial*.

Exemplo 5. Se $X = \mathbb{R} - \{0\}$, então $X = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$ é uma cisão. Dado um número irracional α , sejam $A = \{x \in \mathbb{Q}; x < \alpha\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \alpha\}$. A decomposição $\mathbb{Q} = A \cup B$ é uma cisão do conjunto \mathbb{Q} dos racionais. Por outro lado, se $a < c < b$, então $[a, b] = [a, c] \cup (c, b]$ não é uma cisão.

Teorema 5. Um intervalo da reta só admite a cisão trivial.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que o intervalo I admite a cisão não trivial $I = A \cup B$. Tomemos $a \in A, b \in B$, digamos com $a < b$, logo $[a, b] \subset I$. Seja c o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Então $c \in A$ ou $c \in B$. Se $c \in A$, poremos $a_1 = c, b_1 = b$. Se $c \in B$, escreveremos $a_1 = a, b_1 = c$. Em qualquer caso, obteremos um intervalo $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, com $b_1 - a_1 = (b - a)/2$ e $a_1 \in A, b_1 \in B$. Por sua vez, o ponto médio de $[a_1, b_1]$ o decompõe em dois intervalos fechados justapostos de comprimento $(b - a)/4$. Um desses intervalos, que chamaremos $[a_2, b_2]$, tem $a_2 \in A$ e $b_2 \in B$. Prosseguindo analogamente, obteremos uma seqüência de intervalos encaixados $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ com $b_n - a_n = (b - a)/2^n, a_n \in A$ e $b_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 4, Capítulo 2, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq d \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O ponto $d \in I = A \cup B$ não pode estar em A pois $d = \lim b_n \in \bar{B}$, nem em B pois $d = \lim a_n \in \bar{A}$. Contradição. \square

Corolário. Os únicos subconjuntos de \mathbb{R} que são simultaneamente abertos e fechados são \emptyset e \mathbb{R} .

Com efeito, se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto e fechado, então $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} - A)$ é uma cisão, logo $A = \emptyset$ e $\mathbb{R} - A = \mathbb{R}$ ou então $A = \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} - A = \emptyset$. \square

3. Pontos de acumulação

Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é *ponto de acumulação* do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a . (Isto é, $V \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.) Equivalentemente: para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Indica-se com X' o conjunto dos pontos de acumulação de X . Portanto, $a \in X' \iff a \in \overline{X - \{a\}}$. Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X , diz-se que a é um *ponto isolado* de X . Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que a é o único ponto de X no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Quando todos os pontos do conjunto X são isolados, X chama-se um conjunto *discreto*.

Teorema 6. Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) a é um ponto de acumulação de X ;
- (2) a é limite de uma seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$;
- (3) Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X .

Demonstração: Supondo (1), para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos achar um ponto $x_n \in X$, $x_n \neq a$, na vizinhança $(a - 1/n, a + 1/n)$. Logo $\lim x_n = a$, o que prova (2). Por outro lado, supondo (2), então, para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x_n; n > n_0\}$ é infinito porque do contrário existiria um termo x_{n_1} que se repetiria infinitas vezes e isto forneceria uma seqüência constante com limite $x_{n_1} \neq a$. Pela definição de limite, vê-se portanto que (2) \Rightarrow (3). Finalmente, a implicação (3) \Rightarrow (1) é óbvia. \square

Exemplo 6. Se X é finito então $X' = \emptyset$ (conjunto finito não tem ponto de acumulação). \mathbb{Z} é infinito mas todos os pontos de \mathbb{Z} são isolados. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Se $X = (a, b)$ então $X' = [a, b]$. Se $X = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ então $X' = \{0\}$, isto é, 0 é o único ponto de acumulação de X . Note que todos os pontos deste conjunto X são isolados (X é discreto).

Segue-se uma versão do Teorema de Bolzano-Weierstrass em termos de ponto de acumulação.

Teorema 7. Todo conjunto infinito limitado de números reais admite pelo menos um ponto de acumulação.

Demonstração: Seja $X \subset \mathbb{R}$ infinito limitado. X possui um subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Fixando esta enumeração, temos uma seqüência (x_n) de termos dois a dois distintos, pertencentes a X , portanto uma seqüência limitada, a qual, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência convergente. Desprezando os termos que estão fora dessa subsequência e mudando a notação, podemos admitir que (x_n) converge. Seja $a = \lim x_n$. Como os termos x_n são todos distintos, no máximo um deles pode ser igual a a . Descartando-o, caso exista, teremos a como limite de uma seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$, logo $a \in X'$. \square

4. Conjuntos compactos

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se *compacto* quando é limitado e fechado.

Todo conjunto finito é compacto. Um intervalo do tipo $[a, b]$ é um conjunto compacto. Por outro lado, (a, b) é limitado mas não é fechado, logo não é compacto. Também \mathbb{Z} não é compacto pois é ilimitado, embora seja fechado (seu complementar $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ é a reunião dos intervalos abertos $(n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, logo é um conjunto aberto).

Teorema 8. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda seqüência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X .

Demonstração: Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, toda seqüência de pontos de X é limitada, logo (por Bolzano-Weierstrass) possui uma subsequência convergente, cujo limite é um ponto de X (pois X é fechado). Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que toda seqüência de pontos $x_n \in X$ possui uma subsequência que converge para um ponto de X . Então X é limitado porque, do contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ poderíamos encontrar $x_n \in X$ com $|x_n| > n$. A seqüência (x_n) , assim obtida, não possuiria subsequência limitada, logo não teria subsequência convergente. Além disso, X é fechado pois do contrário existiria um ponto $a \notin X$ com $a = \lim x_n$, onde cada $x_n \in X$. A seqüência (x_n) não possuiria então subsequência alguma convergindo para um ponto de X pois todas suas subsequências teriam limite a . Logo X é compacto. \square

Observação. Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então, pelo Exemplo 3, $a = \inf X$ e $b = \sup X$ pertencem a X . Assim, todo conjunto compacto contém um elemento mínimo e um elemento máximo. Ou seja, X compacto $\Rightarrow \exists x_0, x_1 \in X$ tais que $x_0 \leq x \leq x_1$ para todo $x \in X$.

O teorema a seguir generaliza o princípio dos intervalos encaixados.

Teorema 9. Dada uma seqüência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos compactos não-vazios, existe (pelo menos) um número real que pertence a todos os X_n .

Demonstração: Definamos uma seqüência (x_n) escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X_n$. Esta seqüência está no compacto X_1 , logo possui uma subseqüência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ convergindo para um ponto $a \in X_1$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $x_{n_k} \in X_n$ sempre que $n_k > n$. Como X_n é compacto, segue-se que $a \in X_n$. Isto prova o teorema. \square

Encerraremos nosso estudo dos conjuntos compactos da reta com a demonstração do Teorema de Borel-Lebesgue.

Chama-se *cobertura* de um conjunto X a uma família \mathcal{C} de conjuntos C_λ cuja reunião contém X . A condição $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ significa que, para cada $x \in X$, deve existir (pelo menos) um $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$. Quando todos os conjuntos C_λ são abertos, diz-se que \mathcal{C} é uma *cobertura aberta*. Quando $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ é um conjunto finito, diz-se que $X \subset C_{\lambda_1} \cup \dots \cup C_{\lambda_n}$ é uma *cobertura finita*. Se $L' \subset L$ é tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$, diz-se que $\mathcal{C}' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$ é uma *subcobertura* de \mathcal{C} .

Teorema 10. (Borel-Lebesgue.) Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui uma subcobertura finita.

Demonstração: Tomemos inicialmente uma cobertura aberta $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ do intervalo compacto $[a, b]$. Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{C} = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ não admita subcobertura finita. O ponto médio do intervalo $[a, b]$ o decompõe em dois intervalos de comprimento $(b - a)/2$. Pelo menos um destes intervalos, o qual chamaremos $[a_1, b_1]$, não pode ser coberto por um número finito de conjuntos A_λ . Por bissecções sucessivas obteremos uma seqüência decrescente $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ de intervalos tais que $b_n - a_n = (b - a)/2^n$ e nenhum $[a_n, b_n]$ pode estar contido numa reunião finita dos abertos A_λ . Pelo Teorema 4, Capítulo 2, existe um número real c

que pertence a todos os intervalos $[a_n, b_n]$. Em particular, $c \in [a, b]$. Pela definição de cobertura, existe $\lambda \in L$ tal que $c \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, temos $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset A_\lambda$ para um certo $\varepsilon > 0$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $(b - a)/2^n < \varepsilon$ temos então $c \in [a_n, b_n] \subset [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, donde $[a_n, b_n] \subset A_\lambda$, logo $[a_n, b_n]$ pode ser coberto por apenas um dos conjuntos A_λ . Contradição. No caso geral, temos uma cobertura aberta $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ do compacto X . Tomamos um intervalo compacto $[a, b]$ que contenha X e, acrescentando aos A_λ o novo aberto $A_{\lambda_0} = \mathbb{R} - X$, obtemos uma cobertura aberta de $[a, b]$, da qual extraímos, pela parte já provada, uma subcobertura finita $[a, b] \subset A_{\lambda_0} \cup A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$. Como nenhum ponto de X pode pertencer a A_{λ_0} , temos $X \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ e isto completa a demonstração. \square

Exemplo 7. Os intervalos $A_n = (1/n, 2)$, $n \in \mathbb{N}$, constituem uma cobertura aberta do conjunto $X = (0, 1]$ pois $(0, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Entretanto, esta cobertura não possui subcobertura finita pois, como $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, toda reunião finita de conjuntos A_n é igual àquele de maior índice, logo não contém $(0, 1]$.

O Teorema de Borel-Lebesgue, cuja importância é inestimável, será utilizado neste livro uma só vez, no Capítulo 10, seção 4. (V. Teorema 7 daquele capítulo.) Pode-se provar, reciprocamente, que se toda cobertura aberta de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ possui uma subcobertura finita então X é limitado e fechado. (Cfr. “Curso de Análise”, vol. 1, pag. 144.)

5. O conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor, que descreveremos agora, tem as seguintes propriedades.

- 1) É compacto.
- 2) Tem interior vazio (não contém intervalos).
- 3) Não contém pontos isolados (todos seus pontos são pontos de acumulação).
- 4) É não-enumerável.

O *conjunto de Cantor* K é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo. Retira-se do intervalo $[0, 1]$ seu terço médio aberto $(1/3, 2/3)$. Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$.

Sobra então $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um desses quatro intervalos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor.

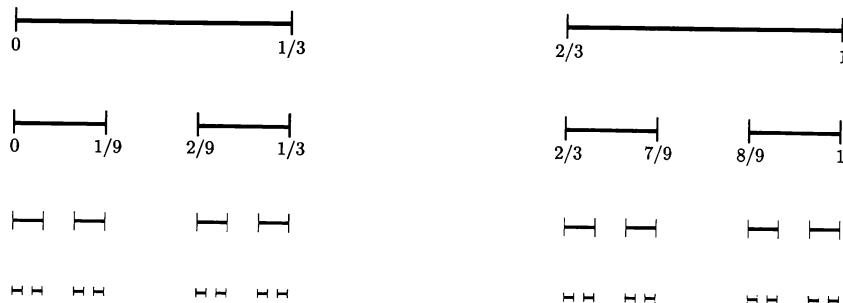


Fig. 1 - Construindo o conjunto de Cantor.

Se indicarmos com $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ os intervalos abertos omitidos, veremos que $F = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ é um conjunto fechado logo $K = [0, 1] \cap F$ é limitado e fechado, ou seja, o conjunto de Cantor é compacto.

Para mostrar que K tem interior vazio, obseryamos que depois da n -ésima etapa de sua construção restam apenas intervalos de comprimento $1/3^n$. Portanto, dado qualquer intervalo $J \subset [0, 1]$ de comprimento $c > 0$, se tomarmos n tal que $1/3^n < c$, o intervalo J estará mutilado depois da n -ésima etapa da formação de K . Assim, K não contém intervalos.

Os pontos extremos dos intervalos omitidos nas diversas etapas da construção do conjunto de Cantor, tais como $1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9$, etc, pertencem a K , pois em cada etapa são retirados apenas pontos interiores aos intervalos que restaram na etapa anterior. Eles constituem um conjunto enumerável E , sem pontos isolados. Com efeito, seja $c \in K$ extremidade de algum intervalo, digamos (c, b) , omitido de $[0, 1]$ para formar K . Quando (c, b) foi retirado, restou um certo intervalo $[a, c]$. Nas etapas seguintes da construção de K , restarão sempre terços finais de intervalo, do tipo $[a_n, c]$, com $a_n \in E$. O comprimento $c - a_n$ tende a zero, logo $a_n \rightarrow c$ e assim c não é ponto isolado de E .

Suponhamos agora que $c \in K$ não seja extremo de intervalo retirado de $[0, 1]$ durante a construção de K . (Até agora, não sabemos se de fato tais pontos existem, mas veremos logo mais que eles constituem a maioria dos pontos de K .) Provemos que c não é isolado em K . Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, c pertence ao interior de um intervalo $[x_n, y_n]$ que restou depois de n -esima etapa da construção de K . Temos $x_n < c < y_n$ com $x_n, y_n \in K$ e $y_n - x_n = 1/3^n$.

Logo $c = \lim x_n = \lim y_n$ é ponto de acumulação de K .

Fica então constatado que K não possui pontos isolados.

Provaremos agora que o conjunto de Cantor K não é enumerável. Dado qualquer subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset K$, obteremos um ponto $c \in K$ tal que $c \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso, com centro num ponto de K , tomamos um intervalo compacto não-degenerado I_1 tal que $x_1 \notin I_1$. Como nenhum ponto de K é isolado, $I_1 \cap K$ é um conjunto infinito, compacto sem pontos isolados. Em seguida, com centro em algum ponto de K interior a I_1 , tomamos um intervalo compacto não-degenerado $I_2 \subset I_1$ tal que $x_2 \notin I_2$. Prosseguindo analogamente, obtemos uma seqüência decrescente de intervalos compactos $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ tais que $x_n \notin I_n$ e $I_n \cap K \neq \emptyset$. Sem perda de generalidade, podemos supor que I_n tem comprimento $< 1/n$. Então o ponto c , pertencente a todos os I_n (cuja existência é garantida pelo Teorema 4 do Capítulo 2) é único, isto é, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$. Escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $y_n \in I_n \cap K$, teremos então $|y_n - c| \leq 1/n$, donde $\lim y_n = c$. Como K é fechado, segue-se que $c \in K$. Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $c \in I_n$, logo $c \neq x_n$, concluindo a demonstração.

Os pontos do conjunto de Cantor têm uma caracterização interessante e útil em termos de sua representação em base 3. Dado $x \in [0, 1]$, representar x na base 3 significa escrever $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$, onde cada um dos dígitos x_n é igual a 0, 1 ou 2, de tal modo que

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \dots + \frac{x_n}{3^n} + \dots$$

A fim de que se tenha $x = 0, x_1 x_2 \dots x_n 000 \dots$ é necessário e suficiente que x seja um número da forma $m/3^n$, com m, n inteiros e $m \leq 3^n$. Por exemplo $17/27 = 0,122000\dots$ na base 3. Quando o denominador da fração irredutível p/q não é uma potência de 3 então a representação de p/q na base 3 é periódica. Por exemplo, $1/4 = 0,020202\dots$ e $1/7 = 0,010212010212\dots$ na base 3. Os números irracionais têm representação não-periódica.

Na primeira etapa da formação do conjunto de Cantor, ao retirar-se o intervalo aberto $(1/3, 2/3)$ ficam excluídos os números $x \in [0, 1]$ cuja representação na base 3 tem $x_1 = 1$, com a única exceção de $1/3 = 0,1$, que permanece. Na segunda etapa, foram excluídos os números dos intervalos $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$ ou seja, aqueles da forma $0,01x_3x_4\dots$ ou da forma $0,21x_3x_4\dots$ (com exceção de $1/9 = 0,01$ e de $7/9 = 0,21$, que permanecem). De um modo geral, podemos afirmar que os elementos do conjunto de Cantor são os números do

intervalo $[0, 1]$ cuja representação $x = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ na base 3 só contém os algarismos 0 e 2, com exceção daqueles que contêm um único algarismo 1 como algarismo significativo final, como $x = 0, 20221$, por exemplo. Se observarmos que $0, 0222 \dots = 0, 1$ poderemos sempre substituir o algarismo final 1 pela seqüência 0222 Por exemplo: $0, 20201 = 0, 20200222 \dots$. Com esta convenção, pode-se afirmar, sem exceções, que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo $[0, 1]$ cuja representação na base 3 só contém os algarismos 0 e 2.

Daí resulta facilmente que o conjunto de Cantor é não-enumerável (vide Exemplo 3, Capítulo 1) e que $1/4 = 0, 0202 \dots$ pertence ao conjunto de Cantor.

6. Exercícios

Seção 1: Conjuntos abertos

1. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$ tem-se $\text{int}(\text{int } X) = \text{int } X$ e conclua que $\text{int } X$ é um conjunto aberto.
2. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto com a seguinte propriedade: “toda seqüência (x_n) que converge para um ponto $a \in A$ tem seus termos x_n pertencentes a A para todo n suficientemente grande”. Prove que A é aberto.
3. Prove que $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int } A \cup \text{int } B$ e $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$ quaisquer que sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Se $A = (0, 1]$ e $B = [1, 2)$, mostre que $\text{int}(A \cup B) \neq \text{int } A \cup \text{int } B$.
4. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que vale a reunião disjunta $\mathbb{R} = \text{int } X \cup \text{int}(\mathbb{R} - X) \cup F$, onde F é formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R} - X$. O conjunto $F = \text{fr } X$ chama-se a *fronteira* de X . Prove que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se $A \cap \text{fr } A = \emptyset$.
5. Para cada um dos conjuntos seguintes, determine sua fronteira: $X = [0, 1]$, $Y = (0, 1) \cup (1, 2)$, $Z = \mathbb{Q}$, $W = \mathbb{Z}$.
6. Sejam $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ intervalos limitados dois a dois distintos, cuja interseção $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ não é vazia. Prove que I é um intervalo, o qual nunca é aberto.

Seção 2: Conjuntos fechados

1. Sejam I um intervalo não-degenerado e $k > 1$ um número natural. Prove

que o conjunto dos números racionais m/k^n , cujos denominadores são potências de k com expoente $n \in \mathbb{N}$, é denso em I .

2. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, vale $\overline{X} = X \cup \text{fr } X$. Conclua que X é fechado se, e somente se, $X \supset \text{fr } X$.
3. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que $\mathbb{R} - \text{int } X = \overline{\mathbb{R} - X}$ e $\mathbb{R} - \overline{X} = \text{int}(\mathbb{R} - X)$.
4. Se $X \subset \mathbb{R}$ é aberto (respectivamente, fechado) e $X = A \cup B$ é uma cisão, prove que A e B são abertos (respectivamente, fechados).
5. Prove que se $X \subset \mathbb{R}$ tem fronteira vazia então $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$.
6. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Prove que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê exemplo em que $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$.
7. Dada uma seqüência (x_n) , prove que o fecho do conjunto $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é $\overline{X} = X \cup A$, onde A é o conjunto dos valores de aderência de (x_n) .

Seção 3: Pontos de acumulação

1. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$. Conclua que X é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.
2. Prove que toda coleção de intervalos não degenerados dois a dois disjuntos é enumerável.
3. Prove que se todos os pontos do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ são isolados então pode-se escolher, para cada $x \in X$, um intervalo aberto I_x , de centro x , tal que $x \neq y \Rightarrow I_x \cap I_y = \emptyset$.
4. Prove que todo conjunto não enumerável $X \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de acumulação $a \in X$.
5. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, X' é um conjunto fechado.
6. Seja a um ponto de acumulação do conjunto X . Prove que existe uma seqüência crescente ou uma seqüência decrescente de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.

Seção 4: Conjuntos compactos

1. Prove que o conjunto A dos valores de aderência de uma seqüência (x_n) é fechado. Se a seqüência for limitada, A é compacto, logo existem l e L , respectivamente o menor e o maior valor de aderência da seqüência limitada

(x_n) . Costuma-se escrever $l = \liminf x_n$ e $L = \limsup x_n$.

2. Prove que uma reunião finita e uma interseção arbitrária de conjuntos compactos é um conjunto compacto.
3. Dê exemplo de uma seqüência decrescente de conjuntos fechados não-vazios $F_1 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ e uma seqüência decrescente de conjuntos limitados não-vazios $L_1 \supset \dots \supset L_n \supset \dots$ tais que $\cap F_n = \emptyset$ e $\cap L_n = \emptyset$.
4. Sejam X, Y conjuntos disjuntos e não-vazios, com X compacto e Y fechado. Prove que existem $x_0 \in X, y_0 \in Y$ tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ para quaisquer $x \in X, y \in Y$.
5. Um conjunto compacto cujos pontos são todos isolados é finito. Dê exemplo de um conjunto fechado ilimitado X e um conjunto limitado não-fechado Y , cujos pontos são todos isolados.
6. Prove que se X é compacto então os seguintes conjuntos também são compactos:
 - a) $S = \{x + y; x, y \in X\}$;
 - b) $D = \{x - y; x, y \in X\}$;
 - c) $P = \{x \cdot y; x, y \in X\}$;
 - d) $Q = \{x/y; x, y \in X\}$ se $0 \notin X$.

Seção 5: O conjunto de Cantor

1. Determine quais dentre os números $1/n$, $2 \leq n \leq 10$, pertencem ao conjunto de Cantor.
2. Dado arbitrariamente $a \in [0, 1]$, prove que existem $x < y$ pertencentes ao conjunto de Cantor, tais que $y - x = a$.
3. Prove que a soma da série cujos termos são os comprimentos dos intervalos omitidos para formar o conjunto de Cantor é igual a 1.
4. Prove que os extremos dos intervalos removidos formam um subconjunto enumerável denso no conjunto de Cantor.

Limites de Funções

A noção de limite, que estudamos no Capítulo 3 no caso particular de seqüências, será agora estendida à situação mais geral onde se tem uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, definida num subconjunto qualquer $X \subset \mathbb{R}$.

1. Definição e primeiras propriedades

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X'$ um ponto de acumulação do conjunto X . Diz-se que o número real L é *limite de $f(x)$* quando x tende para a , e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Simbolicamente:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Informalmente: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ quer dizer que se pode tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto se queira desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo, porém diferente, de a .

A restrição $0 < |x - a|$ significa $x \neq a$. Assim, no limite $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não é permitido à variável x assumir o valor a . Portanto, o valor $f(a)$ não tem importância alguma quando se quer determinar L : o que conta é o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a , sempre com $x \neq a$.

Na definição de limite é essencial que a seja um ponto de acumulação do conjunto X mas é irrelevante que a pertença ou não a X , isto é, que f esteja ou não definida no ponto a . Num dos exemplos mais importantes de limite, a saber, a derivada, estuda-se $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$, onde a função $q(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$ não está definida para $x = a$.

Nas condições $f: X \rightarrow \mathbb{R}, a \in X'$, negar que se tem $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ equivale a dizer que existe um número $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: seja qual for $\delta > 0$, pode-se sempre achar $x_\delta \in X$ tal que $0 < |x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon$.

Teorema 1. Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}, a \in X'$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Se $L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$.

Demonstração: Seja $K = (L + M)/2$. Pondo $\varepsilon = K - L = M - K$ temos $\varepsilon > 0$ e $K = L + \varepsilon = M - \varepsilon$. Pela definição de limite, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < K$ e $x \in X, 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow K < g(x) < M + \varepsilon$. Portanto, pondo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ vem: $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < K < g(x)$, o que prova o teorema. \square

Observação. A hipótese $L < M$ não pode ser substituída por $L \leq M$ no Teorema 1.

Observação. Para o Teorema 1 e seus corolários, bem como para o Teorema 2 abaixo, valem versões análogas com $>$ em lugar de $<$ e vice-versa. Tais versões serão usadas sem maiores comentários.

Corolário 1. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ para todo $x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$.

Corolário 2. Sejam $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ então $L \leq M$.

Com efeito, se fosse $M < L$ então tomaríamos um número real K tal que $M < K < L$. Neste caso, existiria $\delta > 0$ tal que $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) < K < f(x)$, uma contradição. \square

Teorema 2. (**Teorema do sanduíche.**) Sejam $f, g, h: X \rightarrow \mathbb{R}, a \in X'$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ então $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$.

Demonstração: Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ e $x \in X, 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$. Logo $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$. \square

Observação. A noção de limite é *local*, isto é, dadas as funções $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ e dado $a \in X'$, se existir uma vizinhança V do ponto a tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ em $V \cap X$ então existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ se, e somente se, existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Além disso, se existirem, esses limites serão iguais. Assim, por exemplo, no Teorema 2, não é necessário supor que vale $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$. Basta que exista uma vizinhança V do ponto a tal que estas desigualdades valham para todo $x \neq a$ pertencente a $V \cap X$. Observação análoga para o Teorema 1 e seu Corolário 2.

Teorema 3. Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tenha-se $\lim f(x_n) = L$.

Demonstração: Suponhamos, primeiro, que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e que se tem uma seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$ (pois $x_n \neq a$ para todo n). Por conseguinte, $n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$, logo $\lim f(x_n) = L$. Reciprocamente, suponhamos que $x_n \in X - \{a\}$ e $\lim x_n = a$ impliquem $\lim f(x_n) = L$ e provemos que se tem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Com efeito, negar esta igualdade implicaria em afirmar a existência de um número $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ podemos achar $x_n \in X$ tal que $0 < |x_n - a| < 1/n$ mas $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Então teríamos $x_n \in X - \{a\}$, $\lim x_n = a$ sem que fosse $\lim f(x_n) = L$. Esta contradição completa a demonstração. \square

Corolário 1. (Unicidade do limite.) Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ então $L = M$.

Com efeito, basta tomar uma seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, o que é assegurado pelo Teorema 6 do Capítulo 5. Então teremos $L = \lim f(x_n)$ e $M = \lim f(x_n)$. Pela unicidade do limite da seqüência $(f(x_n))$, vem $L = M$. \square

Corolário 2. (**Operações com limites.**) Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = L.M;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ se } M \neq 0.$$

Além disso, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e g é limitada numa vizinhança de a , tem-se $\lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = 0$.

Com efeito, dada qualquer seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, pelo Teorema 8 do Capítulo 3 valem $\lim[f(x_n) \pm g(x_n)] = \lim f(x_n) \pm \lim(g(x_n)) = L \pm M$, $\lim f(x_n).g(x_n) = \lim f(x_n) \cdot \lim g(x_n) = L.M$ e também $\lim[f(x_n)/g(x_n)] = \lim f(x_n) / \lim g(x_n) = L/M$. Finalmente, se existem uma vizinhança V de a e uma constante c tal que $|g(x)| \leq c$ para todo $x \in V$ então, como $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande, a seqüência $g(x_n)$ é limitada; logo, pelo Teorema 7 do Capítulo 3, tem-se $\lim f(x_n).g(x_n) = 0$, pois $\lim f(x_n) = 0$. O Corolário 2 segue-se portanto do teorema. \square

Teorema 4. Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ então f é limitada numa vizinhança de a , isto é, existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq c$.

Demonstração: Seja $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, resulta que existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < |L| + 1$. Basta então tomar $c = |L| + 1$. \square

O teorema 4 generaliza o fato de que toda seqüência convergente é limitada.

Exemplo 1. Se $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por $f(x) = c$ e $g(x) = x$ (função constante e função identidade) então, para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se evidentemente $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$. Segue-se do Corolário 2 do Teorema 3 que, para todo polinômio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, tem-se $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$, seja qual for $a \in \mathbb{R}$. Analogamente, para toda função racional $f(x) = p(x)/q(x)$, quociente de dois polinômios, tem-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ desde que seja $q(a) \neq 0$. Quando $q(a) = 0$, o polinômio $q(x)$ é divisível por $x - a$. Escrevemos então $q(x) = (x - a)^m q_1(x)$ e $p(x) = (x - a)^k p_1(x)$ onde $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q_1(a) \neq 0$ e $p_1(a) \neq 0$. Se for $m = k$ então vale

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p_1(a)/q_1(a)$ porque $f(x) = p_1(x)/q_1(x)$ para todo $x \neq a$. Se for $k > m$ então tem-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ pois $f(x) = (x-a)^{k-m}[p_1(x)/q_1(x)]$ para todo $x \neq a$. Se, entretanto, tivermos $k < m$, então $f(x) = p_1(x)/[(x-a)^{m-k}.q_1(x)]$ para todo $x \neq a$. Neste caso, o denominador de $f(x)$ tem limite zero e o numerador não. Isto implica que não pode existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Com efeito, se $f(x) = \varphi(x)/\psi(x)$, com $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$, e existe $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ então existe $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x).\psi(x)) = L.0 = 0$. Trata-se, portanto, de um fato geral: quando $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$, só pode existir $\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)/\psi(x)]$ no caso em que se tenha também $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ (embora esta condição, por si só, não seja suficiente para a existência de $\lim[\varphi/\psi]$).

Exemplo 2. Seja $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Então $0 \in X'$. A função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ não possui limite quando $x \rightarrow 0$. Com efeito, a seqüência de pontos $x_n = 2/(2n-1)\pi$ é tal que $\lim x_n = 0$ mas $f(x_n) = \pm 1$ conforme n seja ímpar ou par, logo não existe $\lim f(x_n)$. Por outro lado, se $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$, tem-se $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, pois $|\operatorname{sen}(1/x)| \leq 1$ para todo $x \in X$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Os gráficos dessas duas funções são mostrados na Fig. 2 abaixo.

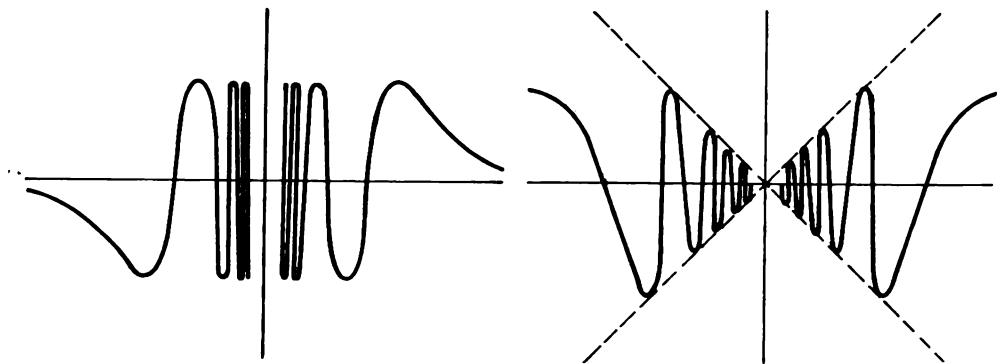


Fig. 2

Exemplo 3. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ quando x é racional e $f(x) = 1$ quando x é irracional. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$, podemos obter uma seqüência de números racionais $x_n \neq a$ e uma seqüência de números irracionais $y_n \neq a$ com $\lim x_n = \lim y_n = a$. Então $\lim f(x_n) = 0$ e $\lim f(y_n) = 1$, logo não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Observação. Dois dos limites mais importantes que aparecem na Análise são $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x / x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) / x = 1$. Para estabelecermos é necessário, entretanto, que se tenha feito um desenvolvimento rigoroso das funções trigonométricas e da função exponencial. Isto será feito nos Capítulos 11 e 12. Sem embargo, continuaremos utilizando essas funções e suas inversas (como o logaritmo) em exemplos, antes mesmo daqueles capítulos. É que esses exemplos ajudam a fixar a aprendizagem mas não interferem no encadeamento lógico da matéria aqui apresentada. Ao leitor interessado, esclarecemos que uma apresentação rigorosa porém elementar dos logaritmos e da função exponencial pode ser encontrada no livrinho “Logaritmos” mencionado na bibliografia.

2. Limites laterais

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que o número real a é um *ponto de acumulação à direita* para X , e escreve-se $a \in X'_+$, quando toda vizinhança de a contém algum ponto $x \in X$ com $x > a$. Equivalentemente: para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a, a + \varepsilon) \neq \emptyset$. A fim de que $a \in X'_+$ é necessário e suficiente que a seja limite de uma seqüência de pontos $x_n > a$, pertencentes a X . Finalmente, a é um ponto de acumulação à direita para o conjunto X se, e somente se, é um ponto de acumulação ordinário do conjunto $Y = X \cap (a, +\infty)$.

Analogamente se define *ponto de acumulação à esquerda*. Por definição, $a \in X'_-$ significa que, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $X \cap (a - \varepsilon, a) \neq \emptyset$, ou seja, $a \in Z'$ onde $Z = (-\infty, a) \cap X$. Para que isto aconteça, é necessário e suficiente que $a = \lim x_n$, onde (x_n) é uma seqüência cujos termos $x_n < a$ pertencem a X . Quando $a \in X'_+ \cap X'_-$ diz-se que a é um *ponto de acumulação bilateral* de X .

Exemplo 4. Se $X = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ então $0 \in X'_+$ porém $0 \notin X'_-$.

Seja I um intervalo. Se $c \in \text{int } I$ então $c \in I'_+ \cap I'_-$ mas se c é um dos extremos de I então tem-se apenas $c \in I'_+$ se é o extremo inferior e $c \in I'_-$ se é o extremo superior de I .

Exemplo 5. Seja K o conjunto de Cantor. Sabemos que todo ponto $a \in K$ é ponto de acumulação. Se a é extremo de algum dos intervalos omitidos numa das etapas da construção de K então vale apenas uma das alternativas $a \in K'_+$ ou $a \in K'_-$. Se entretanto $a \in K$ não é extremo de intervalo omitido então $a \in K'_+ \cap K'_-$ como se conclui do argumento usado no Capítulo 5, seção 5.

Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'_+$. Diz-se que o número real L é *limite à direita* de $f(x)$ quando x tende para a , e escreve-se $L = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$. Simbolicamente:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X \cap (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Analogamente se define o *limite à esquerda* $L = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, no caso de $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ com $a \in X'_-$: isto significa que, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se escolher $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

As propriedades gerais dos limites, demonstradas na seção 1, se adaptam facilmente para os limites laterais. Basta observar que o limite à direita $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ se reduz ao limite ordinário $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, onde g é a restrição da função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ao conjunto $X \cap (a, +\infty)$. E analogamente para o limite à esquerda.

Por exemplo, o Teorema 3 no caso de limite à direita se exprime assim:

“A fim de que seja $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda seqüência de pontos $x_n \in X$ com $x_n > a$ e $\lim x_n = a$, se tenha $\lim f(x_n) = L$.”

Como se vê facilmente, dado $a \in X'_+ \cap X'_-$, existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L.$$

Exemplo 6. As funções $f, g, h: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, $g(x) = x/|x|$ e $h(x) = 1/x$ não possuem limite quando $x \rightarrow 0$.

Quanto aos limites laterais, temos $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = -1$ porque $g(x) = 1$ para $x > 0$ e $g(x) = -1$ se $x < 0$. As funções f e h não possuem limites laterais quando $x \rightarrow 0$, nem à esquerda nem à direita. Por outro lado, $\varphi: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow 0$, definida por $\varphi(x) = e^{-1/x}$, possui limite à direita, $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = 0$, mas não existe $\lim_{x \rightarrow 0-} \varphi(x)$ pois φ não é limitada para valores negativos de x próximos de zero.

Exemplo 7. Seja $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função “parte inteira de x ”. Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único número inteiro n tal que $n \leq x < n + 1$; põe-se então $I(x) = n$. Se $n \in \mathbb{Z}$ então $\lim_{x \rightarrow n+} I(x) = n$ e $\lim_{x \rightarrow n-} I(x) = n - 1$. Com efeito, $n < x < n + 1 \Rightarrow I(x) = n$ enquanto $n - 1 < x < n \Rightarrow I(x) = n - 1$.

Por outro lado, se a não é inteiro então $\lim_{x \rightarrow a+} I(x) = \lim_{x \rightarrow a-} I(x) = I(a)$ pois neste caso $I(x)$ é constante numa vizinhança de a .

Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *monótona não-decrescente* quando para $x, y \in X, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, f diz-se *monótona não-crescente*. Se vale a implicação mais estrita $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ dizemos que a função f é *crescente*. Finalmente, se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, dizemos que f é uma função *decrescente*.

Teorema 5. Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona limitada. Para todo $a \in X'_+$ e todo $b \in X'_-$ existem $L = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ e $M = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$. Ou seja: existem sempre os limites laterais de uma função monótona limitada.

Demonstração: Para fixar as idéias, suponhamos f não-decrescente. Seja $L = \inf\{f(x); x \in X, x > a\}$. Afirmamos que $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$. Com efeito, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, $L + \varepsilon$ não é cota inferior do conjunto limitado $\{f(x); x \in X, x > a\}$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $a + \delta \in X$ e $L \leq f(a + \delta) < L + \varepsilon$. Como f é não-decrescente, $x \in X \cap (a, a + \delta) \Rightarrow L \leq f(x) < L + \varepsilon$, o que prova a afirmação feita. De modo análogo vê-se que $M = \sup\{f(x); x \in X, x < b\}$ é o limite à esquerda $M = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$. \square

Observação. Se $a \in X$ não é necessário supor que f seja limitada no Teorema 5. Com efeito, suponhamos, para fixar idéias, que f seja monótona não-decrescente e $a \in X'_+$. Então $f(a)$ é uma cota inferior do conjunto $\{f(x); x \in X, x > a\}$ e o ínfimo deste conjunto é $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$. Analogamente, se $a \in X'_-$ então $f(a)$ é uma cota superior do conjunto $\{f(x); x \in X, x < a\}$, cujo supremo é o limite à esquerda $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$.

3. Limites no infinito, limites infinitos, expressões indeterminadas

Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente. Dada $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

quando o número real L satisfaz à seguinte condição:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0; x \in X, x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ou seja, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > A$.

De maneira análoga define-se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, quando o domínio de f é ilimitado inferiormente: para todo $\varepsilon > 0$ dado, deve existir $A > 0$ tal que $x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Valem os resultados já demonstrados para o limite quando $x \rightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$, com as adaptações evidentes.

Os limites para $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ são, de certo modo, limites laterais (o primeiro é um limite à esquerda e o segundo à direita). Logo vale o resultado do Teorema 5: se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona limitada então existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ se o domínio X for ilimitado superiormente e existe $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ se o domínio de f for ilimitado inferiormente.

O limite de uma seqüência é um caso particular de limite no infinito: trata-se de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, onde $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida no conjunto \mathbb{N} dos números naturais.

Exemplo 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x = 0$. Por outro lado, não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ nem $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$. Vale $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ mas não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$, no sentido da definição acima. Como fizemos no caso de seqüências, introduziremos “limites infinitos” para englobar situações como esta.

Em primeiro lugar, sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ quando, para todo $A > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta, x \in X \Rightarrow f(x) > A$.

Por exemplo, $\lim_{x \rightarrow a} 1/(x - a)^2 = +\infty$, pois dado $A > 0$, tomamos $\delta = 1/\sqrt{A}$. Então $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < (x - a)^2 < 1/A \Rightarrow 1/(x - a)^2 > A$.

De modo semelhante, definiremos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. Isto significa que, para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$. Por exemplo, $\lim_{x \rightarrow a} -1/(x - a)^2 = -\infty$.

Evidentemente, as definições de $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty$, etc. não apresentam maiores dificuldades e são deixadas a cargo do leitor. Também omitiremos as definições evidentes de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, etc. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} \left(\frac{1}{x - a} \right) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow a-} \left(\frac{1}{x - a} \right) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k &= +\infty \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Deve-se observar enfaticamente que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais, de modo que as afirmações $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ não exprimem limites no sentido estrito do termo.

Observação. Valem para $\lim(f + g)$, $\lim(f \cdot g)$ e $\lim(f/g)$ resultados análogos aos do Capítulo 3 (v. Teorema 9) sobre limites de seqüências.

Observação. Admitindo limites infinitos, existem sempre os limites laterais de uma função monótona $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ em todos os pontos $a \in X'$, ou mesmo quando $x \rightarrow \pm\infty$. Tem-se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, para algum $\delta > 0$, f é limitada no conjunto $X \cap (a, a + \delta)$. Se, ao contrário, f é ilimitada (digamos superiormente) em $X \cap (a, a + \delta)$ para todo $\delta > 0$ então $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

Em aditamento aos comentários feitos na seção 4 do Capítulo 3, diremos algumas palavras sobre as expressões indeterminadas $0/0$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ , 0^0 , ∞^0 e 1^∞ .

Vejamos, por exemplo, $0/0$. Como a divisão por zero não está definida, esta expressão não tem sentido aritmético. Afirmar que $0/0$ é indeterminada tem o seguinte significado preciso:

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$. Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e que, pondo $Y = \{x \in X; g(x) \neq 0\}$, ainda se tenha $a \in Y'$. Então $f(x)/g(x)$ está definida quando $x \in Y$ e faz sentido indagar se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$. Mas nada se pode dizer em geral sobre este limite. Dependendo das funções f, g , ele pode assumir qualquer valor real ou não existir. Por exemplo, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, tomado $f(x) = cx$ e $g(x) = x$, temos $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, enquanto $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = c$. Por outro lado, se tomarmos $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$, ($x \neq 0$) e $g(x) = x$, teremos $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, mas não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x)$.

Pelo mesmo motivo, $\infty - \infty$ é indeterminado. Isto quer dizer: podemos achar funções $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, enquanto $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$, dependendo das nossas escolhas para f e g , pode ter um valor arbitrário $c \in \mathbb{R}$ ou pode não existir. Por exemplo, se $f, g: \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

$$f(x) = c + \frac{1}{(x - a)^2} \text{ e } g(x) = \frac{1}{(x - a)^2},$$

então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = c$. Analogamente,

mente, se

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x-a} + \frac{1}{(x-a)^2} \text{ e } g(x) = \frac{1}{(x-a)^2},$$

não existe $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$.

Mais um exemplo: dado qualquer número real $c > 0$ podemos achar funções $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, com $a \in X'$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, $f(x) > 0$ para todo $x \in X$, enquanto $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = c$. Basta, por exemplo, definir $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(x) = x, g(x) = \log c / \log x$. Neste caso, vale $f(x)^{g(x)} = c$ para todo $x \neq 0$. (Tome logaritmos de ambos os membros.) Portanto $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)} = c$. Ainda neste caso, podemos escolher f e g de modo que o limite de $f(x)^{g(x)}$ não exista. Basta tomar, digamos, $f(x) = x$ e $g(x) = \log(1 + |\operatorname{sen} 1/x|) \cdot (\log x)^{-1}$. Então $f(x)^{g(x)} = 1 + |\operatorname{sen} 1/x|$, portanto não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)}$.

Estes exemplos devem bastar para que se entenda o significado de “expressão indeterminada”. O instrumento mais eficaz para o cálculo do limite de expressões indeterminadas é a chamada “Regra de L’Hôpital”, que é objeto de infindáveis exercícios nos cursos de Cálculo.

4. Exercícios

Seção 1: Definição e primeiras propriedades

1. Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $Y = f(X - \{a\})$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ então $L \in \overline{Y}$.
2. Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é suficiente que, para toda seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, a seqüência $(f(x_n))$ seja convergente.
3. Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}, g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$, $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b} g(y) = c,$$

prove que $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$, contanto que $c = g(b)$ ou então que $x \neq a$ implique $f(x) \neq b$.

4. Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}; g(0) = 1$ e $g(x) = 0$ se $x \neq 0$. Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$, porém não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$.
5. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$. Mostre

que para todo $c \in [-1, 1]$ existe uma seqüência de pontos $x_n \neq 0$ tais que $\lim x_n = 0$ e $\lim f(x_n) = c$.

Seção 2: Limites laterais

1. Prove que $a \in X'_+$ (respectivamente, $a \in X'_-$) se, e somente se, $a = \lim x_n$ é limite de uma seqüência decrescente (respectivamente, crescente) de pontos pertencentes ao conjunto X .
2. Prove que $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ (respectivamente, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$) se, e somente se, para toda seqüência decrescente (respectivamente, crescente) de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ tem-se $\lim f(x_n) = L$.
3. Seja $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/(1 + a^{1/x})$, onde $a > 1$. Prove que $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$.
4. Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ monótona e $a \in X'_+$. Se existir uma seqüência de pontos $x_n \in X$ com $x_n > a$, $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = L$ então $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$.
5. Dada $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)/(1 + 2^{1/x})$, determine o conjunto dos números L tais que $L = \lim f(x_n)$, com $\lim x_n = 0$, $x_n \neq 0$.

Seção 3: Limites no infinito, limites infinitos, etc.

1. Seja $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio não constante, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, com $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Prove que, se n é par então $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$ se $a_n > 0$ e $= -\infty$ se $a_n < 0$. Se n é ímpar então $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ quando $a_n > 0$ e os sinais dos limites são trocados quando $a_n < 0$.
2. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Prove que, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe uma seqüência $x_n \in \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = c$.
3. Seja $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Para cada $t \geq a$ indiquemos com M_t o sup e m_t o inf de f no intervalo $I = [t, +\infty)$. Com $\omega_t = M_t - m_t$ indicaremos a *oscilação* de f em I . Prove que existem $\lim_{t \rightarrow +\infty} M_t$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} m_t$. Prove que existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ se, e somente se, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_t = 0$.

Funções Contínuas

A noção de função contínua é um dos pontos centrais da Topologia. Ela será estudada neste capítulo em seus aspectos mais básicos, como introdução a uma abordagem mais ampla e como instrumento para aplicação nos capítulos seguintes.

1. Definição e primeiras propriedades

Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se *contínua no ponto* $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Em símbolos, f contínua no ponto a significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Chama-se *descontínua no ponto* $a \in X$ uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ que não é contínua nesse ponto. Isto quer dizer que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$ pode-se achar $x_\delta \in X$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$. Em particular, tomando δ sucessivamente igual a $1, 1/2, 1/3, \dots$ e escrevendo x_n em vez de $x_{1/n}$, vemos que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é descontínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$ pode-se obter $x_n \in X$ com $|x_n - a| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Evidentemente, $|x_n - a| < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica $\lim x_n = a$.

Diz-se que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função contínua* quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.

A continuidade é um fenômeno *local*, isto é, a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existe uma vizinhança V de a tal que a restrição

de f a $V \cap X$ é contínua no ponto a .

Se a é um ponto isolado do conjunto X , isto é, se existe $\delta > 0$ tal que $X \cap (a - \delta, a + \delta) = \{a\}$, então toda função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a . Em particular, se X é um conjunto discreto, como \mathbb{Z} por exemplo, então toda função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Se $a \in X \cap X'$, isto é, se $a \in X$ é um ponto de acumulação de X , então $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ao contrário do caso de um limite, na definição de função contínua o ponto a deve pertencer ao conjunto X e pode-se tomar $x = a$ pois, quando isto se dá, a condição $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ torna-se $0 < \varepsilon$, o que é óbvio.

Teorema 1. *Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.*

Demonstração: Tomemos $c = [g(a) + f(a)]/2$ e $\varepsilon = g(a) - c = c - f(a)$. Então $\varepsilon > 0$ e $f(a) + \varepsilon = g(a) - \varepsilon = c$. Pela definição de continuidade, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X$, $|x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < c$ e $x \in X$, $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow c < g(x) < g(a) + \varepsilon$. Seja δ o menor dos números δ_1 e δ_2 . Então $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < c < g(x)$, o que prova o teorema. \square

Corolário 1. *Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$. Se $f(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de $f(a)$.*

Com efeito, para fixar idéias suponhamos $f(a) < 0$. Então basta tomar g identicamente nula no Teorema 1. \square

Corolário 2. *Dadas $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sejam $Y = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ e $Z = \{x \in X; f(x) \leq g(x)\}$. Existem $A \subset \mathbb{R}$ aberto e $F \subset \mathbb{R}$ fechado tais que $Y = X \cap A$ e $Z = X \cap F$. Em particular, se X é aberto então Y é aberto e se X é fechado então Z é fechado.*

Com efeito, pelo Teorema 1, para cada $y \in Y$ existe um intervalo aberto I_y , de centro y , tal que $\{y\} \subset X \cap I_y \subset Y$. Daí resulta $\bigcup_{y \in Y} \{y\} \subset \bigcup_{y \in Y} (X \cap I_y) \subset Y$, ou seja: $Y \subset X \cap (\bigcup_{y \in Y} I_y) \subset Y$. Pondo $A = \bigcup_{y \in Y} I_y$, o Teorema 1, Capítulo 5 assegura que A é um conjunto aberto. Além disso, de $Y \subset X \cap A \subset Y$

concluímos que $Y = X \cap A$. Quanto ao conjunto Z , temos $Z = X - \{x \in X; g(x) < f(x)\}$. Pelo que acabamos de ver, existe $B \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $Z = X - (X \cap B) = X \cap (\mathbb{R} - B)$. Pelo Teorema 3 do Capítulo 5, $F = \mathbb{R} - B$ é fechado, portanto $Z = X \cap F$ como se pretendia mostrar. \square

Teorema 2. *A fim de que a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que, para toda seqüência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, se tenha $\lim f(x_n) = f(a)$.*

A demonstração segue exatamente as mesmas linhas do Teorema 3, Capítulo 6, por isso é omitida.

Corolário 1. *Se $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ então são contínuas nesse mesmo ponto as funções $f+g, f.g: X \rightarrow \mathbb{R}$, bem como a função f/g , caso seja $g(a) \neq 0$.*

O domínio da função f/g , bem entendido, é o subconjunto de X formado pelos pontos x tais que $g(x) \neq 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $X \cap (a - \delta, a + \delta)$ está contido nesse domínio.

Exemplo 1. Todo polinômio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Toda função racional $p(x)/q(x)$ (quociente de dois polinômios) é contínua no seu domínio, o qual é o conjunto dos pontos x tais que $q(x) \neq 0$. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, é descontínua no ponto 0 e é contínua nos demais pontos da reta. A função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $g(0) = 0$, é contínua em toda a reta. A função $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = 0$ para x racional e $\varphi(x) = 1$ para x irracional, é descontínua em todos os pontos da reta porém suas restrições a \mathbb{Q} e a $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são contínuas porque são constantes. Se definirmos $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $\psi(x) = x \cdot \varphi(x)$ veremos que ψ é contínua apenas no ponto $x = 0$.

Teorema 3. *Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, de modo que a composta $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ está bem definida. Então $g \circ f$ é contínua no ponto a . (A composta de duas funções contínuas é contínua.)*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ existe, pela continuidade de g no ponto b , um número $\eta > 0$ tal que $y \in Y$, $|y - b| < \eta$ implicam $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$. Por sua vez, a continuidade de f no ponto a assegura que existe $\delta > 0$

tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta$ implicam $|f(x) - b| < \eta$. Conseqüentemente, $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| = |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$, o que prova o teorema. \square

2. Funções contínuas num intervalo

Teorema 4. (Teorema do valor intermediário.) Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração: Consideremos os conjuntos $A = \{x \in [a, b]; f(x) \leq d\}$ e $B = \{x \in [a, b]; f(x) \geq d\}$. Pelo Corolário 2 do Teorema 1, A e B são fechados, logo $\overline{A} \cap B = A \cap B = A \cap \overline{B}$. Além disso, é claro que $[a, b] = A \cup B$. Se for $A \cap B \neq \emptyset$ então o teorema está demonstrado porque se tem $f(c) = d$ para qualquer $c \in A \cap B$. Se, entretanto, fosse $A \cap B = \emptyset$ então $[a, b] = A \cup B$ seria uma cisão não trivial (porque $a \in A$ e $b \in B$), o que é vedado pelo Teorema 5 do Capítulo 5. Logo, deve ser $A \cap B \neq \emptyset$ e o teorema está provado. \square

Corolário. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então $f(I)$ é um intervalo.

Isto é óbvio se f é constante. Caso contrário, sejam $\alpha = \inf f(I) = \inf\{f(x); x \in I\}$ e $\beta = \sup f(I) = \sup\{f(x); x \in I\}$. Se $f(I)$ for ilimitado, tomaremos $\alpha = -\infty$ e/ou $\beta = +\infty$. Para provar que $f(I)$ é um intervalo (aberto, fechado ou semi-aberto) cujos extremos são α e β , tomemos d tal que $\alpha < d < \beta$. Pelas definições de inf e sup, existem $a, b \in I$ tais que $\alpha \leq f(a) < d < f(b) \leq \beta$. Pelo Teorema 4 existe $c \in [a, b]$, logo $c \in I$, tal que $f(c) = d$. Assim $d \in f(I)$. Isto prova que $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. Como α é o inf e β é o sup de $f(I)$, nenhum número real menor do que α ou maior do que β pode estar em $f(I)$. Portanto $f(I)$ é um intervalo cujos extremos são α e β . \square

Observação. Se $I = [a, b]$ é um intervalo compacto então $f(I)$ é também um intervalo compacto, pelo Teorema 7, a seguir. Mas se I não é fechado ou é ilimitado, $f(I)$ pode não ser do mesmo tipo que I . Por exemplo, seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Tomando sucessivamente os intervalos abertos $I_1 = (0, \pi)$, $I_2 = (0, \pi/2)$ e $I_3 = (0, \pi)$ temos $f(I_1) = [-1, 1]$, $f(I_2) = (0, 1)$ e $f(I_3) = (0, 1]$.

Exemplo 2. Como aplicação, mostraremos que todo polinômio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de grau ímpar, possui alguma raiz real. Seja $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ com n ímpar e $a_n \neq 0$. Para fixar as idéias, suporemos $a_n > 0$. Pondo a_nx^n em evidência, podemos escrever $p(x) = a_nx^n \cdot r(x)$, onde

$$r(x) = \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + 1.$$

É claro que $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = 1$. Logo $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_nx^n = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_nx^n = -\infty$ (porque n é ímpar). Portanto o intervalo $p(\mathbb{R})$ é ilimitado inferior e superiormente, isto é $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Isto significa que $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva. Em particular, deve existir $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$. Evidentemente, um polinômio de grau par, como $p(x) = x^2 + 1$, por exemplo, pode não ter raiz real.

Exemplo 3. (*Existência de $\sqrt[n]{a}$.*) Fixado $n \in \mathbb{N}$, a função $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, definida por $f(x) = x^n$, é crescente (portanto injetiva), com $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Sua imagem é, portanto, um subintervalo ilimitado de $[0, +\infty)$, contendo seu extremo inferior, igual a zero. Logo $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$, isto é, f é uma bijeção de $[0, +\infty)$ sobre si mesmo. Isto significa que, para todo número real $a \geq 0$, existe um único número real $b \geq 0$ tal que $a = b^n$, ou seja, $b = \sqrt[n]{a}$. No caso particular de n ímpar, a função $x \mapsto x^n$ é uma bijeção de \mathbb{R} sobre \mathbb{R} , de modo que, neste caso, todo número real a possui uma raiz n -ésima, que é positiva quando $a > 0$ e negativa se $a < 0$.

Exemplo 4. O Teorema 4 é do tipo dos chamados “teoremas de existência”. Sob certas condições, ele assegura a existência de uma raiz para a equação $f(x) = d$. Uma de suas mais simples aplicações é a seguinte. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \leq a$ e $b \leq f(b)$. Nestas condições, existe pelo menos um número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. Com efeito, a função $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = x - f(x)$, é contínua, com $\varphi(a) \geq 0$ e $\varphi(b) \leq 0$. Pelo Teorema 4, deve existir $c \in [a, b]$ tal que $\varphi(c) = 0$, isto é, $f(c) = c$. Um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$ chama-se um *ponto fixo* da função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. O resultado que acabamos de provar é a versão uni-dimensional do conhecido “Teorema do ponto fixo de Brouwer”.

Outra aplicação do Teorema 4 se refere à continuidade da função inversa. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $f: X \rightarrow Y$ uma bijeção. Supondo f contínua, pode-se concluir que sua inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ também seja contínua? A resposta é, em geral, negativa, como mostra o seguinte exemplo.

assume seu valor máximo ou seu valor mínimo. Antes de tentar resolver um desses problemas, é necessário saber se realmente tais pontos existem. Para começar, a função f pode ser ilimitada superiormente (e então não possui valor máximo) ou inferiormente (e não terá valor mínimo). Entretanto, mesmo limitada, f pode não assumir valor máximo em X , ou mínimo, ou nenhum dos dois.

Exemplo 6. Sejam $X = (0, 1)$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Então $f(X) = (0, 1)$ logo, para todo $x \in X$ existem $x', x'' \in X$ com $f(x') < f(x) < f(x'')$. Isto significa que, para nenhum $x \in X$, o valor $f(x)$ é o maior nem o menor que f assume em X . Noutro exemplo, podemos tomar $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1/(1 + x^2)$. Temos $0 < g(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $g(0) = 1$, vemos que $g(0)$ é o valor máximo de $g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x)$ seja o menor valor de g . Com efeito, se $x > 0$ basta tomar $x' > x$ para ter $g(x') < g(x)$. E se $x < 0$, toma-se $x' < x$ e se tem novamente $g(x') < g(x)$.

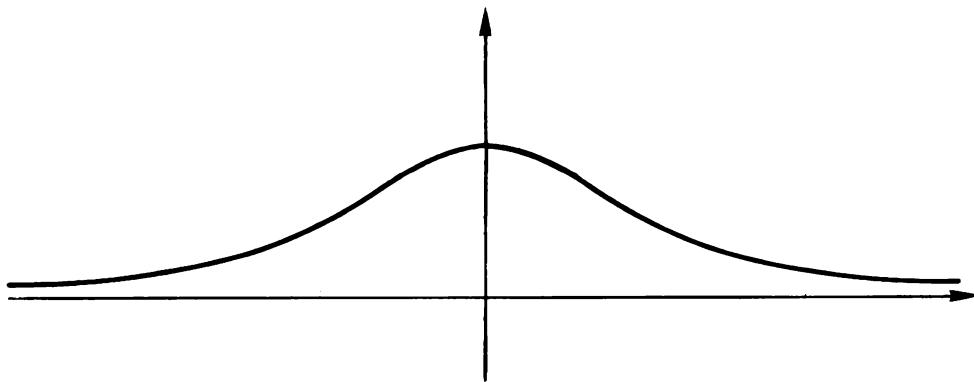


Fig. 4 – Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

O teorema seguinte assegura a existência de valores máximos e mínimos de uma função contínua quando seu domínio é compacto.

Teorema 6. (Weierstrass.) Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.

Estabeleceremos o Teorema de Weierstrass como consequência do

Teorema 7. A imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ por uma função contínua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.

Demonstração: De acordo com o Teorema 8 do Capítulo 5, devemos provar que toda seqüência de pontos $y_n \in f(X)$ possui uma subseqüência que converge para algum ponto em $f(X)$. Ora, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $y_n = f(x_n)$, com $x_n \in X$. Como X é compacto, a seqüência (x_n) possui uma subseqüência $(x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}'}$ que converge para um ponto $a \in X$. Sendo f contínua no ponto a , de $\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_{n'} = a$ concluímos que, pondo $b = f(a)$, temos $b \in f(X)$ e, além disso, $\lim_{n \in \mathbb{N}'} y_{n'} = \lim_{n \in \mathbb{N}'} f(x_{n'}) = f(a) = b$, como queríamos demonstrar. \square

Demonstração: (do Teorema 6.) Como foi visto na seção 4 do Capítulo 5, o conjunto compacto $f(X)$ possui um menor elemento $f(x_0)$ e um maior elemento $f(x_1)$. Isto quer dizer que existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$. \square

Corolário. Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda função contínua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, isto é, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$.

Exemplo 7. A função $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/x$, é contínua porém não é limitada. Isto se dá porque seu domínio $(0, 1]$ não é compacto.

Teorema 8. Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda bijeção contínua $f: X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ tem inversa contínua $g: Y \rightarrow X$.

Demonstração: Tomemos um ponto arbitrário $b = f(a)$ em Y e mostremos que g é contínua no ponto b . Se não fosse assim, existiriam um número $\varepsilon > 0$ e uma seqüência de pontos $y_n = f(x_n) \in Y$ com $\lim y_n = b$ e $|g(y_n) - g(b)| \geq \varepsilon$, isto é, $|x_n - a| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos supor que $\lim x_n = a' \in X$, pois X é compacto. Tem-se $|a' - a| \geq \varepsilon$. Em particular, $a' \neq a$. Mas, pela continuidade de f , $\lim y_n = \lim f(x_n) = f(a')$. Como já temos $\lim y_n = b = f(a)$, daí resultaria $f(a) = f(a')$, contradizendo a injetividade de f . \square

Exemplo 8. O conjunto $Y = \{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ é compacto e a bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$, definida por $f(1) = 0$, $f(n) = 1/(n-1)$ se

$n > 1$, é contínua mas sua inversa $f^{-1}: Y \rightarrow \mathbb{N}$ é descontínua no ponto 0. Logo, no Teorema 8, a compacidade de X não pode ser substituída pela de Y .

4. Continuidade uniforme

Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in X$ pode-se achar $\delta > 0$ tal que $y \in X$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. O número positivo δ depende não apenas do $\varepsilon > 0$ dado mas também do ponto x no qual a continuidade de f é examinada. Nem sempre, dado $\varepsilon > 0$, pode-se encontrar um $\delta > 0$ que sirva em todos os pontos $x \in X$ (mesmo sendo f contínua em todos esses pontos).

Exemplo 9. Seja $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x/|x|$, logo $f(x) = 1$ se $x > 0$ e $f(x) = -1$ para $x < 0$. Esta função é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$ pois é constante numa vizinhança de cada ponto $x \neq 0$. Entretanto, se tomarmos $\varepsilon < 2$, para todo $\delta > 0$ que escolhermos, existirão sempre pontos $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ tais que $|y - x| < \delta$ e $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$. Basta tomar $x = \delta/3$ e $y = -\delta/3$.

Exemplo 10. A função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/x$, é contínua. Mas, dado ε , com $0 < \varepsilon < 1$, seja qual for $\delta > 0$ escolhido, tomamos um número natural $n > 1/\delta$ e pomos $x = 1/n$, $y = 1/2n$. Então $0 < y < x < \delta$, donde $|y - x| < \delta$ porém $|f(y) - f(x)| = 2n - n = n \geq 1 > \varepsilon$.

Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *uniformemente contínua* no conjunto X quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Uma função uniformemente contínua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos do conjunto X . A recíproca é falsa, como se vê nos Exemplos 9 e 10 acima.

A continuidade de uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $a \in X$ significa que se pode tornar $f(x)$ tão próximo de $f(a)$ quanto se deseje, contanto que se tome x suficientemente próximo de a . Note-se a assimetria: o ponto a está fixo e x se aproxima dele, a fim de que $f(x)$ se aproxime de $f(a)$. Na continuidade uniforme, pode-se fazer com que $f(x)$ e $f(y)$ se tornem tão próximos um do outro quanto se queira, bastando que $x, y \in X$ estejam também próximos. Aqui, x e y são variáveis e desempenham papéis simétricos na definição.

Outra distinção entre a mera continuidade e a continuidade uniforme é a

seguinte: se cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V tal que a restrição de f a $X \cap V$ é contínua, então a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Mas, como mostram o Exemplo 9 e o Exemplo 10 acima, se cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V tal que f é uniformemente contínua em $X \cap V$, daí não se conclui necessariamente que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ seja uniformemente contínua no conjunto X . Isto se exprime dizendo que a continuidade é uma noção *local* enquanto a continuidade uniforme é um conceito *global*.

Exemplo 11. Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *lipschitziana* quando existe uma constante $k > 0$ (chamada *constante de Lipschitz* da função f) tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ sejam quais forem $x, y \in X$. A fim de que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ seja lipschitziana é necessário e suficiente que o quociente $[f(y) - f(x)]/(y - x)$ seja limitado, isto é, que exista uma constante $k > 0$ tal que $x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow |f(y) - f(x)|/|y - x| \leq k$. Toda função lipschitziana $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua: dado $\varepsilon > 0$, tome-se $\delta = \varepsilon/k$. Então $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k|x - y| < k.\varepsilon/k = \varepsilon$. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio de grau 1, isto é, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, então f é lipschitziana com constante $k = |a|$ pois $|f(y) - f(x)| = |ay + b - (ax + b)| = |a||y - x|$. A função f do Exemplo 10 evidentemente não é lipschitziana pois não é uniformemente contínua. Entretanto, para todo $a > 0$, a restrição de f ao intervalo $[a, +\infty)$ é lipschitziana (e, portanto, uniformemente contínua), com constante $k = 1/a^2$. Com efeito, se $x \geq a$ e $y \geq a$ então $|f(y) - f(x)| = |y - x|/|yx| \leq |y - x|/a^2 = k|y - x|$.

Teorema 9. A fim de que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ seja uniformemente contínua é necessário e suficiente que, para todo par de seqüências (x_n) , (y_n) em X com $\lim(y_n - x_n) = 0$, tenha-se $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$.

Demonstração: Se f é uniformemente contínua e $\lim(y_n - x_n) = 0$ então, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|y_n - x_n| < \delta$. Logo $n > n_0$ implica $|f(y_n) - f(x_n)| < \varepsilon$ e daí $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$. Reciprocamente, suponhamos válida a condição estipulada no enunciado do teorema. Se f não fosse uniformemente contínua, existiria um $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $n \in \mathbb{N}$ poderíamos achar pontos x_n, y_n em X tais que $|y_n - x_n| < 1/n$ e $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. Então teríamos $\lim(y_n - x_n) = 0$ sem que fosse $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$. Esta contradição conclui a prova do teorema. \square

Exemplo 12. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, não é uniformemente contínua. Com efeito, tomando $x_n = n$ e $y_n = n + 1/n$ temos $\lim(y_n - x_n) = \lim(1/n) = 0$ mas $f(y_n) - f(x_n) = n^2 + 2 + 1/n^2 - n^2 = 2 + 1/n^2 > 2$, logo não se tem $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$.

Teorema 10. Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda função contínua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

Demonstração: Se f não fosse uniformemente contínua, existiriam $\varepsilon > 0$ e duas seqüências (x_n) , (y_n) em X satisfazendo $\lim(y_n - x_n) = 0$ e $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos supor, em virtude da compacidade de X , que $\lim x_n = a \in X$. Então, como $y_n = (y_n - x_n) + x_n$, vale também $\lim y_n = a$. Sendo f contínua no ponto a , temos $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = \lim f(y_n) - \lim f(x_n) = f(a) - f(a) = 0$, contradizendo que seja $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Exemplo 13. A função $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$, não é lipschitziana. Com efeito, multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{y} + \sqrt{x}$, vemos que $(\sqrt{y} - \sqrt{x})/(y - x) = 1/(\sqrt{y} + \sqrt{x})$. Tomando $x \neq y$ suficientemente pequenos, podemos tornar $\sqrt{y} + \sqrt{x}$ tão pequeno quanto se deseje, logo o quociente $(\sqrt{y} - \sqrt{x})/(y - x)$ é ilimitado. Entretanto, f é lipschitziana (portanto uniformemente contínua) no intervalo $[1, +\infty)$, pois $x, y \in [1, +\infty) \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2 \Rightarrow |\sqrt{y} - \sqrt{x}| = |y - x|/(\sqrt{y} + \sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}|y - x|$. Também no intervalo $[0, 1]$, embora não seja lipschitziana, f é uniformemente contínua porque $[0, 1]$ é compacto. Daí resulta que $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x, y \in [0, 1]$, $|y - x| < \delta_1 \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$ e $x, y \in [1, +\infty)$, $|y - x| < \delta_2 \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dados $x, y \in [0, +\infty)$ com $|y - x| < \delta$, se $x, y \in [0, 1]$ ou $x, y \in [1, +\infty)$ temos obviamente $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Se, digamos, $x \in [0, 1]$ e $y \in [1, +\infty)$ então $|y - 1| < \delta$ e $|1 - x| < \delta$ logo $|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(1)| + |f(1) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Teorema 11. Toda função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, uniformemente contínua num conjunto limitado X , é uma função limitada.

Demonstração: Se f não fosse limitada (digamos superiormente) então existiria uma seqüência de pontos $x_n \in X$ tais que $f(x_{n+1}) > f(x_n) + 1$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X é limitado, podemos (passando a uma subsequência, se necessário) supor que a seqüência (x_n) é convergente. Então, pondo $y_n = x_{n+1}$, teríamos $\lim(y_n - x_n) = 0$ mas, como $f(y_n) - f(x_n) > 1$, não vale $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$, logo f não é uniformemente contínua. \square

O Teorema 11 dá outra maneira de ver que $f(x) = 1/x$ não é uniformemente contínua no intervalo $(0, 1]$, pois $f((0, 1]) = [1, +\infty)$.

Teorema 12. Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então, para cada $a \in X'$ (mesmo que a não pertença a X), existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Demonstração: Fixemos uma seqüência de pontos $a_n \in X - \{a\}$ com $\lim a_n = a$. Segue-se do Teorema 11 que a seqüência $(f(a_n))$ é limitada.

Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\lim f(a_n) = b$. Afirmamos agora que se tem $\lim f(x_n) = b$ seja qual for a seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$. Com efeito, temos $\lim(x_n - a_n) = 0$. Como f é uniformemente contínua, segue-se que $\lim[f(x_n) - f(a_n)] = 0$, logo $\lim f(x_n) = \lim f(a_n) + \lim[f(x_n) - f(a_n)] = b$. \square

Exemplo 14. O Teorema 12 implica que $1/x$ em \mathbb{R}^+ , bem como $x/|x|$ e $\sin(1/x)$ em $\mathbb{R} - \{0\}$, não são uniformemente contínuas.

5. Exercícios

Seção 1: Definição e primeiras propriedades

1. Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$. Prove que são contínuas no ponto a as funções $\varphi, \psi: X \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in X$.
2. Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Prove que se X é aberto então o conjunto $A = \{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$ é aberto e se X é fechado então o conjunto $F = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ é fechado.
3. Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *semi-contínua superiormente* (scs) no ponto $a \in X$ quando, para cada $c > f(a)$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, |x - a| < \delta$ implicam $f(x) < c$. Defina função *funcão semi-contínua inferiormente* (sci) no ponto a . Prove que f é contínua no ponto a se, e somente se, é scs e sci nesse ponto. Prove que se f é scs, g é sci no ponto a e $f(a) < g(a)$ então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x)$.

- Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Prove que se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{X}$.
- Prove que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.
- Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas no ponto a . Suponha que, em cada vizinhança V de a , existam pontos x, y tais que $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$. Prove que $f(a) = g(a)$.
- Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ descontínua no ponto $a \in X$. Prove que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: ou se pode achar uma seqüência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ e $f(x_n) > f(a) + \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou acha-se (y_n) com $y_n \in X$, $\lim y_n = a$ e $f(y_n) < f(a) - \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seção 2: Funções contínuas num intervalo

- Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *localmente constante* quando todo ponto de X possui vizinhança V tal que f é constante em $V \cap X$. Prove que toda função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, localmente constante num intervalo I , é constante.
- Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona, definida no intervalo I . Se a imagem $f(I)$ é um intervalo, prove que f é contínua.
- Diz-se que uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo I , tem a *propriedade do valor intermediário* quando a imagem $f(J)$ de todo intervalo $J \subset I$ é um intervalo. Mostre que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, tem a propriedade do valor intermediário, embora seja descontínua.
- Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com a propriedade do valor intermediário. Se, para cada $c \in \mathbb{R}$, existe apenas um número finito de pontos $x \in I$ tais que $f(x) = c$, prove que f é contínua.
- Seja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $x \in [0, 1/2]$ tal que $f(x) = f(x + 1/2)$. Prove o mesmo resultado com $1/3$ em vez de $1/2$. Generalize.

Seção 3: Funções contínuas em conjuntos compactos

- Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Prove que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Prove que, para todo $c \in \mathbb{R}$ dado, existe entre as raízes x da equação $f(x) = c$ uma cujo módulo $|x|$ é mínimo.
- Prove que não existe uma função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que assuma cada um dos seus valores $f(x)$, $x \in [a, b]$, exatamente duas vezes.
- Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que toda função contínua periódica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo, isto é, existem $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto X . Prove que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que $x, y \in X$, $|y - x| \geq \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k_\varepsilon |y - x|$. (Isto significa que f cumpre a condição de Lipschitz contanto que os pontos x, y não estejam muito próximos.)

Seção 4: Continuidade uniforme

- Se toda função contínua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, prove que o conjunto X é fechado porém não necessariamente compacto.
- Mostre que a função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, não é uniformemente contínua.
- Dada $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínua, defina $\varphi: \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = f(x)$ se $x \in X$ é um ponto isolado e $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ se $x \in X'$. Prove que φ é uniformemente contínua e $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.
- Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se existem $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, prove que f é uniformemente contínua. Mesma conclusão vale se existem os limites de $f(x) - x$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.
- Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Prove que $f + g$ é uniformemente contínua. O mesmo ocorre com o produto $f \cdot g$, desde que f e g , sejam limitadas. Prove que $\varphi, \psi: X \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ $x \in X$ são uniformemente contínuas.

Derivadas

Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X$. O quociente $q(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$ tem sentido para $x \neq a$, logo define uma função $q: X - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, cujo valor $q(x)$ é a *inclinação da secante* (reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ no gráfico de f) em relação ao eixo x .

Se imaginarmos x como o tempo e $f(x)$ como a abscissa, no instante x , de um ponto móvel que se desloca sobre o eixo x , então $q(x)$ é a *velocidade média* desse ponto no intervalo de tempo decorrido entre os instantes a e x .

De um modo geral, o quociente $q(x)$ é a relação entre a variação de $f(x)$ e a variação de x a partir do ponto $x = a$.

No caso em que $a \in X' \cap X$ então é natural considerar $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$. As interpretações deste limite, nos contextos acima, são respectivamente a inclinação da tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, a velocidade instantânea do móvel no instante $x = a$ ou, em geral, a “taxa de variação” da função f no ponto a .

Esse limite é uma das noções mais importantes da Matemática e suas aplicações. Ele será o objeto de estudo neste capítulo.

1. A noção de derivada

Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A *derivada* da função f no ponto a é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Bem entendido, o limite acima pode existir ou não. Se existir, diz-se que f é *derivável no ponto a*. Quando existe a derivada $f'(x)$ em todos os pontos

$x \in X \cap X'$ diz-se que a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é *derivável no conjunto* X e obtem-se uma nova função $f': X \cap X' \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, chamada a *função derivada* de f . Se f' é contínua, diz-se que f é *de classe C¹*.

Outras notações para a derivada de f no ponto a são

$$Df(a), \quad \frac{df}{dx}(a) \text{ e } \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}$$

Teorema 1. A fim de que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a+h \in X \Rightarrow f(a+h) = f(a) + c.h + r(h)$, onde $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$. No caso afirmativo, tem-se $c = f'(a)$.

Demonstração: Seja $Y = \{h \in \mathbb{R}; a+h \in X\}$. Então $0 \in Y \cap Y'$. Supondo que $f'(a)$ exista, definimos $r: Y \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a).h$. Então

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a),$$

logo $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$. A condição é, portanto, necessária. Reciprocamente, se vale a condição, então $r(h)/h = [f(a+h) - f(a)]/h - c$, logo $\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a))/h - c = \lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$, portanto $f'(a)$ existe e é igual a c . \square

Corolário. Uma função é contínua nos pontos em que é derivável.

Com efeito, se f é derivável no ponto a então $f(a+h) = f(a) + f'(a).h + [r(h)/h]h$ com $\lim_{h \rightarrow 0} [r(h)/h] = 0$, logo $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$, ou seja, f é contínua no ponto a . \square

Observação. Para *toda* função f , definida nos pontos a e $a+h$, e todo número real c , pode-se sempre escrever a igualdade $f(a+h) = f(a) + c.h + r(h)$, a qual meramente define o número $r(h)$. O que o Teorema 1 afirma é que existe no máximo um $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$. Este número c , quando existe, é igual a $f'(a)$. O Teorema 1 diz também que, quando $f'(a)$ existe, o acréscimo $f(a+h) - f(a)$ é a soma de uma “parte linear” $c.h$, proporcional ao acréscimo h da variável independente, mais um “resto” $r(h)$, o qual é infinitamente pequeno em relação a h , no sentido de que o quociente $r(h)/h$ tende a zero com h .

Quando $a \in X$ é um ponto de acumulação à direita, isto é, $a \in X \cap X'_+$, pode-se tomar o limite $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} q(x)$. Quando existe, este limite chama-se a *derivada à direita* de f no ponto a . Analogamente, se $a \in X \cap X'_-$, tem sentido considerar o limite à esquerda $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} q(x)$. Se existe, ele se chama a *derivada à esquerda* de f no ponto a .

Caso seja $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$, isto é, caso $a \in X$ seja ponto de acumulação bilateral, a função f é derivável no ponto a se, e somente se, existem e são iguais as derivadas à direita e à esquerda, com $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$. O Teorema 1 (com $\lim_{h \rightarrow 0+} r(h)/h$ e $\lim_{h \rightarrow 0-} r(h)/h$) vale para derivadas laterais. E seu corolário também. Por exemplo, se existe a derivada à direita $f'_+(a)$ então f é *contínua à direita* no ponto a , isto é, $f(a) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(a+h)$.

Em particular, se $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e existem ambas as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$ então f é contínua no ponto a . (Mesmo que essas derivadas laterais sejam diferentes.)

Exemplo 1. Uma função constante é derivável e sua derivada é identicamente nula. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = ax + b$ então, para $c \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$ quaisquer, $[f(c+h) - f(c)]/h = a$, logo $f'(c) = a$. Para $n \in \mathbb{N}$ qualquer, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = x^n$, tem derivada $f'(x) = n.x^{n-1}$. Com efeito, pelo binômio de Newton, $f(x+h) = (x+h)^n = x^n + h.n.x^{n-1} + h^2.p(x, h)$, onde $p(x, h)$ é um polinômio em x e h . Portanto $[f(x+h) - f(x)]/h = n.x^{n-1} + h.p(x, h)$. Segue-se que $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)]/h = n.x^{n-1}$.

Exemplo 2. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$ quando $x \neq 0$, $f(0) = 0$, é contínua e possui derivada em todo ponto $x \neq 0$. No ponto 0, temos $[f(0+h) - f(0)]/h = [h \cdot \operatorname{sen}(1/h)]/h = \operatorname{sen}(1/h)$. Como não existe $\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}(1/h)$, segue-se que f não é derivável no ponto $x = 0$, onde nenhuma derivada lateral tampouco existe. Por outro lado, a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x.f(x)$, isto é, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, $x \neq 0$, $g(0) = 0$, é derivável no ponto $x = 0$ porque $\lim_{h \rightarrow 0} [g(0+h) - g(0)]/h = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \operatorname{sen}(1/h) = 0$. Logo $g'(0) = 0$. Quando $x \neq 0$, as regras de derivação conhecidas dão $g'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$. Note-se que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$. Em particular, a função derivada, $g': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, não é contínua no ponto 0, logo g não é de classe C^1 .

Exemplo 3. A função $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = |x|$, é derivável em todo ponto $x \neq 0$. Com efeito, $\varphi(x) = x$ se $x > 0$ e $\varphi(x) = -x$ se

$x < 0$. Logo $\varphi'(x) = 1$ para $x > 0$ e $\varphi'(x) = -1$ se $x < 0$. No ponto 0 não existe a derivada $\varphi'(0)$. De fato, existem $\varphi'_+(0) = 1$ e $\varphi'_-(0) = -1$. A função $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $I(x) = n$ quando $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, é derivável, com $I'(x) = 0$, nos pontos $x \notin \mathbb{Z}$. Se n é inteiro, existe $I'_+(n) = 0$ mas não existe $I'_-(n)$. Com efeito, se $1 > h > 0$, tem-se $I(n+h) = I(n) = n$ mas para $-1 < h < 0$ vale $I(n+h) = n-1$, $I(n) = n$. Portanto $\lim_{h \rightarrow 0^+} [I(n+h) - I(n)]/h = 0$ e $\lim_{h \rightarrow 0^-} [I(n+h) - I(n)]/h = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1/h)$ não existe.

Exemplo 4. (*A Regra de L'Hôpital.*) Esta regra constitui uma das mais populares aplicações da derivada. Em sua forma mais simples, ela se refere ao cálculo de um limite da forma $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ no caso em que f e g são deriváveis no ponto a e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Então, pela definição de derivada, $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)/(x-a)$ e $g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)/(x-a)$. Supondo $g'(a) \neq 0$, a Regra de L'Hôpital diz que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = f'(a)/g'(a)$. A prova é direta:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{(x-a)}}{\frac{g(x)}{(x-a)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Como ilustração, consideremos os limites $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$. Aplicando a Regra de L'Hôpital, o primeiro limite se reduz a $\cos 0 = 1$ e o segundo a $e^0 = 1$. Convém observar, entretanto, que estas aplicações (e outras análogas) da Regra de L'Hôpital são indevidas pois, para utilizá-la, é necessário conhecer as derivadas $f'(a)$ e $g'(a)$. Nestes dois exemplos, os limites a calcular são, por definição, as derivadas de $\sin x$ e e^x no ponto $x = 0$.

2. Regras operacionais

Teorema 2. Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. As funções $f \pm g$, $f.g$ e f/g (caso $g(a) \neq 0$) são também deriváveis no ponto a , com

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

$$(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a) \quad \text{e}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{g(a)^2}.$$

Demonstração: Veja qualquer livro de Cálculo. □

Teorema 3. **(Regra da Cadeia)** Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b então $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Demonstração: Consideremos uma seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$ e ponhamos $y_n = f(x_n)$, logo $\lim y_n = b$. Sejam $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N}; f(x_n) \neq f(a)\}$ e $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}; f(x_n) = f(a)\}$. Se $n \in \mathbb{N}_1$ então $y_n \in Y - \{b\}$ e

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Portanto, se \mathbb{N}_1 é infinito, tem-se $\lim_{n \in \mathbb{N}_1} [g(f(x_n)) - g(f(a))] / (x_n - a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. Se \mathbb{N}_2 é infinito tem-se $\lim_{n \in \mathbb{N}_2} [f(x_n) - f(a)] / (x_n - a) = 0$, logo $f'(a) = 0$. Ainda neste caso, tem-se $\lim_{n \in \mathbb{N}_2} [g(f(x_n)) - g(f(a))] / (x_n - a) = 0 = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. Como $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, resulta daí que, em qualquer hipótese, vale

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{[g(f(x_n)) - g(f(a))]}{(x_n - a)} = g'(f(a)) \cdot f'(a),$$

o que prova o teorema. \square

Corolário. Seja $f: X \rightarrow Y$ uma bijeção entre os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, com inversa $g = f^{-1}: Y \rightarrow X$. Se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. No caso afirmativo, tem-se $g'(b) = 1/f'(a)$.

Com efeito, se $x_n \in X - \{a\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$ então, como f é injetiva e contínua no ponto a , tem-se $y_n = f(x_n) \in Y - \{b\}$ e $\lim y_n = b$. Portanto, $b \in Y \cap Y'$. Se g for derivável no ponto b , a igualdade $g(f(x)) = x$, válida para todo $x \in X$, juntamente com a Regra da Cadeia, fornece $g'(b) \cdot f'(a) = 1$. Em particular, $f'(a) \neq 0$. Reciprocamente, se $f'(a) \neq 0$ então, para qualquer seqüência de pontos $y_n = f(x_n) \in Y - \{b\}$ com $\lim y_n = b$, a continuidade de g no ponto b nos dá $\lim x_n = a$, portanto $g'(b)$ é igual a

$$\lim \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \lim \left[\frac{y_n - b}{g(y_n) - g(b)} \right]^{-1} = \lim \left[\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right]^{-1} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Exemplo 5. Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, consideremos as funções $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $g(x) = f(x^2)$ e $h(x) = f(x)^2$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$ e $h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$.

Exemplo 6. Para $n \in \mathbb{N}$ fixo, a função $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, dada por $g(x) = \sqrt[n]{x}$, é derivável no intervalo $(0, +\infty)$ com $g'(x) = 1/(n \sqrt[n]{x^{n-1}})$. Com efeito, g é a inversa da bijeção $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, dada por $f(x) = x^n$. Pelo corolário acima, pondo $y = x^n$, temos $g'(y) = 1/f'(x)$ se $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$, isto é, se $x \neq 0$. Assim, $g'(y) = 1/nx^{n-1} = 1/n \sqrt[n]{y^{n-1}}$ e, mudando de notação, $g'(x) = 1/n \sqrt[n]{x^{n-1}}$. No ponto $x = 0$, a função $g(x) = \sqrt[n]{x}$ não é derivável (salvo quando $n = 1$). Por exemplo, a função $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = x^3$, é um homeomorfismo, cujo inverso $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ não possui derivada no ponto 0.

3. Derivada e crescimento local

As proposições seguintes, que se referem a derivadas laterais e a desigualdades, têm análogas com f'_+ trocada por f'_- , com $>$ substituído por $<$, etc. Para evitar repetições monótonas, trataremos apenas um caso, embora utilizemos livremente seus análogos.

Teorema 4. Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta$ implicam $f(a) < f(x)$.

Demonstração: Temos $\lim_{x \rightarrow a_+} [f(x) - f(a)]/(x - a) = f'_+(a) > 0$. Pela definição de limite à direita, tomado $\varepsilon = f'_+(a)$, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \quad a < x < a + \delta \Rightarrow [f(x) - f(a)]/(x - a) > 0 \Rightarrow f(a) < f(x).$$

□

Corolário 1. Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente então suas derivadas laterais, onde existem, são ≥ 0 .

Com efeito, se alguma derivada lateral, digamos $f'_+(a)$, fosse negativa então o (análogo do) Teorema 4 nos daria $x \in X$ com $a < x$ e $f(x) < f(a)$, uma contradição. □

Corolário 2. Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com $f'(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ implicam $f(x) < f(a) < f(y)$.

Diz-se que a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ tem um *máximo local* no ponto $a \in X$

quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta$ implicam $f(x) \leq f(a)$. Quando $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$ implicam $f(x) < f(a)$, diz-se que f tem um *máximo local estrito* no ponto a . Definições análogas para *mínimo local* e *mínimo local estrito*.

Quando $a \in X$ é tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é um ponto de *mínimo absoluto* para a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se vale $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é um ponto de *máximo absoluto*.

Corolário 3. Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$ e tem aí um máximo local então $f'_+(a) \leq 0$.

Com efeito, se fosse $f'_+(a) > 0$ então, pelo Teorema 4, teríamos $f(a) < f(x)$ para todo $x \in X$ à direita e suficientemente próximo de a , logo f não teria máximo local no ponto a . \square

Corolário 4. Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e possui aí um máximo ou mínimo local então $f'(a) = 0$.

Com efeito, pelo Corolário 3 temos $f'_+(a) \leq 0$ e $f'_-(a) \geq 0$. Como $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$, segue-se que $f'(a) = 0$. \square

Exemplo 7. Do Teorema 4 e seu Corolário 2 não se pode concluir que uma função com derivada positiva num ponto a seja crescente numa vizinhança de a . (A menos que f' seja contínua no ponto a .) Tudo o que se pode garantir é que $f(x) < f(a)$ para $x < a$, x próximo de a , e que $f(x) > f(a)$ se x está próximo de a , com $x > a$. Por exemplo, seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x) + x/2$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. A função f é derivável, com $f'(0) = 1/2$ e $f'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) + 1/2$ para $x \neq 0$. Se tomarmos $x \neq 0$ muito pequeno com $\operatorname{sen}(1/x) = 0$ e $\cos(1/x) = 1$ teremos $f'(x) < 0$. Se escolhermos $x \neq 0$ pequeno com $\operatorname{sen}(1/x) = 1$ e $\cos(1/x) = 0$, teremos $f'(x) > 0$. Logo existem pontos x arbitrariamente próximos de 0 com $f'(x) < 0$ e com $f'(x) > 0$. Segue-se do Corolário 1 que f não é monótona em vizinhança alguma de 0.

Exemplo 8. No Corolário 1, mesmo que f seja monótona crescente e derivável, não se pode garantir que sua derivada seja positiva em todos os pontos. Por exemplo, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, é crescente mas sua derivada $f'(x) = 3x^2$ se anula para $x = 0$.

Exemplo 9. Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ tem, digamos, um mínimo local no ponto $a \in X$, não se pode concluir daí que seja $f'(a) = 0$. Em primeiro lugar, $f'(a)$ pode não existir. Este é o caso de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, que possui um mínimo local no ponto $x = 0$, onde se tem $f'_+(0) = 1$ e $f'_{-}(0) = -1$, em conformidade com o Corolário 3. Em segundo lugar, mesmo que f seja derivável no ponto a , este pode não ser um ponto de acumulação bilateral e aí pode ocorrer $f'(a) \neq 0$. É o caso da função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Temos $f'(0) = f'(1) = 1$ embora f tenha um mínimo no ponto $x = 0$ e um máximo no ponto $x = 1$.

Um ponto $c \in X$ chama-se *ponto crítico* da função derivável $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ quando $f'(c) = 0$. Se $c \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ é um ponto de mínimo ou de máximo local então c é crítico, mas a recíproca é falsa: a bijeção crescente $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, não pode ter máximo nem mínimo local mas admite o ponto crítico $x = 0$.

4. Funções deriváveis num intervalo

Mesmo quando é descontínua, a derivada goza da propriedade do valor intermediário, como se verá a seguir.

Teorema 5. (**Darboux.**) Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável. Se $f'(a) < d < f'(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente $d = 0$. A função contínua f , pelo Teorema de Weierstrass, atinge seu valor mínimo em algum ponto c do conjunto compacto $[a, b]$. Como $f'(a) < 0$, o Teorema 4 assegura a existência de pontos $x \in (a, b)$ tais que $f(x) < f(a)$, logo esse mínimo não é atingido no ponto a , isto é, $a < c$. Por motivo análogo tem-se $c < b$. O Corolário 4 então nos dá $f'(c) = 0$. O caso geral reduz-se a este considerando a função auxiliar $g(x) = f(x) - dx$. Então $g'(x) = f'(x) - d$, donde $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = d$ e $g'(a) < 0 < g'(b) \Leftrightarrow f'(a) < d < f'(b)$. \square

Exemplo 10. Seja $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -1$ se $-1 \leq x < 0$ e $g(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 1$. A função g não goza da propriedade do valor intermediário pois assume apenas os valores -1 e 1 no intervalo $[-1, 1]$. Logo não existe $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável tal que $f' = g$. Por outro lado, a função $h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$ se $x \neq 0$, $h(0) = 0$, que possui uma descontinuidade bastante complicada no ponto $x = 0$, é a derivada

da função $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. No capítulo 11, veremos que toda função contínua $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é derivada de alguma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e, no Exercício 4.1 deste capítulo, o leitor é convidado a mostrar que se $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é descontínua num ponto $c \in (a, b)$ onde existem os limites laterais $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x)$ então g não pode ser a derivada de uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 6. **(Rolle.)** Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração: Pelo Teorema de Weierstrass, f atinge seu valor mínimo m e seu valor máximo M em pontos de $[a, b]$. Se esses pontos forem a e b então $m = M$ e f será constante, daí $f'(x) = 0$ qualquer que seja $x \in (a, b)$. Se um desses pontos, digamos c , estiver em (a, b) então $f'(c) = 0$. \square

Teorema 7. **(Teorema do Valor Médio, de Lagrange.)** Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$.

Demonstração: Consideremos a função auxiliar $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x) - dx$, onde d é escolhido de modo que $g(a) = g(b)$, ou seja, $d = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, isto é, $f'(c) = d = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. \square

Um enunciado equivalente: Seja $f: [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivável em $(a, a+h)$. Existe um número θ , $0 < \theta < 1$ tal que $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h).h$.

Corolário 1. Uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, contínua no intervalo I , com derivada $f'(x) = 0$ para todo $x \in \operatorname{int} I$, é constante.

Com efeito, dados $x, y \in I$ quaisquer, existe c entre x e y tal que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0.(y - x) = 0$, logo $f(x) = f(y)$. \square

Corolário 2. Se $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, deriváveis em $\operatorname{int} I$, com $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in \operatorname{int} I$ então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in I$.

Com efeito, basta aplicar o Corolário 1 à diferença $g - f$. \square

Corolário 3. Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I . Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$ então $x, y \in I \Rightarrow$

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

Com efeito, dados $x, y \in I$, f é contínua no intervalo fechado cujos extremos são x, y e derivável no seu interior. Logo existe z entre x e y tal que $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$, donde $|f(y) - f(x)| = |f'(z)||y - x| \leq k|y - x|$. \square

Corolário 4. A fim de que a função derivável $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ seja monótona não-decrescente no intervalo I é necessário e suficiente que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é uma bijeção crescente de I sobre um intervalo J e sua inversa $g = f^{-1}: J \rightarrow I$ é derivável, com $g'(y) = 1/f'(x)$ para todo $y = f(x) \in J$.

Com efeito, já sabemos, pelo Corolário 1 do Teorema 4, que se f é monótona não decrescente então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Reciprocamente, se vale esta condição então, para quaisquer x, y em I , temos $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$, onde $z \in I$ está entre x e y . Como $f'(z) \geq 0$, vemos que $f(y) - f(x) \geq 0$, isto é, $x < y$ em $I \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Do mesmo modo se vê que, supondo $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, tem-se f crescente. As demais afirmações seguem-se do Teorema 5, Capítulo 7 e do Corolário da Regra da Cadeia (Teorema 3). \square

Exemplo 11. O Corolário 3 é a fonte mais natural de funções lipschitzianas. Por exemplo, se $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio então, para cada subconjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$, a restrição $p|X$ é lipschitziana porque a derivada p' , sendo contínua, é limitada no compacto \bar{X} . Como toda função lipschitziana é uniformemente contínua, segue-se do Teorema 12, Capítulo 7 que se $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tem derivada limitada então existem os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$. A função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, não pode ter derivada limitada em nenhum intervalo do tipo $(0, \delta)$ pois não existe $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$.

5. Exercícios

Seção 1: A noção de derivada

1. A fim de que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista uma função $\eta: X \rightarrow \mathbb{R}$, contínua no ponto a , tal que $f(x) = f(a) + \eta(x)(x - a)$ para todo $x \in X$.
2. Sejam $f, g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X$. Se f

e h são deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$, com $f(a) = h(a)$ e $f'(a) = h'(a)$.
prove que g é derivável nesse ponto, com $g'(a) = f'(a)$.

3. Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $x_n < a < y_n$ para todo n e $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(a)$. Interprete este fato geometricamente.
4. Dê exemplo de uma função derivável $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e seqüências de pontos $0 < x_n < y_n$, com $\lim x_n = \lim y_n = 0$ sem que entretanto exista o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n)$.
5. Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ derivável num ponto interior $a \in X$. Prove que $\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a-h)]/2h = f'(a)$. Dê um exemplo em que este limite existe porém f não é derivável no ponto a .

Seção 2: Regras operacionais

1. Admitindo que $(e^x)' = e^x$ e que $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^y/y = +\infty$, prove que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, possui derivada igual a zero no ponto $x = 0$, o mesmo ocorrendo com $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com f'' e assim por diante.
2. Seja I um intervalo aberto. Uma $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se de classe C^2 quando é derivável e sua derivada $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Prove que se $f(I) \subset J$ e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ também é de classe C^2 então a composta $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 .
3. Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com $f(I) = J$ e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Calcule a derivada segunda de $f^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}$ e mostre que f^{-1} é de classe C^2 .
4. Seja I um intervalo com centro 0. Uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se par quando $f(-x) = f(x)$ e ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in I$. Se f é par, suas derivadas de ordem par (quando existem) são funções pares e suas derivadas de ordem ímpar são funções ímpares. Em particular, estas últimas se anulam no ponto 0. Enuncie resultado análogo para f ímpar.
5. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, tal que $f(tx) = tf(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = f'(0) \cdot x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é k vezes derivável e $f(tx) = t^k \cdot f(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$, prove que $f(x) = [f^{(k)}(0)/k!] \cdot x^k$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seção 3: Derivada e crescimento local

1. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 , o conjunto dos seus pontos críticos é fechado. Dê exemplo de uma função derivável $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que 0 seja limite de uma seqüência de pontos críticos de f , mas $f'(0) > 0$.
2. Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I . Um ponto crítico $c \in I$ chama-se *não-degenerado* quando $f''(c)$ é diferente de 0. Prove que todo ponto crítico não degenerado é um ponto de máximo local ou de mínimo local.
3. Se $c \in I$ é um ponto crítico não-degenerado da função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, derivável no intervalo aberto I , prove que existe $\delta > 0$ tal que c é o único ponto crítico de f no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. Conclua que, se f é de classe C^1 , então num conjunto compacto $K \subset I$, onde os pontos críticos de f são todos não-degenerados, só existe um número finito deles.
4. Prove diretamente (sem usar o exercício anterior) que se o ponto crítico c da função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é limite de uma seqüência de pontos críticos $c_n \neq c$ e $f''(c)$ existe, então $f''(c) = 0$.
5. Prove que o conjunto dos pontos de máximo ou de mínimo local estrito de qualquer função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é enumerável.

Seção 4: Funções deriváveis num intervalo

1. Seja $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo aberto I , exceto no ponto $c \in I$. Se existem os limites laterais $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = A$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = B$, com $A \neq B$ então nenhuma função derivável $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tem derivada $f' = g$.
2. Seja $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x/x$. Admitindo que $(\log)'(x) = 1/x$, indique os intervalos de crescimento e decrescimento de f , seus pontos críticos e seus limites quando $x \rightarrow 0$ e quando $x \rightarrow +\infty$.
3. Faça um trabalho análogo ao do exercício anterior para a função $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = e^x/x$, admitindo que $(e^x)' = e^x$.
4. Supondo conhecidas as regras de derivação para as funções seno e cosseno, prove que $\text{sen}: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-1, 1)$, $\cos: (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$ e $\text{tg} = \text{sen} / \cos: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ são bijeções com derivadas $\neq 0$ em todos os pontos e calcule as derivadas das funções inversas $\text{arc}\text{sen}: (-1, 1) \rightarrow$

$(-\pi/2, \pi/2)$, $\arccos: (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$ e $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$.

5. Dada f derivável no intervalo I , sejam $X = \{f'(x); x \in I\}$ e $Y = \{[f(y) - f(x)]/(y - x); x \neq y \in I\}$. O Teorema do Valor Médio assegura que $Y \subset X$. Dê um exemplo em que $Y \neq X$. Prove que $\overline{Y} = \overline{X}$ e conclua que $\sup X = \sup Y$, $\inf X = \inf Y$.
6. Seja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e derivável. Se não existir $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, prove que, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = c$.
7. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivável no intervalo aberto (a, b) , com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Se $f'(x) = 0$ apenas num conjunto finito, prove que f é crescente.
8. Use o princípio dos intervalos encaixados para provar diretamente (sem usar o Teorema do Valor Médio) que se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável, com $f'(x) = 0$ em todos os pontos x do intervalo I , então f é constante.
9. Com a mesma técnica do exercício anterior, prove que uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, derivável, com $|f'(x)| \leq k$ para todo x no intervalo I cumpre a condição de Lipschitz $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ se $x, y \in I$.
10. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b) , exceto possivelmente no ponto $c \in (a, b)$. Se existir $\lim_{x \rightarrow c} f'(x) = L$, prove que $f'(c)$ existe e é igual a L .
11. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada limitada em (a, b) e com a propriedade do valor intermediário (cfr. Exercício 2.3, Capítulo 7). Prove que f é contínua.
12. Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ cumpre $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^\alpha$ com $\alpha > 1$, $c \in \mathbb{R}$ e $x, y \in I$ arbitrários, prove que f é constante.
13. Prove que se f é derivável num intervalo e f' é contínua no ponto a então, para quaisquer seqüências de pontos $x_n \neq y_n$ nesse intervalo, com $\lim x_n = \lim y_n = a$, tem-se $\lim [f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(a)$.

Fórmula de Taylor e Aplicações da Derivada

As aplicações mais elementares da derivada, ligadas a problemas de máximos e mínimos, e à regra de L'Hôpital, se encontram amplamente divulgadas nos livros de Cálculo. Aqui exporemos duas aplicações, a saber o estudo das funções convexas e o método de Newton.

1. Fórmula de Taylor

A n -ésima derivada (ou *derivada de ordem n*) de uma função f no ponto a será indicada com a notação $f^{(n)}(a)$. Para $n = 1, 2$ e 3 escreve-se $f'(a)$, $f''(a)$ e $f'''(a)$ respectivamente. Por definição, $f''(a) = (f')'(a)$ e assim sucessivamente: $f^{(n)}(a) = [f^{(n-1)}]'(a)$. Para que $f^{(n)}(a)$ tenha sentido, é necessário que $f^{(n-1)}(x)$ esteja definida num conjunto do qual a seja ponto de acumulação e seja derivável no ponto $x = a$. Em todos os casos que consideraremos, tal conjunto será um intervalo. Quando existe $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$, diz-se que a função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é n vezes derivável no intervalo I . Quando f é $n - 1$ vezes derivável numa vizinhança de a e existe $f^{(n)}(a)$, dizemos que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é n vezes derivável no ponto $a \in I$.

Dizemos que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função *de classe C^n* , e escrevemos $f \in C^n$, quando f é n vezes derivável e, além disso, a função $f^{(n)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Quando $f \in C^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que f é de classe C^∞ e escrevemos $f \in C^\infty$. É conveniente considerar f como sua própria “derivada de ordem zero” e escrever $f^{(0)} = f$. Assim, $f \in C^0$ significa que f é uma função contínua.

Exemplo 1. Para $n = 0, 1, 2, \dots$ seja $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n|x|$. Então $f_n(x) = x^{n+1}$ se $x \geq 0$ e $f_n(x) = -x^{n+1}$ se $x \leq 0$. Cada uma das funções f_n é de classe C^n pois sua n -ésima derivada é igual a

$(n+1)!|x|$. Mas f_n não é $n+1$ vezes derivável no ponto 0, logo não é de classe C^{n+1} . As funções mais comumente encontradas, como polinômios, funções racionais, funções trigonométricas, exponencial e logaritmo, são de classe C^∞ .

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida no intervalo I e n vezes derivável no ponto $a \in I$. O *polinômio de Taylor de ordem n* da função f no ponto a é o polinômio $p(h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n$ (de grau $\leq n$) cujas derivadas de ordem $\leq n$ no ponto $h = 0$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de f no ponto a , isto é, $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Ora, as derivadas $p^{(0)}(0), p'(0), \dots, p^{(n)}(0)$ determinam de modo único o polinômio $p(h)$ pois $p^{(i)}(0) = i! a_i$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a é

$$p(h) = f(a) + f'(a).h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Se $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $a \in I$ então a função $r(h) = f(a+h) - p(h)$, definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R}; a+h \in I\}$, é n vezes derivável no ponto $0 \in J$, com $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$.

Lema. Seja $r: J \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $0 \in J$. A fim de que seja $r^{(i)}(0) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, n$, é necessário e suficiente que $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que as derivadas de r no ponto 0 sejam nulas até a ordem n . Para $n = 1$, isto significa que $r(0) = r'(0) = 0$. Então $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = \lim_{h \rightarrow 0} [r(h) - r(0)]/h = r'(0) = 0$. Para $n = 2$, temos $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$. Pelo que acabamos de ver, isto implica $\lim_{x \rightarrow 0} r'(x)/x = 0$. O Teorema do Valor Médio assegura que, para todo $h \neq 0$, existe x no intervalo de extremos 0 e h tal que $r(h)/h^2 = [r(h) - r(0)]/h^2 = r'(x).h/h^2 = r'(x)/h$. Por conseguinte, $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^2 = \lim_{h \rightarrow 0} r'(x)/h = \lim_{h \rightarrow 0} [r'(x)/x](x/h) = 0$ pois $h \rightarrow 0$ implica $x \rightarrow 0$ e, além disso, $|x/h| \leq 1$. O mesmo argumento permite passar de $n = 2$ para $n = 3$ e assim por diante. Reciprocamente, suponhamos que $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$. Daí resulta, para $i = 0, 1, \dots, n$, que $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^i = \lim_{h \rightarrow 0} (r(h)/h^n)h^{n-i} = 0$. Portanto $r(0) = \lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^0 = 0$. Além disso, $r'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$. Quanto a $r''(0)$, consideremos a função auxiliar $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(h) = r(h) - r''(0)h^2/2$. Evidentemente, vale $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$. Pela parte do lema já demonstrada segue-se que $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h)/h^2 = 0$. Como $\varphi(h)/h^2 = r(h)/h^2 - r''(0)/2$ e sabemos que $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^2 = 0$, resulta

que $r''(0) = 0$. O mesmo argumento permite passar de $n = 2$ para $n = 3$ e assim por diante. \square

Teorema 1. **(Fórmula de Taylor infinitesimal.)** Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. A função $r: J \rightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$ pela igualdade

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \frac{f''(a)}{2} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + r(h),$$

cumpe $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$. Reciprocamente, se $p(h)$ é um polinômio de grau $\leq n$ tal que $r(h) = f(a+h) - p(h)$ cumple $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$ então $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto a , isto é,

$$p(h) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot h^i.$$

Demonstração: A função r , definida pela fórmula de Taylor, é n vezes derivável no 0 e tem derivadas nulas nesse ponto, até a ordem n . Logo, pelo Lema, vale $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$. Reciprocamente, se $r(h) = f(a+h) - p(h)$ é tal que $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$ então, novamente pelo Lema, as derivadas de r no ponto 0 são nulas até a ordem n , logo $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)$ para $i = 0, 1, \dots, n$, ou seja, $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a . \square

Exemplo 2. Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in \text{int } I$, com $f^{(i)}(a) = 0$ para $1 \leq i < n$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$. Se n é par então: f possui um mínimo local estrito no ponto a caso $f^{(n)}(a) > 0$ e um máximo local estrito quando $f^{(n)}(a) < 0$. Se n é ímpar então a não é ponto de mínimo nem de máximo local. Com efeito, neste caso podemos escrever a fórmula de Taylor como

$$f(a+h) - f(a) = h^n \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n} \right].$$

Pela definição de limite, existe $\delta > 0$ tal que, para $a + h \in I$ e $0 < |h| < \delta$ a soma dentro dos colchetes tem o mesmo sinal de $f^{(n)}(a)$. Como $a \in \text{int } I$, podemos tomar este δ de modo que $|h| < \delta \Rightarrow a + h \in I$. Então, quando n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, a diferença $f(a+h) - f(a)$ é positiva sempre que $0 < |h| < \delta$, logo f possui um mínimo local estrito no ponto a . Analogamente, se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, a diferença $f(a+h) - f(a)$ é negativa quando $0 < |h| < \delta$, logo f tem um máximo local no ponto a . Finalmente, se n é ímpar, o fator h^n tem o

mesmo sinal de h , logo a diferença $f(a+h) - f(a)$ muda de sinal juntamente com h , logo f não tem máximo nem mínimo local no ponto a .

Exemplo 3. (*Novamente a Regra de L'Hôpital.*) Sejam $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes deriváveis no ponto $a \in I$, com derivadas nulas neste ponto até a ordem $n-1$. Se $g^{(n)}(a) \neq 0$ então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Com efeito, pela fórmula de Taylor, temos

$$f(a+h) = h^n \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n} \right]$$

e

$$g(a+h) = h^n \left[\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{s(h)}{h^n} \right]$$

onde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(h)}{h^n} = 0$. Portanto

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n}}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{s(h)}{h^n}} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

A fórmula de Taylor infinitesimal é assim chamada porque só afirma algo quando $h \rightarrow 0$. A seguir daremos outra versão dessa fórmula, onde é feita uma estimativa do valor $f(a+h)$ para h fixo. Ela é uma extensão do Teorema do Valor Médio, de Lagrange. Como naquele teorema, trata-se de um resultado global, onde se supõe que f seja n vezes derivável em todos os pontos do intervalo $(a, a+h)$.

Teorema 2. (**Fórmula de Taylor, com resto de Lagrange.**) Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável no intervalo aberto (a, b) , com $f^{(n-1)}$ contínua em $[a, b]$. Existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Pondo $b = a+h$, isto quer dizer que existe θ , com $0 < \theta < 1$, tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n.$$

Demonstração: Seja $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b - x) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b - x)^{n-1} - \frac{K}{n!}(b - x)^n,$$

onde a constante K é escolhida de modo que $\varphi(a) = 0$. Então φ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) , com $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Vê-se facilmente que

$$\varphi'(x) = \frac{K - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b - x)^{n-1}.$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Isto significa que $K = f^{(n)}(c)$. O Teorema 2 se obtém fazendo $x = a$ na definição de φ e lembrando que $\varphi(a) = 0$. \square

2. Funções convexas e côncavas

Se $a \neq b$, a reta que liga os pontos (a, A) e (b, B) no plano \mathbb{R}^2 é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$y = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a)$$

ou, equivalentemente,

$$y = B + \frac{B - A}{b - a}(x - b).$$

Quando se tem uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, e são dados $a, b \in X$, o segmento de reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, pertencentes ao gráfico de f , será chamado a secante ab .

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *convexa* quando seu gráfico se situa abaixo de qualquer de suas secantes. Em termos precisos, a convexidade de f se exprime assim:

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

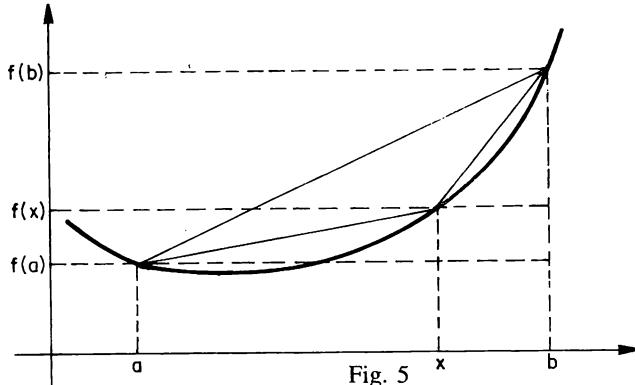
ou seja:

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow f(x) \leq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b).$$

Portanto $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I se, e somente se, valem as desigualdades fundamentais:

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}. \quad (*)$$

Qualquer uma das duas desigualdades acima implica a outra. Elas significam que, para $a < x < b$, a secante ax tem inclinação menor que a secante ab e esta, por sua vez, tem inclinação menor do que a secante xb .



Teorema 3. Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I então existem as derivadas laterais $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$ em todo ponto $c \in \text{int } I$.

Demonstração: Em virtude das observações feitas acima, a função $\varphi_c(x) = [f(x) - f(c)]/(x - c)$ é monótona não-decrescente no intervalo $J = I \cap (c, +\infty)$. Além disso, como $c \in \text{int } I$, existe $a \in I$, com $a < c$. Portanto $\varphi_c(x) \geq [f(a) - f(c)]/(a - c)$, para todo $x \in J$. Assim, a função $\varphi_c: J \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada inferiormente. Logo existe o limite à direita $f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \varphi_c(x)$. Raciocínio análogo para a derivada à esquerda. \square

Corolário . Uma função convexa $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todo ponto interior ao intervalo I .

Observe-se que $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ se $0 < x \leq 1$, é convexa porém descontínua no ponto 0.

Teorema 4. As seguintes afirmações sobre a função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, derivável no intervalo I , são equivalentes:

- (1) f é convexa.
- (2) A derivada $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente.
- (3) Para quaisquer $a, x \in I$ tem-se $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$, ou seja, o gráfico de f está situado acima de qualquer de suas tangentes.

Demonstração: Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$. Sejam $a < x < b$ em I . Nas desigualdades fundamentais (*) fazendo primeiro $x \rightarrow a+$, e depois $x \rightarrow b-$, vem $f'_+(a) \leq [f(b) - f(a)]/(b - a) \leq f'_-(b)$. Logo $a < b \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Suponhamos $a < x$ em I . Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (a, x)$ tal que $f(x) = f(a) + f'(z)(x - a)$. Como f' é monótona não-decrescente, temos $f'(z) \geq f'(a)$. Logo $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$. Raciocínio análogo no caso $x < a$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Sejam $a < c < b$ em I . Escrevamos $\alpha(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ e chamemos de $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \alpha(x)\}$ o semi-plano superior determinado pela reta $y = \alpha(x)$, tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Evidentemente, H é um subconjunto convexo do plano, isto é, o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de H está contido em H . A hipótese (3) assegura que os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertencem a H , logo o segmento de reta que une estes pontos está contido em H . Em particular, o ponto desse segmento que tem abcissa c pertence a H , isto é, tem ordenada $\geq \alpha(c) = f(c)$. Isto significa que $f(c) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c - a)$. Como $a < c < b$ são quaisquer em I , a função f é convexa. \square

Corolário 1. Todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto \leftarrow mínimo absoluto.

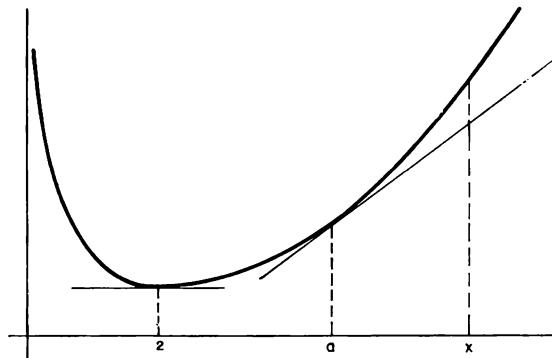


Fig. 6 – A função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{1}{x}$, é convexa. Seu ponto crítico $x = 2$ é um mínimo global. Seu gráfico situa-se acima de qualquer de suas tangentes.

Com efeito, dizer que $a \in I$ é ponto crítico da função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ significa afirmar que f possui derivada igual a zero no ponto a . Se f é convexa e $a \in I$

é ponto crítico de f então a condição (3) acima assegura $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in I$, logo a é ponto de mínimo absoluto para f . \square

Corolário 2. Uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes derivável no intervalo I , é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Com efeito, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ equivale a afirmar que $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente. \square

Uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *côncava* quando $-f$ é convexa, isto é, quando o gráfico de f está acima de qualquer de suas secantes. As desigualdades que caracterizam uma função côncava f são análogas a (*) acima, com \geq em lugar de \leq . Existem as derivadas laterais de uma função côncava em cada ponto interior ao seu domínio, logo a função é contínua nesse ponto. Uma função derivável é côncava se, e somente se, sua derivada é monótona não-crescente. Uma função duas vezes derivável é côncava se, e somente se, sua derivada segunda é ≤ 0 . Uma função derivável é côncava se, e somente se, seu gráfico está abaixo de qualquer de suas tangentes. Todo ponto crítico de uma função côncava é um ponto de máximo absoluto.

Existem ainda as noções de função *estritamente convexa* e *estritamente côncava*, onde se exige que

$$a < x < b \Rightarrow f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

no caso convexo, com $>$ em vez de $<$ no caso côncavo. Isto evita que o gráfico de f possua trechos retilíneos. Convexidade estrita implica que f' seja crescente mas não implica $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$. Entretanto, $f''(x) > 0$ para todo $x \in I \Rightarrow f'$ crescente $\Rightarrow f$ estritamente convexa.

Exemplo 4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$, é estritamente convexa mas $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$ anula-se no ponto $x = 0$. A função exponencial $f(x) = e^x$ é (estritamente) convexa, enquanto $\log x$ (para $x > 0$) é côncava. A função $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$, é côncava para $x < 0$ e convexa para $x > 0$.

Os pontos x do intervalo $[a, b]$ se escrevem, de modo único, sob a forma $x = (1-t)a + tb$, com $0 \leq t \leq 1$. Com efeito, esta igualdade equivale a $t = (x-a)/(b-a)$. No segmento de reta que liga o ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ no plano, o ponto de abcissa $x = (1-t)a + tb$ tem ordenada $(1-t)f(a) + tf(b)$.

Portanto, uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se

$$a, b \in I, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Equivalentemente, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para quaisquer $a_1, a_2 \in I$ e $t_1, t_2 \in [0, 1]$ com $t_1 + t_2 = 1$ tem-se

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2).$$

Sejam agora $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, $a_1, a_2, a_3 \in I$ e $t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$ com $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. Afirmamos que

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + t_3 f(a_3).$$

Com efeito, esta desigualdade é óbvia quando $t_1 = t_2 = 0$ e $t_3 = 1$. Se, entretanto, $t_1 + t_2 \neq 0$, podemos escrever

$$t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 = (t_1 + t_2) \left[\frac{t_1}{t_1 + t_2} a_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} a_2 \right] + t_3 a_3.$$

Como

$$(t_1 + t_2) + t_3 = 1 \quad \text{e} \quad \frac{t_1}{t_1 + t_2} + \frac{t_2}{t_1 + t_2} = 1,$$

a desigualdade alegada resulta de aplicar-se duas vezes o caso já conhecido, em que se têm duas parcelas.

Analogamente, se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa então, dados $a_1, \dots, a_n \in I$ e $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ com $t_1 + \dots + t_n = 1$, vale

$$f(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n) \leq t_1 f(a_1) + \dots + t_n f(a_n).$$

Este resultado, aplicado à função convexa $f(x) = \exp x$, com $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1/n$, $a_1 = \log x_1, \dots, a_n = \log x_n$ fornece, para quaisquer n números reais positivos x_1, \dots, x_n , a desigualdade

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} &= \sqrt[n]{e^{a_1} \cdot e^{a_2} \dots e^{a_n}} \\ &= \exp\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \\ &= f(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n) \\ &\leq t_1 f(a_1) + \dots + t_n f(a_n) \\ &= \frac{e^{a_1} + \dots + e^{a_n}}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \end{aligned}$$

ou seja:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Esta é a clássica desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica.

Mais geralmente, o mesmo método serve para demonstrar a desigualdade

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n,$$

válida para números não-negativos x_1, x_2, \dots, x_n , e t_1, t_2, \dots, t_n , com $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$. A desigualdade anterior, entre a média aritmética e a média geométrica, corresponde ao caso particular em que $t_1 = \cdots = t_n = 1/n$.

3. Aproximações sucessivas e método de Newton

Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se uma *contração* quando existe uma constante $k \in [0, 1)$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ para quaisquer $x, y \in X$. O exemplo mais comum de contração é uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, derivável no intervalo I , com $|f'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in I$. Evidentemente, toda contração é uma função uniformemente contínua.

Teorema 5. **(Ponto fixo das contrações.)** Se $X \subset \mathbb{R}$ é fechado então toda contração $f: X \rightarrow X$ possui um único ponto fixo. Mais precisamente, fixando qualquer $x_0 \in X$, a seqüência das aproximações sucessivas

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

converge para o único ponto $a \in X$ tal que $f(a) = a$.

Demonstração: Seja $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ para quaisquer $x, y \in X$, onde $0 \leq k < 1$. Então $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$ logo, pelo Teste de d'Alembert, a série $s = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ é absolutamente convergente. Ora, a soma dos n primeiros termos desta série é $s_n = x_n - x_0$. De $\lim s_n = s$ segue-se $\lim x_n = s + x_0 = a$. Tem-se $a \in X$ porque o conjunto X é fechado. Fazendo $n \rightarrow \infty$ na igualdade $x_{n+1} = f(x_n)$, como f é contínua, obtem-se $a = f(a)$. Finalmente, se $f(a) = a$ e $f(b) = b$ então $|b - a| = |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$, ou seja, $(1 - k)|b - a| \leq 0$. Como $1 - k > 0$, concluímos que $a = b$, logo o ponto fixo $a \in X$ é único. \square

Exemplo 5. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, não possui ponto fixo pois $f(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sua derivada $f'(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}$ cumpre $|f'(x)| < 1$, logo tem-se $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Este exemplo mostra que a condição $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ sozinha não basta para se obter um ponto fixo.

Exemplo 6. A função $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x/2$, é uma contração mas não possui ponto fixo $a \in [1, +\infty)$. Isto mostra que, no método das aproximações sucessivas, é essencial verificar que a condição $f(X) \subset X$ é satisfeita. Neste exemplo, não se tem $f([1, +\infty)) \subset [1, +\infty)$.

Exemplo 7. $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, dada por $f(x) = x/2$, tem derivada $f'(x) = 1/2$ mas não possui ponto fixo pois $(0, 1)$ não é fechado.

Um exemplo importante de aproximações sucessivas é o chamado *método de Newton* para a obtenção de valores aproximados de uma raiz da equação $f(x) = 0$. Neste método, tem-se uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 no intervalo I , com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, toma-se um valor inicial x_0 , põe-se

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ etc.}$$

Se a seqüência (x_n) convergir, seu limite a será uma raiz da equação $f(x) = 0$ pois, fazendo $n \rightarrow \infty$ na igualdade

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

resulta $a = a - f(a)/f'(a)$, donde $f(a) = 0$.

O método de Newton resulta da observação de que as raízes da equação $f(x) = 0$ são os pontos fixos da função $N = N_f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

O número $N(x) = x - f(x)/f'(x)$ é a abscissa do ponto em que a tangente ao gráfico de f no ponto x encontra o eixo horizontal. A idéia que motiva o método de Newton é que, se a tangente aproxima a curva então sua interseção com o eixo x aproxima o ponto de interseção da curva com esse eixo, isto é, o

ponto x em que $f(x) = 0$.

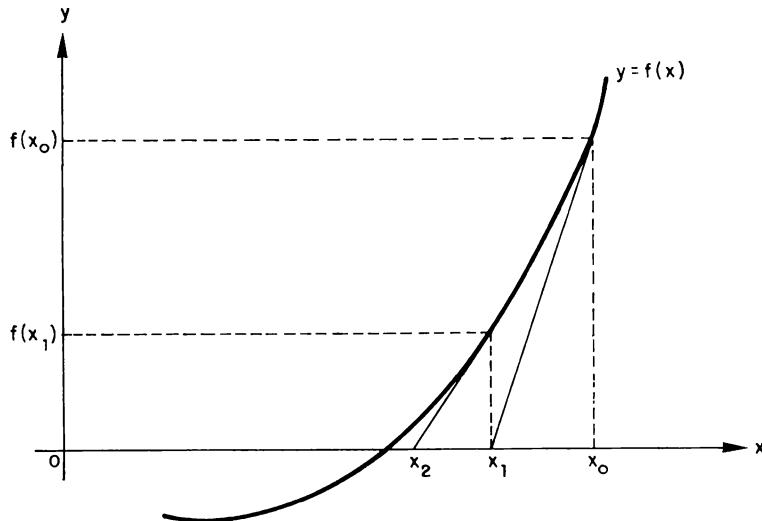


Fig. 7 – Como a inclinação da tangente é $f'(x_0) = f(x_0)/(x_0 - x_1)$, segue-se que $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

É fácil dar exemplos em que a seqüência (x_n) de aproximações de Newton não converge: basta tomar uma função, como $f(x) = e^x$, que não assuma o valor zero. E, mesmo que a equação $f(x) = 0$ tenha uma raiz real, a seqüência (x_n) pode divergir, caso x_0 seja tomado longe da raiz.

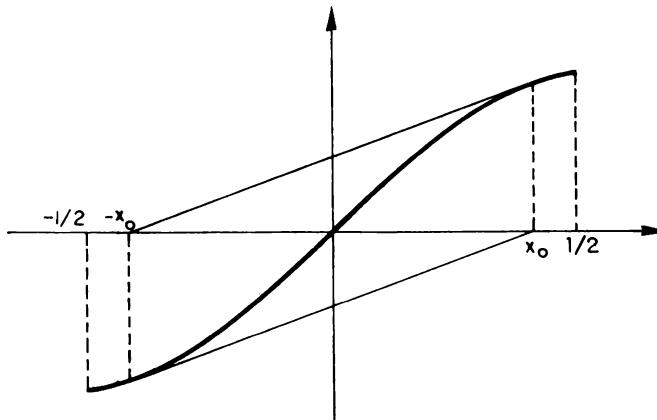


Fig. 8 – A função $f: [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x - x^3$, anula-se para $x = 0$. Valores aproximados desta raiz pelo método de Newton, começando com $x_0 = \sqrt{5}/5$, são sucessivamente $x_0, -x_0, x_0, -x_0$, etc. O método não converge.

Existem, evidentemente, infinitas funções cujos pontos fixos são as raízes da equação $f(x) = 0$. A importância de $N(x)$ reside na rapidez com que as aproximações sucessivas convergem para a raiz a da equação $f(x) = 0$ (quando convergem): cada $x_{n+1} = N(x_n)$ é um valor aproximado de a com cerca do dobro dos algarismos decimais exatos de x_n . (Veja Exemplo 9.)

Mostraremos agora que se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada segunda contínua $f'': I \rightarrow \mathbb{R}$, com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então cada ponto $a \in \text{int } I$ onde $f(a) = 0$ tem uma vizinhança $J = [a - \delta, a + \delta]$ tal que, começando com qualquer valor inicial $x_0 \in J$, a seqüência de pontos $x_{n+1} = N(x_n)$ converge para a .

Com efeito, a derivada $N'(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2$ se anula no ponto $x = a$. Como $N'(x)$ é contínua, se fixarmos arbitrariamente $k \in (0, 1)$ obteremos $\delta > 0$ tal que $J = [a - \delta, a + \delta] \subset I$ e $|N'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in J$. Afirmamos que $x \in J \Rightarrow N(x) \in J$. De fato, $x \in J \Rightarrow |N(x) - N(a)| \leq k|x - a| \leq |x - a| \leq \delta \Rightarrow N(x) \in J$. Portanto, $N: J \rightarrow J$ é uma contração. Logo a seqüência $x_1 = N(x_0), x_{n+1} = N(x_n)$ converge para o único ponto fixo $a \in J$ da contração N .

Exemplo 8. (*Cálculo aproximado de $\sqrt[n]{c}$.*) Dados $c > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, consideremos o intervalo $I = [\sqrt[n]{c}, +\infty)$ e a função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^n - c$. Como $f'(x) = nx^{n-1}$, a função de Newton $N: I \rightarrow \mathbb{R}$ assume a forma $N(x) = \frac{1}{n}[(n-1)x + c/x^{n-1}]$. Assim, para todo $x > 0$, $N(x)$ é a média aritmética dos n números $x, x, \dots, x, c/x^{n-1}$. Como a média geométrica desses números é $\sqrt[n]{c}$, concluímos que $N(x) \geq \sqrt[n]{c}$ para todo $x > 0$. Em particular, $x \in I \Rightarrow N(x) \in I$. Além disso, $N'(x) = \frac{n-1}{n}(1 - c/x^n)$, logo $0 \leq N'(x) \leq (n-1)/n$ para todo $x \in I$. Tudo isto mostra que $N: I \rightarrow I$ é uma contração. Portanto, tomando-se qualquer $x_0 > 0$, temos $N(x_0) = x_1 \in I$ e as aproximações sucessivas $x_{n+1} = N(x_n)$ convergem (rapidamente) para $\sqrt[n]{c}$.

Exemplo 9. (*O método de Newton converge quadraticamente.*) Considere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no intervalo I , com $|f''(x)| \leq A$ e $|f'(x)| \geq B$ para todo $x \in I$, onde A e B são constantes positivas. Vimos acima que, tomando a aproximação inicial x_0 suficientemente próxima de um ponto a onde $f(a) = 0$, a seqüência de aproximações de Newton $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ converge para a . Agora usaremos o Teorema 2 para estabelecer uma comparação entre os erros $|x_{n+1} - a|$ e $|x_n - a|$. Existe um número d entre

a e x_n , tal que

$$0 = f(a) = f(x_n) + f'(x_n)(a - x_n) + \frac{f''(d)}{2}(a - x_n)^2.$$

Então

$$f'(x_n)x_n - f(x_n) - f'(x_n)a = \frac{f''(d)}{2}(x_n - a)^2.$$

Dividindo por $f'(x_n)$ obtemos:

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - a = \frac{f''(d)}{2f'(x_n)}(x_n - a)^2$$

isto é,

$$x_{n+1} - a = \frac{f''(d)}{2f'(x_n)}(x_n - a)^2.$$

Daí vem imediatamente $|x_{n+1} - a| \leq \frac{A}{2B}|x_n - a|^2$. Quando $|x_n - a| < 1$, o quadrado $|x_n - a|^2$ é muito menor, o que exibe a rapidez de convergência no método de Newton. Por exemplo, se $f(x) = x^n - c$ temos

$$\frac{f''(d)}{2f'(x_k)} = (n-1)\frac{d^{n-2}}{2x_k^{n-1}} \leq \frac{n-1}{2x_k}.$$

Portanto, para calcular $\sqrt[n]{c}$, onde $c > 1$, podemos começar com $x_0 > 1$ e teremos sempre $|x_{k+1} - \sqrt[n]{c}| \leq \frac{n-1}{2}|x_k - \sqrt[n]{c}|^2$. Para $n \leq 3$ vem $|x_{k+1} - \sqrt[n]{c}| \leq |x_k - \sqrt[n]{c}|^2$. Logo, se x_k tem p algarismos decimais exatos, x_{k+1} tem $2p$.

4. Exercícios

Seção 1: Fórmula de Taylor

1. Use a igualdade $1/(1-x) = 1 + x + \dots + x^n + x^{n+1}/(1-x)$ e a fórmula de Taylor infinitesimal para calcular as derivadas sucessivas, no ponto $x = 0$, da função $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/(1-x)$.
2. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5/(1+x^6)$. Calcule as derivadas de ordem 2001 e 2003 de f no ponto $x = 0$.
3. Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ no intervalo I . Suponha que existe $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que, para $x_0, x \in I$ quaisquer vale $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.
4. Dê uma demonstração de que $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ convexa usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

- Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no intervalo I . Dado $a \in I$, defina a função $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$ se $x \neq a$ e $\varphi(a) = f'(a)$. Prove que φ é de classe C^1 . Mostre que $f \in C^3 \Rightarrow \varphi \in C^2$.
- Seja $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau n . Prove que para $a, x \in \mathbb{R}$ quaisquer tem-se

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

- Sejam $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes deriváveis no ponto $a \in \text{int } I$. Se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in I$, prove que $f''(a) \geq g''(a)$.

Seção 2: Funções côncavas e convexas

- Sejam $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ funções convexas, com $f(I) \subset J$, e g monótona não-decrescente. Prove que $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa. Dê outra demonstração supondo f e g duas vezes deriváveis. Por meio de um exemplo, mostre que se g não é monótona não-decrescente o resultado pode não ser válido.
- Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ possui um ponto crítico não degenerado $c \in \text{int } I$ no qual f'' é contínua, prove que existe $\delta > 0$ tal que f é convexa ou côncava no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$.
- Examine a convexidade da soma e do produto de duas funções convexas.
- Uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo I , chama-se *quase-convexa* (respectivamente, *quase-côncava*) quando, para todo $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in I; f(x) \leq c\}$ (respectivamente, $\{x \in I; f(x) \geq c\}$) é vazio ou é um intervalo. Prove que toda função convexa (respectivamente, côncava) é quase-convexa(respectivamente, quase-côncava) e que toda função monótona é ao mesmo tempo quase-convexa e quase-côncava.
- Prove que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é quase-convexa se, e somente se, para $x, y \in I$ e $t \in [0, 1]$ quaisquer, vale $f((1 - t)x + ty) \leq \max\{f(x), f(y)\}$. Enuncie o resultado análogo para f quase-côncava.
- Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua quase-convexa, cujo valor mínimo é atingido no ponto $c \in [a, b]$. Prove que se $c = a$ então f é monótona não-decrescente, se $c = b$, f é monótona não-crescente e, finalmente, se $a < c < b$ então f é monótona não-crescente em $[a, c]$ e não-decrescente em $[c, b]$. Enuncie resultado análogo para f quase-côncava. Conclua daí que a função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é quase-convexa se, e somente se, existe

$c \in [a, b]$ tal que f é monótona não-crescente no intervalo $[a, c]$ e monótona não-decrescente em $[c, b]$.

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Suponha que, para todo $x \in I$, a seqüência de números $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converja. Prove que a função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ é convexa. Prove resultado análogo para funções quase-convexas, côncavas e, quase-côncavas.
8. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua convexa tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Prove que existe um único ponto $c \in (a, b)$ com $f(c) = 0$.

Seção 3: Aproximações sucessivas e método de Newton

1. Sejam $I = [a - \delta, a + \delta]$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$, onde $0 \leq k < 1$. Se $|f(a) - a| \leq (1 - k)\delta$, prove que existe um único $x \in I$ com $f(x) = x$.
2. Defina $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ pondo $f(x) = 2^{-x/2}$. Mostre que f é uma contração e que, se a é seu ponto fixo, $-a$ é a raiz negativa da equação $x^2 = 2^x$. Use o método das aproximações sucessivas e uma calculadora para obter o valor de a com 8 algarismos decimais exatos.
3. Seja $I = [a - \delta, a + \delta]$. Se a função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 , com $f'(x) \neq 0$, $|f(x)f''(x)/f'(x)^2| \leq k < 1$ para todo $x \in I$ e $|f(a)/f'(a)| < (1 - k)\delta$, prove que, seja qual for o valor inicial $x_0 \in I$, o método de Newton converge para a única raiz $x \in I$ da equação $f(x) = 0$.
4. Dado $a > 1$, considere a função $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/(a+x)$. Fixado qualquer $x_0 > 0$, prove que a seqüência definida induutivamente por $x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n)$, converge para a raiz positiva c da equação $x^2 + ax - 1 = 0$. (Cfr. Exercício 3.6, Capítulo 3.)
5. Prove que 1,0754 é um valor aproximado, com 4 algarismos decimais exatos, da raiz positiva da equação $x^6 + 6x - 8 = 0$.
6. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, duas vezes derivável. Se $f(a) < 0 < f(b)$ prove que, começando com um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) > 0$, o método de Newton converge sempre para a única raiz $x \in [a, b]$ da equação $f(x) = 0$.
7. Prove que as aproximações de $\sqrt[n]{c}$ dadas pelo método de Newton formam, a partir do segundo termo, uma seqüência decrescente.

A Integral de Riemann

As noções de derivada e integral constituem o par de conceitos mais importantes da Análise. Enquanto a derivada corresponde à noção geométrica de tangente e à idéia física de velocidade, a integral está associada à noção geométrica de área e à idéia física de trabalho. É um fato notável e de suma importância que essas duas noções, aparentemente tão diversas, estejam intimamente ligadas.

1. Revisão sobre sup e inf

Demonstraremos aqui alguns resultados elementares sobre supremos e ínfimos de conjuntos de números reais, para uso imediato.

Dada uma função limitada $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, lembremos que $\sup f = \sup f(X) = \sup\{f(x); x \in X\}$ e $\inf f = \inf f(X) = \inf\{f(x); x \in X\}$. Todos os conjuntos a seguir mencionados são não-vazios.

Lema 1. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \leq y$. Então $\sup A \leq \inf B$. A fim de ser $\sup A = \inf B$ é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \varepsilon$.*

Demonstração: Todo $y \in B$ é cota superior de A , logo $\sup A \leq y$. Isto mostra que $\sup A$ é cota inferior de B , portanto $\sup A \leq \inf B$. Se valer a desigualdade estrita $\sup A < \inf B$ então $\varepsilon = \inf B - \sup A > 0$ e $y - x \geq \varepsilon$ para quaisquer $x \in A$, $y \in B$. Reciprocamente, se $\sup A = \inf B$ então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, $\sup A - \varepsilon/2$ não é cota superior de A e $\inf B + \varepsilon/2$ não é cota inferior de B , logo existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $\sup A - \varepsilon/2 < x \leq \sup A = \inf B \leq y < \inf B + \varepsilon/2$. Segue-se que $y - x < \varepsilon$. \square

Lema 2. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados e $c \in \mathbb{R}$. São também limitados os conjuntos $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$ e $c.A = \{cx; x \in A\}$. Além disso, tem-se $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ e $\sup(c.A) = c \cdot \sup A$, $\inf(c.A) = c \cdot \inf A$, caso seja $c \geq 0$. Se $c < 0$ então $\sup(c.A) = c \cdot \inf A$ e $\inf(c.A) = c \cdot \sup A$.

Demonstração: Pondo $a = \sup A$ e $b = \sup B$, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ tem-se $x \leq a$, $y \leq b$, logo $x + y \leq a + b$. Portanto, $a + b$ é cota superior de $A + B$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $a - \varepsilon/2 < x$ e $b - \varepsilon/2 < y$, donde $a + b - \varepsilon < x + y$. Isto mostra que $a + b$ é a menor cota superior de $A + B$, ou seja, que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. A igualdade $\sup(c.A) = c \cdot \sup A$ é óbvia se $c = 0$. Se $c > 0$, dado qualquer $x \in A$ tem-se $x \leq a$, logo $cx \leq ca$. Portanto ca é cota superior do conjunto $c.A$. Além disso, dado qualquer número d menor do que ca , temos $d/c < a$, logo existe $x \in A$ tal que $d/c < x$. Segue-se que $d < cx$. Isto mostra que ca é a menor cota superior de $c.A$, ou seja, que $\sup(c.A) = c \cdot \sup A$. Os casos restantes enunciados no lema são provados de modo análogo. \square

Corolário. Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas. Para todo $c \in \mathbb{R}$ são limitadas as funções $f + g$, $cf: X \rightarrow \mathbb{R}$. Tem-se além disso, $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$, $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$, $\sup(cf) = c \cdot \sup f$, e $\inf(cf) = c \cdot \inf f$ quando $c \geq 0$. Caso $c < 0$, tem-se $\sup(cf) = c \cdot \inf f$ e $\inf(cf) = c \cdot \sup f$.

Com efeito, sejam $A = f(X)$, $B = g(X)$, $C = (f + g)(X) = \{f(x) + g(x); x \in X\}$. Evidentemente $C \subset A + B$, logo $\sup(f + g) = \sup C \leq \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \sup f + \sup g$. Além disso, $\sup(cf) = \sup\{c.f(x); x \in X\} = \sup(cA) = c \cdot \sup A$, quando $c \geq 0$. Os demais casos enunciados no corolário se provam de modo análogo. \square

Observação. Pode-se ter efetivamente $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$. Basta tomar $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ e $g(x) = -x$.

Lema 3. Dada $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, sejam $m = \inf f$, $M = \sup f$ e $\omega = M - m$. Então $\omega = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$.

Demonstração: Dados $x, y \in X$ arbitrários, para fixar idéias seja $f(x) \geq f(y)$. Então $m \leq f(y) \leq f(x) \leq M$, donde $|f(x) - f(y)| \leq M -$

$m = \omega$. Por outro lado, para todo $\varepsilon > 0$ dado podemos achar $x, y \in X$ tais que $f(x) > M - \varepsilon/2$ e $f(y) < m + \varepsilon/2$. Então

$$|f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y) > M - m - \varepsilon = \omega - \varepsilon.$$

Assim, ω é a menor das cotas superiores do conjunto $\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$, o que prova o lema. \square

Lema 4. Sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ conjuntos limitados de números reais. Se, para cada $a \in A$ e cada $b \in B$ existem $a' \in A'$ e $b' \in B'$ tais que $a \leq a'$ e $b' \leq b$, então $\sup A' = \sup A$ e $\inf B' = \inf B$.

Demonstração: Evidentemente, $\sup A$ é uma cota superior de A' . Além disso, se $c < \sup A$ existe $a \in A$ com $c < a$, logo existe $a' \in A'$ com $c < a \leq a'$, portanto c não é cota superior de A' . Assim, $\sup A$ é a menor cota superior de A' , isto é, $\sup A = \sup A'$. Um raciocínio análogo demonstra o resultado para $\inf B$ e $\inf B'$. \square

2. Integral de Riemann

Uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$. A notação será sempre usada de modo que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. O intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, de *comprimento* $t_i - t_{i-1}$, será chamado o *i-ésimo intervalo* da partição P . Evidentemente, $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = b - a$.

Sejam P e Q partições do intervalo $[a, b]$. Diz-se que Q *refina* P quando $P \subset Q$. A maneira mais simples de refinar uma partição é acrescentar-lhe um único ponto.

Dada uma função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, usaremos as notações

$$m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}$$

e

$$M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}.$$

Em particular, temos $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Se $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ é uma partição de $[a, b]$, as notações $m_i = \inf\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$, $M_i = \sup\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ e $\omega_i = M_i - m_i$ indicarão o ínfimo, o supremo e a *oscilação* de $f(x)$ no i-ésimo intervalo de P . Quando f é contínua, m_i e M_i são valores efetivamente assumidos por f em $[t_{i-1}, t_i]$. Em particular, neste caso existem $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que $\omega_i = |f(y_i) - f(x_i)|$.

A soma inferior de f relativamente à partição P é o número

$$s(f; P) = m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}).$$

A soma superior de f relativamente à partição P é, por definição,

$$S(f; P) = M_1(t_1 - t_0) + \cdots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente, $m(b - a) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq M(b - a)$ seja qual for a partição P . Além disso, $S(f; P) - s(f; P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1})$.

Quando f estiver clara no contexto, pode-se escrever simplesmente $s(P)$ e $S(P)$ em vez de $s(f; P)$ e $S(f; P)$ respectivamente.

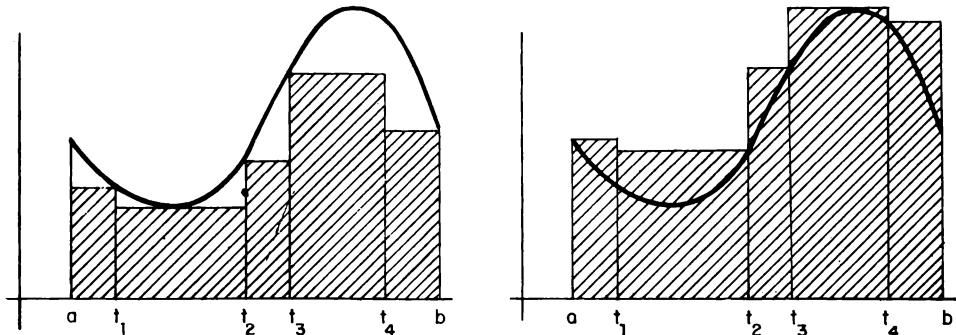


Fig. 9 – A soma inferior e a soma superior.

No caso em que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, os números $s(f; P)$ e $S(f; P)$ são valores aproximados, respectivamente por falta e por excesso, da área da região limitada pelo gráfico de f , pelo intervalo $[a, b]$ do eixo das abscissas e pelas verticais levantadas nos pontos a e b desse eixo. Quando $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, essas somas são valores aproximados de tal área, com o sinal trocado.

A integral inferior e a integral superior da função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas, respectivamente, por

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_P s(f; P), \quad \underline{\int}_a^b f(x) dx = \inf_P S(f; P),$$

o sup e o inf sendo tomados relativamente a todas as partições P do intervalo $[a, b]$.

Teorema 1. Quando se refina uma partição, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta. Ou seja: $P \subset Q \Rightarrow s(f; P) \leq s(f; Q)$ e $S(f; Q) \leq S(f; P)$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que a partição $Q = P \cup \{r\}$ resulte de P pelo acréscimo de um único ponto r , digamos com $t_{j-1} < r < t_j$. Sejam m' e m'' respectivamente os ínfimos de f nos intervalos $[t_{j-1}, r]$ e $[r, t_j]$. Evidentemente, $m_j \leq m'$, $m_j \leq m''$ e $t_j - t_{j-1} = (t_j - r) + (r - t_{j-1})$. Portanto

$$\begin{aligned} s(f; Q) - s(f; P) &= m''(t_j - r) + m'(r - t_{j-1}) - m_j(t_j - t_{j-1}) \\ &= (m'' - m_j)(t_j - r) + (m' - m_j)(r - t_{j-1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Para obter o resultado geral, onde Q resulta de P pelo acréscimo de k pontos, usa-se k vezes o que acabamos de provar. Analogamente, $P \subset Q \Rightarrow S(f; Q) \leq S(f; P)$. \square

Corolário 1. Para quaisquer partições P, Q do intervalo $[a, b]$ e qualquer função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se $s(f; P) \leq S(f; Q)$.

Com efeito, a partição $P \cup Q$ refina simultaneamente P e Q , logo $s(f; P) \leq s(f; P \cup Q) \leq S(f; P \cup Q) \leq S(f; Q)$. \square

Corolário 2. Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ então

$$m(b-a) \leq \underline{\int}_a^b f(x)dx \leq \bar{\int}_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Com efeito, as desigualdades externas são óbvias e a do meio resulta do Corolário 1 e do Lema 1. \square

Corolário 3. Seja P_0 uma partição de $[a, b]$. Se considerarmos as somas $s(f; P)$ e $S(f; P)$ apenas relativas às partições P que refinam P_0 , obteremos os mesmos valores para $\underline{\int}_a^b f(x)dx$ e $\bar{\int}_a^b f(x)dx$.

Com efeito, basta combinar o Teorema 1 e o Lema 4. \square

Uma função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *integrável* quando sua integral inferior e sua integral superior são iguais. Esse valor comum chama-se a *integral* (de Riemann) de f e é indicado por $\int_a^b f(x)dx$.

No símbolo $\int_a^b f(x)dx$, x é o que se chama uma “variável muda”, isto é, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt$ etc.

Às vezes prefere-se a notação mais simples $\int_a^b f$. A justificativa para a notação mais complicada será vista no Teorema 2, Capítulo 11.

Quando f é integrável, sua integral $\int_a^b f(x)dx$ é o número real cujas aproximações por falta são as somas inferiores $s(f; P)$ e cujas aproximações por excesso são as somas superiores $S(f; P)$. O Teorema 1 diz que essas aproximações melhoraram quando se refina a partição P . Geometricamente, quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, a existência de $\int_a^b f(x)dx$ significa que a região limitada pelo gráfico de f , pelo segmento $[a, b]$ do eixo das abscissas e pelas verticais levantadas pelos pontos a e b é mensurável (isto é, possui área) e o valor da integral é, por definição, a área dessa região. No caso geral, tem-se a área externa $\bar{\int}_a^b f(x)dx$ e a área interna $\underline{\int}_a^b f(x)dx$, que podem ser diferentes, como veremos agora.

Exemplo 1. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se x é racional e $f(x) = 1$ quando x é irracional. Dada uma partição arbitrária P , como cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ contém números racionais e irracionais, temos $m_i = 0$ e $M_i = 1$, logo $s(f; P) = 0$ e $S(f; P) = b - a$. Assim, f não é integrável, pois $\int_a^b f(x)dx = 0$ e $\bar{\int}_a^b f(x)dx = b - a$.

Exemplo 2. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ constante, $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$. Então, seja qual for a partição P , temos $m_i = M_i = c$ em todos os intervalos, logo $s(f; P) = S(f; P) = c(b - a)$. Assim f é integrável, com $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int}_a^b f(x)dx = \bar{\int}_a^b f(x)dx = c(b - a)$.

Teorema 2. (**Condição imediata de integrabilidade.**) Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é integrável.
- (2) Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições P, Q de $[a, b]$ tais que $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$.
- (3) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal

que $S(f; P) - s(f; P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$.

Demonstração: Sejam A o conjunto das somas inferiores e B o conjunto das somas superiores de f . Pelo Corolário 1 do Teorema 1, tem-se $s \leq S$ para toda $s \in A$ e toda $S \in B$. Supondo (1), vale $\sup A = \inf B$. Logo, pelo Lema 1, podemos concluir que (1) \Rightarrow (2). Para provar que (2) \Rightarrow (3) basta observar que se $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$ então, como a partição $P_0 = P \cup Q$ refina ambas P e Q , segue-se do Teorema 1 que $s(f; P) \leq s(f; P_0) \leq S(f; P_0) \leq S(f; Q)$, donde se conclui que $S(f; P_0) - s(f; P_0) < \varepsilon$. Finalmente, (3) \Rightarrow (1) pelo Lema 1. \square

Exemplo 3. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ quando $a < x \leq b$ e $f(a) = A$. Afirmamos que f é integrável, com $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$. Para fixar idéias, suponhamos $c < A$. Então, dada uma partição qualquer $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ temos $m_1 = c$, $M_1 = A$ e $m_i = M_i = c$ para $1 < i \leq n$. Portanto $S(f; P) - s(f; P) = (A - c)(t_1 - t_0)$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, tomamos uma partição P com $t_1 - t_0 < \varepsilon/(A - c)$ e obtemos $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$. Logo f é integrável. Além disso, como $s(f; P) = c(b-a)$ para toda partição P , temos

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Mas, sendo f integrável, resulta que

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b f(x)dx} = c(b-a).$$

Evidentemente, um resultado análogo vale quando $f(x) = c$ para $x \in [a, b]$, ou quando $f(x) = c$ para todo $x \in (a, b)$.

3. Propriedades da integral

Teorema 3. Seja $a < c < b$. A função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, suas restrições $f|[a, c]$ e $f|[c, b]$ são integráveis. No caso afirmativo, tem-se $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Demonstração: Sejam A e B respectivamente os conjuntos das somas inferiores de $f|[a, c]$ e $f|[c, b]$. Vê-se facilmente que $A + B$ é o conjunto das somas inferiores de f relativamente às partições de $[a, b]$ que contêm o ponto c . Pelo Corolário 3 do Teorema 1, ao calcular a integral inferior de f , basta considerar as partições desse tipo, pois elas são as que refinam $P_0 = \{a, c, b\}$.

Pelo Lema 2,

$$\int_a^b f(x)dx = \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Analogamente se mostra que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Logo

$$\int_a^b f - \int_a^b f = (\int_a^c f - \int_a^c f) + (\int_c^b f - \int_c^b f).$$

Como as duas parcelas dentro dos parênteses são ≥ 0 , sua soma é zero se, e somente se, elas são ambas nulas. Assim, f é integrável se, e somente se, suas restrições $f|[a, c]$ e $f|[c, b]$ o são. No caso afirmativo, vale a igualdade $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. \square

Exemplo 4. Diz-se que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função-escada* quando existe uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ e números reais c_1, \dots, c_n tais que $f(x) = c_i$ quando $t_{i-1} < x < t_i$. (Note-se que nada se diz sobre os valores $f(t_i)$.) Segue-se do Teorema 3 e do Exemplo 3 que toda função escada é integrável e $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i(t_i - t_{i-1})$.

Convenção. A igualdade $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ faz sentido apenas quando $a < c < b$. A fim de torná-la verdadeira sejam quais forem $a, b, c \in \mathbb{R}$, faremos duas convenções, que serão adotadas doravante. Primeira: $\int_a^a f(x)dx = 0$. Segunda: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Aceitas estas convenções, vale para toda função integrável f a igualdade acima. Para verificará-la, há seis possibilidades a considerar: $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ e $c \leq b \leq a$. Em cada caso, basta admitir a integrabilidade de f no intervalo maior.

Teorema 4. Sejam $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis. Então:

(1) A soma $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- (2) O produto $f \cdot g$ é integrável. Se $c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$.
- (3) Se $0 < k \leq |g(x)|$ para todo $x \in [a, b]$ então o quociente f/g é integrável.
- (4) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- (5) $|f|$ é integrável e $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Demonstração: Dada uma partição arbitrária P de $[a, b]$, se indicarmos com m'_i , m''_i e m_i respectivamente os ínfimos de f , g e $f + g$ no i -ésimo intervalo de P , teremos $m'_i + m''_i \leq m_i$, pelo Corolário do Lema 2, logo $s(f; P) + s(g; P) \leq s(f + g; P) \leq \underline{\int}_a^b (f + g)$ para toda partição P . Se tomarmos duas partições P e Q teremos ainda

$$s(f; P) + s(g; Q) \leq s(f; P \cup Q) + s(g; P \cup Q) \leq \underline{\int}_a^b (f + g).$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \underline{\int}_a^b f + \underline{\int}_a^b g &= \sup_P s(f; P) + \sup_Q s(g; Q) \\ &= \sup_{P, Q} [s(f; P) + s(g; Q)] \leq \underline{\int}_a^b (f + g). \end{aligned}$$

Isto prova a primeira das desigualdades abaixo. A terceira se demonstra de modo análogo e a segunda é óbvia:

$$\underline{\int}_a^b f + \underline{\int}_a^b g \leq \underline{\int}_a^b (f + g) \leq \bar{\int}_a^b (f + g) \leq \bar{\int}_a^b f + \bar{\int}_a^b g.$$

Quando f e g são integráveis, as três desigualdades se reduzem a igualdades, o que prova (1).

(2) Seja K tal que $|f(x)| \leq K$ e $|g(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Dada uma partição P , sejam ω'_i , ω''_i e ω_i respectivamente as oscilações de f , g e $f \cdot g$ no i -ésimo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Para quaisquer $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ temos:

$$\begin{aligned} |f(y) \cdot g(y) - f(x) \cdot g(x)| &= |(f(y) - f(x))g(y) + f(x)(g(y) - g(x))| \\ &\leq |f(y) - f(x)||g(y)| + |f(x)||g(y) - g(x)| \\ &\leq K(\omega'_i + \omega''_i). \end{aligned}$$

Daí $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) \leq K \cdot [\sum \omega'_i(t_i - t_{i-1}) + \sum \omega''_i(t_i - t_{i-1})]$. A integrabilidade de $f \cdot g$ segue-se então da integrabilidade de f e g , pelo Teorema 2. Quanto a $c f$, sua integrabilidade resulta do que acabamos de provar. Além disso, se $c \geq 0$, temos $s(cf; P) = c \cdot s(f; P)$ para toda partição P , donde, pelo Lema 2,

$$\int_a^b cf = \underline{\int}_a^b cf = c \cdot \underline{\int}_a^b f = c \cdot \int_a^b f.$$

Caso $c < 0$, temos $s(cf; P) = c \cdot S(f; P)$, logo $\int_a^b cf = \underline{\int}_a^b cf = c \cdot \bar{f}^b_a f = c \cdot \int_a^b f$.

(3) Como $f/g = f \cdot (1/g)$, basta provar que $1/g$ é integrável se g é integrável e $0 < k \leq |g(x)|$ para todo $x \in [a, b]$. Indiquemos com ω_i e ω'_i respectivamente as oscilações de g e $1/g$ no i -ésimo intervalo de uma partição P . Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar P de modo que $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \cdot k^2$. Para quaisquer x, y no i -ésimo intervalo de P tem-se

$$\left| \frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)} \right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(y)g(x)|} \leq \frac{\omega_i}{k^2},$$

portanto $\omega'_i \leq \omega_i/k^2$. Segue-se que $\sum \omega'_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ logo $1/g$ é integrável.

(4) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ então $s(f; P) \leq s(g; P)$ e $S(f; P) \leq S(g; P)$ para toda partição P , donde $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

(5) A desigualdade evidente $||f(y)| - |f(x)|| \leq |f(y) - f(x)|$ mostra que a oscilação de $|f|$ em qualquer conjunto não supera a de f . Logo, f integrável $\Rightarrow |f|$ integrável. Além disso, como $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a, b]$, resulta de (4) que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

ou seja, $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. □

Corolário. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$ então $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq K(b - a)$.

Observação. Se uma função integrável $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Isto resulta de (4) acima.

Mas é possível ter $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, com $\int_a^b f(x)dx = 0$ sem que f seja identicamente nula. Basta tomar $f(x) = 1$ num conjunto finito de pontos em $[a, b]$ e $f(x) = 0$ nos pontos de $[a, b]$ fora desse conjunto finito. Pelo Exemplo

4, f é integrável e sua integral é zero. Entretanto, se f é contínua e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx = 0$ implica f identicamente nula. Com efeito, se existisse algum ponto $x_0 \in [a, b]$ onde $f(x_0) = c > 0$, existiria um intervalo $[\alpha, \beta]$, com $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tal que $f(x) > c/2$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$. Então, como $f(x) \geq 0$, teríamos $\int_a^b f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx > \frac{c}{2}(\beta - \alpha) > 0$, uma contradição.

4. Condições suficientes de integrabilidade

Teorema 5. Toda função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade uniforme de f no compacto $[a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a, b]$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/(b - a)$. Seja P uma partição de $[a, b]$ cujos intervalos têm todos comprimento $< \delta$. Em todo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P existem x_i, y_i tais que $m_i = f(x_i)$ e $M_i = f(y_i)$, donde $\omega_i = f(y_i) - f(x_i) < \varepsilon/(b - a)$. Consequentemente $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. Pelo Teorema 2, f é integrável. \square

Teorema 6. Toda função monótona $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.

Demonstração: Para fixar idéias, seja f não-decrescente. Dado $\varepsilon > 0$, seja $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$ cujos intervalos têm todos comprimento $< \varepsilon/[f(b) - f(a)]$. Para cada $i = 1, \dots, n$ temos $\omega_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$ portanto $\sum \omega_i = f(b) - f(a)$ e

$$\begin{aligned}\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum \omega_i \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum [f(t_i) - f(t_{i-1})] = \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo f é integrável. \square

As considerações a seguir são um preparativo para o Teorema 7, que engloba os Teoremas 5 e 6 como casos particulares.

Se $a < b$, indicaremos com $|I| = b - a$ o *comprimento* do intervalo (fechado, aberto ou semi-aberto) I cujos extremos são a e b . Diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *medida nula* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura finita ou infinita enumerável $X \subset \bigcup I_k$ de X por intervalos abertos I_k cuja soma dos comprimentos é $\sum |I_k| < \varepsilon$.

Exemplo 5. Todo conjunto enumerável $X = \{x_1, \dots, x_k, \dots\}$ tem medida nula. Com efeito, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, seja I_k o intervalo aberto de centro x_k e comprimento $\varepsilon/2^{k+1}$. Então $X \subset \bigcup I_k$ e $\sum |I_k| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Em particular, o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais tem medida nula.

Teorema 7. Se o conjunto D dos pontos de descontinuidade de uma função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem medida nula então f é integrável.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existem intervalos abertos I_1, \dots, I_k, \dots tais que $D \subset \bigcup I_k$ e $\sum |I_k| < \varepsilon/2K$, onde $K = M - m$ é a oscilação de f em $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b] - D$, seja J_x um intervalo aberto de centro x no qual a oscilação de f é menor do que $\varepsilon/2(b - a)$. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, a cobertura aberta $[a, b] \subset (\bigcup_k I_k) \cup (\bigcup_x J_x)$ possui uma subcobertura finita $[a, b] \subset I_1 \cup \dots \cup I_m \cup J_{x_1} \cup \dots \cup J_{x_n}$. Seja P a partição de $[a, b]$ formada pelos pontos a, b e os extremos desses $m + n$ intervalos que pertençam a $[a, b]$. Indiquemos com $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$ os intervalos de P que estão contidos em algum \bar{I}_k e com $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ os demais intervalos de P . Então $\sum(t_\alpha - t_{\alpha-1}) < \varepsilon/2K$ e a oscilação de f em cada intervalo $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ é $\omega_\beta < \varepsilon/2(b - a)$. Logo

$$\begin{aligned} S(f; P) - s(f; P) &= \sum \omega_\alpha(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \omega_\beta(t_\beta - t_{\beta-1}) \\ &< \sum K(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \frac{\varepsilon(t_\beta - t_{\beta-1})}{2(b - a)} \\ &< \frac{K\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon.(b - a)}{2(b - a)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo f é integrável. □

Observação. Pode-se demonstrar (cfr. “Curso de Análise”, vol. 1, pag. 273) que vale a recíproca do Teorema 7, ou seja, que o conjunto de pontos de descontinuidade de toda função integrável tem medida nula.

Exemplo 6. O conjunto de Cantor K (seção 5 do Capítulo 5), embora não-enumerável, tem medida nula. Com efeito, se pararmos na n -ésima etapa de sua construção, veremos que o conjunto de Cantor está contido na reunião de 2^n intervalos, cada um tendo comprimento $1/3^n$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $(2/3)^n < \varepsilon$, e concluirmos que a medida de K é zero. Podemos considerar a função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida pondo-se $f(x) = 0$ se

$x \in K$ e $f(x) = 1$ se $x \notin K$. Como $[0, 1] - K$ é aberto, a função f é localmente constante, e portanto contínua, nos pontos $x \notin K$. Como K não possui pontos interiores, f é descontínua em todos os pontos de K . Pelo Teorema 7, f é integrável. Dada qualquer partição P de $[0, 1]$ todos os intervalos de P contêm pontos que não pertencem a K , pois $\text{int } K = \emptyset$. Assim, $M_i = 1$ e $S(f; P) = 1$ para toda partição P . Segue-se que $\int_0^1 f(x)dx = \bar{\int}_0^1 f(x)dx = 1$.

Exemplo 7. Se $a < b$, o intervalo $[a, b]$ não tem medida nula. Para provar isto, lembremos que a *função característica* de um conjunto $X \subset [c, d]$ é a função $\xi_X: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi_X(x) = 1$ se $x \in X$ e $\xi_X(x) = 0$ se $x \notin X$. É fácil provar que se $X \subset X_1 \cup \dots \cup X_k \subset [c, d]$ então $\xi_X \leq \sum_{i=1}^k \xi_{X_i}$. Suponhamos, em seguida que $[a, b] \subset I_1 \cup \dots \cup I_k \subset [c, d]$, onde c é o menor e d o maior dos extremos dos intervalos I_j . Por simplicidade, escrevamos $\xi = \xi_{[a, b]}$ e $\xi_j = \xi_{I_j}$. Então $\xi \leq \sum_{j=1}^k \xi_j: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Logo $b - a = \int_c^d \xi(x)dx \leq \sum_{j=1}^k \int_c^d \xi_j(x)dx = \sum_{j=1}^k |I_j|$. Assim, a soma dos comprimentos de qualquer coleção finita de intervalos abertos cuja reunião contém $[a, b]$ é, pelo menos, igual a $b - a$. Daí resulta que $[a, b]$ não tem medida nula. Com efeito, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, de $[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ resulta $[a, b] \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

5. Exercícios

Seção 2: Integral de Riemann

- Defina $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/2^n$ se $1/2^{n+1} < x \leq 1/2^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Prove que f é integrável e calcule $\int_0^1 f(x)dx$.
- Seja $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Se f é uma função ímpar, prove que $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$. Se, porém, f é par, prove que $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.
- Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida pondo $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = 1/q$ se $x = p/q$ é uma fração irredutível e $q > 0$. (Ponha $f(0) = 1$ caso $0 \in [a, b]$.) Prove que f é contínua apenas nos pontos irracionais de $[a, b]$, que é integrável e que $\int_a^b f(x)dx = 0$.
- Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se f é contínua no ponto $c \in [a, b]$ e $f(c) > 0$, prove que $\int_a^b f(x)dx > 0$.
- Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida pondo $f(x) = x$ quando x é racional e $f(x) =$

$x + 1$ quando x é irracional. Calcule as integrais (inferior e superior) de f . Usando uma função integrável $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ em vez de x , defina agora $\varphi(x) = g(x)$ se x é racional e $\varphi(x) = g(x) + 1$ para x irracional. Calcule as integrais (inferior e superior) de φ em termos da integral de g .

Seção 3: Propriedades da integral

1. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Prove que a função $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é lipschitziana.
2. Prove que se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis então são também integráveis as funções $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Conclua daí que são integráveis as funções $f_+, f_-: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_+(x) = 0$ se $f(x) \leq 0$, $f_+(x) = f(x)$ se $f(x) > 0$; $f_-(x) = 0$ se $f(x) \geq 0$ e $f_-(x) = -f(x)$ se $f(x) < 0$ (supondo ainda f integrável).
3. Prove que se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas então

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx.$$

(Desigualdade de Schwarz.)

Seção 4: Condições suficientes de integrabilidade

1. Prove que a função f do Exercício 2.3 é integrável.
2. Prove que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona é enumerável e conclua daí que o Teorema 6 decorre do Teorema 7.
3. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se D' (conjunto dos pontos de acumulação de D) é enumerável, prove que f é integrável.
4. Uma função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, que se anula fora de um conjunto de medida nula, pode não ser integrável. Nestas condições, supondo f integrável, prove que sua integral é igual a zero.
5. Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *conteúdo nulo* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$, por meio de um número *finito*

de intervalos abertos, com $\sum_{j=1}^k |I_j| < \varepsilon$. Prove:

- (a) Se X tem conteúdo nulo, o mesmo ocorre com seu fecho \overline{X} .
 - (b) Existem conjuntos de medida nula que não têm conteúdo nulo.
 - (c) Um conjunto compacto tem medida nula se, e somente se, tem conteúdo nulo.
 - (d) Se uma função limitada $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ coincide com uma função integrável $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ exceto num conjunto de conteúdo nulo, prove que g é integrável e sua integral é igual à de f .
6. Se um conjunto $X \subset [a, b]$ não tem medida nula então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda partição P de $[a, b]$, a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contêm pontos de X em seu interior é maior do que ε .
7. Seja $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva (isto é, $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$). Existe $\alpha > 0$ tal que o conjunto $X = \{x \in [a, b]; \varphi(x) \geq \alpha\}$ não tem medida nula.
8. Se a função $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva e integrável, então $\int_a^b \varphi(x)dx > 0$. Conclua que se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis e $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$. (Use os exercícios 6. e 7.)
9. Seja $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Prove que se $\int_a^b p(x)dx = 0$ então o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ tais que $p(x) = 0$ é denso em $[a, b]$. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é qualquer função integrável que se anula num conjunto denso de pontos em $[a, b]$, prove que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Cálculo com Integrais

Este capítulo é a continuação do anterior. Naquele, foi definida a integral e foram estabelecidas condições gerais que asseguram a integrabilidade de uma função. Neste, serão provadas as regras para o manuseio eficiente das integrais, entre elas o chamado Teorema Fundamental do Cálculo, uma movimentada via de mão dupla que liga derivadas a integrais. Em seguida, usaremos a integral para dar uma definição adequada do logarítmico e da exponencial. O capítulo termina com uma breve discussão das integrais impróprias.

1. Os teoremas clássicos do Cálculo Integral

Para começar, estabeleceremos a conexão entre derivada e integral.

Teorema 1. (Teorema Fundamental do Cálculo.) *Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo I . As seguintes afirmações a respeito de uma função $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes:*

- (1) *F é uma integral indefinida de f , isto é, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in I$.*
- (2) *F é uma primitiva de f , isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

Demonstração: (1) \Rightarrow (2). Se $x_0, x_0 + h \in I$ então $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ e $h \cdot f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt$, portanto

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt.$$

Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de f no ponto x_0 , existe $\delta > 0$ tal que $t \in I$, $|t - x_0| < \delta$ implicam $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Então $0 < |h| < \delta$, $x_0 + h \in I$

implicam

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| < \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Isto mostra que $F'(x_0) = f(x_0)$.

(2) \Rightarrow (1). Seja $F' = f$. Como acabamos de ver, se fixarmos $a \in I$ e definirmos $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$, teremos $\varphi' = f$. As duas funções $F, \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, tendo a mesma derivada, diferem por uma constante. Como $\varphi(a) = 0$, essa constante é $F(a)$. Portanto $F(x) = F(a) + \varphi(x)$, isto é, $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in I$. \square

Comentários. (1). Foi provado acima que toda função contínua possui uma primitiva. Mais precisamente: se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável então $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é derivável em todo ponto $x_0 \in [a, b]$ no qual f seja contínua, e tem-se $F'(x_0) = f(x_0)$. Nesse ponto também é derivável a função $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $G(x) = \int_x^b f(t)dt$. Tem-se $G'(x_0) = -f(x_0)$. Com efeito, $F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)dt = \text{constante}$, logo $F'(x_0) + G'(x_0) = 0$.

(2). Ficou também provado que se $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 (isto é, tem derivada contínua) então $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$. Em particular, $F(b) = F(a) + \int_a^b F'(t)dt$. Isto reduz o cálculo da integral $\int_a^b f(x)dx$ à procura de uma primitiva de f . Se $F' = f$ então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Teorema 2. (**Mudança de variável.**) Sejam $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ com derivada contínua e $g([c, d]) \subset [a, b]$. Então

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)).g'(t)dt.$$

Demonstração: Pelo Teorema 1, f possui uma primitiva $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e vale $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c))$. Por outro lado, a Regra da Cadeia nos dá $(F \circ g)'(t) = F'(g(t)).g'(t) = f(g(t)).g'(t)$ para todo $t \in [c, d]$. Logo $F \circ g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva da função contínua $t \mapsto f(g(t)).g'(t)$. Portanto $\int_c^d f(g(t)).g'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c))$. Isto prova o teorema. \square

Observação. O Teorema 2 é uma boa justificativa para a notação $\int_a^b f(x)dx$, em vez de $\int_a^b f$. Para mudar a variável em $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx$, faz-se

$x = g(t)$. A diferencial de x será $dx = g'(t)dt$. Estas substituições dão

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)).g'(t)dt.$$

A troca nos limites de integração é natural: quando t varia de c a d , $x = g(t)$ varia de $g(c)$ a $g(d)$.

É tradicional no Cálculo a notação $F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Teorema 3. **(Integração por partes.)** Se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ têm derivadas contínuas então

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = f.g]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Demonstração: Basta notar que $f.g$ é primitiva de $f.g' + f'.g$ e integrar esta soma usando o Teorema Fundamental do Cálculo. \square

Teorema 4. **(Fórmula do Valor Médio para integrais.)** Sejam $f, p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f contínua, p integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Existe um número $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b p(x)dx$.

Demonstração: Para todo $x \in [a, b]$, temos $m \leq f(x) \leq M$, onde m é o ínfimo e M o supremo de f em $[a, b]$. Como $p(x) \geq 0$, segue-se que $m.p(x) \leq f(x).p(x) \leq M.p(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Seja $A = \int_a^b p(x)dx$. Das últimas desigualdades resulta $m.A \leq \int_a^b f(x)p(x)dx \leq M.A$. Logo existe $d \in [m, M]$ tal que $\int_a^b f(x)p(x)dx = d.A$. Como f é contínua, temos $d = f(c)$ para algum $c \in [a, b]$, o que prova o teorema. \square

Corolário. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b - a).$$

Lema. Se $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada de ordem n contínua então

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(t)dt.$$

Demonstração: Para $n = 1$, esta fórmula reduz-se a $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt$, válida pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Para $n = 2$,

integração por partes fornece

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt &= (1-t)\varphi'(t)]_0^1 + \int_0^1 \varphi'(t)dt \\ &= -\varphi'(0) + \varphi(1) - \varphi(0),\end{aligned}$$

logo

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt.$$

Para $n = 3$, novamente a integração por partes nos dá

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \varphi'''(t)dt &= \left. \frac{(1-t)^2}{2} \cdot \varphi''(t) \right|_0^1 + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt \\ &= -\frac{\varphi''(0)}{2} + \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0),\end{aligned}$$

logo

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \varphi'''(t)dt.$$

O padrão indutivo está claro. O lema vale para todo n . \square

Teorema 5. (Fórmula de Taylor com resto integral.) Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada n -ésima contínua no intervalo cujos extremos são $a, a+h \in I$ então

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} h^{n-1} + \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+th) dt \right] h^n$$

Demonstração: Definindo $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = f(a+th)$, tem-se $\varphi^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)h^i$. O Teorema 5 resulta do lema acima. \square

Corolário. (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.) Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^n no intervalo cujos extremos são $a, a+h \in I$ então existe $\theta \in [0, 1]$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} \cdot h^n.$$

Com efeito, chamando de A a integral do enunciado do Teorema 5, resulta do Teorema 4 que existe $\theta \in [0, 1]$ tal que

$$A = f^{(n)}(a+\theta h) \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}. \quad \square$$

Observação. Esta demonstração é mais natural do que a dada no Teorema 2, Capítulo 9, porém exige mais de f .

2. A integral como limite de somas de Riemann

A *norma* de uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\} \subset [a, b]$ é o número $|P| =$ maior comprimento $t_i - t_{i-1}$ dos intervalos de P .

Teorema 6. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow S(f; P) < \bar{\int}_a^b f(x)dx + \varepsilon$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P_0 = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$S(f; P_0) < \bar{\int}_a^b f(x)dx + \varepsilon/2.$$

Seja $M = \sup f$. Tomemos δ com $0 < \delta < \varepsilon/2Mn$. Se P é qualquer partição de $[a, b]$ com $|P| < \delta$, indiquemos com $[r_{\alpha-1}, r_\alpha]$ os intervalos de P que estão contidos em algum $[t_{i-1}, t_i]$ de P_0 e com $[r_{\beta-1}, r_\beta]$ os restantes intervalos de P . Cada um destes contém pelo menos um ponto t_i em seu interior, logo há, no máximo, n intervalos do tipo $[r_{\beta-1}, r_\beta]$. Escrevamos $\alpha \subset i$ para significar $[t_{\alpha-1}, t_\alpha] \subset [t_{i-1}, t_i]$. Quando $\alpha \subset i$ valem $M_\alpha \leq M_i$ e $\sum_{\alpha \subset i} (r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq t_i - t_{i-1}$. Estes números são todos ≥ 0 , logo $\sum_{\alpha \subset i} M_\alpha \cdot (r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$ e $M_\beta \cdot (r_\beta - r_{\beta-1}) \leq M \cdot \delta$. Portanto:

$$\begin{aligned} S(f; P) &= \sum_{\alpha} M_\alpha (r_\alpha - r_{\alpha-1}) + \sum_{\beta} M_\beta (r_\beta - r_{\beta-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) + M \cdot n \cdot \delta \\ &< S(f; P_0) + \varepsilon/2 \\ &< \bar{\int}_a^b f(x)dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

No caso geral, como f é limitada, existe uma constante c tal que $f(x) + c \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Tomando $g(x) = f(x) + c$ temos $S(g; P) = S(f; P) + c \cdot (b - a)$ e

$$\bar{\int}_a^b g(x)dx = \bar{\int}_a^b f(x)dx + c(b - a),$$

logo recaímos no caso anterior. □

Dizer que $S(f; P) < \bar{\int}_a^b f(x)dx + \varepsilon$ equivale a $\left| \bar{\int}_a^b f(x)dx - S(f; P) \right| < \varepsilon$.
 Logo o Teorema 6 significa que $\lim_{|P| \rightarrow 0} S(f; P) = \bar{\int}_a^b f(x)dx$.

De modo inteiramente análogo se prova que $\underline{\int}_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} s(f; P)$.

Uma *partição pontilhada* do intervalo $[a, b]$ é um par $P^* = (P, \xi)$, onde $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ é uma partição de $[a, b]$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ é uma lista de n números escolhidos de forma que $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Dada uma função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma partição pontilhada P^* de $[a, b]$, tem-se a *soma de Riemann*

$$\sum(f; P^*) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente, seja qual for o modo de pontilar a partição P , tem-se

$$s(f; P) \leq \sum(f; P^*) \leq S(f; P).$$

Diz-se que o número real I é o *limite* de $\sum(f; P^*)$ quando $|P| \rightarrow 0$, e escreve-se $I = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*)$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|\sum(f; P^*) - I| < \varepsilon$ seja qual for a partição pontilhada P^* com $|P| < \delta$.

Teorema 7. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*)$.

Demonstração: Segue-se do Teorema 6 que se f é integrável então

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} s(f; P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f; P) = \int_a^b f(x)dx.$$

Como se tem $s(f; P) \leq \sum(f; P^*) \leq S(f; P)$, resulta imediatamente que

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Observação. Vale a recíproca do Teorema 7, mas é menos interessante. (Veja “Curso de Análise”, vol.1, pag. 265.)

3. Logaritmos e exponenciais

Seja a um número real maior que 1. Costuma-se definir o logaritmo de um número real x na base a como o expoente $y = \log_a x$ tal que $a^y = x$. Ou seja, a

função $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ costuma ser definida como a inversa da função exponencial $y \mapsto a^y$. Isto requer o trabalho preliminar de estabelecer o significado e as propriedades das potências a^y , onde y é um número real qualquer, o que é possível fazer rigorosamente. Mas achamos mais simples definir primeiro o logaritmo e, a partir deste, a exponencial, como faremos agora.

Definiremos a função $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ pondo, para cada $x > 0$,

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

O número $\log x$ é chamado o *logaritmo* de x . Lembrando que $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, vemos que $\log x < 0$ se $0 < x < 1$, $\log 1 = 0$ e $\log x > 0$ quando $x > 1$.

A função \log é monótona crescente, derivável, com $(\log)'(x) = 1/x$, $(\log)''(x) = -1/x^2$, etc. Segue-se que \log é infinitamente derivável, isto é, $\log \in C^\infty$. Vê-se também que \log é uma função côncava.

Teorema 8. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$ tem-se $\log(xy) = \log x + \log y$.

Demonstração: $\log(xy) = \int_1^{xy} dt/t = \int_1^x dt/t + \int_x^{xy} dt/t = \log x + \int_x^{xy} dt/t$.

Quando s varia de 1 a y , o produto xs varia de x a xy . Logo a mudança de variável $t = xs$ nos dá $dt = xds$ e $\int_x^{xy} dt/t = \int_1^y xds/xs = \int_1^y ds/s = \log y$, o que prova o teorema. \square

Corolário 1. Para todo número racional r , tem-se $\log(x^r) = r \cdot \log x$.

Com efeito, segue-se do Teorema 8 que $\log(x^n) = n \cdot \log x$ quando $n \in \mathbb{N}$. De $x^n \cdot x^{-n} = 1$ resulta $0 = \log(x^n \cdot x^{-n}) = \log(x^n) + \log(x^{-n}) = n \cdot \log x + \log(x^{-n})$, donde $\log(x^{-n}) = -n \log x$. Isto prova o corolário para $r \in \mathbb{Z}$. No caso geral, $r = p/q$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$. Por definição, $(x^{p/q})^q = x^p$. Daí, pelo que já provamos, $q \cdot \log(x^{p/q}) = p \cdot \log x$, donde $\log(x^{p/q}) = (p/q) \log x$. \square

Corolário 2. $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva.

Como \log é contínua, sua imagem é um intervalo, portanto basta mostrar que \log é ilimitada superior e inferiormente, o que decorre das igualdades $\log(2^n) = n \log 2$ e $\log(2^{-n}) = -n \cdot \log 2$. \square

Sendo uma função crescente, \log é uma bijeção de \mathbb{R}^+ sobre \mathbb{R} . Sua inversa, $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é chamada a *função exponencial*. Por definição, $\exp(x) = y \Leftrightarrow \log y = x$, ou seja, $\log(\exp(x)) = x$ e $\exp(\log y) = y$.

Existe um único número real cujo logaritmo é igual a 1. Ele é indicado pelo símbolo e . Mostraremos logo mais que e coincide com o número introduzido nos Exemplos 12 e 13 do Capítulo 3. Por enquanto, sua definição é $e = \exp(1)$.

Teorema 9. A função exponencial $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma bijeção crescente, de classe C^∞ , com $(\exp)'(x) = \exp(x)$ e $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ para $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer. Além disso, para todo $r \in \mathbb{Q}$ tem-se $\exp(r) = e^r$.

Demonstração: Pela regra de derivação da função inversa, para cada $x \in \mathbb{R}$, com $\exp(x) = y$, tem-se $(\exp)'(x) = 1/(\log)'(y) = y = \exp(x)$.

Assim $\exp' = \exp$, donde $\exp \in C^\infty$. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, sejam $x' = \exp(x)$ e $y' = \exp(y)$, logo $x = \log x'$ e $y = \log y'$. Então $\exp(x+y) = \exp(\log x' + \log y') = \exp[\log(x'y')] = \exp(x) \cdot \exp(y)$. Se r é racional, o Corolário 1 do Teorema 8 nos dá $\log(\exp(r)) = r = r \cdot 1 = r \cdot \log e = \log(e^r)$, donde $\exp(r) = e^r$, pela injetividade de \log . \square

A igualdade $\exp(r) = e^r$ para $r \in \mathbb{Q}$, juntamente com a relação $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ nos indicam que $\exp(x)$ se comporta como uma potência de base e e expoente x . Poremos então, por definição, $e^x = \exp(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Com isto, passa a ter significado a potência e^x para x real qualquer.

Com esta notação, temos

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^x \cdot e^y, \quad e^0 = 1, \quad e^{-x} = 1/e^x, \\ x < y &\Leftrightarrow e^x < e^y, \\ \log(e^x) &= x, \quad e^{\log y} = y, \quad \text{para quaisquer } x \in \mathbb{R}, y > 0 \end{aligned}$$

Temos ainda $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, como se vê facilmente.

Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $x > 1$ existe c tal que $1 < c < x$ e $\log x = \log x - \log 1 = (\log)'(c)(x-1) = (x-1)/c$. Segue-se que $\log x < x$ para todo $x \geq 1$. Como $\log x = 2 \log \sqrt{x}$, temos $0 < \log x < 2\sqrt{x}$, donde $0 < \log x/x < 2/\sqrt{x}$ para todo $x \geq 1$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2/\sqrt{x}) = 0$, segue-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x/x = 0$, fato que tinha sido provado no final do Capítulo 3 supondo $x = n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, dado qualquer polinômio $p(x)$, tem-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)/e^x = 0$. Para provar isto, basta considerar o caso em que $p(x) = x^k$. Então escrevemos $e^{x/k} = y$, donde $x = k \cdot \log y$. Evidentemente, $x \rightarrow +\infty$ se, e somente se,

$y \rightarrow +\infty$. Portanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{x/k}} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(k \frac{\log y}{y} \right) = 0$$

e daí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{x/k}} \right)^k = 0.$$

Se c e k são constantes reais, a função $f(x) = c.e^{kx}$ tem derivada $f'(x) = k.c.e^{kx} = k.f(x)$. Esta propriedade de possuir derivada proporcional a si mesma é responsável por grande parte das aplicações da função exponencial. Mostraremos que essa propriedade é exclusiva das funções desse tipo.

Teorema 10. Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I , com $f'(x) = k.f(x)$.

Se, para um certo $x_0 \in I$, tem-se $f(x_0) = c$ então $f(x) = c.e^{k(x-x_0)}$ para todo $x \in I$.

Demonstração: Seja $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(x).e^{-k(x-x_0)}$. Então $\varphi'(x) = f'(x)e^{-k(x-x_0)} - kf(x).e^{-k(x-x_0)} = 0$. Logo φ é constante. Como $\varphi(x_0) = c$, tem-se $\varphi(x) = c$ para todo $x \in I$, ou seja, $f(x) = c.e^{k(x-x_0)}$. \square

Como a derivada da função $f(x) = e^x$ é ainda $f'(x) = e^x$, temos $f'(0) = 1$. Segue-se da definição de derivada que $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$.

Dados $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, definiremos a potência a^x de modo que seja válida a fórmula $\log(a^x) = x \cdot \log a$. Para isto, tomaremos esta igualdade como definição, ou seja, diremos que a^x é o (único) número real cujo logaritmo é igual a $x \cdot \log a$.

Noutras palavras, $a^x = e^{x \log a}$.

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$, tem as propriedades esperadas.

A primeira é que, para $x = p/q \in \mathbb{Q}$ (onde $q > 0$), $f(x) = \sqrt[q]{a^p}$. Com efeito, $f(x) = \exp((p/q) \log a) = \exp(\log \sqrt[q]{a^p}) = \sqrt[q]{a^p}$.

Tem-se $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^0 = 1$, $a^{-x} = 1/a^x$ e $(a^x)^y = a^{xy}$.

A função $f(x) = a^x$ tem derivada $f'(x) = a^x \cdot \log a$, portanto é de classe C^∞ . A derivada f' é positiva se $a > 1$ e negativa se $0 < a < 1$. Logo f é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo. Quando $a > 1$, tem-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$. Se $0 < a < 1$, os valores destes limites são trocados. Se $0 < a \neq 1$, $f(x) = a^x$ é uma bijeção de \mathbb{R} sobre \mathbb{R}^+ , cuja inversa

indica-se com $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada $x > 0$, $\log_a x$ chama-se o *logaritmo de x na base a*.

Assim $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Voltamos à definição clássica. Quando $a = e$, vale $\log_e x = \log x$. O logaritmo que definimos no começo desta seção tem, portanto, base e . É o chamado *logaritmo natural*. Para todo $x > 0$, temos

$$e^{\log x} = x = a^{\log_a x} = e^{\log_a x \cdot \log a},$$

portanto $\log x = \log_a x \cdot \log a$, ou seja, $\log_a x = \log x / \log a$. Desta última fórmula resultam propriedades de $\log_a x$ análogas às de $\log x$, como $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ou $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \cdot \log a}$.

Para finalizar esta seção, mostraremos que e coincide com o número definido nos Exemplos 12 e 13 do Capítulo 3.

A derivada da função $\log x$ é igual a $1/x$. No ponto $x = 1$ esta derivada vale 1. Isto significa que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log[(1+x)^{1/x}] = 1.$$

Como

$$(1+x)^{1/x} = \exp\{\log[(1+x)^{1/x}]\},$$

vem

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \exp(1) = e.$$

Pondo $y = 1/x$, concluímos que $\lim_{y \rightarrow \infty} (1+1/y)^y = e$.

Em particular, $\lim_{n \in \mathbb{N}} (1+1/n)^n = e$.

4. Integrais impróprias

São de dois tipos: integrais de funções ilimitadas (definidas num intervalo limitado porém não fechado) e integrais de funções definidas num intervalo ilimitado.

O teorema seguinte descarta um caso trivial.

Teorema 11. Seja $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, tal que a restrição $f|[c, b]$ é integrável para cada $c \in (a, b]$. Então, seja qual for o valor

que se atribua a $f(a)$, obtém-se uma função integrável $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x)dx$.

Demonstração: Seja K tal que $a \leq x \leq b \Rightarrow |f(x)| \leq K$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $c \in (a, b]$ com $K(c-a) < \varepsilon/4$. Como $f|[c, b]$ é integrável, existe uma partição P de $[c, b]$ tal que $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon/2$. Então $Q = P \cup \{a\}$ é uma partição de $[a, b]$ tal que

$$S(f; Q) - s(f; Q) \leq 2K(c-a) + S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon.$$

Logo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável. A integral indefinida $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^b f(t)dt$ cumpre a condição de Lipschitz $|F(y) - F(x)| \leq K|y-x|$ logo é (uniformemente) contínua, donde $F(a) = \lim_{c \rightarrow a+} F(c) = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x)dx$. \square

Resultado análogo vale para $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Basta, portanto, considerar $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada. Suporemos também f contínua. A integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é definida como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Em cada intervalo fechado $[a + \varepsilon, b]$, f é contínua, logo integrável. O problema é saber se existe ou não o limite acima. Se ele existir a integral será *convergente*; se não existir o limite a integral será *divergente*.

Evidentemente, o caso de uma função contínua ilimitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se trata de modo semelhante, pondo-se $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Finalmente, o caso de $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua reduz-se aos anteriores tomando $c \in (a, b)$ e pondo $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. \square

Exemplo 1. Seja $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x^\alpha$. Supondo $\alpha \neq 1$, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Quando $\alpha = 1$, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\log x \right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-\log \varepsilon) = +\infty.$$

Portanto $\int_0^1 dx/x^\alpha$ diverge se $\alpha \geq 1$ e converge para $(1-\alpha)^{-1}$ se $\alpha < 1$. Em particular, $\alpha = 1/2$ dá $\int_0^1 dx/\sqrt{x} = 2$.

Exemplo 2. Seja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Então

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx / \sqrt{1-x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon} dx / \sqrt{1-x^2} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsen x |_0^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsen(1-\varepsilon) \\ &= \arcsen 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Quando $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cumpre $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b]$ então a integral $\int_a^b f(x)dx$ converge se, e somente se, existe $k > 0$ tal que $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \leq k$ para todo $\varepsilon \in (0, b-a)$ pois a função $\varphi(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ é não-crescente. Se existir uma função $g: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b g(x)dx$ seja convergente e $0 \leq f(x) \leq k \cdot g(x)$ para todo $x \in (a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx$ converge pois, neste caso, $\varphi(\varepsilon) \leq k \cdot \int_a^b g(x)dx$ para todo $\varepsilon \in (0, b-a)$.

Exemplo 3. A integral $I = \int_0^1 dx / \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ converge se $k \in \mathbb{R}$ cumpre $k^2 < 1$. Com efeito, como $0 \leq x \leq 1$, temos $1-k^2 \leq 1-k^2x^2$. Pondo $K = 1/\sqrt{1-k^2}$ segue-se que $1/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \leq K/\sqrt{1-x^2}$ portanto $I \leq \int_0^1 K/\sqrt{1-x^2} = K\pi/2$.

Diz-se que a integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é *absolutamente convergente* quando $\int_a^b |f(x)|dx$ converge. Como no caso de séries, a convergência de $\int_a^b |f(x)|dx$ implica a de $\int_a^b f(x)dx$.

Com efeito, dada $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, definamos sua *parte positiva* e sua *parte negativa* $f_+, f_-: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pondo, para $a < x \leq b$:

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Então $f_+(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)]$ e $f_-(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)]$ de modo que f_+ e f_- são contínuas. Além disso, temos $f_+(x) \geq 0$, $f_-(x) \geq 0$, $f = f_+ - f_-$ e $|f| = f_+ + f_-$, donde $f_+ \leq |f|$ e $f_- \leq |f|$. Segue-se destas desigualdades que se $\int_a^b f(x)dx$ é absolutamente convergente então $\int_a^b f_+(x)dx$ e $\int_a^b f_-(x)dx$ convergem. Logo $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$ é convergente.

O critério de comparação assume então a seguinte forma: se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e $\int_a^b g(x)dx$ converge então a condição $|f(x)| \leq k \cdot g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ implica que $\int_a^b f(x)dx$ é (absolutamente) convergente. Por exemplo,

se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, existem constantes $k > 0$ e $\alpha < 1$ tais que $|f(x)| \leq k/(b-x)^\alpha$ para todo $x \in [a, b)$ então a integral $\int_a^b f(x)dx$ é (absolutamente) convergente.

Tratemos agora de integrais sobre intervalos ilimitados.

Dada $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, define-se a integral imprópria de f pondo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

Se o limite acima existir, a integral diz-se *convergente*. Do contrário, ela diz-se *divergente*. Uma definição análoga é dada quando $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Então $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x)dx$. Finalmente, para $f: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, toma-se um ponto arbitrário $a \in \mathbb{R}$ (geralmente $a = 0$) e põe-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Exemplo 4. Seja $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^\alpha$. Se $\alpha \neq 1$ tem-se

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{A^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha},$$

logo

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

converge se $\alpha > 1$. Por outro lado, se $\alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} dx/x^\alpha$ diverge. Isto contrasta com a integral da mesma função no intervalo $(0, 1]$.

Exemplo 5. $\int_0^{+\infty} dx/(1+x^2) = \pi/2$. Com efeito, $\arctg x$ é uma primitiva de $1/(1+x^2)$. Por conseguinte

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\arctg A - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Diz-se que uma integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é *absolutamente convergente* quando $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge. Como no caso de intervalos limitados, prova-se que, neste caso, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Vale portanto o *critério de comparação*: se $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge e se existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k.g(x)$ para

todo $x \geq a$ então $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge (absolutamente). Em particular, se $|f(x)| \leq k/x^\alpha$ com $\alpha > 1$ então $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é (absolutamente) convergente.

Exemplo 6. Seja $a > 0$. A integral $\int_a^{+\infty} dx/x^2$ converge e, como se vê facilmente, seu valor é $1/a$. Mesmo se não soubéssemos que a derivada de $\arctg x$ é $1/(1+x^2)$, concluiríamos, por comparação, que $\int_a^{+\infty} dx/(1+x^2)$ é convergente pois $1/(1+x^2) \leq 1/x^2$.

Exemplo 7. (*A função gama.*) Trata-se da função $\Gamma: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida para todo $t > 0$ pela integral $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$. Para mostrar que a integral acima converge, a decomponemos na soma $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. A integral $\int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx$ converge porque $e^{-x} x^{t-1} \leq 1/x^{1-t}$. A segunda parcela, $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ converge porque $e^{-x} x^{t-1} \leq 1/x^2$ para todo x suficientemente grande. Com efeito, esta desigualdade equivale a $x^{t+1}/e^x \leq 1$. Ora, como sabemos, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{t+1}/e^x = 0$, logo existe $a > 0$ tal que $x > a \Rightarrow x^{t+1}/e^x \leq 1$. A função gama estende a noção de factorial pois $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como se vê integrando por partes.

Exemplo 8. A integral de Dirichlet $I = \int_0^{+\infty} |\sin x/x| dx$ converge, mas não absolutamente. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$ seja $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x/x| dx$. Então $I = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ É claro que $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ e que $\lim a_n = 0$. Logo, pelo Teorema de Leibniz, a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ (e consequentemente a integral) converge. Por outro lado, $\int_0^{+\infty} |\sin x|/x dx$ é a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, cujo termo a_n é a área de uma região que contém um triângulo de base $\pi/2$ e altura $2/(2n+1)\pi$. A área desse triângulo é igual a $1/2(2n+1)$. Como a série harmônica diverge, segue-se que $\sum a_n = +\infty$. (Prova-se que $\int_0^{+\infty} |\sin x/x| dx = \pi/2$.)

Uma aplicação bastante conhecida das integrais impróprias é o critério de convergência de séries numéricas contido no seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em qualquer livro de Cálculo.

Teorema 12. Seja $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, monótona, não-decrescente. Para todo número natural $n \geq a$, seja $a_n = f(n)$. A série $\sum a_n$ converge se, e somente se, a integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

5. Exercícios

Seção 1: Os teoremas clássicos do Cálculo Integral

1. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, contínua à direita no ponto $x_0 \in [a, b]$. Prove que $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é derivável à direita no ponto x_0 , com $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Enuncie fato análogo com “esquerda” em lugar de “direita”. Dê exemplos com f integrável, descontínua no ponto x_0 , nos quais:
 - (a) Existe $F'(x_0)$;
 - (b) Não existe $F'(x_0)$.
2. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, com f' integrável. Prove que, para quaisquer $x, c \in [a, b]$, tem-se $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)dt$. Conclua que o Teorema 5 vale com “integrável” em vez de “contínua”.
3. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se $\{x \in [a, b]; f'(x) = 0\}$ tem conteúdo nulo, prove que f é crescente.
4. Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com derivada contínua, prove o Teorema do Valor Médio (Teorema 7 do Capítulo 8) como consequência da fórmula de mesmo nome para integrais (Corolário de Teorema 4, deste capítulo).
5. Sejam $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta: I \rightarrow [a, b]$ deriváveis. Defina $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$, para todo $x \in I$. Prove que φ é derivável e $\varphi'(x) = f(\beta(x)).\beta'(x) - f(\alpha(x)).\alpha'(x)$.
6. Sejam $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função do Exercício 2.3 do Capítulo 10 e $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(0) = 0$ e $g(x) = 1$ se $x > 0$. Mostre que f e g são integráveis porém $g \circ f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ não é integrável.
7. Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com derivada integrável, seja $m = (a + b)/2$. Prove que $f(a) + f(b) = [2/(b - a)] \int_a^b [f(x) + (x - m)f'(x)]dx$.
8. Sejam $f, p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que f é contínua, p é integrável e $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Prove que se

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(a) \int_a^b p(x)dx,$$

então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(a) = f(c)$. Vale um resultado análogo com $f(b)$ em lugar de $f(a)$. Conclua que no Teorema 4 pode-se tomar

$c \in (a, b)$ e que no Corolário do Teorema 5 pode-se exigir que $\theta \in (0, 1)$.
 [Veja Exercício 9, Seção 4, Capítulo 10.]

9. O exercício 3, seção 4 do Capítulo 3 deixa em aberto o cálculo de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!e^n}{n^n}.$$

Na realidade, a fórmula de Stirling diz que, pondo $x_n = n!e^n/n^n$ e $w_n = \sqrt{2\pi n}$, tem-se $\lim x_n/w_n = 1$, portanto $\lim x_n = +\infty$. Uma demonstração mais simples de que $\lim x_n = +\infty$ pode ser feita segundo as etapas abaixo indicadas:

- A. Integrando por partes, mostre que

$$\int_1^n \log x dx = n \log n - n + 1 = A_n \text{ (digamos).}$$

- B. Se B_n é a soma superior da função $\log x$ relativamente à partição $\{1, 2, \dots, n\}$ do intervalo $[1, n]$, mostre que

$$A_n < B_n = \sum_{k=1}^n \log k = \log n!$$

- C. Uma melhor aproximação superior para a área A_n pode ser dada considerando-se, para cada $k = 2, \dots, n$ a tangente ao gráfico de $y = \log x$ pelo ponto $x = k - 1/2$. O trapézio com base no intervalo $[k - 1, k]$ do eixo x , com dois lados verticais e lado inclinado igual a essa tangente tem área $\log(k - 1/2)$. Seja $C_n = \sum_{k=2}^n \log(k - 1/2)$ a soma das áreas desses trapézios. Mostre que $A_n < C_n < B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- D. Mostre que se tem

$$B_n - C_n = \sum_{k=2}^n [\log k - \log(k - 1/2)] = \sum_{k=2}^n 1/2\theta_k,$$

onde $k - 1/2 \leq \theta_k \leq k$.

- E. Conclua que

$$\lim(B_n - A_n) \geq \lim(B_n - C_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\theta_k} = +\infty.$$

- F. Observe que

$$B_n - A_n = \log n! - n \log n + n - 1 = \log(n!e^{n-1}n^{-n}),$$

portanto $\lim x_n = +\infty$.

Seção 2: A integral como limite de somas de Riemann

1. Com auxílio de somas de Riemann prove a validade dos seguintes limites:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^n i^p = \frac{1}{p+1},$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

2. Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitada ou não, faz sentido considerar a soma de Riemann $\sum(f; P^*)$, para toda partição pontilhada P^* . Prove que, se existe $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*)$, então f é uma função limitada.
3. Prove a recíproca do Teorema 7: se existir $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*) = L$ então a função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e $\int_a^b f(x)dx = L$.
4. Sejam $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis. Para toda partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ sejam $P^* = (P, \xi)$ e $P^\# = (P, \eta)$ pontilhamentos de P . Prove que

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum f(\xi_i)g(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

5. Dadas $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, para cada partição pontilhada P^* de $[a, b]$ define-se a soma de Riemann-Stieltjes

$$\sum(f, g; P^*) = \sum f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})].$$

Prove: se f é integrável e g possui derivada integrável então

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f, g; P) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

6. Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$M(f; n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a + ih), \quad h = \frac{(b-a)}{n},$$

a média aritmética dos valores $f(a+h), f(a+2h), \dots, f(a+nh) = f(b)$. Prove que se a função f é integrável então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(f; n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Por este motivo, o segundo membro desta igualdade se chama o *valor médio da função* f no intervalo $[a, b]$.

7. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa, prove que $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

Seção 3: Logaritmos e exponenciais

1. Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, não identicamente nulas, tais que $f(x+y) = f(x).f(y)$ e $g(uv) = g(u)+g(v)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}^+$. Prove que existem $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = e^{ax}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = b \cdot \log x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
2. Prove que a seqüência cujo n -ésimo termo é $x_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n - \log n$ é decrescente e limitada, logo converge. (Seu limite é conhecido como a *constante γ de Euler-Mascheroni*, cujo valor aproximado é 0,5772.)
3. Prove que $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \log x = 0$.
4. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$.

Seção 4: Integrais impróprias

1. Verifique a convergência ou divergência das integrais

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 - \cos x}, \quad \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

2. Verifique a convergência ou divergência das integrais

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{1-e^x}.$$

3. Mostre que $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ converge mas não absolutamente.

4. Mostre que $\int_0^{+\infty} x \cdot \sin(x^4) dx$ converge, embora a função $x \cdot \sin(x^4)$ seja ilimitada.

5. Seja $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, positiva, monótona não-crescente. Prove que se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge então $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x) = 0$.

6. Seja $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em cada intervalo limitado $[a, x]$. Prove que a integral imprópria

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

existe se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $A > 0$ tal que $A < x < y$ implica $\left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon$. (“Critério de Cauchy”.)

7. Prove o Teorema 12.

Seqüências e Séries de Funções

Em vários problemas da Matemática e das suas aplicações busca-se uma função que cumpra certas condições dadas. É freqüente, nesses casos, obter-se uma seqüência de funções $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, cada uma das quais cumpre as condições exigidas apenas aproximadamente, porém com aproximações cada vez melhores. Então a função-limite dessa seqüência deverá cumprir as tais condições, caso aconteça o melhor. Isto leva ao estudo de limites de seqüências de funções. Muitas vezes cada função da seqüência obtém-se da anterior somando-se uma função g_n . Neste caso, tem-se uma série de funções $\sum g_n$. Seqüências e séries de funções serão estudadas neste capítulo.

Para seqüências e séries de números há apenas uma noção de limite. Mas para funções há várias. Aqui examinaremos as duas noções mais comuns de convergência, que definiremos a seguir.

1. Convergência simples e convergência uniforme

Diz-se que uma seqüência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) converge simplesmente para a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo $x \in X$, a seqüência de números $f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ converge para $f(x)$.

Assim, $f_n \rightarrow f$ simplesmente em X quando, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de ε e de x) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Graficamente, em cada reta vertical que passa por um ponto $x \in X$ fica determinada uma seqüência de pontos $(x, f_1(x)), \dots, (x, f_n(x)), \dots$ interseções dessa reta com os gráficos de f_1, \dots, f_n, \dots . Estes pontos convergem para $(x, f(x))$, interseção da reta vertical com o gráfico de f .

Exemplo 1. A seqüência de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = x/n$, converge simplesmente para a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que é identicamente nula. Com efeito, para todo $x \in \mathbb{R}$ fixado, tem-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x/n) = 0$.

Um tipo de convergência de funções mais restrito do que a convergência simples, é a convergência uniforme, que definiremos agora.

Uma seqüência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ seja qual for $x \in X$.

No plano \mathbb{R}^2 , dado $\varepsilon > 0$, a faixa de raio ε em torno do gráfico de f é o conjunto

$$F(f; \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in X, f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$

Dizer que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o gráfico de f_n , para todo $n > n_0$, está contido na faixa de raio ε em torno do gráfico de f .

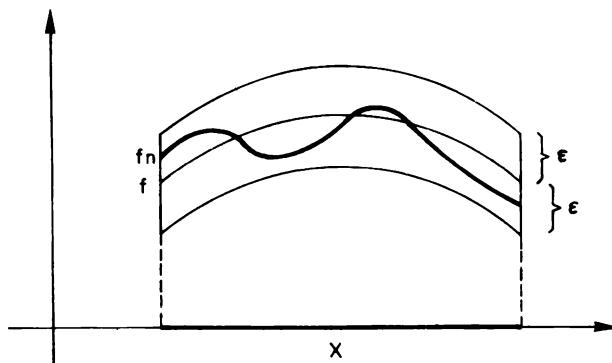


Fig. 10 – O gráfico de f_n está contido na faixa $F(f; \varepsilon)$.

Exemplo 2. Nenhuma faixa de raio ε em torno do eixo das abcissas (gráfico da função identicamente nula) pode conter o gráfico de uma função $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x/n$. Logo a seqüência (f_n) do Exemplo 1 não converge uniformemente para zero em \mathbb{R} . Por outro lado, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, digamos com $|x| \leq c$ para todo $x \in X$, então $f_n \rightarrow 0$ uniformemente em X . Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 > c/\varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| = |x|/n < c/n_0 < \varepsilon$.

Exemplo 3. A seqüência de funções contínuas $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, converge simplesmente para a função descontínua $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$. A convergência é uniforme em todo intervalo da forma $[0, 1 - \delta]$, $0 < \delta < 1$ mas não é uniforme em $[0, 1]$. Estas duas afirmações decorrem de fatos gerais (a saber, os Teoremas 1 e 2 abaixo) mas podem ser facilmente provadas a partir da definição. Com efeito, escrevendo $a = 1 - \delta$, temos $0 < a < 1$ logo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a^n < \varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow 0 < f_n(x) \leq a^n < \varepsilon$ para todo $x \in [0, a]$. Portanto $f_n \rightarrow 0$ uniformemente no intervalo $[0, 1 - \delta]$. Por outro lado, tomando $\varepsilon = 1/2$, afirmamos que, seja qual for $n_0 \in \mathbb{N}$, existem pontos $x \in [0, 1)$ tais que $|f_{n_0}(x) - f(x)| \geq 1/2$, ou seja, $x^{n_0} \geq 1/2$. Basta observar que $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{n_0} = 1$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 \Rightarrow x^{n_0} > 1/2$. Isto mostra que f_n não converge uniformemente para f no intervalo $[0, 1]$.

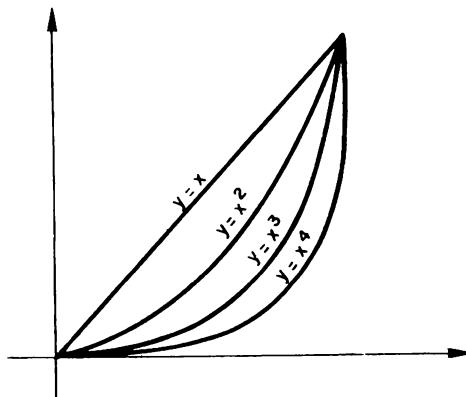


Fig. 11 – As funções $f_n(x) = x^n$ convergem simplesmente no intervalo $[0, 1]$ para uma função descontínua.

Exemplo 4. A seqüência de funções contínuas $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ converge simplesmente para a função identicamente nula. Esta convergência não é uniforme. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $f_n(\sqrt[n]{1/2}) = 1/4$. Logo, para $\varepsilon < 1/4$, nenhuma função f_n tem seu gráfico contido na faixa de raio ε em torno da função 0. Por outro lado, se $0 < \delta < 1$, temos $f_n \rightarrow 0$ uniformemente no intervalo $[0, 1 - \delta]$ pois $x^n \rightarrow 0$ uniformemente nesse intervalo e $0 \leq x^n(1 - x^n) \leq x^n$.

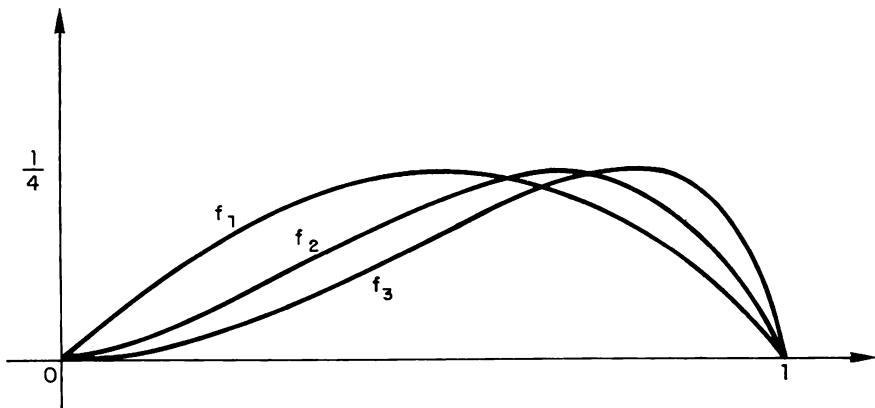


Fig. 12

As considerações feitas nesta seção incluem a soma $f = \sum f_n$ de uma série de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Neste importante caso particular, tem-se $f = \lim s_n$, onde $s_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Dizer que a série $\sum f_n$ converge uniformemente significa, portanto, que a seqüência (s_n) converge uniformemente e equivale a afirmar que a seqüência de funções $r_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ (“restos” da série), definidas por $r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots$, converge uniformemente para zero. Com efeito, basta observar que $r_n = f - s_n$.

2. Propriedades da convergência uniforme

Teorema 1. Se uma seqüência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a .

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in X$. Fixemos um número natural $n > n_0$. Como f_n é contínua no ponto a , existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3$, donde

$$|f(x) - f(a)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Isto prova o teorema. \square

Exemplo 5. A seqüência de funções contínuas $f_n(x) = x^n$ não pode convergir uniformemente em $[0, 1]$ pois converge simplesmente para

a função descontínua $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$. Já a seqüência de funções contínuas $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ converge simplesmente no intervalo $[0, 1]$ para a função 0, que é contínua mas nem por isso a convergência é uniforme. Mesma observação pode ser feita sobre a seqüência de funções contínuas $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x/n$. A esse respeito, vale o teorema abaixo. Antes de demonstrá-lo, daremos uma definição.

Diz-se que uma seqüência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ converge monotonicamente para a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a seqüência $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona e converge para $f(x)$. Assim, por exemplo, as seqüências dos Exemplos 1 e 3 convergem monotonicamente.

É claro que se $f_n \rightarrow f$ monotonicamente em X então $|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2. (Dini.) Se a seqüência de funções contínuas $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ converge monotonicamente para a função contínua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ no conjunto compacto X então a convergência é uniforme.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, ponhamos $X_n = \{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como f_n e f são contínuas, cada X_n é compacto. A monotonicidade da convergência, por sua vez, implica $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$. Finalmente, como $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, vemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Segue-se do Teorema 9, Capítulo 5, que algum X_{n_0} (e portanto todo X_n com $n > n_0$) é vazio. Isto significa que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ seja qual for $x \in X$. \square

Exemplo 6. A seqüência de funções contínuas $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, converge monotonicamente para a função (contínua) identicamente nula no conjunto não-compacto $[0, 1]$ mas a convergência não é uniforme. Com efeito, dado $0 < \varepsilon < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existem pontos $x \in [0, 1)$ tais que $x^n > \varepsilon$, pois $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1 > \varepsilon$.

Teorema 3. (Passagem ao limite sob o sinal de integral.) Se a seqüência de funções integráveis $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ então f é integrável e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Noutras palavras: $\int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n$ se a convergência é uniforme.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/4(b-a)$ para todo $x \in [a, b]$. Fixemos $m > n_0$. Como f_m é integrável, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que, indicando com ω_i e ω'_i respectivamente as oscilações de f e f_m no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P , tem-se $\sum \omega'_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/2$. Mas, para $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ quaisquer, vale:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \omega'_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \end{aligned}$$

Portanto $\omega_i \leq \omega'_i + \varepsilon/2(b-a)$. Segue-se que

$$\begin{aligned} \sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) &\leq \sum \omega'_i(t_i - t_{i-1}) + [\varepsilon/2(b-a)] \sum (t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto mostra que f é integrável. Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| &= \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \\ &\leq \frac{(b-a)\varepsilon}{4(b-a)} < \varepsilon \end{aligned}$$

se $n > n_0$. Conseqüentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. □

Observação. Se cada f_n é contínua, a demonstração se simplifica consideravelmente pois f então é contínua, donde integrável.

Exemplo 7. Se uma seqüência de funções integráveis $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplesmente para $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, pode ocorrer que f não seja integrável. Por exemplo, se $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ for uma enumeração dos números racionais de $[a, b]$ e definirmos f_n como a função que assume o valor 1 nos pontos r_1, \dots, r_n e é zero nos demais pontos de $[a, b]$ então (f_n) converge simplesmente para uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$ e $f(x) = 0$ se x é irracional. Evidentemente, cada f_n é integrável mas f não é.

Exemplo 8. Mesmo quando a seqüência de funções integráveis $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função integrável $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

pode ocorrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx$. Por exemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = nx^n(1 - x^n)$. Então $f_n(1) = 0$ e $0 \leq f_n(x) < nx^n$ se $0 \leq x < 1$. Ora, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$ se $0 \leq x < 1$. (Pelo Exemplo 8, Capítulo 3, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)x^{n+1}/nx^n = x < 1$.) Portanto (f_n) converge simplesmente em $[0, 1]$ para a função identicamente nula. Entretanto $\int_0^1 f_n(x) dx = n^2/(n+1)(2n+1)$, portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1/2$, enquanto $\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) = 0$.

Para que se tenha a derivada do limite igual ao limite das derivadas, em vez de supor que $f_n \rightarrow f$ uniformemente, deve-se postular que a seqüência das derivadas converja uniformemente.

Teorema 4. **(Derivação termo a termo.)** Seja (f_n) uma seqüência de funções de classe C^1 no intervalo $[a, b]$. Se, para um certo $c \in [a, b]$, a seqüência numérica $(f_n(c))$ converge e se as derivadas f'_n convergem uniformemente em $[a, b]$ para uma função g então (f_n) converge em $[a, b]$ uniformemente para uma função f , de classe C^1 , tal que $f' = g$. Em resumo: $(\lim f_n)' = \lim f'_n$ desde que as derivadas f'_n converjam uniformemente.

Demonstração: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [a, b]$ temos $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n(t) dt$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ vemos, pelo Teorema 3, que existe $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ e vale $f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt$. Além disso, pelo Teorema 1, g é contínua logo (novamente em virtude do Teorema Fundamental do Cálculo) f é derivável e $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Em particular, f' é contínua, isto é, f é de classe C^1 . Resta apenas provar que a convergência $f_n \rightarrow f$ é uniforme. Ora,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f'_n(t) - g(t)| dt.$$

Como $f'_n \rightarrow g$ uniformemente, resulta daí que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. \square

Exemplo 9. A seqüência de funções $f_n(x) = \sin(nx)/n$ converge uniformemente para zero em toda a reta. Mas a seqüência de suas derivadas $f'_n(x) = \cos(nx)$ não converge, sequer simplesmente, em intervalo algum. (Todo intervalo contém um número da forma $x = m\pi/p$, com m, p inteiros. Então $\cos(nx)$ assume infinitas vezes os valores 1 e -1.)

Os teoremas acima, no caso de uma série $\sum f_n$, assumem as seguintes

formas:

1. Se $\sum f_n$ converge uniformemente para f e cada f_n é contínua no ponto a então f é contínua no ponto a .
2. Se cada termo $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, com $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ e a série $\sum f_n$ converge para uma função contínua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ no compacto X então a convergência é uniforme.
3. Se cada $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e $\sum f_n$ converge uniformemente para $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ então f é integrável e $\int_a^b \sum f_n(x) dx = \sum \int_a^b f_n(x) dx$.
4. Se cada $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 , se $\sum f'_n$ converge uniformemente em $[a, b]$ e se, para algum $c \in [a, b]$, a série $\sum f_n(c)$ converge então $\sum f_n$ converge uniformemente para uma função de classe C^1 e $(\sum f_n)' = \sum f'_n$.

Exemplo 10. A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^2 / (1+x^2)^n$, cujos termos são funções contínuas, definidas em toda a reta, converge para a soma $1+x^2$, para todo $x \neq 0$. No ponto $x = 0$, todos os termos da série se anulam, logo sua soma é zero. Segue-se que a série dada converge simplesmente em toda a reta mas a convergência não é uniforme, pois a soma é uma função descontínua..

O teorema básico sobre convergência uniforme de séries de funções, demonstrado a seguir, não tem análogo para seqüências.

Teorema 5. (**Teste de Weierstrass.**) Dada a seqüência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, seja $\sum a_n$ uma série convergente de números reais $a_n \geq 0$ tais que $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Nestas condições, as séries $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes.

Demonstração: Pelo critério de comparação, para todo $x \in X$ a série $\sum |f_n(x)|$ (e portanto a série $\sum f_n(x)$) é convergente. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>n_0} a_n < \varepsilon$. Pondo

$$R_n(x) = \sum_{k>n} |f_k(x)| \quad \text{e} \quad r_n(x) = \sum_{k>n} f_k(x),$$

tem-se imediatamente $|r_n(x)| \leq R_n(x) \leq \sum_{k>n} a_k < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Logo $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes. \square

3. Séries de potências

As funções mais importantes da Análise podem ser expressas como somas

de séries da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots.$$

Estas séries, que constituem uma generalização natural dos polinômios, são chamadas de *séries de potências*.

Para simplificar a notação, trataremos de preferência o caso em que $x_0 = 0$, isto é, as séries de potências do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

O caso geral reduz-se a este pela mudança de variável $y = x - x_0$. Os resultados que obtivermos para as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ podem ser facilmente adaptados para o caso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

O primeiro fato a destacar sobre uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ é que o conjunto dos valores de x para os quais ela converge é um intervalo de centro x_0 . Esse intervalo pode ser limitado (aberto, fechado ou semi-aberto), igual a \mathbb{R} ou até mesmo reduzir-se a um único ponto. Isto será demonstrado logo a seguir. Antes vejamos um exemplo que ilustra todas essas possibilidades.

Exemplo 11. Pelo teste de d'Alembert, a série $\sum x^n/n!$ converge para todo valor de x . A série $\sum [(-1)^n/(2n+1)]x^{2n+1}$ converge se, e somente se, $x \in [-1, 1]$. A série $\sum [(-1)^{n+1}/n]x^n$ converge se $x \in (-1, 1]$ e diverge fora desse intervalo. O conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série geométrica $\sum x^n$ converge é o intervalo aberto $(-1, 1)$. Finalmente, a série $\sum n^n x^n$ converge apenas no ponto $x = 0$.

Dada uma série de potências $\sum a_n x^n$, a localização dos pontos x para os quais ela converge se faz por meio do teste de Cauchy (Teorema 6, Capítulo 4), o qual põe em evidência o comportamento da seqüência $(\sqrt[n]{|a_n|})$.

Se a seqüência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é ilimitada então a série $\sum a_n x^n$ converge apenas quando $x = 0$. Com efeito, para todo $x \neq 0$ a seqüência de números $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$ é ilimitada e o mesmo ocorre com $|a_n x^n|$, logo o termo geral da série $\sum a_n x^n$ não tende a zero.

Se, entretanto, a seqüência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é limitada então o conjunto

$$R = \{\rho > 0; \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande}\}$$

é não-vazio. Na realidade, é fácil ver que se $\rho \in R$ e $0 < x < \rho$ então $x \in R$. Logo R é um intervalo, do tipo $(0, r)$, $(0, r]$ ou $(0, +\infty)$, onde $r = \sup R$. O número r é chamado o *raio de convergência* da série $\sum a_n x^n$. (Convencionaremos escrever $r = +\infty$ quando R for ilimitado.)

O raio de convergência r da série de potências $\sum a_n x^n$ goza das seguintes propriedades:

- 1) Para todo $x \in (-r, r)$ a série $\sum a_n x^n$ converge absolutamente. Com efeito, tomando ρ tal que $|x| < \rho < r$ temos $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$, e consequentemente $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < |x|/\rho < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Logo $\sum a_n x^n$ converge absolutamente, pelo teste de Cauchy.
- 2) Se $|x| > r$ então a série $\sum a_n x^n$ diverge. Com efeito, neste caso $|x| \notin R$, logo não se tem $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/|x|$ para todo n suficientemente grande. Isto significa que $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1/|x|$, e consequentemente $|a_n x^n| \geq 1$, para uma infinidade de valores de n . Logo o termo geral da série $\sum a_n x^n$ não tende a zero, e ela diverge.
- 3) Se $x = \pm r$, nada se pode dizer em geral: a série $\sum a_n x^n$ pode收敛ir ou divergir, conforme o caso.
- 4) Se existir $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ então $r = 1/L$. (Entendendo-se que $r = +\infty$ se $L = 0$.) Com efeito, para todo $\rho \in R$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos $L \leq 1/\rho$, donde $\rho \leq 1/L$. Segue-se que $r = \sup R \leq 1/L$. Supondo, por absurdo, que fosse $r < 1/L$, tomariamnos c tal que $r < c < 1/L$, donde $L < 1/c$. Pela definição de limite, teríamnos $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/c$ para todo n suficientemente grande, donde $c \in R$ e daí $c \leq r$, uma contradição. Logo $r = 1/L$.

Podemos resumir a análise feita acima no

Teorema 6. *Uma série de potências $\sum a_n x^n$, ou converge apenas para $x = 0$ ou existe r , com $0 < r \leq +\infty$, tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$ e diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$. Nos extremos $-r$ e r , a série pode收敛ir ou divergir. Se existir $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então $r = 1/L$. O número r chama-se o raio de convergência da série. Além disso, tem-se $0 < \rho < r \iff \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.*

Observação. Segue-se do Teorema 7, Capítulo 4, que se os coeficientes a_n forem diferentes de zero e existir $\lim |a_{n+1}|/|a_n| = L$, então o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$ é $r = 1/L$.

Teorema 7. Uma série de potências $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em todo intervalo compacto $[-\rho, \rho]$, onde $0 < \rho <$ raio de convergência.

Demonstração: A série $\sum a_n \rho^n$ é absolutamente convergente e, para todo $x \in [-\rho, \rho]$, tem-se $|a_n x^n| \leq |a_n| \rho^n$. Pelo teste de Weierstrass (Teorema 5), segue-se que a série $\sum a_n x^n$ converge uniformemente no intervalo $[-\rho, \rho]$. \square

Corolário. Se $r > 0$ é o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$, a função $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é contínua.

Exemplo 12. A série $\sum a_n x^n$ pode não convergir uniformemente em todo o intervalo $(-r, r)$, onde r é o raio de convergência. Isto é claro no caso da série $\sum x^n/n!$, cujo raio de convergência é infinito, para a qual $r_n(x) = \sum_{k>n} x^k/k! > x^{n+1}/(n+1)!$ quando x é positivo. Dado $\varepsilon > 0$, não importa qual n se tome, é impossível ter $r_n(x) < \varepsilon$ para todo x positivo.

Teorema 8. (Integração termo a termo.) Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ então

$$\int_\alpha^\beta (\sum a_n x^n) dx = \sum \frac{a_n}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

Demonstração: A convergência de $\sum a_n x^n$ é uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$ pois se escrevermos $\rho = \max\{|\alpha|, |\beta|\} < r$ teremos $[\alpha, \beta] \subset [-\rho, \rho]$. Logo é permitido integrar termo a termo, pelo Teorema 3. \square

Teorema 9. (Derivação termo a termo.) Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. A função $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, é derivável, com $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ e a série de potências de $f'(x)$ ainda tem raio de convergência r .

Demonstração: Seja r' o raio de convergência da série $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$, a qual converge se, e somente se, $x \cdot \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 1} n a_n x^n$

converge. Logo r' é também o raio de convergência desta última série. Abreviemos a expressão “para todo n suficientemente grande” por “ $n >> 1$ ”. Se $0 < \rho < r$ então, tomando c com $0 < \rho < c < r$, temos $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/c, n >> 1$. Por outro lado, como $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, vale $\sqrt[n]{n} < c/\rho, n >> 1$. Multiplicando as duas últimas desigualdades, vem $\sqrt[n]{|na_n|} < 1/\rho, n >> 1$. Portanto, $0 < \rho < r \Rightarrow 0 < \rho < r'$. Como é óbvio que $0 < \rho < r' \Rightarrow 0 < \rho < r$, concluímos que $r = r'$. Assim, as séries de potências $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ e $\sum_{n \geq 1} na_n x^{n-1}$ têm o mesmo raio de convergência. Fixado qualquer $x \in (-r, r)$, tomamos ρ tal que $|x| < \rho < r$. Ambas as séries convergem uniformemente em $[-\rho, \rho]$ logo, pelo Teorema 4, temos $f'(x) = \sum_{n \geq 1} na_n x^{n-1}$. \square

Corolário 1. Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$.

A função $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é de classe C^∞ . Para quaisquer $x \in (-r, r)$ e $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Em particular, $a_k = f^{(k)}(0)/k!$.

Portanto, $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = \sum a_n x^n$ em torno do ponto $x = 0$.

Corolário 2. **Unicidade da representação em Série de Potências.)** Sejam $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ séries de potências convergentes no intervalo $(-r, r)$ e $X \subset (-r, r)$ um conjunto tendo 0 como ponto de acumulação. Se $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$ para todo $x \in X$ então $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$.

Com efeito, a hipótese assegura que as funções $f, g: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \sum a_n x^n$ e $g(x) = \sum b_n x^n$, têm as mesmas derivadas, $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0), n = 0, 1, 2, \dots$. Logo $a_n = f^{(n)}(0)/n! = g^{(n)}(0)/n! = b_n$ para todo $n \geq 0$. \square

4. Funções trigonométricas

Mostraremos agora, de modo sucinto, como se podem definir precisamente as funções trigonométricas sem apelo à intuição geométrica.

As séries de potências

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{e} \quad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

têm raio de convergência infinito logo definem funções $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ambas de classe C^∞ .

É imediato que $c(0) = 1$, $s(0) = 0$, $c(-x) = c(x)$ e $s(-x) = -s(x)$. Derivando termo a termo, vem $s'(x) = c(x)$ e $c'(x) = -s(x)$.

A função $f(x) = c(x)^2 + s(x)^2$ tem derivada igual a

$$2cc' + 2ss' = -2cs + 2cs = 0,$$

logo é constante. Como $f(0) = 1$, concluimos que $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De maneira análoga se provam as fórmulas de adição

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y),$$

e

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

Basta fixar $y \in \mathbb{R}$ e definir as funções $f(x) = s(x+y) - s(x)c(y) - c(x)s(y)$ e $g(x) = c(x+y) - c(x)c(y) + s(x)s(y)$. Tem-se $f' = g$ e $g' = -f$. Daí resulta que $f^2 + g^2$ têm derivada identicamente nula, logo é constante. Como $f(0) = g(0) = 0$, segue-se que $f(x)^2 + g(x)^2 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $f(x) = g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e as fórmulas estão provadas.

Afirmamos agora que deve existir algum $x > 0$ tal que $c(x) = 0$. Do contrário, como $c(0) = 1$, teríamos $c(x) > 0$ para todo $x > 0$ e, como c é a derivada de s , a função s seria crescente na semi-reta \mathbb{R}^+ . Então, para qualquer $x > 1$ valeria $c(x) = c(1) - \int_1^x s(t)dt > 0$, donde $c(1) > \int_1^x s(t)dt > s(1)(x-1)$, a última desigualdade resultando de s ser crescente. Mas a desigualdade $c(1) > s(1)(x-1)$ para todo $x > 1$ é absurda. (Note que $s(1) > 0$ pois s é crescente.) Logo deve existir algum $x > 0$ para o qual $c(x) = 0$.

O conjunto dos números $x \geq 0$ tais que $c(x) = 0$ é fechado porque c é contínua. Logo possui um menor elemento, o qual não é zero porque $c(0) = 1$. Chamaremos $\pi/2$ este menor número positivo para o qual se tem $c(\pi/2) = 0$.

Veremos agora que as funções $c(x)$ e $s(x)$ são periódicas, com período 2π . Com efeito, a segunda fórmula de adição dá: $c(2x) = c(x)^2 - s(x)^2 = 2c(x)^2 - 1$,

logo $c(\pi) = -1$, e $c(2\pi) = 1$ e daí $s(\pi) = s(2\pi) = 0$. Novamente as fórmulas de adição mostram que $s(x + 2\pi) = s(x)$ e $c(x + 2\pi) = c(x)$, o que prova a alegação feita.

As notações usuais para estas funções são $c(x) = \cos x$ e $s(x) = \sin x$.

Este pequeno resumo justifica o uso das funções $\sin x$ e $\cos x$ em Análise. A partir daí se definem as demais funções trigonométricas da maneira habitual: $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, $\sec x = 1 / \cos x$ etc.

Em particular, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$ porque, sendo $\sin 0 = 0$, este limite é a derivada de $\sin x$ no ponto $x = 0$, a qual é igual a $\cos 0$, ou seja, 1.

5. Séries de Taylor

Quando a série de potências $\sum a_n(x - x_0)^n$ tem raio de convergência $r > 0$, diz-se que ela é a *série de Taylor*, em torno do ponto x_0 , da função $f: (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$. Esta denominação se deve ao fato de que a soma dos primeiros $n+1$ termos desta série constitui o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto x_0 . Veremos agora as séries de Taylor de algumas funções conhecidas. Às vezes a série de Taylor de uma função em torno do ponto $x_0 = 0$ chama-se “Série de Maclaurin” mas não adotaremos esta terminologia.

1. Funções seno e cosseno

Suas séries de Taylor em torno do ponto $x = 0$ são

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{e} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

em virtude da própria definição dessas funções.

2. Função $1/(1 - x)$

A série de potências $1 + x + x^2 + \dots$ é uma série geométrica. Ela converge para a soma $1/(1 - x)$ quando $|x| < 1$, e diverge quando $|x| \geq 1$. Logo é a série de Taylor da função $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/(1 - x)$.

Segue-se que $1 - x + x^2 - \dots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ é a série de Taylor da função $1/(1 + x)$, convergente para $|x| < 1$ e divergente se $|x| \geq 1$.

Também resulta daí que $1 - x^2 + x^4 - \dots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}$ é a série de

Taylor da função $g(x) = 1/(1+x^2)$ em torno do ponto $x = 0$. Neste caso, a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ porém sua série de Taylor converge apenas no intervalo $(-1, 1)$. (Este fenômeno está ligado ao fato de que a função de variável complexa $g(z) = 1/(1+z^2)$ não está definida nos pontos $z = \pm\sqrt{-1}$, ambos de valor absoluto igual a 1.)

Se desejarmos desenvolvimentos finitos poderemos escrever respectivamente

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1. \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}, \quad x \neq -1. \\ \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Em cada uma das expressões acima, a última parcela é o resto da fórmula de Taylor. Com efeito, se chamarmos r, s e t essas últimas parcelas, vemos facilmente que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t(x)}{x^{2n}} = 0.$$

3. Função exponencial

A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$, logo a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, é de classe C^∞ . Derivando termo a termo, vemos que $f'(x) = f(x)$. Como $f(0) = 1$, segue-se do Teorema 10, Capítulo 11, que $f(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

é a série de Taylor da função exponencial em torno do ponto $x = 0$.

4. Função logaritmo

Como $\log x$ não tem sentido para $x = 0$, consideraremos a função $\log(1+x)$, definida para todo $x > -1$. Por definição, $\log(1+x) = \int_0^x dt/(1+t)$. Integrando termo a termo a série de Taylor de $1/(1+x)$, vista acima, obtemos

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

série de Taylor de $\log(1 + x)$, convergente no intervalo aberto $(-1, 1)$, pois 1 é seu raio de convergência. Acontece que, pelo Teorema de Leibniz (Teorema 3, Capítulo 4) esta série converge também para $x = 1$ (mas diverge para $x = -1$). Seria interessante saber se a função $f: (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} x^n / n$, a qual coincide com $\log(1 + x)$ quando $|x| < 1$, também coincide com $\log(1 + x)$ no ponto $x = 1$. Isto é verdade, conforme mostraremos agora. Com efeito, integrando termo a termo o desenvolvimento finito de $1/(1+x)$ visto acima, obtemos (indo até a ordem n em vez de $n + 1$):

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

onde

$$r_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt.$$

Para $x = 1$, temos $|r_n(1)| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

Portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(1) = 0$. Segue-se que

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

Esta é uma expressão interessante de $\log 2$ como soma de uma série alternada. Ela mostra que a série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n / n$ representa $\log(1 + x)$ no intervalo $(-1, 1]$.

5. Função arctg x

Sabe-se do Cálculo que a função $\operatorname{tg}: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma bijeção C^∞ , com derivada positiva, e que sua inversa $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ tem derivada igual a $1/(1+x^2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O desenvolvimento de $\operatorname{tg} x$ em série de Taylor é complicado, enquanto o de $\operatorname{arctg} x$ é bem mais simples, por isso o exporemos agora. Temos $\operatorname{arctg} x = \int_0^x dt / (1 + t^2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Quando $|x| < 1$, podemos integrar termo a termo o desenvolvimento de Taylor de $1/(1 + x^2)$ visto acima, obtendo

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Este argumento (integração termo a termo) garante a validade da igualdade acima quando $-1 < x < 1$. Acontece que a série em questão converge também nos pontos $x = 1$ e $x = -1$. É natural, portanto, esperar que o desenvolvimento de

arctg x em série de Taylor seja válido em todo o intervalo fechado $[-1, 1]$. Para ver isto, integramos o desenvolvimento finito de $1/(1+x^2)$ obtendo

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + r_n(x),$$

onde $r_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$.

Para todo $x \in [-1, 1]$ temos

$$|r_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2n} dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1},$$

logo $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$, portanto vale a igualdade

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

para todo $x \in [-1, 1]$. Em particular, para $x = 1$, obtemos a fórmula de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

6. Exercícios

Seção 1: Convergência simples e convergência uniforme

- Mostre que a seqüência de funções $f_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$ converge simplesmente. Determine a função limite, mostre que a convergência não é uniforme.
- Prove que a seqüência do exercício anterior converge uniformemente em todos os intervalos do tipo $[0, 1-\delta]$ e $[1+\delta, +\infty)$, $0 < \delta < 1$.
- Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$ converge quando x pertence ao intervalo $(-1, 1]$. A convergência é uniforme em todos os intervalos do tipo $[-1+\delta, 1-\delta]$, onde $0 < \delta < 1/2$.
- A fim de que a seqüência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ converja uniformemente, é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$. (Critério de Cauchy.)
- Se a seqüência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f: X \rightarrow$

\mathbb{R} , prove que f é limitada se, e somente se, existem $K > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| \leq K$ para todo $x \in X$.

6. Se a seqüência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n \geq \dots$ e $f_n \rightarrow 0$ uniformemente em X , prove que a série $\sum (-1)^n f_n$ converge uniformemente em X .
7. Se $\sum |f_n(x)|$ converge uniformemente em X , prove que $\sum f_n(x)$ também converge uniformemente em X .

Seção 2: Propriedades da convergência uniforme

1. Se $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$ uniformemente no conjunto X , prove que $f_n + g_n \rightarrow f + g$ uniformemente em X . Prove ainda que se f e g forem limitadas então $f_n \cdot g_n \rightarrow f \cdot g$ uniformemente em X . Finalmente, se existir $c > 0$ tal que $|g(x)| \geq c$ para todo $x \in X$, prove que $1/g_n \rightarrow 1/g$ uniformemente em X .
2. Seja $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau ≥ 1 . Mostre que a seqüência de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = p(x) + 1/n$, converge uniformemente para p em \mathbb{R} porém (f_n^2) não converge uniformemente para p^2 .
3. Seja a seqüência de funções $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)/\sqrt{n}$. Prove que (f_n) converge uniformemente para 0 mas a seqüência das derivadas f'_n não converge em ponto algum do intervalo $[0, 1]$.
4. Mostre que a seqüência de funções $g_n(x) = x + x^n/n$ converge uniformemente no intervalo $[0, 1]$ para uma função derivável g e a seqüência das derivadas g'_n converge simplesmente em $[0, 1]$ mas g' não é igual a $\lim g'_n$.
5. Seja $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínua. Se a seqüência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para f , com $f(X) \subset Y$ e $f_n(X) \subset Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, prove que $g \circ f_n \rightarrow g \circ f$ uniformemente em X . Analise também a questão mais simples $f_n \circ g \rightarrow f \circ g$.
6. Sejam X compacto, U aberto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(X) \subset U$. Se uma seqüência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para f , prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow f_n(X) \subset U$.
7. Se uma seqüência de funções contínuas $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente num conjunto denso $D \subset X$, prove que (f_n) converge uniformemente em X .
8. A seqüência de funções $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1 - x)^n$, converge,

porém não uniformemente. Mostre que, apesar disso, vale

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n \right).$$

9. Dada uma seqüência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, suponha que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c < 1$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Prove que $\sum |f_n(x)|$ e $\sum f_n(x)$ convergem uniformemente em X .
10. No exercício anterior, suponha que $f_n(x) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$ e, em vez de $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c < 1$, suponha $|f_{n+1}(x)/f_n(x)| \leq c < 1$ para todo $x \in X$ e todo n suficientemente grande. Obtenha a mesma conclusão.

Seção 3: Séries de potências

1. Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n(x - x_0)^n$. Prove que se $r \in \mathbb{R}^+$ então $r = 1/L$, onde L é o maior valor de aderência da seqüência limitada ($\sqrt[n]{|a_n|}$). Assim, $r = 1/(\limsup \sqrt[n]{|a_n|})$.
2. Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$, prove que as séries de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$$

têm ambas raio de convergência igual a $1/\sqrt{L}$.

3. Determine o raio de convergência de cada uma das séries seguintes:

$$\sum a^{n^2} x^n, \quad \sum a^{\sqrt{n}} x^n \quad \text{e} \quad \sum n^{\frac{\log n}{n}} x^n.$$

4. Prove que a função $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, onde r é o raio de convergência desta série, é uma função par (respectivamente, ímpar) se, e somente se, $a_n = 0$ para todo n ímpar (respectivamente, par). (Ver Exercício 2.4, Cap. 8.)
5. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências cujos coeficientes são determinados pelas igualdades $a_0 = a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Mostre que o raio de convergência desta série é igual a $(-1 + \sqrt{5})/2$.
6. Prove que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $f'' + \frac{f'}{x} + f = 0$ para todo $x \neq 0$.

Sugestões e Respostas

Cada uma das doze seções deste capítulo tem o mesmo título de um dos doze capítulos anteriores e contém soluções para exercícios propostos naquele capítulo. Em cada uma delas, a notação $p.q$ significa o q -ésimo exercício da seção p do capítulo correspondente.

1. Conjuntos finitos e infinitos

- 1.2. O conjunto A dos múltiplos de m maiores do que n não é vazio pois $(n+1)m \in A$. Seja $(q+1)m$ o menor elemento de A . Se n não é múltiplo de m , $qm < n < (q+1)m$, logo $n = qm + r$, com $r < m$. Reciprocamente, se $n = qm + r$ com $r < m$ então $(q+1)m$ é o menor elemento de A , logo q está determinado univocamente, juntamente com $r = n - mq$.
- 1.3. Seja k o menor elemento de X . Se $n \in X$ então $n \geq k$. Assim, ou n é múltiplo de k ou $n = qk + r$ com $r < k$. Ora, n e qk pertencem a X , logo $r \in X$, o que é absurdo pois k é o menor elemento de X . Assim todo $n \in X$ é múltiplo de k .
- 1.4. $n < x < n+1 \Rightarrow x = n+p$, $p \in \mathbb{N} \Rightarrow n+p < n+1 \Rightarrow p < 1$, absurdo.
- 1.5. Seja $X \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in X$ e $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$. Se $X \neq \mathbb{N}$, tome $k =$ menor elemento de $\mathbb{N} - X$. Como $1 \in X$, tem-se $k = p+1$, com $p < k$ logo $p \in X$. Sendo $p+1 = k \notin X$, chega-se a uma contradição.
- 2.1. Podemos supor $Y \subset X \subset I_n$. Se fosse $\text{card } Y = m > n$, existiria uma bijeção entre I_m e sua parte própria Y .
- 2.2. Se $Y = X \cup \{a\}$ onde $a \notin X$ então $\wp(Y)$ é formado pelas partes de Y que não contêm a mais as que contêm a . As primeiras constituem $\wp(X)$ e as outras são em mesmo número que as primeiras, logo $\wp(Y) = 2\wp(X)$. Esta é a base da indução sobre o número de elementos.
- 2.3. Se $X = X' \cup \{a\}$, $a \notin X'$ então para cada função $f': X' \rightarrow Y$ há n maneiras de estendê-la a uma função $f: X \rightarrow Y$, correspondentes às n imagens possíveis $f(a) \in Y$. Logo

$\text{card } F(X; Y) = \text{card } F(X'; Y) \times n$. Isto fornece a base para a indução em m .

- 3.3. Use a idéia de Euclides: supondo P finito, considere o produto de todos os números primos, some 1 a esse produto e obtenha um número n , o qual não pode ser primo, mas deve possuir um divisor primo. Chegue a uma contradição.
- 3.4. Tome $X_n = \mathbb{N} - I_n$ =conjunto dos números naturais maiores do que n . Então $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ significa que a é maior do que todos os números naturais.
- 4.1. Para a injetividade de f use a unicidade da decomposição em fatores primos. Para a sobrejetividade, dado $k \in \mathbb{N}$, seja m o maior número natural tal que k é divisível por 2^m . Então $k = 2^m \cdot l$, onde l é ímpar, logo $l = 2n - 1$.
- 4.2. Tome $g = \pi \circ \varphi$, onde $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é sobrejetiva e $\pi(m, n) = n$.
- 4.3. Use o exercício anterior.
- 4.4. A função $f: \wp_n \rightarrow \mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$, definida por $f(X) = (m_1, \dots, m_n)$ se $X = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_n\}$, é injetiva, portanto \wp_n é enumerável, logo $\wp = \bigcup_{n=1}^{\infty} \wp_n$ também é.
- 4.5. Interprete cada subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ como uma seqüência de zeros e uns, na qual o n -ésimo termo é 1 se $n \in X$ e 0 se $n \notin X$.
- 4.6. $X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$.

2. Números reais

- 2.2. $x = x - y + y \Rightarrow |x| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$. Analogamente, $|y| - |x| \leq |x - y|$, logo $\|x\| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leq |x - y|$.
- 2.5. Não use indução. Escreva $(1+x)^{2n} = (1+2x+x^2)^n$ e use a desigualdade de Bernoulli.
- 2.6. Segue-se de 2.2.
- 2.7. Note que $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, onde $a = \sum y_i^2$, $b = 2 \sum x_i y_i$, $c = \sum x_i^2$.
- 3.3. Seja $A = \sup f$. Tem-se $f(x) \leq A$, donde $f(x)^2 \leq A^2$, para todo $x \in X$, logo $\sup(f^2) \leq A^2$. Por outro lado, se $c < A^2$ então $\sqrt{c} < A$, logo existe $x \in X$ com $\sqrt{c} < f(x) \leq A$ e daí $c < f(x)^2 \leq A^2$. Portanto $\sup(f^2) = A^2$.
- 3.4. De $x < (2-a^2)/(2a+1)$ resulta $a^2 + 2ax + x < 2$. Como $x < 1$, tem-se $x^2 < x$, logo $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 < a^2 + 2ax + x < 2$. Por outro lado, de $y < (b^2-2)/2b$ vem $b^2 - 2by > 2$ e daí resultam $(b-y)^2 = b^2 - 2by + y^2 > 2$ e $b(b-2y) > 2$, donde $b - y > b - 2y > 0$. Estes fatos dizem que se $X = \{a > 0; a^2 < 2\}$ então $c = \sup X$ não pertence a X nem ao conjunto $Y = \{b > 0; b^2 > 2\}$. Logo $c^2 = 2$.
- 3.5. A correspondência que associa ao polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ a lista (a_0, a_1, \dots, a_n) é uma bijeção entre o conjunto P_n dos polinômios de coeficientes inteiros

e grau $\leq n$ e o produto cartesiano $\mathbb{Z}^{n+1} = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$, logo P_n é enumerável. Daí o conjunto $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ dos polinômios com coeficientes inteiros é enumerável. Para cada número algébrico α , escolha, de uma vez por todas, um polinômio p_α de coeficientes inteiros que tenha α como raiz. A correspondência $\alpha \mapsto p_\alpha$ define uma função do conjunto A dos números algébricos reais no conjunto enumerável P , tal que a imagem inversa de cada elemento de P é finita. Logo A é enumerável.

- 3.6. Sejam $\alpha = \inf I$ e $\beta = \sup I$, convencionando que $\alpha = -\infty$ (respect., $\beta = +\infty$) se I for ilimitado inferiormente (respect. superiormente). Basta provar que $(\alpha, \beta) \subset I$. Ora $x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha < x < \beta \Rightarrow$ (pela definição de inf. e sup.) existem $a, b \in I$ com $a < x < b$, logo, pela hipótese, $x \in I$.

3. Seqüências de números reais

- 1.2. Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$. Tome $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$. Se $n = 2k$, então $n > n_0 \Rightarrow 2k > 2n_1 \Rightarrow k > n_1 \Rightarrow |z_n - a| = |x_k - a| < \varepsilon$. Se $n = 2k - 1$, então $n > n_0 \Rightarrow 2k - 1 > 2n_2 - 1 \Rightarrow k > n_2 \Rightarrow |z_n - a| = |y_k - a| < \varepsilon$. Portanto $\lim z_n = a$.
- 1.3. Basta notar que $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$.
- 1.5. Para o conjunto B , tome uma decomposição $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \dots$ onde os \mathbb{N}_k são infinitos 2 a 2 disjuntos e ponha $x_n = k$ se $n \in \mathbb{N}_k$. Para o conjunto C , tome uma enumeração $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ dos números racionais do intervalo $[0, 1]$.
- 1.6. Para a suficiência, tome sucessivamente ε igual a $1, 1/2, 1/3, \dots$ e obtenha $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ com $|x_{n_k} - a| < 1/k$.
- 2.3. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $|x_n - a| \geq \varepsilon$ para um conjunto infinito \mathbb{N}' de valores de n . Por Bolzano-Weierstrass, a subseqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ possui uma subseqüência convergente: $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ e $\lim_{n \in \mathbb{N}''} x_n = b$. Tem-se $|b - a| \geq \varepsilon$ logo $b \neq a$.
- 2.4. Seja a o único valor de aderência de (x_n) . Tem-se $\lim x_n = a$ em virtude do exercício anterior.
- 2.5. A seqüência dada tem o único valor de aderência 0 mas não converge pois é ilimitada.
- 2.6. Seja $a < b$. Como a média aritmética é maior do que a média geométrica, tem-se $a < x_1 < x_2 < \dots < y_2 < y_1 < b$. Logo existem $x = \lim x_n$ e $y = \lim y_n$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ em $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$ vem $y = (x + y)/2$, donde $x = y$.
- 2.7. (a) Tomando $\varepsilon = 1$, vê-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - a| < 1$ para todo $m > n_0$, onde $a = x_{n_0+1}$. Então os termos da seqüência pertencem ao conjunto $\{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup [a - 1, a + 1]$, que é limitado.
- (b) Se $\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = a$ e $\lim_{n \in \mathbb{N}''} x_n = b$ com $|a - b| = 3\varepsilon > 0$ então existem

índices m e n arbitrariamente grandes tais que $|x_m - a| < \varepsilon$ e $|x_n - b| < \varepsilon$. Como $3\varepsilon = |a - b| \leq |a - x_m| + |x_m - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon + |x_m - x_n|$, donde $|x_m - x_n| > \varepsilon$, conclui-se que (x_n) não é uma seqüência de Cauchy.

(c) Segue-se dos ítems anteriores e do exercício 2.4.

3.1. Observe que $1 < \sqrt[n+1]{n} < \sqrt[n]{n}$.

3.3. A seqüência é crescente pois $x_1 < x_2$ e, supondo $x_{n-1} < x_n$ vem $x_n^2 = a + x_{n-1} < a + x_n = x_{n+1}^2$ donde $x_n < x_{n+1}$. Além disso, se c é a raiz positiva da equação $x^2 - x - a = 0$, ou seja, $c^2 = a + c$, tem-se $x_n < c$ para todo n . Isto é verdade para $n = 1$ e, de $x_n < c$ resulta $x_{n+1}^2 = a + x_n < a + c = c^2$ logo $x_{n+1} < c$. Portanto existe $\lim x_n$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ na igualdade $x_{n+1}^2 = a + x_n$ vê-se que $\lim x_n = c$.

3.5. Note que $x_2 = 1/(a + x_1)$ e $x_3 = 1/(a + x_2) = (a + x_1)/(a^2 + ax_1 + 1)$. Tem-se $x_1 > c = 1/(a + c) > 1/(a + x_1) = x_2$. Além disso, $x_1 > x_2 = 1/(a + x_1) \Rightarrow x_1(a + x_1) > 1 \Rightarrow$ (multiplicando por a e somando x_1) $\Rightarrow x_1(a^2 + ax_1 + 1) > a + x_1 \Rightarrow x_1 > (a + x_1)/(a^2 + ax_1 + 1)$, logo $x_1 > x_3 > c > x_2$. Analogamente se vê que $x_1 > x_3 > c > x_4 > x_2$, e assim por diante. Portanto existem $\lim x_{2n-1} = \xi$ e $\lim x_{2n} = \eta$. A relação $x_{n+2} = (a + x_n)/(a^2 + ax_n + 1)$, por passagem ao limite, fornece $\xi = (a + \xi)/(a^2 + a\xi + 1)$ e $\eta = (a + \eta)/(a^2 + a\eta + 1)$, logo $\xi^2 + a\xi - 1 = 0$ e $\eta^2 + a\eta - 1 = 0$. Como ξ e η são positivos, vem $\xi = \eta = c$.

3.6. Observe que $y_{n+1} = a + x_n$.

3.7. Basta observar que $x_{n+1} = 1/(1 + x_n)$.

4.1. Pelo Exemplo 9, dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow n! > A^n \Rightarrow \sqrt[n]{n!} > A$ logo $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

4.2. Lembre que $\sqrt{A} - \sqrt{B} = (A - B)/(\sqrt{A} + \sqrt{B})$.

4.3. Para todo n suficientemente grande, $n!/(n^k \cdot a^n) > n!/(a^n \cdot a^n) = n!/(a^2)^n$ logo $\lim_{n \rightarrow \infty} n!/(n^k \cdot a^n) = +\infty$. Pondo $x_n = (a^n \cdot n!)/n^n$, obtemos $x_{n+1}/x_n = a \cdot (n/(n+1))^n$, portanto $\lim(x_{n+1}/x_n) = a/e$. Segue-se do Exemplo 8 que $\lim x_n = +\infty$ se $a > e$ e $\lim x_n = 0$ se $a < e$. Quanto a $y_n = n^k \cdot x_n = (n^k \cdot a^n \cdot n!)/n^n$, evidentemente $\lim y_n = +\infty$ se $a > e$. Quando $a < e$, o quociente $y_{n+1}/y_n = [(n+1)/n]^k \cdot (x_{n+1}/x_n)$ tem limite $a/e < 1$, logo $\lim y_n = 0$.

4.4. Observe que $[\log(n+1)/\log n] - 1 = \log(1 + 1/n)/\log n$ tende a zero.

4.5. Sejam $X_n = x_{n+1} - x_n$ e $Y_n = y_{n+1} - y_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, os números $X_p/Y_p, \dots, X_{p+k}/Y_{p+k}$ pertencem ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Segue-se do Exercício 2.8, Capítulo 2, que $(X_p + \dots + X_{p+k})/(Y_p + \dots + Y_{p+k}) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, ou seja, $(x_{p+k+1} - x_p)/(y_{p+k+1} - y_p) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para este valor fixo de p e todo $k \in \mathbb{N}$. Divida numerador e denominador por y_{p+k+1} , faça $k \rightarrow \infty$ e conclua que $\lim(x_n/y_n) = a$.

4.6. Conseqüência imediata do exercício anterior.

4. Séries numéricas

- 1.1. Observe que $b_n = \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n$.
- 1.4. Agrupe os termos um a um, dois a dois, quatro a quatro, oito a oito, etc. e compare com a série harmônica.
- 1.5. Use o método do Exemplo 5.
- 1.6. Para n suficientemente grande, $\log n < \sqrt{n}$.
- 1.7. Observe que $n \cdot a_{2n} \leq a_{n+1} + \dots + a_{2n} \leq a_{n+1} + \dots = s - s_n \rightarrow 0$, logo $na_{2n} \rightarrow 0$ e daí $(2n)a_{2n} \rightarrow 0$. Também $n \cdot a_{2n-1} \leq a_n + \dots + a_{2n-1} \leq a_n + \dots = s - s_{n-1} \rightarrow 0$, logo $n \cdot a_{2n-1} \rightarrow 0$ donde $2n \cdot a_{2n-1} \rightarrow 0$ e $(2n-1)a_{2n-1} \rightarrow 0$. Assim, quer n seja par quer seja ímpar, vale $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$.
- 2.4. Observe que $s_{2p} < s_{4p} < s_{6p} < \dots < s_{5p} < s_{3p} < s_p$, que $2np \leq i \leq (2n+1)p \Rightarrow s_{2np} \leq s_i \leq s_{(2n+1)p}$ e, finalmente, que $s_{(2n+1)p} - s_{2np} < p \cdot \frac{1}{2np} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$.
- 2.5. Sejam $|b_n| \leq B$ para todo $n \geq 0$ e $\sum |a_n| = A$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |b_n| < \varepsilon/2A$ e $|a_n| + |a_{n+1}| + \dots < \varepsilon/2B$. Então $n > 2n_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |c_n| &= |a_0 b_n + \dots + a_{n_0} b_{n-n_0} + a_{n_0+1} b_{n-n_0-1} + \dots + a_n b_0| \\ &\leq (|a_0| + \dots + |a_{n_0}|) \frac{\varepsilon}{2A} + (|a_{n_0+1}| + \dots + |a_n|) \cdot B \\ &< \frac{A \cdot \varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2B} B = \varepsilon, \text{ portanto } \lim c_n = 0. \end{aligned}$$

- 2.7. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i| |b_i| \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

- 2.8. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então qualquer soma finita S de termos a_n está compreendida entre p e $-q$, onde, na notação da demonstração do Teorema 4, $p = \sum p_n$ e $q = \sum q_n$. Reciprocamente, se as somas finitas de termos a_n formam um conjunto limitado então, em particular, as reduzidas das séries $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são limitadas, logo estas duas séries são convergentes e $\sum a_n$ converge absolutamente.
- 3.3. Não há dificuldade em usar o teste de Cauchy. O teste de d'Alembert leva a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n$. O primeiro fator tem limite zero, o segundo tem limite $1/e$, logo basta provar que o terceiro fator é limitado. Para $n \geq 3$, temos $[(n+1)/n]^n < n$ portanto $(n+1)^n < n^{n+1}$ e, tomando logarítmos, $n \cdot \log(n+1) < (n+1) \log n$, donde

$\log(n+1)/\log n < (n+1)/n$. Então $(\log(n+1)/\log n)^n < [(n+1)/n]^n$, portanto $\lim(a_{n+1}/a_n) = 0$.

3.4. Ponha $z_n = x_1 x_2 \dots x_n$ e use o Teorema 7.

3.5. $-1 < x < 1$, $x = 0$, $-\infty < x < +\infty$, $x = 0$, $-1 \leq x \leq 1$.

4.1. Some os primeiros termos positivos até que, pela primeira vez, a soma seja $\geq |\text{primeiro termo negativo}| + 1$ e depois some um só termo negativo. Em seguida some os termos positivos, em sua ordem, até que a soma pela primeira vez seja $\geq |\text{segundo termo negativo}| + 2$ e aí some um só termo negativo. Prossiga. Essa ordenação dos termos faz a soma da série ficar $+\infty$. Analogamente para $-\infty$.

4.2. Após cada termo positivo ponha os 4 primeiros negativos ainda não usados.

4.3. (a) Dado $\varepsilon > 0$, seja $J_1 \subset \mathbb{N}$ finito tal que $J_1 \subset J \subset \mathbb{N}$, J finito, implique em $|s - \sum_{n \in J} a_n| < \varepsilon$. Tome $J_0 \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\varphi(J_0) = J_1$. Então $J \supset J_0 \Rightarrow \varphi(J) \supset \varphi(J_0) = J_1$. Portanto $J_0 \subset J \subset \mathbb{N}$, J , finito implicam

$$\left| s - \sum_{n \in J} b_n \right| = \left| s - \sum_{n \in J} a_{\varphi(n)} \right| = \left| s - \sum_{m \in \varphi(J)} a_m \right| < \varepsilon.$$

(b) Por simplicidade, para cada $J \subset \mathbb{N}$ finito, seja $s_J = \sum_{n \in J} a_n$. Tendo em vista o Exercício 2.8, basta provar que o conjunto das somas s_J , $J \subset \mathbb{N}$ finito, é limitado. Ora, dado $\varepsilon = 1$, existe $J_0 \subset \mathbb{N}$ finito tal que $J \supset J_0 \Rightarrow |s - s_J| < 1$. Escrevendo $\alpha = \sum_{n \in J_0} |a_n|$, vê-se que, para todo $J \subset \mathbb{N}$ finito, vale $|s - s_J| = |s - s_{J \cup J_0} - s_{J_0 - J}| < 1 + \alpha$, logo s_J pertence ao intervalo de centro s e raio $1 + \alpha$.

(c) Sejam $s = \sum a_n = u - v$, $u = \sum p_n$, $v = \sum q_n$, como na demonstração do Teorema 4. Para $J \subset \mathbb{N}$ finito, sejam $s_J = \sum_{n \in J} a_n$, $u_J = \sum_{n \in J} p_n$ e $v_J = \sum_{n \in J} q_n$, donde $s_J = u_J - v_J$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, pondo $J_0 = \{1, \dots, n_0\}$, $J \supset J_0 \Rightarrow |u - u_J| < \varepsilon/2$, $|v - v_J| < \varepsilon/2$, logo $J \supset J_0 \Rightarrow |s - s_J| \leq |u - u_J| + |v - v_J| < \varepsilon$.

5. Algumas noções topológicas

1.1. Para todo $a \in \text{int } X$ existe, por definição, $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$. Basta provar que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \text{int } X$. Se $y \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, seja δ o menor dos números positivos $y - (a - \varepsilon)$, $(a + \varepsilon) - y$. Então $(y - \delta, y + \delta) \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$, logo $y \in \text{int } X$.

1.2. Se A não fosse aberto, existiria um ponto $a \in A$ que não seria interior. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, poder-se-ia encontrar $x_n \in (a - 1/n, a + 1/n)$, $x_n \notin A$. Daí $\lim x_n = a$. Contradição.

1.5. $\text{fr } X = \{0, 1\}$, $\text{fr } Y = \{0, 1, 2\}$, $\text{fr } Z = \mathbb{R}$, $\text{fr } W = W$.

- 1.6. Sejam $a_n < b_n$ as extremidades de I_n . Então $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$. Se $\alpha = \sup a_n$ e $\beta = \inf b_n$, então $\alpha = \beta \Rightarrow \cap I_n = \{\alpha\}$ pois a interseção não é vazia. Se $\alpha < \beta$ então $\alpha < x < \beta \Rightarrow a_n < x < b_n$ para todo n logo $(\alpha, \beta) \subset I$. Por outro lado $c < \alpha \Rightarrow c < a_n$ para algum $n \Rightarrow c \notin I_n \Rightarrow c \notin I$. Analogamente $\beta < c \Rightarrow c \notin I$. Portanto $(\alpha, \beta) \subset I \subset [\alpha, \beta]$. Isto garante que I é um intervalo cujos extremos são α e β . Como os I_n são dois a dois distintos, pelo menos uma das sequências (a_n) e (b_n) , digamos a primeira, tem uma infinidade de termos distintos. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < a_{n+p} \leq \alpha < \beta \leq b_n$ logo $\alpha \in (a_n, b_n) \subset I_n$. Portanto $\alpha \in I$ e I não é um intervalo aberto.
- 2.1. Segue-se do Teorema 2 que $D \subset X$ é denso em X se, e somente se, há pontos de D em todo intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ com $x \in X$. Se n é tão grande que $k^n > 1/\varepsilon$, os intervalos $[m/k^n, (m+1)/k^n]$ têm comprimento $1/k^n < \varepsilon$ logo, se m é o menor inteiro tal que $x + \varepsilon \leq (m+1)/k^n$ certamente $m/k^n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.
- 2.2. Se $a \in \overline{X}$ então ou $a \in X$ ou toda vizinhança de a contém pontos de X e de $\mathbb{R} - X$ (a saber, o próprio a) logo $a \in \text{fr } X$.
- 2.3. Dizer que $a \notin \text{int } X$ significa afirmar que toda vizinhança de a contém pontos que não estão em X , isto é, que $a \in \overline{\mathbb{R} - X}$.
- 2.4. Sejam X aberto e $a \in A$ arbitrário. Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$. Se nenhum desses intervalos estivesse contido em A , cada um deles conteria pontos de B e daí $a \in A \cap \overline{B}$, contradição. Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$ e A é aberto. Analogamente para B . Se X é fechado e $a \in \overline{A}$ então $a \in X$. Mas não pode ser $a \in B$ pois isto faria $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Logo $a \in A$ e A é fechado. Analogamente para B .
- 2.5. Se $\text{fr } X$ é vazia então $X \supset \text{fr } X$ e $X \cap \text{fr } X = \emptyset$, logo X é fechado e aberto.
- 2.6. De $X \subset X \cup Y$ e $Y \subset X \cup Y$ vem $\overline{X} \subset \overline{X \cup Y}$ e $\overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$ logo $\overline{X \cup Y} \subset \overline{X \cup Y}$. Reciprocamente, se $a \in \overline{X \cup Y}$ então $a = \lim z_n$ com $z_n \in X \cup Y$. Para infinitos valores de m , z_m está em X (onde $a \in \overline{X}$) ou em Y (e então $a \in \overline{Y}$). Logo $a \in \overline{X \cup Y}$. Portanto $\overline{X \cup Y} \subset \overline{X \cup Y}$. Além disso, de $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$ seguem-se $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{Y}$ donde $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Se $X = [0, 1]$ e $Y = (1, 2]$ então $X \cap Y = \emptyset$ logo $\emptyset = \overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$.
- 2.7. Evidentemente, $X \cup A \subset \overline{X}$. Reciprocamente, se $a \in \overline{X}$, então ou $a \in X$ ou, caso contrário, toda vizinhança de a contém algum $x_n \neq a$. Ponha $n_1 = \text{menor } n \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_1} - a| < 1$, e uma vez definidos $n_1 < \dots < n_k$ com $|x_{n_i} - a| < 1/i$, ponha $n_{k+1} = \text{menor } n \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < 1/(k+1)$ e $< |x_{n_k} - a|$. Então $\lim x_{n_k} = a \in A$.
- 3.2. Escolha em cada intervalo I da coleção um número racional r_I . A correspondência $I \mapsto r_I$ é injetiva. Como \mathbb{Q} é enumerável, a coleção é enumerável.
- 3.3. Para cada $x \in X$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \cap X = \{x\}$. Seja $I_x =$

$(x - \varepsilon_x/2, x + \varepsilon_x/2)$. Dados $x \neq y \in X$, seja, digamos, $\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$. Se $z \in I_x \cap I_y$ então $|x - z| < \varepsilon_x/2$ e $|z - y| < \varepsilon_y/2$, logo $|x - y| \leq |x - z| + |z - y| < \varepsilon_x/2 + \varepsilon_y/2 \leq \varepsilon_y$, donde $x \in I_y$, contradição.

- 3.4. Pelos dois exercícios anteriores, todo conjunto cujos pontos são todos isolados é enumerável.
- 3.5. Se a não é ponto de acumulação de X então existe um intervalo aberto I contendo a , tal que $I \cap X \subset \{a\}$. Nenhum ponto de I pode ser ponto de acumulação de X . Logo $\mathbb{R} - X'$ é aberto. Daí, X' é fechado.
- 4.1. Se $a \notin A$ então, pelo Exercício 1.7 do Capítulo 3, existe $\varepsilon > 0$ tal que nenhum ponto do intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ pertence a A . Logo A é fechado.
- 4.3. $F_n = [n, +\infty)$ e $L_n = (0, 1/n)$.
- 4.4. Seja $\alpha = \inf\{|x - y|; x \in X, y \in Y\}$. Existem seqüências de pontos $x_n \in X$ e $y_n \in Y$ tais que $\lim |x_n - y_n| = \alpha$. Passando a uma subseqüência, se necessário, pode-se admitir que $\lim x_n = x_0 \in X$. Como $|y_n| \leq |y_n - x_n| + |x_n|$, segue-se que (y_n) é uma seqüência limitada. Passando novamente a uma subseqüência, vem $\lim y_n = y_0 \in Y$. Logo $|x_0 - y_0| = \alpha$.
- 4.5. Todo conjunto infinito limitado X admite um ponto de acumulação a . Se X é compacto, $a \in X$. Os exemplos são $X = \mathbb{N}$ e $Y = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$.
- 4.6. É fácil provar que os conjuntos dados são limitados. Para mostrar que S é fechado, suponha que $\lim(x_n + y_n) = z$, $x_n, y_n \in X$. Existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = x_0 \in X$. Então, como $y_n = (x_n + y_n) - x_n$, existe $\lim_{n \in \mathbb{N}'} y_n = y_0 \in X$ e daí $z = \lim_{n \in \mathbb{N}'} (x_n + y_n) = x_0 + y_0 \in S$. A demonstração para D, P e Q se faz de modo análogo.
- 5.1. Pertencem ao conjunto de Cantor os números $1/3 = 0,1 = 0,0222\dots$; $1/4 = 0,0202\dots$; $1/9 = 0,01 = 0,00222\dots$ e $1/10 = 0,00220022\dots$ (desenvolvimentos na base 3).
- 5.2. Mostre primeiro que, dado um número da forma $a = m/3^n$ (que na base 3 tem desenvolvimento finito), existem $x, y \in K$ tais que $x - y = a$. Depois note que, sendo K compacto, o conjunto D dos números $|x - y|$, com $x, y \in K$, é compacto. Como as frações $m/3^n$ são densas em $[0, 1]$, segue-se que $D = [0, 1]$.
- 5.4. Os extremos dos intervalos omitidos são os pontos de K que têm desenvolvimento finito em base 3. Os demais pontos de K são limites destes. (Exemplo: $0,20202\dots = \lim x_n$, onde $x_1 = 0,2; x_2 = 0,20; x_3 = 0,202$ etc.)

6. Limites de funções

- 1.2. Basta provar que se $x_n, y_n \in X - \{a\}$ e $\lim x_n = \lim y_n = a$ então $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$

$\lim f(y_n)$. Para tal, defina (z_n) pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Tem-se $\lim z_n = a$, logo $(f(z_n))$ converge e daí $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$ pois $(f(x_n))$ e $(f(y_n))$ são subsequências de $(f(z_n))$.

- 1.5. Tome $a \in \mathbb{R}$ com $\sin a = c$ e ponha $x_n = 1/(a + 2\pi n)$.
- 2.1. Basta notar que se $\lim x_n = a$ e $x_n > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então (x_n) possui uma subseqüência decrescente (convergindo para a , naturalmente).
- 2.2. O mesmo que para o exercício anterior.
- 2.5. O intervalo $[-1, 1]$. Com efeito, se $-1 \leq c \leq 1$, tome uma seqüência de números $x_n < 0$ com $\lim x_n = 0$ e $\sin(1/x_n) = c$ para todo n . (Como no Exercício 1.5.) Então $f(x_n) = c/(1 + 2^{1/x_n})$ tem limite c .
- 3.1. Escreva $p(x) = x^n[(a_0/x^n) + (a_1/x^{n-1}) + \cdots + (a_{n-1}/x) + a_n]$.
- 3.2. Quando $2\pi n - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2}$, a função $x \sin x$ assume todos os valores de $\frac{\pi}{2} - 2\pi n$ a $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Dado $c \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\pi}{2} - 2\pi n \leq c \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Logo, para todo $n \geq n_0$, existe $x_n \in [2\pi n - \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$ tal que $x_n \sin x_n = c$. Então $\lim x_n = +\infty$ e $\lim f(x_n) = c$.
- 3.3. M_t e m_t são funções monótonas de t (não-crescente e não decrescente, respectivamente), ambas limitadas. Logo existem $\lim_{t \rightarrow +\infty} M_t = L$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} m_t = l$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_t = L - l$. Como $m_t \leq f(t) \leq M_t$ para todo $t \geq a$, se $\lim \omega_t = 0$ então existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L = l$. Reciprocamente, se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $t \geq a$ tal que $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ para todo $x > t$, logo $M_t - m_t \leq 2\varepsilon$. Segue-se que $\lim M_t = \lim m_t$ e $\lim \omega_t = 0$.

7. Funções contínuas

- 1.1. Observe que $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$ e $\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$
- 1.2. $A = A_1 \cup A$ onde $A_1 = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ e $A_2 = \{x \in X; f(x) > g(x)\}$ e $F = F_1 \cap F_2$ onde $F_1 = \{x \in X; f(x) \leq g(x)\}$ e $F_2 = \{x \in X; f(x) \geq g(x)\}$.
- 1.5. Se f é descontínua no ponto $a \in \mathbb{R}$ existem $\varepsilon > 0$ e uma seqüência (x_n) com $\lim x_n = a$ e $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, pondo $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, tem-se $a \in \overline{X}$ e $f(a) \notin \overline{f(X)}$, logo $f(\overline{X}) \not\subset \overline{f(X)}$. A recíproca é evidente.
- 1.7. Certamente existem $\varepsilon > 0$ e uma seqüência de pontos $z_n \in X$ tais que $\lim z_n = a$ e $|f(z_n) - f(a)| > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe um conjunto infinito $\{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ de índices n para os quais a diferença $f(z_n) - f(a)$ tem o mesmo sinal (digamos, positivo). Então, escrevendo $x_k = z_{n_k}$, temos $f(x_k) > f(a) + \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- 2.1. Fixe $a \in I$. Pondo $A = \{x \in I; f(x) = f(a)\}$ e $B = \{x \in X; f(x) \neq f(a)\}$ tem-se

$I = A \cup B$. Como f é localmente constante, todo $x \in A$ tem uma vizinhança disjunta de B , logo $x \notin \overline{B}$. Assim $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Analogamente, $\overline{A} \cap B = \emptyset$, portanto $I = A \cup B$ é uma cisão. Como $a \in A$, segue-se que $A \neq \emptyset$ donde $A = I$ e f é constante.

- 2.2. Suponha f não-decrescente. Dado $a \in \text{int } I$, sejam $l = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Se f é descontínua no ponto a então $l < L$. Tomando $x, y \in I$ com $x < a < y$ e $z \neq f(a)$ tal que $l < z < L$, tem-se $f(x) < z < f(y)$ mas $z \notin f(I)$, logo $f(I)$ não é um intervalo. (Raciocínio análogo se a é uma das extremidades de I .)

- 2.4. Se f é descontínua no ponto $a \in I$, existem $\varepsilon > 0$ e uma seqüência de pontos $x_n \in I$ tal que $\lim x_n = a$ e (digamos) $f(x_n) > f(a) + \varepsilon$. Fixando $c \in (f(a), f(a) + \varepsilon)$, a propriedade do valor intermediário assegura, para cada $n \in \mathbb{N}$, a existência de z_n entre a e x_n tal que $f(z_n) = c$. Evidentemente o conjunto dos z_n assim obtidos é infinito. Contradição.

- 2.5. Defina $\varphi: [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = f(x + 1/2) - f(x)$. Então $\varphi(0) + \varphi(1/2) = 0$ logo existe $x \in [0, 1/2]$ tal que $f(x) = f(x + 1/2)$. No outro caso tome $\psi: [0, 2/3] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = f(x + 1/3) - f(x)$ e note que $\psi(0) + \psi(1/3) + \psi(2/3) = 0$ logo ψ muda de sinal e portanto se anula em algum ponto $x \in [0, 2/3]$.

- 3.1. Fixe arbitrariamente $a \in \mathbb{R}$. Existe $A > 0$ tal que $a \in [-A, A]$ e $|x| > A \Rightarrow f(x) > f(a)$. A restrição de f ao conjunto compacto $[-A, A]$ assume seu valor mínimo num ponto $x_0 \in [-A, A]$. Como $f(x_0) \leq f(a)$, segue-se que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- 3.2. Basta observar que o conjunto das raízes x da equação $f(x) = c$ é fechado e (como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$) limitado.

- 3.3. Como o intervalo $[a, b]$ só tem dois pontos extremos, ou o valor mínimo ou o valor máximo de f (digamos, este) será assumido num ponto c interior a $[a, b]$ e outro ponto $d \in [a, b]$. Então existe $\delta > 0$ tal que nos intervalos $[c - \delta, c]$, $(c, c + \delta)$ e (caso d não seja o extremo inferior do intervalo $[a, b]$) $[d - \delta, d]$ a função assume valores menores do que $f(c) = f(d)$. Seja A o maior dos números $f(c - \delta)$, $f(c + \delta)$ e $f(d - \delta)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existem $x \in [c - \delta, c]$, $y \in (c, c + \delta)$ e $z \in [d - \delta, d]$ tais que $f(x) = f(y) = f(z) = A$. Contradição.

- 3.4. Tome $x_0, x_1 \in [0, p]$, pontos em que $f| [0, p]$ assume seus valores mínimo e máximo.

- 3.5. Caso contrário, existiria $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $n \in \mathbb{N}$, haveria pontos $x_n, y_n \in X$ com $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > n|x_n - y_n|$. Passando a subseqüências, ter-se-ia $\lim x_n = a \in X$ e $\lim y_n = b \in X$ com $|a - b| \geq \varepsilon$ e

$$+\infty = \lim [|f(x_n) - f(y_n)| / |x_n - y_n|] = |f(b) - f(a)| / |b - a|,$$

Contradição.

- 4.1. Se X não é fechado, tome $a \in \overline{X} - X$ e considere a função contínua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/(x - a)$. Como não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, f não é uniformemente contínua. Por outro lado, \mathbb{N} não é compacto mas toda função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

- 4.2. Tome $x_n = \sqrt{(n + 1/2)\pi}$ e $y_n = \sqrt{n\pi}$. Então $\lim(x_n - y_n) = 0$ mas $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- 4.3. Para todo $x \in X$, tem-se $\varphi(x) = f(x)$ pela continuidade de f . Além disso, se $\bar{x} \in \overline{X}$ e $\bar{x} = \lim x_n$, $x_n \in X$ então $\varphi(\bar{x}) = \lim f(x_n)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Se $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{X}$ e $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$, tem-se $\bar{x} = \lim x_n$, $\bar{y} = \lim y_n$ com $x_n, y_n \in X$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tem-se $|x_n - y_n| < \delta$ logo $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon/2$ e daí $|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})| = \lim |f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Portanto $\varphi: \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.
- 4.4. Seja $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $B > 0$ tal que $x \geq B \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/4$. Então $x \geq B$, $y \geq B \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L| + |L - f(y)| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$. Analogamente, existe $A > 0$ tal que $x \leq -A$, $y \leq -A \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Por outro lado, como $[-A, B]$ é compacto, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in [-A, B]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Se $x < -A$ e $y \in [-A, B]$, com $|x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(-A)| + |f(-A) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, porque $|-A - y| < |x - y| < \delta$. Analogamente, $x > B$, $y \in [-A, B]$ e $|x - y| < \delta$ implicam $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Logo f é uniformemente contínua.

8. Derivadas

- 1.1. Escreva $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x)$ como no Teorema 1 e defina $\eta: X \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $\eta(x) = [f'(a) + r(x)/(x - a)] = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se $x \neq a$ e $\eta(a) = f'(a)$. A continuidade de η no ponto a segue-se do Teorema 1.
- 1.3. Note que
- $$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = t_n \cdot \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} + (1 - t_n) \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a},$$
- onde $0 < t_n < 1$ para todo n . Basta tomar $t_n = (y_n - a)/(y_n - x_n)$. Na definição de derivada, as secantes que tendem para a tangente no ponto $(a, f(a))$ passam todas por este ponto. Aqui, ambas extremidades variam.
- 1.4. Tome $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Ponha $x_n = 1/\pi n$ e $y_n = 1/(n + 1/2)\pi$.
- 1.5. Recaia no Exercício 1.3. O exemplo pedido pode ser a função $f(x) = x \sin(1/x)$ ou qualquer função par ($f(-x) = f(x)$) que não possua derivada no ponto $x = 0$.
- 2.1. Pela Regra da Cadeia, as derivadas sucessivas de f para $x \neq 0$ são o produto de e^{-1/x^2} por um polinômio em $1/x$. No ponto $x = 0$ tem-se $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0$, como se vê escrevendo $1/h = y$. Supondo $f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$ tem-se $f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f^{(n)}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(1/h)}{h} \cdot e^{-1/h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} Q(1/h) \cdot e^{-1/h^2} = 0$.
- 2.5. Derive k vezes em relação a t a igualdade $f(tx) = t^k \cdot f(x)$ e obtenha $f^{(k)}(tx) \cdot x^k =$

$k!f(x)$. Faça $t = 0$ e conclua que $f(x) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

- 3.1. Tome $f(x)$ como no Exemplo 7.
- 3.2. Para fixar idéias, suponha $f''(c) > 0$. Pelo Corolário 2 do Teorema 4, existe $\delta > 0$ tal que $c - \delta < x < c < y < c + \delta \Rightarrow f'(x) < 0 < f'(y)$. Então $c - \delta < x < c \Rightarrow f(x) > f(c)$ pois se fosse $f(x) \leq f(c)$, como a derivada $f'(x)$ é negativa, o valor mínimo de f no intervalo $[x, c]$ não seria atingido nem no ponto x nem no ponto c mas num ponto $z \in (x, c)$ portanto $f'(z) = 0$, contrariando o fato de z pertencer a $(c - \delta, c)$. Analogamente se mostra que $c < y < c + \delta \Rightarrow f(y) > f(c)$. Logo c é um ponto de mínimo local. Se fosse $f''(c) < 0$, c seria ponto de máximo local.
- 3.3. Pelo Corolário 2 do Teorema 4, existe $\delta > 0$ tal que $c - \delta < x < c < y < c + \delta \Rightarrow f'(x) < 0 < f'(y)$, logo c é o único ponto crítico de f no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$.
- 3.4. $f''(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(c_n) - f'(c)}{c_n - c} = 0$ pois $f'(c_n) = f'(c) = 0$ para todo n .
- 3.5. Seja M o conjunto dos pontos de máximo local estrito de f . Para cada $c \in M$ fixemos $r_c < s_c$ racionais tais que $r_c < c < s_c$ e $x \in (r_c, s_c), x \neq c \Rightarrow f(x) < f(c)$. Se $d \in M$ é diferente de c então os intervalos (r_c, s_c) e (r_d, s_d) são diferentes porque $d \notin (r_c, s_c)$ ou $c \notin (r_d, s_d)$. Com efeito, $d \in (r_c, s_c) \Rightarrow f(d) < f(c)$ e $c \in (r_d, s_d) \Rightarrow f(c) < f(d)$. Como \mathbb{Q} é enumerável, a correspondência $c \mapsto (r_c, s_c)$ é uma função injetiva de M num conjunto enumerável. Logo M é enumerável.
- 4.1. Suponha $A < B$. Tome $\varepsilon > 0$ com $A + \varepsilon < B - \varepsilon$. Existe $\delta > 0$ tal que $c - \delta \leq x < c < y \leq c + \delta \Rightarrow g(x) < A + \varepsilon < B - \varepsilon < g(y)$. Em particular, $g(c - \delta) < A + \varepsilon$ e $g(c + \delta) > B - \varepsilon$ mas, tomando $d \neq g(c)$ no intervalo $(A + \varepsilon, B - \varepsilon)$, não existe $x \in (c - \delta, c + \delta)$ tal que $g(x) = d$. Pelo Teorema de Darboux, g não é derivada de função alguma $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.
- 4.5. Um exemplo é $f(x) = x^3$. Como cada ponto de X é limite de pontos de Y tem-se $X \subset Y$ e daí $\overline{X} \subset \overline{Y}$. Por outro lado, $Y \subset X$ pelo Teorema do Valor Médio, logo $\overline{Y} \subset \overline{X}$.
- 4.6. As hipóteses implicam que $f'(x)$ é ilimitada superior e inferiormente. Com efeito, se fosse $f'(x) \geq A$ para todo $x \in (a, b)$, a função $g(x) = f(x) - Ax$ teria derivada ≥ 0 , logo seria monótona, limitada, logo existiriam os limites de $g(x)$ (e consequentemente os de $f(x)$) quando $x \rightarrow a$ e $x \rightarrow b$. Analogamente, não se pode ter $f'(x) \leq B$ para todo $x \in (a, b)$. Assim, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, existem pontos x_1 e x_2 em (a, b) tais que $f'(x_1) < c < f'(x_2)$. Pelo Teorema de Darboux, existe $x \in (a, b)$ com $f'(x) = c$.
- 4.7. Sabe-se que f é não-decrescente. Se não fosse crescente, existiriam $x < y$ em $[a, b]$ com $f(x) = f(y)$ e então f seria constante e f' seria igual a zero no intervalo $[x, y]$.
- 4.8. Supondo, por absurdo, que existissem $a < b$ em I com $|f(b) - f(a)| = \alpha > 0$, em pelo menos uma das metades do intervalo $[a, b]$, digamos $[a_1, b_1]$, teríamos $|f(b_1) - f(a_1)| > \alpha/2$. Prosseguindo analogamente chegar-se-ia a uma seqüência de intervalos $[a_n, b_n] \supset$

- $[a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ com $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ e $|f(b_n) - f(a_n)| \geq \alpha/2^n$. Se $a_n \leq c \leq b_n$ para todo n , vale $|f'(c)| = \lim |f(b_n) - f(a_n)|/(b_n - a_n) \geq \alpha/(b-a) > 0$.

- 4.10. Para todo $x \neq c$ em (a, b) existe z entre x e c tal que $[f(x) - f(c)]/(x - c) = f'(z)$. Portanto $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)]/(x - c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(z) = L$.
- 4.11. Como f' é limitada, existem $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$. Para que valha a propriedade do valor intermediário para f , tais limites devem ser iguais a $f(a)$ e $f(b)$ respectivamente. (Cfr. solução de 4.1.)
- 4.12. $|f(x) - f(a)|/|x - a| \leq c|x - a|^{\alpha-1}$. Como $\alpha - 1 > 0$, segue-se que $f'(a) = 0$ para todo $a \in I$. Logo f é constante.
- 4.13. Observe que $[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(z_n)$ com z_n entre x_n e y_n , logo $z_n \rightarrow a$. Pela continuidade de f' no ponto a , o quociente tende para $f'(a)$.

9. Fórmula de Taylor e aplicações da derivada

- 1.1. Seja $f(x) = 1/(1-x)$, $-1 < x < 1$. Pondo $p(h) = 1 + h + \cdots + h^n$ e $r(h) = h^{n+1}/(1-h)$ tem-se $r(h) = f(h) - p(h)$. Como $p(h)$ é um polinômio de grau n e $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h^n = 0$, segue-se que $p(h)$ é o polinômio de Taylor de f no ponto 0, logo $f^{(i)}(0) = i!$ para $i = 0, 1, \dots, n$.
- 1.2. Como $f(x) = x^5 - x^{11} + \cdots + (-1)^n x^{6n+5} + (-1)^{n+1} x^{6n+11}/(1+x^6)$, segue-se que $f^{(i)}(0) = 0$ se i não é da forma $6n+5$ enquanto que $f^{(i)}(0) = (-1)^n i!$ se $i = 6n+5$. Logo $f^{(2001)}(0) = 0$ e $f^{(2003)}(0) = (-1)^{333} \cdot (2003)! = -2003!$
- 1.3. Tem-se $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$ onde $p_n(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto x_0 e, pela fórmula do resto de Lagrange, existe z entre x e x_0 tal que $r_n(x) = f^{(n+1)}(z)(x - x_0)^{n+1}/(n+1)!$, logo $|r_n(x)| \leq K|x - x_0|^{n+1}/(n+1)!$. Segue-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ para todo $x \in I$ e o resultado fica estabelecido.
- 1.4. Veja “Curso de Análise”, vol. 1, página 226.
- 1.5. Se $f \in C^2$, escreva $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + r(x)$, onde $\lim_{x \rightarrow a} r(x)/(x - a)^2 = \lim r'(x)/(x - a) = 0$. Então $\varphi(x) = f''(a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a) + r(x)/(x - a)$ e $\varphi'(x) = f''(a)/2 + r'(x)/(x - a) - r(x)/(x - a)^2$, logo $\lim_{x \rightarrow a} \varphi'(x) = f''(a)/2$. Segue-se do Exercício 4.10 do Capítulo 8 que $\varphi \in C^1$. Para $f \in C^3$, proceda de modo análogo.
- 1.6. Pela Fórmula de Taylor Infinitesimal, pondo $x = a + h$, ou seja $x - a = h$, pode-se escrever $p(a+h) = \sum_{i=0}^n (p^{(i)}(a)/i!)h^i + r(h)$, onde $r(h)$ tem suas primeiras n derivadas nulas no ponto 0. Como $r(h)$ é um polinômio de grau $\leq n$ (diferença entre dois polinômios), segue-se que $r(h)$ é identicamente nulo.

- 1.7. Seja $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Então $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes derivável no ponto a , com $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in I$ e $\varphi(a) = 0$. Então $\varphi(x) = \varphi'(a)(x - a) + \frac{1}{2}\varphi''(a)(x - a)^2 + r(x)$ com $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^2} = 0$. Daí $\varphi(x) = (x-a)^2[\frac{\varphi''(a)}{2} + \frac{r(x)}{(x-2)^2}]$. Se fosse $\varphi''(a) < 0$ existiria $\delta > 0$ tal que, para $0 < |x-a| < \delta$, a expressão dentro dos colchetes, e consequentemente $\varphi(x)$, seria < 0 . Contradição. Logo deve ser $\varphi''(a) \geq 0$, isto é, $f''(a) \geq g''(a)$.
- 2.2. Para fixar idéias, seja $f''(c) > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow f''(x) > 0$. Então f é convexa no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$.
- 2.3. A soma de duas funções convexas é convexa mas o produto, nem sempre. Exemplo: $(x^2 - 1).x^2$.
- 2.4. Se f é convexa, seja $X = \{x \in I; f(x) \leq c\}$. Dados $x, y \in X$ e $x < z < y$, tem-se $z = (1-t)x + ty$, com $0 \leq t \leq 1$. Então $f(z) = f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t(f(y)) \leq (1-t)c + tc = c$, logo $z \in X$. Assim, X é um intervalo e f é quase-convexa.
- 2.5. Sejam $c = \max\{f(x), f(y)\}$ e $z = (1-t)x + ty$ com $0 \leq t \leq 1$. Então $f(x) \leq c$, $f(y) \leq c$ e z pertence ao intervalo cujos extremos são x, y . Logo $f(z) \leq c$.
- 2.6. Se o mínimo de f é atingido no ponto a então, dados $x < y$ em $[a, b]$, tem-se $x \in [a, y]$ logo $f(x) \leq \max\{f(a), f(y)\} = f(y)$ portanto f é não-decrescente. Analogamente, se o mínimo de f é atingido no ponto b então f é não-crescente. Daí se segue que se f atinge seu mínimo no ponto $c \in (a, b)$ então f é não-crescente em $[a, c]$ e não-decrescente em $[c, b]$.
- 2.8. A existência de c decorre do Teorema do Valor Intermediário. Resta provar a unicidade. Se existissem c_1, c_2 tais que $a < c_1 < c_2 < b$ e $f(c_1) = f(c_2) = 0$, seria $c_1 = ta + (1-t)c_2$ com $0 < t < 1$. Pela convexidade de f , viria então $0 = f(c_1) \leq tf(a) + (1-t)f(c_2)$, donde $tf(a) \geq 0$, contradição.
- 3.1. Basta provar que $x \in I \Rightarrow f(x) \in I$. Ora $x \in I \Rightarrow |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - a| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - a| \leq k|x-a| + (1-k)\delta \leq k\delta + (1-k)\delta = \delta \Rightarrow f(x) \in I$.
- 3.2. $a=0,76666469$.
- 3.3. Use o Exercício 3.1.
- 3.4. Note que $|f'(x)| \leq 1/a < 1$.

10. A integral de Riemann

- 2.1. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < \varepsilon/2$. A restrição f_1 , de f ao intervalo $[1/2^n, 1]$, é uma função-escada, portanto integrável. Existe então uma partição P_1 deste intervalo tal que $S(f_1; P_1) - s(f_1; P_1) < \varepsilon/2$. A partição $P = P_1 \cup \{0\}$ do intervalo $[0, 1]$ cumpre

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon.$$

2.2. Se f é ímpar, basta provar que $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$. Ora, a cada partição P de $[0, a]$ corresponde uma partição \bar{P} de $[-a, 0]$, obtida trocando-se os sinais dos pontos de divisão. Como $f(-x) = -f(x)$, se no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P o inf e o sup de f são m_i e M_i , então, no intervalo $[-t_i, -t_{i-1}]$, o inf e o sup de f são, respectivamente; $-M_i$ e $-m_i$. Portanto $S(f; \bar{P}) = -s(f; P)$ e $s(f; \bar{P}) = -S(f; P)$. Daí resulta imediatamente a proposição. Analogamente para o caso de f par.

2.3. Evidentemente, f é descontínua nos racionais. Seja $c \in [a, b]$ irracional. Dado $\varepsilon > 0$, o conjunto dos números naturais $q \leq 1/\varepsilon$, e portanto o conjunto dos pontos $x = p/q \in [a, b]$ tais que $f(x) = 1/q \geq \varepsilon$, é finito. Seja $\delta > 0$ a menor distância de c a um desses pontos. Então $x \in (c - \delta, c + \delta) \Rightarrow f(x) < \varepsilon$ e f é contínua no ponto c . Toda soma inferior $s(f; P)$ é zero pois todo intervalo não-degenerado contém números irracionais. Logo $\underline{\int}_a^b f(x)dx = 0$. Quanto à integral superior, dado $\varepsilon > 0$, seja $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ o conjunto dos pontos de $[a, b]$ para os quais se tem $f(x_i) \geq \varepsilon/2(b - a)$. Com centro um cada x_i tome um intervalo de comprimento $< \varepsilon/2n$, escolhido de modo que esses n intervalos sejam 2 a 2 disjuntos. Os pontos a, b , juntamente com os extremos desses intervalos que estejam contidos em $[a, b]$, constituem uma partição P tal que $S(f; P) < \varepsilon$. Logo $\bar{\int}_a^b f(x)dx = 0$.

2.4. Seja $m = f(c)/2$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > m$ para todo $x \in [c - \delta, c + \delta]$. Então, para toda partição P que contenha os pontos $c - \delta$ e $c + \delta$, tem-se $s(f; P) > 2m\delta$. Segue-se que $\underline{\int}_a^b f(x)dx \geq s(f; P) > 0$.

2.5. Para toda partição P de $[a, b]$ vale $s(\varphi; P) = s(g; P)$ e $S(\varphi; P) = S(g; P) + (b - a)$. Logo $\underline{\int}_a^b \varphi(x)dx = \underline{\int}_a^b g(x)dx$ e $\bar{\int}_a^b \varphi(x)dx = \bar{\int}_a^b g(x)dx + (b - a)$. Em particular, para $g(x) = x$, $\underline{\int}_a^b f(x)dx = (b^2 - a^2)/2$ e $\bar{\int}_a^b f(x)dx = (b^2 - a^2)/2 + (b - a)$.

3.1. Para $x, y \in [a, b]$,

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq M|x - y|,$$

onde $M = \sup\{|f(t)|; t \in [a, b]\}$.

3.2. $\varphi = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|]$, $\psi = 1/2[f + g - |f - g|]$, $f_+ = \max\{f, 0\}$ e $f_- = -\min\{f, 0\}$.

3.3. A desigualdade de Schwarz para integrais resulta do fato de que, no espaço vetorial das funções contínuas em $[a, b]$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ define um produto interno. Para os leitores não familiarizados ainda com Álgebra Linear, essa desigualdade pode ser provada com o argumento usado no Capítulo 2, Exercício (2.7), considerando o trinômio do segundo grau $p(\lambda) = \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx$.

- 4.1. O conjunto dos pontos da descontinuidade de f é $\mathbb{Q} \cap [a, b]$, portanto enumerável e consequentemente de medida nula.
- 4.2. Dada a função monótona $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, basta provar que o conjunto D dos pontos de descontinuidades de f em (a, b) é enumerável. Para cada $x \in D$, sejam a_x o menor e b_x o maior dos três números $\lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$, $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$ e $f(x)$. Como f é descontínua no ponto x , tem-se $a_x < b_x$. Além disso, como f é monótona, se $x \neq y$ em D então os intervalos abertos (a_x, b_x) e (a_y, b_y) são disjuntos. Para cada $x \in D$ escolha um número racional $r(x) \in (a_x, b_x)$. A função $x \mapsto r(x)$, de D em \mathbb{Q} , é injetiva logo D é enumerável.
- 4.3. Todos os pontos do conjunto $D - D'$ são isolados, logo este conjunto é enumerável, em virtude do Exercício 3.4, Capítulo 5. Segue-se que D é enumerável, pois $D \subset (D - D') \cup D'$.
- 4.4. A função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, igual a 1 nos racionais e 0 nos irracionais, anula-se fora de um conjunto de medida nula mas não é integrável. Por outro lado, se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e igual a zero fora de um conjunto de medida nula, então em qualquer subintervalo de $[a, b]$ o ínfimo de f é zero, logo $\int_a^b f(x)dx = 0$ donde $\int_a^b f(x)dx = 0$.
- 4.5. (a) Se $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ então $\overline{X} \subset J_1 \cup \dots \cup J_k$, onde J_j é o intervalo aberto de mesmo centro e comprimento dobro de I_j . Logo $\sum |I_j| < \varepsilon \Rightarrow \sum |J_j| < 2\varepsilon$. Segue-se que \overline{X} tem conteúdo nulo.
 (b) Todo conjunto de conteúdo nulo é limitado, logo o conjunto \mathbb{Q} , que tem medida nula, não tem conteúdo nulo. Além disso, $\mathbb{Q} \cap [a, b]$, embora seja limitado, tem medida nula mas não tem conteúdo nulo, em virtude do item (a), pois seu fecho é $[a, b]$, cujo conteúdo não é nulo.
 (c) Use Borel-Lebesgue.
 (d) A diferença $g - f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é igual a zero exceto num conjunto X , de conteúdo nulo. Seja $M = \sup_X |g - f|$. Todas as somas inferiores de $|g - f|$ são zero. Quanto às somas superiores, dado $\varepsilon > 0$, existem intervalos abertos I_1, \dots, I_k tais que $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ e $|I_1| + \dots + |I_k| < \varepsilon/M$. Sem perda de generalidade, podemos supor que os intervalos I_j estão contidos em $[a, b]$. As extremidades desses intervalos, juntamente com a e b , formam uma partição P de $[a, b]$. Os intervalos dessa partição que contêm pontos de X são os I_j . Como $\sum |I_j| < \varepsilon/M$, segue-se que $S(g - f; P) < \varepsilon$. Conseqüentemente $\bar{\int}_a^b |g - f| = 0$. Daí $g - f$ é integrável e sua integral é zero. Finalmente, $g = f + (g - f)$ é integrável e $\int_a^b g = \int_a^b f$.

11. Cálculo com integrais

- 1.2. Dada qualquer partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ do intervalo cujos extremos são c e x , tem-se $f(x) - f(c) = \sum [f(t_i) - f(t_{i-1})]$. Use o Teorema do Valor Médio em cada $f(t_i) - f(t_{i-1})$ e conclua que $s(f'; P) \leq f(x) - f(c) \leq S(f'; P)$ para qualquer partição P .
- 1.3. Sabe-se que f é não-decrescente. Se f não fosse crescente existiriam $x < y$ em $[a, b]$ com

$f(x) = f(y)$. Então f seria constante e f' seria nula no intervalo $[x, y]$, que não tem conteúdo nulo.

- 1.4. $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx = f'(c).(b - a), a < c < b.$
- 1.5. Fixando $c \in (a, b)$ tem-se $\varphi(x) = \int_c^{\beta(x)} f(t)dt - \int_c^{\alpha(x)} f(t)dt$. Basta então considerar $\varphi(x) = \int_c^{\alpha(x)} f(t)dt$. Ora, $\varphi = F \circ \alpha$, onde $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. Usar a Regra da Cadeia.
- 1.7. Use integração por partes.
- 2.2. Basta provar que se f é ilimitada então, para toda partição P e todo número $A > 0$ existe uma partição pontilhada $P^* = (P, \xi)$ tal que $|\sum(f; P^*)| > A$. Com efeito, dada P , em pelo menos um dos seus intervalos, digamos $[t_{i-1}, t_i]$, f é ilimitada. Fixando primeiro os pontos ξ_j nos demais intervalos, pode-se escolher $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ de modo que $|\sum(f; P^*)| > A$.
- 2.3. Dado $\varepsilon > 0$, existe $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ tal que $|\sum(f; P^*) - L| < \varepsilon/4$ seja qual for o modo de pontilar P . Fixe P e a pontilha de 2 modos. Primeiro escolha em cada $[t_{i-1}, t_i]$ um ponto ξ_i tal que $f(\xi_i) < m_i + \varepsilon/4n(t_i - t_{i-1})$, obtendo P^* com $\sum(f; P^*) < s(f; P) + \varepsilon/4$. Analogamente, obtenha $P^\#$ tal que $S(f; P) - \varepsilon/4 < \sum(f; P^\#)$. Daí $S(f; P) - s(f; P) < \sum(f; P^\#) - \sum(f; P^*) + \varepsilon/2$. Mas, como $|\sum(f; P^*) - L| < \varepsilon/4$ e $|\sum(f; P^\#) - \sum(f; P^*)| < \varepsilon/4$, vale $\sum(f; P^\#) - \sum(f; P^*) < \varepsilon/2$. Logo $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$ e f é integrável. Evidentemente $\int_a^b f(x)dx = L$, pelo Teorema 7.
- 2.4. $\sum f(\xi_i)g(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum f(\xi_i)g(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum f(\xi_i).[g(\eta_i) - g(\xi_i)](t_i - t_{i-1})$. A segunda parcela do segundo membro tende a zero quando $|P| \rightarrow 0$ pois $|f(\xi_i)| \leq M$.
- 2.7. Pelo Exercício 2.6, $\int_a^b f(x)dx/(b - a) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(f; n)$. Como f é convexa, $M(f; n) \geq f[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + ih)]$ onde $h = (b - a)/n$. Ora, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + ih) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{a+b}{2} + \frac{b}{n} \rightarrow (a + b)/2$ quando $n \rightarrow \infty$.
- 3.1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 \geq 0$. Se existisse $c \in \mathbb{R}$ com $f(c) = 0$ então $f(x) = f(x - c)f(c) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $f(x) > 0$ qualquer que seja x . Além disso, $f(0) = f(0 + 0) = f(0).f(0)$, logo $f(0) = 1$. Também $f(-x)f(x) = f(-x + x) = f(0) = 1$, portanto $f(-x) = f(x)^{-1}$. Daí $f(p.x) = f(x)^p$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. E, para todo $q \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x/q + \dots + x/q) = f(x/q)^q$, donde $f(x/q) = f(x)^{1/q}$. Então, para todo $r = p/q \in \mathbb{Q}$, com $q \in \mathbb{N}$, tem-se $f(r) = f(p/q) = f(1/q)^p = f(1)^{p/q} = f(1)^r$. Seja $f(1) = e^a$. Segue-se que $f(r) = e^{ar}$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Como f é contínua, tem-se $f(x) = e^{ax}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A segunda parte se prova de modo análogo (v. Corolário 1 do Teorema 7) ou usando o fato de que \exp e \log são inversas uma da outra.
- 3.2. Como $x_n - x_{n+1} = \log(1+1/n) - 1/(n+1)$, basta observar que, no intervalo $[1, 1+1/n]$ o mínimo da função $1/x$ é $n/(n+1)$ logo $\log(1+1/n) = \int_1^{1+1/n} dx/x > \frac{1}{n} \frac{n}{n+1} =$

$$\frac{1}{n+1}.$$

- 3.3. Pondo $x = 1/y$, tem-se $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \log x = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\log y}{y} = 0$.
- 3.4. Pondo $x/n = y$, vem $(1+x/n)^n = (1+y)^{x/y} = [(1+y)^{1/y}]^x$ logo $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x/n)^n = \lim_{y \rightarrow 0} [(1+y)^{1/y}]^x = e^x$.

4.1. Divergente, divergente e convergente.

4.2. As três convergem.

- 4.3. A integral em questão vale $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ onde a_n é o valor absoluto de

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx.$$

Como $|\sin(x^2)| \leq 1$, tem-se $0 < a_n \leq \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}$ logo $\lim a_n = 0$. Na integral cujo valor absoluto é a_{n+1} , faça a mudança de variável $x = \sqrt{u^2 + \pi}$, $dx = u du / \sqrt{u^2 + \pi}$, note que $\sqrt{(n+1)\pi} \leq x \leq \sqrt{(n+2)\pi} \Leftrightarrow \sqrt{n\pi} \leq u \leq \sqrt{(n+1)\pi}$ e que $0 < u/\sqrt{u^2 + \pi} < 1$ e conclua que $a_{n+1} < a_n$. Pelo Teorema de Leibniz, a integral converge. A concavidade da função $|\sin(x^2)|$ no intervalo $[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}]$ mostra que a_n é maior do que a área do triângulo isósceles de base neste intervalo e altura 1. Logo a série $\sum a_n$ diverge e a integral $\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx$ também.

- 4.4. O método é o mesmo do exercício anterior. Escrevendo $a = \sqrt[4]{n\pi}$ e $b = \sqrt[4]{(n+1)\pi}$ tem-se $\int_a^b |x \sin(x^4)| dx <$ área do retângulo cuja base é o intervalo $[a, b]$ e cuja altura mede b . Como $b^4 - a^4 = \pi = (b-a)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$, essa área vale $b(b-a) = b\pi/(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ logo tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. Pondo $c^4 = (n+2)\pi$, a mudança de variável $x = \sqrt[4]{u^4 + \pi}$ mostra que $a_{n+1} = \int_b^c |x \sin(x^4)| dx = \int_a^b |u \sin(u^4)| \frac{u^2}{\sqrt[4]{(u^4 + \pi)^2}} du$ logo $a_{n+1} < a_n = \int_a^b |x \sin(x^4)| dx$. Pelo Teorema de Leibniz, a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge para o valor da integral em questão.

- 4.5. Seja $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \geq a$. Por hipótese existe $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que $x > A \Rightarrow L - \varepsilon < \varphi(x) < L$. Daí $x > 2A \Rightarrow L - \varepsilon < \varphi(x/2) < \varphi(x) < L$, donde $\varepsilon > \varphi(x) - \varphi(x/2) = \int_{x/2}^x f(t) dt \geq (x/2) \cdot f(x)$ pois f é não-crescente. Logo $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x/2) f(x) = 0$ e o resultado segue-se.

- 4.6. Defina $\varphi: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $\varphi(t) = \int_a^t f(x) dx$. Para $t \geq a$, sejam $M_t = \sup\{\varphi(x); x \geq t\}$, $m_t = \inf\{\varphi(x); x \geq t\}$ e $\omega_t = M_t - m_t$. Então $\omega_t = \sup\{|\varphi(y) - \varphi(x)|; x, y \geq t\}$. (Cfr. Lema 3, Seção 1, Capítulo 10) A condição enunciada equivale a afirmar $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_t = 0$. O resultado segue-se então do Exercício 3.3, Capítulo 6.

12. Seqüências e séries de funções

- 1.1. Tem-se $\lim f_n = f$, onde $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1/2$ e $f(x) = 1$ se $x > 1$.
- 1.2. A convergência $f_n \rightarrow f$ é monótona tanto em $[0, 1 - \delta]$ como em $[1 + \delta, +\infty)$. Pelo Teorema de Dini, a convergência é uniforme em $[0, 1 - \delta]$ porque este intervalo é compacto. No outro intervalo, basta observar que cada f_n é crescente, logo $f_n(1 + \delta) > 1 - \varepsilon \Rightarrow f_n(x) > 1 - \varepsilon$ para todo $x \geq 1 + \delta$.
- 1.3. Seja $a = 1 - \delta$. Então $x \in [-1 + \delta, 1 - \delta]$ significa $|x| \leq a < 1$. E $|x| \leq a < 1 \Rightarrow \sum_{i \geq n} |x^i(1 - x^i)| \leq \sum_{i \geq n} |x|^i \leq \sum_{i \geq n} a^i = a^n/(1 - a)$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \sum_{i \geq n} |x^i(1 - x^i)| < \varepsilon$, o que asegura a convergência uniforme. A afirmação inicial é clara.
- 1.4. A necessidade da condição é evidente. Quanto à suficiência, observar que, para todo $x \in X$, a seqüência de números reais $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, é de Cauchy logo, pelo Exercício 2.7 do Capítulo 3, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Isto define numa função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_n \rightarrow f$ simplesmente. Para provar que a convergência é uniforme, tome $\varepsilon > 0$ e obtenha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2$ para todo $x \in X$. Fixe $n > n_0$ e faça $m \rightarrow \infty$ nesta desigualdade. Conclua que $n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ para todo $x \in X$.
- 1.5. Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X então, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow ||f_n(x)| - |f(x)|| \leq |f_n(x) - f(x)| < 1$ para todo $x \in X$. Logo $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| < |f(x)| + 1$ e $|f(x)| < |f_n(x)| + 1$. Daí segue-se o resultado.
- 1.6. Adapte a demonstração do Teorema de Leibniz (Teorema 3, Capítulo 4).
- 1.7. Para todo $x \in X$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge, logo faz sentido considerar $r_n(x) = f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots$. Como $|r_n(x)| \leq R_n(x) = |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \dots$, segue-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ uniformemente em X , logo $\sum f_n$ converge uniformemente.
- 2.1. Note que $|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$, que $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)|$, e que $|1/g_n(x) - 1/g(x)| = (1/|g(x)g_n(x)|).|g_n(x) - g(x)|$.
- 2.3. Como $f'_n(x) = \sqrt{n} \cdot \cos(nx)$, só existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ quando $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0$. Levando em conta que $\cos(2nx) = \cos^2(nx) - \sin^2(nx)$, fazendo $n \rightarrow \infty$ obter-se-ia $0 = -1$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ não existe, seja qual for $x \in [0, 1]$.
- 2.6. O conjunto $f(X)$ é compacto, disjunto do conjunto fechado $\mathbb{R} - U$. Pelo Exercício 4.4 do Capítulo 5, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in X, y \in \mathbb{R} - U \Rightarrow |x - y| \geq \varepsilon$, logo $x \in X, |f(x) - z| < \varepsilon \Rightarrow z \in U$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ e todo $x \in X$. Então $f_n(X) \subset U$ se $n > n_0$.
- 2.7. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(d) - f_n(d)| < \varepsilon/2$. para

todo $d \in D$, logo $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ para todo $x \in X$ porque x é limite de uma seqüência de pontos de D . Pelo critério de Cauchy, (Exercício 1.4) (f_n) converge uniformemente em X .

- 2.8. Integre f_n por partes e faça $n \rightarrow \infty$.
- 2.9. Adapte a demonstração do teste de d'Alembert, usando, se desejar, o Teorema 5.
- 2.10. Adapte a demonstração do teste de Cauchy, usando, se desejar, o Teorema 5.
- 3.1. Sejam a, b tais que $a < 1/r < b$. Então $r < 1/a$, logo $1/a \notin R$ portanto existem infinitos índices n tais que $a \leq \sqrt[n]{|a_n|}$. Além disso, $1/b < r$, logo existe $\rho \in R$ tal que $\frac{1}{b} < \rho < r$. Assim, para todo n suficientemente grande, tem-se $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho < b$. Noutras palavras, apenas um número finito de índices n é tal que $b \leq \sqrt[n]{|a_n|}$. Daí resulta que $1/r$ é valor de aderência da seqüência $\sqrt[n]{|a_n|}$ e nenhum número maior de $1/r$ tem a mesma propriedade.
- 3.2. Tem-se $\sum a_n x^{2n} = \sum b_n x^n$ onde $b_{2n} = a_n$ e $b_{2n-1} = 0$. Assim os termos de ordem ímpar da seqüência $\sqrt[n]{|b_n|}$ são iguais a zero e os de ordem par formam a seqüência $\sqrt{\sqrt[n]{|a_n|}}$, cujo limite é \sqrt{L} . Portanto, a seqüência $(\sqrt[n]{|b_n|})$ tem dois valores de aderência: 0 e \sqrt{L} . Pelo exercício anterior, o raio de convergência de $\sum a_n x^{2n}$ é $1/\sqrt{L}$. Raciocínio análogo para a outra série.
- 3.3. O raio de convergência de $\sum a^{n^2} x^n$ é $+\infty$ se $|a| < 1$, é 0 se $|a| > 1$, e é igual a 1 se $|a| = 1$.
- 3.4. Use o Corolário 2 do Teorema 9 (unicidade da representação em série de potências).
- 3.5. Veja o Exercício 3.7, Capítulo 3.

Sugestões de leitura

Para aprofundar e complementar alguns dos tópicos abordados neste livro, a referência natural é:

1. E. L. Lima, *Curso de Análise*, vol. 1. (8^a edição). Projeto Euclides, IMPA, 1994.

Para uma apresentação de logarítmos, na mesma ordem de idéias do texto, porém em nível bem mais elementar, com numerosos exemplos e aplicações, veja-se:

2. E. L. Lima, *Logarítmos*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1994.

Outros livros que muito podem ajudar a compreender os assuntos aqui estudados, tratando-os de outras maneiras e tocando em pontos que não foram aqui considerados são:

3. R. G. Bartle, *Elementos de Análise Real*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 1983.
4. D. G. Figueiredo, *Análise I*. L.T.C. Rio de Janeiro, 1995 (2^a edição).
5. P. R. Halmos, *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. Ed. USP, São Paulo, 1970.
6. A. Hefez, *Álgebra*, vol. 1 Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro 1997 (2^a edição).
7. L. H. Jacy Monteiro, *Elementos de Álgebra*, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1969.
8. W. Rudin, *Princípios de Análise Matemática*, Ed. UnB. e Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1971.
9. M. Spivak, *Cálculo Infinitesimal*. 2 vols. Editorial Reverté, Barcelona, 1970.

São recomendáveis ainda:

10. R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, vol. 1 Interscience, N. York, 1947. (Em inglês.)
11. O. Forster, *Analysis I*. Vieweg, Braunschweig, 1987. (Em alemão.)
12. S. Lang, *Analysis I*. Addison-Wesley, Reading Massachussets, 1969. (Em inglês)

Índice

- Adição
 - de números naturais 2
 - de números reais 11
- Associatividade 11
- Axiomas de Peano 1
- Boa ordenação 3, 9
- Cisão 51
- Cobertura 54
- Comutatividade 11
- Condição de integrabilidade 122, 127
- Conjunto
 - aberto 48
 - compacto 53
 - de Cantor 55
 - de conteúdo nulo 130
 - de medida nula 127
 - denso 49
 - discreto 52
 - enumerável 6
 - fechado 49
 - finito 3
 - infinito 5
 - limitado 5, 16
- Constante
 - de Euler-Mascheroni 149
 - de Lipschitz 83
- Contagem 3
- Contração 116
- Convergência
 - de sequências 24
 - de séries numéricas 37
- monótona 155
- simples 151
- uniforme 152
- Critério de Cauchy 34
 - para integrais impróprias 150
 - para convergência uniforme 167
- Critério de comparação
 - para séries 38
 - para integrais 141
- Derivação termo a termo 157, 161
- Derivada 88
 - lateral 90
 - de ordem n 101
- Desigualdade
 - de Bernoulli 14
 - de Schwarz 130
- Diferença 12
- Distributividade 11
- Divisão 12
- Elemento
 - máximo 16
 - neutro 11
- Enumeração 6
- Expressão indeterminada 71
- Fecho 49
- Fórmula
 - de Leibniz para π 167
 - de Taylor infinitesimal 104
 - de Taylor com resto integral 115
 - do valor médio para integrais 134
- Fração contínua 15

- Função**
- característica 124
 - contínua 73
 - contínua à direita 90
 - côncava 108
 - convexa 105
 - de classe C^1, C^2 , e C^n 89, 98, 101
 - derivável 88, 89
 - descontínua 73
 - escada 124
 - exponencial 138
 - gama 145
 - integrável 122
 - lipschitziana 83
 - localmente constante 86
 - monótona 68
 - n vezes diferenciável 101
 - par e ímpar 98
 - periódica 87
 - semi-contínua 85, 86
 - trigonométrica 162
 - uniformemente contínua 82
- Homeomorfismo** 79
- Inclinação** 88
- Indução** 1, 2
- Ínfimo** 16
- Integração**
- por partes 134
 - termo a termo 157
- Integral** 122
- de Dirichlet 145
 - indefinida 132
 - inferior e superior 122
 - imprópria 142
 - absolutamente convergente 144
- Interior** 48
- Intervalo** 15
- Intervalos encaixados** 17
- Inverso aditivo e multiplicativo** 11
- liminf e limsup** 60
- Limite**
- de uma função 61
 - de uma seqüência 23
 - lateral 67
- Logaritmo** 138, 139, 141
- Maior do que** 13
- Maior elemento** 16
- Máximos e mínimos** 94
- Menor do que** 13
- Método**
- da diagonal 8
 - de Newton 111
- Módulo** 14
- Monotonicidade**
- da adição 13
 - da multiplicação 13
- Mudança de variável** 133
- Multiplicação**
- de números naturais 2
 - de números reais 11
- Norma de uma partição** 136
- Número**
- algébrico 20
 - cardinal 3
 - de ouro 35
 - inteiro 8
 - irracional 18
 - negativo 12
 - positivo 12
 - primo 10
 - racional 8
 - transcendente 21
- Operações com limites** 63
- Oscilação** 72, 119
- Parte positiva e parte negativa** 40, 143
- Partição** 119

- Partição pontilhada 137
Passagem ao limite sob o sinal da integral 155
Polinômio de Taylor 102
Ponto
 aderente 49
 crítico 95, 99
 de acumulação 52, 66
 fixo 77
 isolado 52
Primitiva 132
Produto de números 2, 11
Propriedade do valor intermediário 86
- Raio de convergência 160
Recorrência 2
Reduzida de uma série 37
Refinamento 119
Regra
 da cadeia 91
 de l'Hôpital 91
- Seqüênci a 22
 convergente 24
 crescente e decrescente 25
 de Cauchy 34
 limitada 22
 monótona 24
 periódica 33
 somável 46
- Série 37
 absolutamente convergente 39
 comutativamente convergente 43
 condicionalmente convergente 40
 de funções 151
 de Taylor das funções clássicas 164
 divergente 37
 geométrica 37
 harmônica 38
 de potências 158
- Soma
 de números naturais 2
 de números reais 11
 de Riemann 137
- Soma
 de Riemann-Stieltjes 148
 de uma série 37
 inferior 120
 parcial 37
 superior 120
Subseqüênci a 23
Subtração 12
Sucessor 1
Supremo 16
- Teorema
 de Bolzano-Weierstrass 25
 de Borel-Lebesgue 54
 de Darboux 95
 de Dini 155
 de Leibniz 40
 de Riemann 44
 de Rolle 96
 do ponto fixo de Brouwer 77
 do ponto fixo para contrações 110
 do sanduíche 27, 62
 do Valor Intermediário 76
 do Valor Médio, de Lagrange 96
 Fundamental do Cálculo 132
- Teste
 de D'Alembert 41
 de Cauchy 42
 de Weierstrass 158
- Transitividade 13
Tricotomia 13
- Unicidade
 do limite 24, 63
 da série de potências 162
- Valor absoluto 14
 de aderência 33
 médio de uma função 149
- Velocidade 88
Vizinhança 48