Cálculo 1 - HONORS - CM311

Derivadas e Propriedades

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Aula Passada...

Exemplo 1.1 (Movimento Uniformemente Variado).

Sendo $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, temos $v(t) = s'(t) = v_0 + a.t$. E também $a(t) = v'(t) = s''(t) = a =$ const..

- Derivadas de ordem superior: $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Exemplo 1.2.

Calcule as derivadas de ordem superior abaixo

a) $f^{(3)}(x)$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

b) $f^{(2024)}(x)$, $f(x) = \cos(x)$.

Aula Passada...

Exemplo 1.1 (Movimento Uniformemente Variado).

Sendo $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, temos $v(t) = s'(t) = v_0 + a.t$. E também $a(t) = v'(t) = s''(t) = a = \text{const.}$.

- Derivadas de ordem superior: $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Exemplo 1.2.

Calcule as derivadas de ordem superior abaixo

a) $f^{(3)}(x)$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

b) $f^{(2024)}(x)$, $f(x) = \cos(x)$.

Aula Passada...

Exemplo 1.1 (Movimento Uniformemente Variado).

Sendo $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, temos $v(t) = s'(t) = v_0 + a.t$. E também $a(t) = v'(t) = s''(t) = a =$ const..

- Derivadas de ordem superior: $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Exemplo 1.2.

Calcule as derivadas de ordem superior abaixo

a) $f^{(3)}(x)$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

b) $f^{(2024)}(x)$, $f(x) = \cos(x)$.

Motivações Derivadas

- Porque estudamos derivadas (de ordem superior)?
- Entender o comportamento das funções e estudar variações entre quantidades.
- Modelar fenômenos das ciências naturais e sociais.
  - Física, Astronomia, Meteorologia, Química, Biologia, Ecologia, Economia, etc.
- A modelagem pode estar relacionada em resolver uma **equação diferencial ordinária (E.D.O.)**.

Exemplo 1.3 (2a Lei de Newton).

Considere o movimento de um objeto (com massa $= 1$) ao longo de uma reta. Seja $s = s(t) =$ posição, $t =$ tempo, e $F =$ força. Temos que

$$a = a(t) = F(t) \Rightarrow v'(t) = a(t) = F(t) \Rightarrow s''(t) = v'(t) = a(t) = F(t)$$

Mais geral:

$$s''(t) = F(t, s(t), s'(t)) \quad \text{EDO de 2a ordem.}$$

Motivações Derivadas

- Porque estudamos derivadas (de ordem superior)?
- Entender o comportamento das funções e estudar variações entre quantidades.
- Modelar fenômenos das ciências naturais e sociais.
  - Física, Astronomia, Meteorologia, Química, Biologia, Ecologia, Economia, etc.
- A modelagem pode estar relacionada em resolver uma **equação diferencial ordinária (E.D.O.)**.

Exemplo 1.3 (2a Lei de Newton).

Considere o movimento de um objeto (com massa $= 1$) ao longo de uma reta. Seja $s = s(t) =$ posição, $t =$ tempo, e $F =$ força. Temos que

$a = a(t) = F(t) \Rightarrow v'(t) = a(t) = F(t) \Rightarrow s''(t) = v'(t) = a(t) = F(t)$

Mais geral:

$$s''(t) = F(t, s(t), s'(t)) \quad \text{EDO de 2a ordem.}$$

Motivações Derivadas

- Porque estudamos derivadas (de ordem superior)?
- Entender o comportamento das funções e estudar variações entre quantidades.
- Modelar fenômenos das ciências naturais e sociais.
  - Física, Astronomia, Meteorologia, Química, Biologia, Ecologia, Economia, etc.
- A modelagem pode estar relacionada em resolver uma **equação diferencial ordinária (E.D.O.)**.

Exemplo 1.3 (2a Lei de Newton).

Considere o movimento de um objeto (com massa $= 1$) ao longo de uma reta. Seja $s = s(t) =$ posição, $t =$ tempo, e $F =$ força. Temos que

$$a = a(t) = F(t) \Rightarrow v'(t) = a(t) = F(t) \Rightarrow s''(t) = v'(t) = a(t) = F(t)$$

Mais geral:

$$s''(t) = F(t, s(t), s'(t)) \quad \text{EDO de 2a ordem.}$$

Motivações Derivadas

- Porque estudamos derivadas (de ordem superior)?
- Entender o comportamento das funções e estudar variações entre quantidades.
- Modelar fenômenos das ciências naturais e sociais.
  - Física, Astronomia, Meteorologia, Química, Biologia, Ecologia, Economia, etc.
- A modelagem pode estar relacionada em resolver uma **equação diferencial ordinária (E.D.O.)**.

Exemplo 1.3 (2a Lei de Newton).

Considere o movimento de um objeto (com massa $= 1$) ao longo de uma reta. Seja $s = s(t) =$ posição, $t =$ tempo, e $F =$ força. Temos que

$$a = a(t) = F(t) \Rightarrow v'(t) = a(t) = F(t) \Rightarrow s''(t) = v'(t) = a(t) = F(t)$$

Mais geral:

$$s''(t) = F(t, s(t), s'(t)) \quad \text{EDO de 2a ordem.}$$

Motivações Derivadas

- Porque estudamos derivadas (de ordem superior)?
- Entender o comportamento das funções e estudar variações entre quantidades.
- Modelar fenômenos das ciências naturais e sociais.
  - Física, Astronomia, Meteorologia, Química, Biologia, Ecologia, Economia, etc.
- A modelagem pode estar relacionada em resolver uma **equação diferencial ordinária (E.D.O.)**.

Exemplo 1.3 (2a Lei de Newton).

Considere o movimento de um objeto (com massa $= 1$) ao longo de uma reta. Seja $s = s(t) =$ posição, $t =$ tempo, e $F =$ força. Temos que

$$a = a(t) = F(t) \Rightarrow v'(t) = a(t) = F(t) \Rightarrow s''(t) = v'(t) = a(t) = F(t)$$

Mais geral:

$$s''(t) = F(t, s(t), s'(t)) \quad \text{EDO de 2a ordem.}$$

Motivações Derivadas

- Porque estudamos derivadas (de ordem superior)?
- Entender o comportamento das funções e estudar variações entre quantidades.
- Modelar fenômenos das ciências naturais e sociais.
  - Física, Astronomia, Meteorologia, Química, Biologia, Ecologia, Economia, etc.
- A modelagem pode estar relacionada em resolver uma **equação diferencial ordinária (E.D.O.)**.

Exemplo 1.3 (2a Lei de Newton).

Considere o movimento de um objeto (com massa $= 1$) ao longo de uma reta. Seja $s = s(t) =$ posição, $t =$ tempo, e $F =$ força. Temos que

$$a = a(t) = F(t) \Rightarrow v'(t) = a(t) = F(t) \Rightarrow s''(t) = v'(t) = a(t) = F(t)$$

Mais geral:

$$s''(t) = F(t, s(t), s'(t)) \quad \text{EDO de 2a ordem.}$$

Motivações Derivadas

- Porque estudamos derivadas (de ordem superior)?
- Entender o comportamento das funções e estudar variações entre quantidades.
- Modelar fenômenos das ciências naturais e sociais.
  - Física, Astronomia, Meteorologia, Química, Biologia, Ecologia, Economia, etc.
- A modelagem pode estar relacionada em resolver uma **equação diferencial ordinária (E.D.O.)**.

Exemplo 1.3 (2a Lei de Newton).

Considere o movimento de um objeto (com massa $= 1$) ao longo de uma reta. Seja $s = s(t) =$ posição, $t =$ tempo, e $F =$ força. Temos que

$$a = a(t) = F(t) \Rightarrow v'(t) = a(t) = F(t) \Rightarrow s''(t) = v'(t) = a(t) = F(t)$$

Mais geral:

$$s''(t) = F(t, s(t), s'(t)) \quad \text{EDO de 2a ordem.}$$

Motivações Derivadas

- Porque estudamos derivadas (de ordem superior)?
- Entender o comportamento das funções e estudar variações entre quantidades.
- Modelar fenômenos das ciências naturais e sociais.
  - Física, Astronomia, Meteorologia, Química, Biologia, Ecologia, Economia, etc.
- A modelagem pode estar relacionada em resolver uma **equação diferencial ordinária (E.D.O.)**.

Exemplo 1.3 (2a Lei de Newton).

Considere o movimento de um objeto (com massa $= 1$) ao longo de uma reta. Seja $s = s(t) =$ posição, $t =$ tempo, e $F =$ força. Temos que

$$a = a(t) = F(t) \Rightarrow v'(t) = a(t) = F(t) \Rightarrow s''(t) = v'(t) = a(t) = F(t)$$

Mais geral:

$$s''(t) = F(t, s(t), s'(t)) \quad \text{EDO de 2a ordem.}$$

Motivações Derivadas

- Porque estudamos derivadas (de ordem superior)?
- Entender o comportamento das funções e estudar variações entre quantidades.
- Modelar fenômenos das ciências naturais e sociais.
  - Física, Astronomia, Meteorologia, Química, Biologia, Ecologia, Economia, etc.
- A modelagem pode estar relacionada em resolver uma **equação diferencial ordinária (E.D.O.)**.

Exemplo 1.3 (2a Lei de Newton).

Considere o movimento de um objeto (com massa $= 1$) ao longo de uma reta. Seja $s = s(t) =$ posição, $t =$ tempo, e $F =$ força. Temos que

$$a = a(t) = F(t) \Rightarrow v'(t) = a(t) = F(t) \Rightarrow s''(t) = v'(t) = a(t) = F(t)$$

Mais geral:

$$s''(t) = F(t, s(t), s'(t)) \quad \text{EDO de 2a ordem.}$$

Motivações Derivadas

- Porque estudamos derivadas (de ordem superior)?
- Entender o comportamento das funções e estudar variações entre quantidades.
- Modelar fenômenos das ciências naturais e sociais.
  - Física, Astronomia, Meteorologia, Química, Biologia, Ecologia, Economia, etc.
- A modelagem pode estar relacionada em resolver uma **equação diferencial ordinária (E.D.O.)**.

Exemplo 1.3 (2a Lei de Newton).

Considere o movimento de um objeto (com massa $= 1$) ao longo de uma reta. Seja $s = s(t) =$ posição, $t =$ tempo, e $F =$ força. Temos que

$$a = a(t) = F(t) \Rightarrow v'(t) = a(t) = F(t) \Rightarrow s''(t) = v'(t) = a(t) = F(t)$$

Mais geral:

$$s''(t) = F(t, s(t), s'(t)) \quad \text{EDO de 2a ordem.}$$

Motivações Derivadas

- Agora posso terminar a propaganda da primeira aula!
  - $C^0(\mathbb{R})$ = conjunto das funções contínuas.
  - $C^1(\mathbb{R})$ = conjunto das funções que tem derivadas contínuas.
- Podemos ver a derivada como um **operador** entre estes dois conjuntos
$$D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'.$$
- Quais são as características deste operador?
- Este operador é injetivo?
  - Não, pois $D(f) = D(f + c)$, onde c é constante.
- Este operador é sobrejetivo?
  - A pergunta anterior é equivalente à: toda função contínua é a derivada de alguma função?
  - Sim, mas a fórmula talvez não seja tão simples...
  - Este processo equivale a reverter o cálculo da derivada: anti-derivada ou integral indefinida.
  - Notação: se $g = D(f)$ escrevemos $\int g = f$.

Motivações Derivadas

- Agora posso terminar a propaganda da primeira aula!
  - $C^0(\mathbb{R})$ = conjunto das funções contínuas.
  - $C^1(\mathbb{R})$ = conjunto das funções que tem derivadas contínuas.
- Podemos ver a derivada como um **operador** entre estes dois conjuntos
$$D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'.$$
- Quais são as características deste operador?
- Este operador é injetivo?
  - Não, pois $D(f) = D(f + c)$, onde c é constante.
- Este operador é sobrejetivo?
  - A pergunta anterior é equivalente à: toda função contínua é a derivada de alguma função?
  - Sim, mas a fórmula talvez não seja tão simples...
  - Este processo equivale a reverter o cálculo da derivada: anti-derivada ou integral indefinida.
  - Notação: se $g = D(f)$ escrevemos $\int g = f$.

Motivações Derivadas

- Agora posso terminar a propaganda da primeira aula!
  - $C^0(\mathbb{R})$ = conjunto das funções contínuas.
  - $C^1(\mathbb{R})$ = conjunto das funções que tem derivadas contínuas.
- Podemos ver a derivada como um **operador** entre estes dois conjuntos
$$D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'.$$
- Quais são as características deste operador?
- Este operador é injetivo?
  - Não, pois $D(f) = D(f + c)$, onde c é constante.
- Este operador é sobrejetivo?
  - A pergunta anterior é equivalente à: toda função contínua é a derivada de alguma função?
  - Sim, mas a fórmula talvez não seja tão simples...
  - Este processo equivale a reverter o cálculo da derivada: anti-derivada ou integral indefinida.
  - Notação: se $g = D(f)$ escrevemos $\int g = f$.

Motivações Derivadas

- Agora posso terminar a propaganda da primeira aula!
  - $C^0(\mathbb{R})$ = conjunto das funções contínuas.
  - $C^1(\mathbb{R})$ = conjunto das funções que tem derivadas contínuas.
- Podemos ver a derivada como um **operador** entre estes dois conjuntos

$$D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'.$$

- Quais são as características deste operador?
- Este operador é injetivo?
  - Não, pois $D(f) = D(f + c)$, onde c é constante.
- Este operador é sobrejetivo?
  - A pergunta anterior é equivalente à: toda função contínua é a derivada de alguma função?
  - Sim, mas a fórmula talvez não seja tão simples...
  - Este processo equivale a reverter o cálculo da derivada: anti-derivada ou integral indefinida.
  - Notação: se $g = D(f)$ escrevemos $\int g = f$.

Motivações Derivadas

- Agora posso terminar a propaganda da primeira aula!
  - $C^0(\mathbb{R})$ = conjunto das funções contínuas.
  - $C^1(\mathbb{R})$ = conjunto das funções que tem derivadas contínuas.
- Podemos ver a derivada como um **operador** entre estes dois conjuntos
$$D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'.$$
- Quais são as características deste operador?
- Este operador é injetivo?
  - Não, pois $D(f) = D(f + c)$, onde c é constante.
- Este operador é sobrejetivo?
  - A pergunta anterior é equivalente à: toda função contínua é a derivada de alguma função?
  - Sim, mas a fórmula talvez não seja tão simples...
  - Este processo equivale a reverter o cálculo da derivada: anti-derivada ou integral indefinida.
  - Notação: se $g = D(f)$ escrevemos $\int g = f$.

Motivações Derivadas

- Agora posso terminar a propaganda da primeira aula!
  - $C^0(\mathbb{R})$ = conjunto das funções contínuas.
  - $C^1(\mathbb{R})$ = conjunto das funções que tem derivadas contínuas.
- Podemos ver a derivada como um **operador** entre estes dois conjuntos

$$D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'.$$

- Quais são as características deste operador?
- Este operador é injetivo?
  - Não, pois $D(f) = D(f + c)$, onde c é constante.
- Este operador é sobrejetivo?
  - A pergunta anterior é equivalente à: toda função contínua é a derivada de alguma função?
  - Sim, mas a fórmula talvez não seja tão simples...
  - Este processo equivale a reverter o cálculo da derivada: anti-derivada ou integral indefinida.
  - Notação: se $g = D(f)$ escrevemos $\int g = f$.

Motivações Derivadas

- Agora posso terminar a propaganda da primeira aula!
  - $C^0(\mathbb{R}) =$ conjunto das funções contínuas.
  - $C^1(\mathbb{R}) =$ conjunto das funções que tem derivadas contínuas.
- Podemos ver a derivada como um **operador** entre estes dois conjuntos
$$D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'.$$
- Quais são as características deste operador?
- Este operador é injetivo?
  - Não, pois $D(f) = D(f + c)$, onde c é constante.
- Este operador é sobrejetivo?
  - A pergunta anterior é equivalente à: toda função contínua é a derivada de alguma função?
  - Sim, mas a fórmula talvez não seja tão simples...
  - Este processo equivale a reverter o cálculo da derivada: anti-derivada ou integral indefinida.
  - Notação: se $g = D(f)$ escrevemos $\int g = f$.

Motivações Derivadas

- Agora posso terminar a propaganda da primeira aula!
  - $C^0(\mathbb{R})$ = conjunto das funções contínuas.
  - $C^1(\mathbb{R})$ = conjunto das funções que tem derivadas contínuas.
- Podemos ver a derivada como um **operador** entre estes dois conjuntos

$$D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'.$$

- Quais são as características deste operador?
- Este operador é injetivo?
  - Não, pois $D(f) = D(f + c)$, onde c é constante.
- Este operador é sobrejetivo?
  - A pergunta anterior é equivalente à: toda função contínua é a derivada de alguma função?
  - Sim, mas a fórmula talvez não seja tão simples...
  - Este processo equivale a reverter o cálculo da derivada: anti-derivada ou integral indefinida.
  - Notação: se $g = D(f)$ escrevemos $\int g = f$.

Motivações Derivadas

- Agora posso terminar a propaganda da primeira aula!
  - $C^0(\mathbb{R})$ = conjunto das funções contínuas.
  - $C^1(\mathbb{R})$ = conjunto das funções que tem derivadas contínuas.
- Podemos ver a derivada como um **operador** entre estes dois conjuntos
$$D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'.$$
- Quais são as características deste operador?
- Este operador é injetivo?
  - Não, pois $D(f) = D(f + c)$, onde c é constante.
- Este operador é sobrejetivo?
  - A pergunta anterior é equivalente à: toda função contínua é a derivada de alguma função?
  - Sim, mas a fórmula talvez não seja tão simples...
  - Este processo equivale a reverter o cálculo da derivada: anti-derivada ou integral indefinida.
  - Notação: se $g = D(f)$ escrevemos $\int g = f$.

Motivações Derivadas

- Agora posso terminar a propaganda da primeira aula!
  - $C^0(\mathbb{R}) =$ conjunto das funções contínuas.
  - $C^1(\mathbb{R}) =$ conjunto das funções que tem derivadas contínuas.
- Podemos ver a derivada como um **operador** entre estes dois conjuntos
$$D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'.$$
- Quais são as características deste operador?
- Este operador é injetivo?
  - Não, pois $D(f) = D(f + c)$, onde c é constante.
- Este operador é sobrejetivo?
  - A pergunta anterior é equivalente à: toda função contínua é a derivada de alguma função?
  - Sim, mas a fórmula talvez não seja tão simples...
  - Este processo equivale a reverter o cálculo da derivada: anti-derivada ou integral indefinida.
  - Notação: se $g = D(f)$ escrevemos $\int g = f$.

Motivações Derivadas

- Agora posso terminar a propaganda da primeira aula!
  - $C^0(\mathbb{R}) =$ conjunto das funções contínuas.
  - $C^1(\mathbb{R}) =$ conjunto das funções que tem derivadas contínuas.
- Podemos ver a derivada como um **operador** entre estes dois conjuntos
$$D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ D(f) = f'.$$
- Quais são as características deste operador?
- Este operador é injetivo?
  - Não, pois $D(f) = D(f + c)$, onde c é constante.
- Este operador é sobrejetivo?
  - A pergunta anterior é equivalente à: toda função contínua é a derivada de alguma função?
  - Sim, mas a fórmula talvez não seja tão simples...
  - Este processo equivale a reverter o cálculo da derivada: anti-derivada ou integral indefinida.
  - Notação: se $g = D(f)$ escrevemos $\int g = f$.

Regra da Cadeia

- Como calcular derivadas de funções compostas?

Teorema 1.4.

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ com I, J intervalos aberto. Suponha que $f(I) \subset J$. Se f é derivável em $a \in I$ e g é derivável em $f(a) \in J$ então $g \circ f$ é derivável em a e vale

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

- A demonstração não é tão simples.
- O caso geral vem da ideia de **aproximar a função por um polinômio**.

Exemplo 1.5.

Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $h(x) = (2x - 3)^{11}$.

b) $h(x) = \operatorname{sen}(x^3)$.

c) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2 . \operatorname{tg}(x) + 2)$.

d) $h(x) = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x))$.

Regra da Cadeia

- Como calcular derivadas de funções compostas?

Teorema 1.4.

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ com I, J intervalos aberto. Suponha que $f(I) \subset J$. Se f é derivável em $a \in I$ e g é derivável em $f(a) \in J$ então $g \circ f$ é derivável em a e vale

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

- A demonstração não é tão simples.
- O caso geral vem da ideia de **aproximar a função por um polinômio**.

Exemplo 1.5.

Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $h(x) = (2x-3)^{11}$.

b) $h(x) = \operatorname{sen}(x^3)$.

c) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2 . \operatorname{tg}(x) + 2)$.

d) $h(x) = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x))$.

Regra da Cadeia

- Como calcular derivadas de funções compostas?

Teorema 1.4.

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ *e* $g : J \to \mathbb{R}$ *com* I, J *intervalos aberto. Suponha que* $f(I) \subset J$*. Se* f *é derivável em* $a \in I$ *e* g *é derivável em* $f(a) \in J$ *então* $g \circ f$ *é derivável em* a *e vale*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

- A demonstração não é tão simples.
- O caso geral vem da ideia de **aproximar a função por um polinômio**.

Exemplo 1.5.

Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $h(x) = (2x - 3)^{11}$.

b) $h(x) = \operatorname{sen}(x^3)$.

c) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2 . \operatorname{tg}(x) + 2)$.

d) $h(x) = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x))$.

Regra da Cadeia

- Como calcular derivadas de funções compostas?

Teorema 1.4.

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ com I, J intervalos aberto. Suponha que $f(I) \subset J$. Se f é derivável em $a \in I$ e g é derivável em $f(a) \in J$ então $g \circ f$ é derivável em a e vale

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

- A demonstração não é tão simples.
- O caso geral vem da ideia de **aproximar a função por um polinômio**.

Exemplo 1.5.

Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $h(x) = (2x - 3)^{11}$.

b) $h(x) = \text{sen}(x^3)$.

c) $h(x) = \text{sen}(x^2 . \text{tg}(x) + 2)$.

d) $h(x) = \cos(\text{sen}(\text{tg}\, x))$.

Regra da Cadeia

- Como calcular derivadas de funções compostas?

Teorema 1.4.

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ com I, J intervalos aberto. Suponha que $f(I) \subset J$. Se f é derivável em $a \in I$ e g é derivável em $f(a) \in J$ então $g \circ f$ é derivável em a e vale

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

- A demonstração não é tão simples.
- O caso geral vem da ideia de **aproximar a função por um polinômio**.

Exemplo 1.5.

Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $h(x) = (2x - 3)^{11}$.

b) $h(x) = \text{sen}(x^3)$.

c) $h(x) = \text{sen}(x^2 . \text{tg}(x) + 2)$.

d) $h(x) = \cos(\text{sen}(\text{tg}\, x))$.

Polinômio de Taylor de 1a Ordem

- Dada uma função f derivável em a, vamos definir um polinômio P especial, chamado de **Polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a**.
- Propriedades que queremos para $P = P(h)$:

  i) P tem grau ≤ 1. ii) $P(0) = f(a)$. iii) $P'(0) = f'(a)$.
- Temos que $P(h) = f(a) + f'(a).h$.
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h)$ (**função resto**) temos a propriedade

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

- Podemos escrever $f(a+h) = P(h) + r(h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$.
- Usando $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Exemplo 1.6.

Calcule o polinômio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \frac{\pi}{6}$.

- Mais adiante vamos definir polinômios de Taylor de ordem maior.

Polinômio de Taylor de 1a Ordem

- Dada uma função f derivável em a, vamos definir um polinômio P especial, chamado de **Polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a**.
- Propriedades que queremos para $P = P(h)$:

  i) P tem grau ≤ 1. ii) $P(0) = f(a)$. iii) $P'(0) = f'(a)$.
- Temos que $P(h) = f(a) + f'(a).h$.
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h)$ (**função resto**) temos a propriedade

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

- Podemos escrever $f(a+h) = P(h) + r(h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$.
- Usando $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Exemplo 1.6.

Calcule o polinômio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \frac{\pi}{6}$.

- Mais adiante vamos definir polinômios de Taylor de ordem maior.

Polinômio de Taylor de 1a Ordem

- Dada uma função f derivável em a, vamos definir um polinômio P especial, chamado de **Polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a**.
- Propriedades que queremos para $P = P(h)$:

  i) P tem grau ≤ 1. ii) $P(0) = f(a)$. iii) $P'(0) = f'(a)$.
- Temos que $P(h) = f(a) + f'(a).h$.
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h)$ (**função resto**) temos a propriedade
$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Podemos escrever $f(a+h) = P(h) + r(h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$.
- Usando $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Exemplo 1.6.

Calcule o polinômio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \frac{\pi}{6}$.

- Mais adiante vamos definir polinômios de Taylor de ordem maior.

Polinômio de Taylor de 1a Ordem

- Dada uma função f derivável em a, vamos definir um polinômio P especial, chamado de **Polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a**.
- Propriedades que queremos para $P = P(h)$:

  i) P tem grau ≤ 1. ii) $P(0) = f(a)$. iii) $P'(0) = f'(a)$.
- Temos que $P(h) = f(a) + f'(a).h$.
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h)$ (**função resto**) temos a propriedade

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

- Podemos escrever $f(a+h) = P(h) + r(h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$.
- Usando $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Exemplo 1.6.

Calcule o polinômio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \frac{\pi}{6}$.

- Mais adiante vamos definir polinômios de Taylor de ordem maior.

Polinômio de Taylor de 1a Ordem

- Dada uma função f derivável em a, vamos definir um polinômio P especial, chamado de **Polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a**.
- Propriedades que queremos para $P = P(h)$:

  i) P tem grau ≤ 1. ii) $P(0) = f(a)$. iii) $P'(0) = f'(a)$.
- Temos que $P(h) = f(a) + f'(a).h$.
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h)$ (**função resto**) temos a propriedade
$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Podemos escrever $f(a+h) = P(h) + r(h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$.
- Usando $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Exemplo 1.6.

Calcule o polinômio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \frac{\pi}{6}$.

- Mais adiante vamos definir polinômios de Taylor de ordem maior.

Polinômio de Taylor de 1a Ordem

- Dada uma função f derivável em a, vamos definir um polinômio P especial, chamado de **Polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a**.
- Propriedades que queremos para $P = P(h)$:

  i) P tem grau ≤ 1. ii) $P(0) = f(a)$. iii) $P'(0) = f'(a)$.
- Temos que $P(h) = f(a) + f'(a).h$.
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h)$ (**função resto**) temos a propriedade

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

- Podemos escrever $f(a+h) = P(h) + r(h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$.
- Usando $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Exemplo 1.6.

Calcule o polinômio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \frac{\pi}{6}$.

- Mais adiante vamos definir polinômios de Taylor de ordem maior.

Polinômio de Taylor de 1a Ordem

- Dada uma função f derivável em a, vamos definir um polinômio P especial, chamado de **Polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a**.
- Propriedades que queremos para $P = P(h)$:

  i) P tem grau ≤ 1. ii) $P(0) = f(a)$. iii) $P'(0) = f'(a)$.
- Temos que $P(h) = f(a) + f'(a).h$.
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h)$ (**função resto**) temos a propriedade
$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Podemos escrever $f(a+h) = P(h) + r(h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$.
- Usando $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Exemplo 1.6.

Calcule o polinômio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \frac{\pi}{6}$.

- Mais adiante vamos definir polinômios de Taylor de ordem maior.

Polinômio de Taylor de 1a Ordem

- Dada uma função f derivável em a, vamos definir um polinômio P especial, chamado de **Polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a**.
- Propriedades que queremos para $P = P(h)$:

  i) P tem grau ≤ 1. ii) $P(0) = f(a)$. iii) $P'(0) = f'(a)$.
- Temos que $P(h) = f(a) + f'(a).h$.
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h)$ (**função resto**) temos a propriedade

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

- Podemos escrever $f(a+h) = P(h) + r(h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$.
- Usando $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Exemplo 1.6.

Calcule o polinômio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \frac{\pi}{6}$.

- Mais adiante vamos definir polinômios de Taylor de ordem maior.

Polinômio de Taylor de 1a Ordem

- Dada uma função f derivável em a, vamos definir um polinômio P especial, chamado de **Polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a**.
- Propriedades que queremos para $P = P(h)$:

  i) P tem grau ≤ 1. ii) $P(0) = f(a)$. iii) $P'(0) = f'(a)$.
- Temos que $P(h) = f(a) + f'(a).h$.
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h)$ (**função resto**) temos a propriedade
$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Podemos escrever $f(a+h) = P(h) + r(h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$.
- Usando $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Exemplo 1.6.

Calcule o polinômio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \frac{\pi}{6}$.

- Mais adiante vamos definir polinômios de Taylor de ordem maior.

Polinômio de Taylor de 1a Ordem

- Dada uma função f derivável em a, vamos definir um polinômio P especial, chamado de **Polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a**.
- Propriedades que queremos para $P = P(h)$:

  i) P tem grau ≤ 1. ii) $P(0) = f(a)$. iii) $P'(0) = f'(a)$.
- Temos que $P(h) = f(a) + f'(a).h$.
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h)$ (**função resto**) temos a propriedade
$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Podemos escrever $f(a+h) = P(h) + r(h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$.
- Usando $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Exemplo 1.6.

Calcule o polinômio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \frac{\pi}{6}$.

- Mais adiante vamos definir polinômios de Taylor de ordem maior.