Cálculo 1 - HONORS - CM311

Primitivas e Integrais Definidas

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Primitivas

- Seja f uma função definida em um intervalo I. Dizemos que F é uma *primitiva* (*antiderivada*) de f se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.1.

Ache as primitivas das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2$. b) $f(x) = \cos(x)$. c) $f(x) = e^{2x}$.

Proposição 1.2.

Seja f uma função definida em um intervalo I. Se F e G são primitivas de f então existe uma constante C tal que $F(x) - G(x) = C$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.3.

Calcule as primitivas gerais das funções abaixo:

a) $f(x) = \text{sen}(x)$. b) $f(x) = x^n$. c) $g(x) = x\sqrt{x}$.

Primitivas

- Seja f uma função definida em um intervalo I. Dizemos que F é uma *primitiva* (*antiderivada*) de f se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.1.

Ache as primitivas das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2$. b) $f(x) = \cos(x)$. c) $f(x) = e^{2x}$.

Proposição 1.2.

Seja f uma função definida em um intervalo I. Se F e G são primitivas de f então existe uma constante C tal que $F(x) - G(x) = C$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.3.

Calcule as primitivas gerais das funções abaixo:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. b) $f(x) = x^n$. c) $g(x) = x\sqrt{x}$.

Primitivas

- Seja f uma função definida em um intervalo I. Dizemos que F é uma *primitiva* (*antiderivada*) de f se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.1.

Ache as primitivas das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2$. b) $f(x) = \cos(x)$. c) $f(x) = e^{2x}$.

Proposição 1.2.

Seja f uma função definida em um intervalo I. Se F e G são primitivas de f então existe uma constante C tal que $F(x) - G(x) = C$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.3.

Calcule as primitivas gerais das funções abaixo:

a) $f(x) = \text{sen}(x)$. b) $f(x) = x^n$. c) $g(x) = x\sqrt{x}$.

Primitivas

- Seja f uma função definida em um intervalo I. Dizemos que F é uma *primitiva* (*antiderivada*) de f se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.1.

Ache as primitivas das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2$. b) $f(x) = \cos(x)$. c) $f(x) = e^{2x}$.

Proposição 1.2.

Seja f uma função definida em um intervalo I. Se F e G são primitivas de f então existe uma constante C tal que $F(x) - G(x) = C$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.3.

Calcule as primitivas gerais das funções abaixo:

a) $f(x) = \text{sen}(x)$. b) $f(x) = x^n$. c) $g(x) = x\sqrt{x}$.

Integrais Indefinidas

Definição 1.4.

Sendo f uma função definida em um intervalo I denotamos uma primitiva F de f como

$$F(x) = \int f(x)\, dx.$$

Chamamos o símbolo acima de *integral indefinida de* f.

Exemplo 1.5.

Calcule $\int x^3 + 6e^x + 1\, dx$.

Definição 1.4.

Sendo f uma função definida em um intervalo I denotamos uma primitiva F de f como

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Chamamos o símbolo acima de *integral indefinida de f*.

Exemplo 1.5.

Calcule $\displaystyle\int x^3 + 6e^x + 1\,dx$.

Integrais Definidas

- Para que serve cálculo de primitivas?
- R: Pode ser aplicado no cálculo de áreas de algumas regiões.
- Seja uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com $f(x) \geq 0$.
- Como calcular a área A da região abaixo?

Integrais Definidas

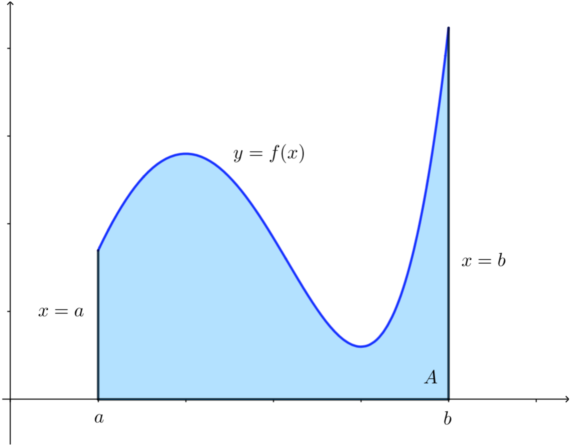
- Para que serve cálculo de primitivas?
- R: Pode ser aplicado no cálculo de áreas de algumas regiões.
- Seja uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com $f(x) \geq 0$.
- Como calcular a área A da região abaixo?

Integrais Definidas

- Para que serve cálculo de primitivas?
- R: Pode ser aplicado no cálculo de áreas de algumas regiões.
- Seja uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com $f(x) \geq 0$.
- Como calcular a área A da região abaixo?

Integrais Definidas

- Para que serve cálculo de primitivas?
- R: Pode ser aplicado no cálculo de áreas de algumas regiões.
- Seja uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com $f(x) \geq 0$.
- Como calcular a área A da região abaixo?



Integrais Definidas

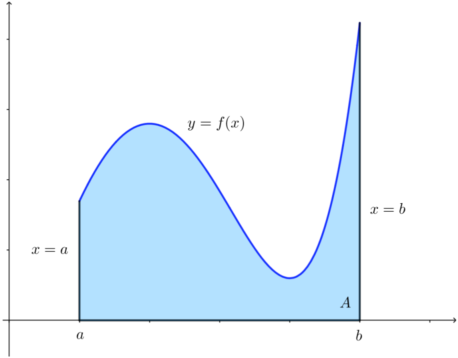
- Podemos aproximar por figuras que sabemos calcular a área.

- Sendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i \in [a + (i-1)\Delta x, a + i\Delta x]$, teremos

$$A \approx (f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Integrais Definidas

- Podemos aproximar por figuras que sabemos calcular a área.

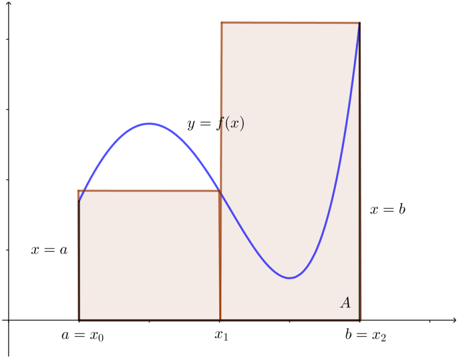


- Sendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i \in [a + (i-1)\Delta x, a + i\Delta x]$, teremos

$$A \approx (f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Integrais Definidas

- Podemos aproximar por figuras que sabemos calcular a área.

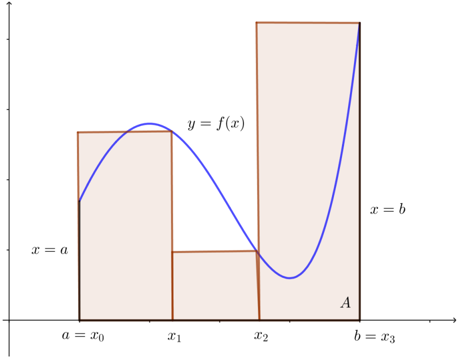


- Sendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i \in [a + (i-1)\Delta x, a + i\Delta x]$, teremos

$$A \approx (f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Integrais Definidas

- Podemos aproximar por figuras que sabemos calcular a área.

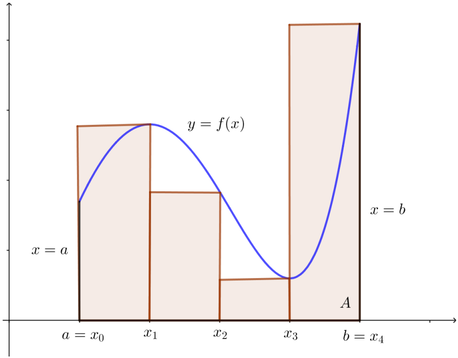


- Sendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i \in [a + (i-1)\Delta x, a + i\Delta x]$, teremos

$$A \approx (f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Integrais Definidas

- Podemos aproximar por figuras que sabemos calcular a área.

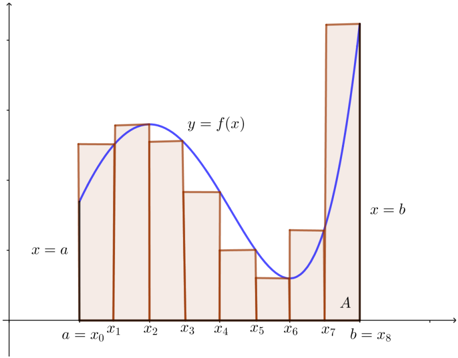


- Sendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i \in [a + (i-1)\Delta x, a + i\Delta x]$, teremos

$$A \approx (f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Integrais Definidas

- Podemos aproximar por figuras que sabemos calcular a área.

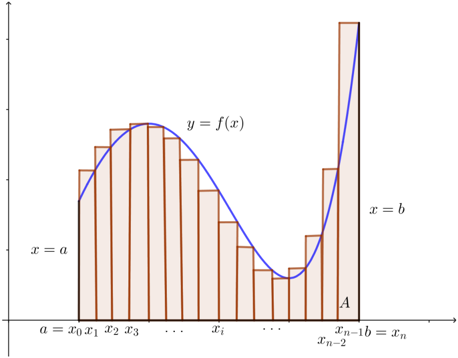


- Sendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i \in [a + (i-1)\Delta x, a + i\Delta x]$, teremos

$$A \approx (f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Integrais Definidas

- Podemos aproximar por figuras que sabemos calcular a área.

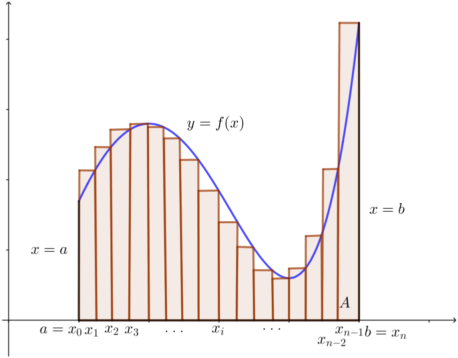


- Sendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i \in [a + (i-1)\Delta x, a + i\Delta x]$, teremos

$$A \approx (f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Integrais Definidas

- Podemos aproximar por figuras que sabemos calcular a área.



- Sendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i \in [a + (i-1)\Delta x, a + i\Delta x]$, teremos

$$A \approx (f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Definição 1.6.

Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, denotamos a **integral definida de f no intervalo $[a, b]$** pelo limite abaixo, quando existir. Quando o limite existir dizemos que f **é integrável no intervalo** $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Propriedade 1.7.

Sendo f integrável em $[a, b]$ e $c \in (a, b)$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

- Convenções:

a) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Definição 1.6.

Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, denotamos a **integral definida de f no intervalo $[a, b]$** pelo limite abaixo, quando existir. Quando o limite existir dizemos que f **é integrável no intervalo** $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Propriedade 1.7.

Sendo f integrável em $[a, b]$ e $c \in (a, b)$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

- Convenções:

a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Definição 1.6.

Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, denotamos a **integral definida de f no intervalo $[a, b]$** pelo limite abaixo, quando existir. Quando o limite existir dizemos que f **é integrável no intervalo $[a, b]$**

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Propriedade 1.7.

Sendo f integrável em $[a, b]$ e $c \in (a, b)$ então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

- Convenções:

a) $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0.$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$

Integrais Definidas

- Em geral é difícil de calcular a integral definida pela definição.

Teorema 1.8 (Teorema Fundamental do Cálculo II (TFC II)).

Supondo que a integral acima existe e sendo F uma primitiva de f, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Exemplo 1.9.

Verifique o TFC no caso que $f(x) = x^2$ no intervalo $[2,6]$.

Observação 1.10.

Fórmulas úteis para o exemplo anterior:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Integrais Definidas

- Em geral é difícil de calcular a integral definida pela definição.

Teorema 1.8 (Teorema Fundamental do Cálculo II (TFC II)).

Supondo que a integral acima existe e sendo F uma primitiva de f, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Exemplo 1.9.

Verifique o TFC no caso que $f(x) = x^2$ no intervalo $[2,6]$.

Observação 1.10.

Fórmulas úteis para o exemplo anterior:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Integrais Definidas

- Em geral é difícil de calcular a integral definida pela definição.

Teorema 1.8 (Teorema Fundamental do Cálculo II (TFC II)).

Supondo que a integral acima existe e sendo F uma primitiva de f, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Exemplo 1.9.

Verifique o TFC no caso que $f(x) = x^2$ no intervalo $[2, 6]$.

Observação 1.10.

Fórmulas úteis para o exemplo anterior:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Integrais Definidas

- Em geral é difícil de calcular a integral definida pela definição.

Teorema 1.8 (Teorema Fundamental do Cálculo II (TFC II)).

Supondo que a integral acima existe e sendo F uma primitiva de f, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Exemplo 1.9.

Verifique o TFC no caso que $f(x) = x^2$ no intervalo $[2,6]$.

Observação 1.10.

Fórmulas úteis para o exemplo anterior:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Prova TFC

Teorema 1.11.

Se f é contínua em $[a, b]$ então f é integrável, isto é, o limite abaixo existe

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema 1.12 (Teorema Fundamental do Cálculo I (TFC I)).

Sendo f contínua em $[a, b]$, considere a função $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Temos $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, isto é, F é uma primitiva de f.

Corolário 1.13.

Toda função contínua definida em um intervalo admite uma primitiva.

Prova TFC

Teorema 1.11.

Se f é contínua em $[a, b]$ então f é integrável, isto é, o limite abaixo existe

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema 1.12 (Teorema Fundamental do Cálculo I (TFC I)).

Sendo f contínua em $[a, b]$, considere a função $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Temos $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, isto é, F é uma primitiva de f.

Corolário 1.13.

Toda função contínua definida em um intervalo admite uma primitiva.

Prova TFC

Teorema 1.11.

Se f é contínua em $[a, b]$ então f é integrável, isto é, o limite abaixo existe

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Teorema 1.12 (Teorema Fundamental do Cálculo I (TFC I)).

Sendo f contínua em $[a, b]$, considere a função $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$. Temos $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, isto é, F é uma primitiva de f.

Corolário 1.13.

Toda função contínua definida em um intervalo admite uma primitiva.