UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM304 Complementos de Matemática - 2024/1

Lista de Exercícios 2

1. Considere as seguintes funções proposicionais

   - $x \in \mathbb{R}, \quad P(x) : x$ é ímpar;
   - $x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) : x < 3$;
   - $x \in \mathbb{R}, \quad R(x) : x > 9$;

   Determine o valor Lógico de cada uma das proposições a seguir e as escreva como uma proposição em linguagem natural.

   (a) $\exists x(P(x))$
   (b) $\forall x(P(x))$
   (c) $\forall x(Q(x) \to P(x))$
   (d) $\exists x(P(x) \wedge R(x))$
   (e) $\forall x(Q(x) \vee R(x))$
   (f) $\forall x(Q(x) \to \neg R(x))$

2. Determine a negação de cada uma das proposições do item anterior, tanto em linguagem lógica quanto em linguagem natural.

3. Seja a coleção de termos dada por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine o valor lógico de cada uma das proposições a seguir:

   (a) $\exists x(x + 3 = 10)$
   (b) $\forall x(x + 3 < 10)$
   (c) $\exists x(x + 3 < 5)$
   (d) $\forall x(x + 3 \leq 7)$
   (e) $\exists x(3^x > 72)$
   (f) $\exists x(x^2 + 2x = 15)$

4. Dê a negação de cada uma das seguintes proposições:

   (a) $\forall_{x\in\Omega}(P(x)) \wedge \exists_{x\in\Omega}(Q(x))$
   (b) $\exists_{x\in\Omega}(P(x)) \vee \forall_{x\in\Omega}(Q(x))$
   (c) $\exists_{x\in\Omega}(\neg P(x)) \vee \forall_{x\in\Omega}(\neg Q(x))$
   (d) $\exists_{x\in\Omega}(P(x)) \to \forall_{x\in\Omega}(\neg Q(x))$
   (e) $\forall_{x\in\mathbb{N}}(x + 2 \leq 7) \wedge \exists_{x\in\mathbb{N}}(x^2 - 1 = 3)$
   (f) $\exists_{x\in\mathbb{N}}(x^2 = 9) \vee \forall_{x\in\mathbb{N}}(2x - 5 \neq 7)$

5. Encontre a proposição equivalente à negação de cada uma das seguintes proposições (escrever em linguagem lógica pode ajudar):

   (a) Todas as cobras são répteis.
   (b) Alguns cavalos são mansos.
   (c) Não há bebê que não seja fofo.
   (d) Algumas pessoas não gostam de matemática.
   (e) Milho é produzido apenas por fazendeiros.
   (f) Algumas fotos são velhas ou estão apagadas.
   (g) Ninguém é perfeito.
   (h) Todas as páginas da internet tem som ou vídeo.
   (i) Alguns fazendeiros produzem apenas milho.
   (j) Se é Novembro, então todos os dias fazem calor.

6. Usando a linguagem lógica e quantificadores adequados, escreva cada frase em português como uma proposição lógica, usando as seguintes funções proposicionais, onde o conjunto de termos é a coleção de objetos:

   - $B(x) : x$ é uma bola
   - $R(x) : x$ é redondo

- $F(x)$: x é uma bola de futebol

(a) Todas as bolas são redondas.
(b) Nem todas as bolas são bolas de futebol.
(c) Todas as bolas de futebol são redondas.
(d) Algumas bolas não são redondas.
(e) Algumas bolas são redondas, mas as bolas de futebol não são
(f) Toda bola redonda é uma bola de futebol.
(g) Só bolas de futebol são bolas redondas.
(h) Se as bolas de futebol forem redondas, então todas as bolas serão redondas.

7. Usando a linguagem lógica e quantificadores adequados, escreva cada frase em português como uma proposição lógica, usando as seguintes funções proposicionais, onde o conjunto de termos é a coleção de seres vivos:

- $A(x)$: x é um animal
- $U(x)$: x é um urso
- $F(x)$: x está faminto
- $L(x)$: x é um lobo

(a) Ursos são animais.
(b) Nenhum lobo é um urso.
(c) Só ursos estão famintos.
(d) Se os lobos estiverem famintos, os ursos também estarão.
(e) Alguns animais são ursos famintos.
(f) Os ursos estão famintos, mas alguns lobos não estão.
(g) Se os lobos e os ursos estiverem famintos, então todos os animais também estarão.
(h) Alguns lobos estão famintos, mas nem todos os animais estão famintos.

8. Construa uma prova formal de validade para os argumentos a seguir:

a) Todos os corruptos mentem. Alguns políticos não mentem. Portanto, alguns políticos não são corruptos.
b) Nenhum jogador é feliz. Alguns idealistas são felizes. Portanto, alguns idealistas não são jogadores.
c) Todo jogador de tênis pode ser considerado um atleta. Alguns fumantes jogam tênis. Portanto, alguns fumantes são atletas.
d) Nenhum artista é apegado às tradições. Carolina é apegada às tradições. Portanto, Carolina não é artista
e) Nenhum estudante é preguiçoso. Todos os artistas são preguiçosos. João é artista. Portanto, João não é estudante.
f) Todo político é corrupto. Nenhum corrupto é feliz. Assim, nenhum político é feliz

9. Prove a validade dos seguintes argumentos:

a) i. $\forall x(A(x) \to B(x))$
   ii. $\forall x(A(x))$
   ---
   iii. $\therefore \forall x(B(x))$

b) i. $\forall x(A(x) \to \neg B(x))$
   ii. $\forall x(C(x) \to B(x))$
   ---
   iii. $\therefore \forall x(A(x) \to \neg C(x))$

c) i. $\forall x(A(x) \to B(x))$

ii. $\exists x(A(x))$

---

iii. $\exists x(B(x))$

d) i. $\forall x(A(x) \to B(x) \land C(x))$

ii. $A(c)$

---

iii. $\therefore C(c)$

10. Utilizando o Princípio da Indução Matemática, demonstre que as seguintes identidades são verdadeiras para todo inteiro positivo n:

(**Dica Geral:** Em alguns casos convém desenvolver o lado direito daquilo que se quer mostrar.)

(a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

(d) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

(e) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

(f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(g) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(h) $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, em que $x \neq 0$ e $x \neq 1$.

11. Utilizando o Princípio da Indução Matemática, demonstre que as seguintes desigualdades são verdadeiras para os valores de n indicados:

(a) $3^n > 2^{n+1}$, para $n \geq 2$.
(**Dica:** $3 > 2$)

(b) $n! > 2^n$, para $n \geq 4$.
(**Dica:** $(n+1) > 2$)

(c) $n^2 > 2n + 1$, para $n \geq 3$.
(**Dica:** $2n > 1$)

(d) $2^n > n^2$, para $n \geq 5$.
(**Dica:** Item anterior pode ajudar)

(e) $n^2 > 5n + 10$, para $n \geq 7$.
(**Dica:** $2n > 4$)

(f) $n! < n^n$, para $n \geq 2$.
(**Dica:** $(n+1)^{n+1} = (n+1)(n+1)^n$ e $n + 1 > n$)

(g) $(1+x)^n > 1 + x^n$, para $n > 1$, em que $x > 0$.
(**Dica:** $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$ e $x^n + x > 0$)

(h) $1 + 2 + \cdots + n < n^2$, para $n > 1$.
(**Dica:** Produto notável)