CE009- Introdução à Estatística

Lista 5

Exercício 1

A resistência (em toneladas) de vigas de concreto produzidas por uma empresa, comporta-se conforme a função de probabilidade abaixo:

Resistência	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.1	0.4	0.2	0.2

Admita que essas vigas são aprovadas para uso em construções se suportarem pelo menos 3 toneladas. De um grande lote fabricado pela empresa, escolhemos 15 vigas ao acaso. Qual será a probabilidade de:

1. Todas serem aptas para construções?

2. No mínimo 13 serem aptas?

Para ver a resposta clique aqui: 1

Exercício 2

Sendo X uma variável segundo o modelo Uniforme Discreto, com valores no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, pergunta-se:

1. $P(X < 2 \text{ } ou \text{ } X \geq 8)$.

2. $P(X > 3 \text{ } e \text{ } X < 6)$.

3. $P(X \leq 9 | X \geq 6)$.

Para ver a resposta clique aqui: 2

Exercício 3

Um usuário de transporte coletivo chega pontualmente às 8 horas para pegar o seu ônibus. Devido ao transito caótico, a demora pode ser qualquer tempo entre 1 e 20 minutos (admita que o relógio "pule" de minuto em minuto). Pergunta-se:

1. Qual a probabilidade de demorar mais de 10 minutos?
2. Qual a probabilidade de demorar pelo menos 5 mas não mais de 10 minutos?
3. Qual a probabilidade da demora não chegar a 5 minutos?
4. Se um amigo chegou 10 minutos atrasado e vai pegar o mesmo ônibus (que ainda não passou), qual a probabilidade do amigo atrasado esperar até 3 minutos?

Para ver a resposta clique aqui: 3

Exercício 4

Uma certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que têm essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos à cirurgia. Fazendo alguma suposição adicional que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:

1. Todos serem curados?
2. Pelo menos dois não serem curados?
3. Ao menos 10 ficarem livres da doença?

Para ver a resposta clique aqui: 4

Exercício 5

Sendo $X \sim G(0.4)$ Calcule:

1. $P(X = 3)$.
2. $P(X > 1 | X \leq 2)$.

Para ver a resposta clique aqui: 5

Exercício 6

Uma moeda equilibrada é lançada sucessivamente, de modo indepedente, até que ocorra a primeira cara. Seja X a variável aleatória que conta o número de lançamentos anteriores à ocorrência de cara. Determine:

1. $P(X > 1)$.
2. $P(3 < X \leq 5)$.
3. Quantas vezes deve, no mínimo, ser lançada a moeda para garantir a ocorrência de cara com pelo menos 0.8 de probabilidade.

Para ver a resposta clique aqui: 6

Exercício 7

A v.a. Y tem função de probabilidade Poisson com parâmetro $\lambda = 2$. Obtenha:

1. $P(Y < 2)$.
2. $P(Y = 1|Y < 3)$.

Para ver a resposta clique aqui: 7

Exercício 8

A aplicação de fundo anticorrosivo em chapas de aço de 1 m^2 é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (bolhas na pintura), de acordo com uma v.a. Poisson de parâmetro $\lambda = 1$ por m^2. Uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, pergunta-se a probabilidade de:

1. Encontrarmos pelo menos 1 defeito.
2. No máximo 2 defeitos serem encontrados.
3. Encontrarmos de 2 a 4 defeitos.
4. Não mais de 1 defeito ser encontrado.

Para ver a resposta clique aqui: 8

Exercício 9

A variável H segue o modelo Hipergeométrico com parâmetros $n = 10$, $m = 5$ e $r = 4$. Determine:

1. $P(H = 2)$.
2. $P(H \leq 1)$.
3. $P(H > 0)$.

Para ver a resposta clique aqui: 9

Exercício 10

Por engano 3 peças defeituosas foram misturadas com boas formando um lote de 12 peças nos total. Escolhendo ao acaso 4 dessas peças, determine a probabilidade de encontrar:

1. Pelo menos 2 defeituosas.
2. No máximo 1 defeituosa.
3. No mínimo 1 boa.

Para ver a resposta clique aqui: 10

Exercício 11

Um laboratório estuda a emissão de partículas de certo material radioativo. Seja N = número de partículas emitidas em 1 minuto. O laboratório admite que N tem função de probabilidade Poisson com parâmetro 5, isto é,

$$P(N = k) = \frac{e^{-5} \cdot 5^k}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

1. Calcule a probabilidade de que em um minuto não haja emissões de partículas.
2. Determine a probabilidade de pelo menos uma partícula ser emitida em um minuto.
3. Qual a probabilidade que, em um minuto, o nº de partículas esteja entre 2 e 5 (inclusive)?

Para ver a resposta clique aqui: 11

Exercício 12

Uma vacina contra a gripe é eficiente em 70% dos casos. Sorteamos, ao acaso, 20 dos pacientes vacinados e pergunta-se a probabilidade de obter:

1. Pelo menos 18 imunizados.
2. No máximo 4 imunizados.
3. Não mais do que 3 imunizados.

Para ver a resposta clique aqui: 12

Exercício 13

Uma indústria de tintas recebe pedidos de seus vendedores através de fax, telefone e Internet. O número de pedidos que chegam por qualquer meio (no horário comercial) é uma variável aleatória discreta com distribuição Poisson com taxa de 5 pedidos por hora.

1. Calcule a probabilidade de mais de 2 pedidos por hora.
2. Em um dia de trabalho (8 horas), qual seria a probabilidade de haver 50 pedidos?
3. Não haver nenhum pedido, em um dia de trabalho, é um evento raro?

Para ver a resposta clique aqui: 13

Exercício 14

Em um estudo sobre o crescimento de jacarés, uma pequena lagoa contém 4 exemplares de espécie A e 5 da espécie B. A evolução de peso e tamanho dos 9 jacarés da lagoa é acompanhada pelos pesquisadores através de capturas periódicas. Determine a probabilidade de, em três jacarés capturados de uma vez, obtemos:

1. Todos da espécie A.
2. Nem todos serem da espécie B.
3. A maioria ser da espécie A.

Para ver a resposta clique aqui: 14

Exercício 15

Admite-se que uma pane pode ocorrer em qualquer ponto de uma rede elétrica de 10km.

1. Qual é probabilidade da pane ocorrer nos primeiros 500 metros? E de ocorrer nos 3 quilômetros centrais da rede?

2. O custo de reparo da rede depende da distância do centro de serviço ao local da pane. Considere que o centro de serviço está na origem da rede e que o custo é de R\$ 200 para distâncias até 3 quilômetros, de R\$ 400 entre 3 e 8 e de R\$ 1000 para as distâncias acima de 8 quilômetros. Qual é o custo médio do conserto?

Para ver a resposta clique aqui: 15

Exercício 16

O tempo necessário para um medicamento contra dor fazer efeito foi modelado de acordo com a densidade Uniforme no intervalo de 5 a 15 (em minutos), tendo por base experimentos conduzidos em animais. Um paciente, que esteja sofrendo dor, recebe o remédio e, supondo válido o modelo mencionado acima, pergunta-se a probabilidade da dor:

1. Cessar em até 10 minutos?

2. Demorar pelo menos 12 minutos?

3. Durar mais de 7 minutos, sabendo-se que durou menos de 10?

Para ver a resposta clique aqui: 16

Exercício 17

Suponha que o tempo de vida T de um vírus exposto ao meio ambiente segue uma distribuição Exponencial com parâmetro $\beta = 20$ s. Calcule a probabilidade condicional $P(T > 15|T > 10)$.

Para ver a resposta clique aqui: 17

Exercício 18

Suponha que o valor esperado de uma v.a. com distribuição Uniforme contínua é 1 e a variância = 1/12. Encontre a probabilidade da variável assumir valores menores que 3/4.

Para ver a resposta clique aqui: 18

Exercício 19

Seja $X \sim N(4, 1)$. Determine:

1. $P(X \leq 4)$.

2. $P(4 < X < 5)$.

3. $P(0 \leq X \leq 2)$.

Para ver a resposta clique aqui: 19

Exercício 20

A durabilidade de um tipo de filtro é descrita por uma variável aleatória com distribuição normal de média 60.000 h de funcionamento e desvio padrão de 9.000 h.

1. Se o fabricante garante a duração dos filtros pelas primeiras 47.500 horas, qual a proporção de filtros que devem ser trocados pela garantia?

2. O que aconteceria com a proporção do item anterior se a garantia fosse para as primeiras 45.000 h?

3. Qual deveria ser a garantia (em horas) de forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 4% dos filtros?

4. Se uma indústria comprar cinco filtros, qual será a probabilidade de utilizar a garantia (de 45.000 horas) para trocar ao menos um dos filtros?

Para ver a resposta clique aqui: 20

Exercício 21

Um indivíduo vai participar de uma competição que consiste em responder questões que são lhe são apresentadas sequencialmente. Com o nível de conhecimento que possui, a chance de acertar uma questão escolhida ao acaso é de 75% . Neste contexto, para cada diferente situação apresentada a seguir, defina a variável aleatória, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade solicitada. Se preciso, faça suposições necessárias e adequadas em cada caso.

1. Se for responder até errar uma pergunta, qual a probabilidade de conseguir acertar quatro ou mais questões?
2. Se for responder cinco perguntas, qual a probabilidade de acertar quatro ou mais?
3. Se for responder até acertar a terceira pergunta, qual a probabilidade de errar apenas uma?
4. Se o candidato selecionar aleatoriamente seis questões de um banco de 40 questões das quais o candidato sabe a resposta de 30 delas (75%), qual a probabilidade de acertar ao menos cinco delas.

   Ainda neste contexto considere que o candidato responde, em média, 1,8 questões por minuto.
5. Qual a probabilidade de conseguir responder ao menos três questões em três minutos?
6. Qual a probabilidade de que o tempo para resposta de uma questão seja superior a 40 segundos?

Para ver a resposta clique aqui: 21

Exercício 22

Na comunicação entre servidores, uma mensagem é dividida em n pacotes, os quais são enviados na forma de códigos. Pelo histórico da rede sabe-se que cada pacote tem uma probabilidade de 0,01 de não chegar corretamente a seu destino, e além disto, assume-se que o fato de um pacote chegar ou não corretamente ao destino não altera a probabilidade de chegada correta de outros pacotes. Um programa corretivo, garante o envio correto da mensagem quando o número de pacotes enviados erroneamente não passar de 10% do total de pacotes da mensagem.

1. Qual a probabilidade de uma mensagem composta de 20 pacotes ser enviada corretamente?

2. E para uma mensagem de 200 pacotes?

Para ver a resposta clique aqui: 22

Exercício 23

Em um laticínio, a temperatura ideal do pasteurizador deve ser de 75°C. Se a temperatura ficar inferior a 70°C, o leite poderá ficar com bactérias indesejáveis ao organismo humano. Observações do processo mostram que na forma de operação atual os valores da temperatura seguem uma distribuição normal com média de 74.2°C e desvio padrão de 2.2°C.

1. Qual a probabilidade da temperatura ficar inferior a 70°C?

2. Qual a probabilidade da temperatura ultrapassar os 75°C desejados?

3. Qual a probabilidade de que em 20 pasteurização, alguma(s) dela(s) não atinja a temperatura de 70°C?

4. Deseja-se regular equipamentos para alterar a temperatura média do processo para que a probabilidade de ficar inferior a 70°C seja de no máximo 0,0005. Qual deveria ser a nova média de operação?

5. Suponha agora que a nova média de operação seja de 74.5°C. Deseja-se então alterar o desvio padrão para satisfazer as condições do ítem anterior. Qual deve ser o novo desvio padrão de operação?

Para ver a resposta clique aqui: 23

Respostas

Resposta do exercício 1

Inicialmente, vamos encontrar a probabilidade das vigas serem aprovadas para uso em construções. Para tanto, seja Y = resistência da viga. Então,

$$\begin{aligned} p_* &= P(Y \geq 3) \\ &= 1 - P(Y < 3) \\ &= 1 - P(Y = 2) \\ &= 1 - 0.1 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

Agora, considere X = número de vigas aptas para construções dentre as $n = 15$. Assim, $X \sim b(15, p_*)$, com $x \in \{0, 1, 2, \cdots, 15\}$.

1. $$P(X = 15) = \binom{15}{15} \cdot p_*^{15} \cdot (1 - p_*)^{15-15} = 0.206$$

2. $$P(X \geq 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15) = 0.816.$$

Resposta do exercício 2

1. $$\begin{aligned} P(X < 2 \text{ ou } X \geq 8) &= P(X < 2) + P(X \geq 8) \\ &= P(X = 1) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} P(X > 3 \text{ e } X < 6) &= P(3 < X < 6) \\ &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \frac{2}{10}. \end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 9 | X \geq 6) &= \frac{P(6 \leq X \leq 9)}{P(X \geq 6)} \\
&= \frac{P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)}{P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)} \\
&= \frac{4/10}{5/10} \\
&= 0.8.
\end{aligned}
$$

Resposta do exercício 3

Seja D a variável aleatória que indica a demora em pegar o ônibus. Então,

$$D \sim U_D(1, 20)$$

$$P(D = d) = \frac{1}{20}, \quad \text{com} \quad d \in \{0, 1, 2, \cdots, 20\}$$

1.

$$
\begin{aligned}
P(D > 10) &= P(D = 11) + P(D = 12) + \cdots + P(D = 20) \\
&= \frac{10}{20}.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
P(5 \leq D \leq 10) &= P(D = 5) + P(D = 6) + \ldots + P(D = 10) \\
&= \frac{6}{20}.
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
P(D < 5) &= P(D = 1) + \cdots + P(D = 4) \\
&= \frac{4}{20}.
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
P(D \leq 13 | D > 10) &= \frac{P(10 < D \leq 13)}{P(D > 10)} \\
&= \frac{3/20}{10/20}.
\end{aligned}
$$

Resposta do exercício 4

Suposição: os indivíduos submetidos à cirurgia são (ou não) curados independentemente uns dos outros com probabilidade de cura constante e igual a 0.80. Assim D = número de curados dentre os 15 pacientes é Binomial $(n = 15; p = 0.8)$

1.

$$\begin{aligned} P(X = 15) &= \binom{15}{15} \cdot 0.8^{15} \cdot 0.2^{15-15} \\ &= 0.035. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(X \leq 13) &= 1 - P(X > 13) \\ &= 1 - [P(X = 14) + P(X = 15)] \\ &= 0.833. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= P(X = 10) + \cdots + P(X = 15) \\ &= 0.939. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 5

Uma variável aleatória com distribuição **Geométrica** pode ser definida de duas maneiras. É importante saber desta possibilidade, para poder usar corretamente cada material. A primeira delas é:

X = número de **fracassos** até o primeiro sucesso.

$$P[X = x] = (1-p)^x p, \quad x \in \{0, 1, 2 \cdots\}$$

A segunda é (para evitar confusão, vamos denotar agora a v.a. por outra letra):

Y = número total de **tentativas** até o primeiro sucesso.

$$P[Y = y] = (1-p)^{y-1}p, \quad y \in \{1, 2, \cdots\}$$

Considerando $X \sim G(0.4)$, definida como nº de **fracassos** até o primeiro sucesso, temos:

1.

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= 0.4 \cdot 0.6^3 \\ &= 0.0864. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(X > 1 | X \leq 2) &= \frac{P(1 < X \leq 2)}{P(X \leq 2)} \\ &= \frac{P(X = 2)}{P(X \leq 2)} \\ &= 0.184. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 6

Seja X a v.a. que conta o número de lançamentos anteriores à ocorrência de cara.

$$X \sim G(0.5)$$

$$P[X = x] = (1-p)^x \cdot p, \quad x = \{0, 1, \cdots\}$$

1.

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.5 \cdot 0.5^0 + 0.5 \cdot 0.5^1 + 0.5 \cdot 0.5^2 \\ &= 0.875. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(3 < X \leq 5) &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0.047. \end{aligned}$$

3. Seja $L =$ número total de lançamentos até ocorrência de cara.

l	1	2	3	4	$\cdots$
x	0	1	2	3	$\cdots$
p_x	0.5	0.25	0.13	0.06	$\cdots$

Para obter o número mínimo de lançamentos da moeda a fim de garantir a ocorrência de cara com no mínimo 0.8 de probabilidade, precisamos obter $l = x+1$ tal que $P(X \leq x) \geq 0.80$. Temos que

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= 0.75 \leq 0.8 \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= 0.875. \end{aligned}$$

Logo o número de lançamentos mínimos necessários é $l = x + 1 = 3$.

Resposta do exercício 7

A v.a. Y tem função de probabilidade Poisson com parâmetro $\lambda = 2$. Ou seja:

$$Y \sim Po(2)$$

$$P(Y = y) = \frac{e^{\lambda}\lambda^{y}}{y!} = \frac{e^{2} \cdot 2^{y}}{y!}$$

1.

$$\begin{aligned} P(Y < 2) &= P(Y=0) + P(Y=1) \\ &= \frac{e^{-2} \cdot 2^{0}}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^{1}}{1!} \\ &= 0.406. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(Y=1|Y<3) &= \frac{P(Y=1)}{P(Y<3)} \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 8

A v.a. Y tem função de probabilidade Poisson com parâmetro $\lambda = 1$ por m^2. Ou seja:

$$Y \sim Po(1)$$

$$P(Y=y) = \frac{e^{-1}1^y}{y!}$$

1.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0) \\ &= 1 - \frac{e^1 \cdot 1^0}{0!} \\ &= 0.632. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \\ &= 0.92. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(2 \leq Y \leq 4) &= P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) \\ &= 0.261. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} P(Y \leq 1) &= P(Y=0) + P(Y=1) \\ &= 0.736. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 9

A variável H segue o modelo Hipergeométrico com parâmetros $m = 5$, $n = 5$ e $r = 4$. Então:

$$H \sim HG(m = 5, n = 5, r = 4),$$

$$h = \{max(0, 4 - 5), \cdots, min(4, 5)\} = \{0, \cdots, 4\}.$$

$$P(H = h) = \frac{\binom{m}{h}\binom{n}{r-h}}{\binom{m+n}{r}} = \frac{\binom{5}{h}\binom{5}{4-h}}{\binom{5+5}{4}}$$

1.

$$\begin{aligned} P(H = 2) &= \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{4-2}}{\binom{5+5}{4}} \\ &= 0.476. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(H \leq 1) &= P(H = 0) + P(H = 1) \\ &= 0.262. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(H > 0) &= 1 - P(H = 0) \\ &= 0.976. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 10

Pelos dados do enunciado temos uma típica situação onde o modelo Hipergeométrico é aplicável, com $n = 12$, $m = 3$ e $r = 4$. Seja $D =$ número de peças defeituosas dentre as 4.

$$D \sim HG(n = 9, m = 3, r = 4), \quad d = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$P(D = d) = \frac{\binom{m}{d}\binom{n}{r-d}}{\binom{m+n}{r}} = \frac{\binom{3}{d}\binom{9}{4-d}}{\binom{9+3}{4}}$$

1.

$$\begin{aligned} P(D \geq 2) &= 1 - P(D < 2) \\ &= 1 - [P(D = 0) + P(D = 1)] \\ &= 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{4-0}}{\binom{9+3}{4}} - \frac{\binom{3}{1}\binom{9}{4-1}}{\binom{9+3}{4}} \\ &= 0.236. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(D \leq 1) &= P(D = 0) + P(D = 1) \\ &= 0.764. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(\text{No mínimo 1 boa}) &= P(D \leq 3) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 11

Seja: N = número de partículas emitidas em 1 minuto. O laboratório admite que N tem função de probabilidade Poisson com parâmetro 5, isto é,

$$P(N = k) = \frac{e^{-5}5^k}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

1.

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= \frac{e^{-5}5^0}{0!} \\ &= 0.007. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(N \geq 1) &= 1 - P(N = 0) \\ &= 0.993. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(2 \leq N \leq 5) &= P(N=2)+P(N=3)+P(N=4)+P(N=5) \\ &= 0.576. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 12

Seja $Y =$ número de pacientes imunizados dentre 20 pacientes vacinados.

$$Y \sim b(n=20, p=0.7)$$

$$P(Y=y) = \binom{20}{y} \cdot 0.7^y \cdot 0.3^{20-y}, \quad y = \{0, 1, \cdots, 20\}$$

1.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 18) &= P(Y=18)+P(Y=19)+P(Y=20) \\ &= 0.0355. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(Y \leq 4) &= P(Y=0)+\cdots+P(Y=4) \\ &= 5.55 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(Y \leq 3) &= P(Y=0)+\cdots+P(Y=3) \\ &= 5.43 \times 10^{-7}. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 13

O número de pedidos que chegam por qualquer meio (no horário comercial) é uma variável aleatória discreta com distribuição Poisson com taxa de 5 pedidos por hora.

$$Y \sim Po(5)$$

$$P(Y=y) = \frac{e^{-5} 5^y}{y!}, \quad y = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

1.

$$\begin{aligned} P(Y > 2) &= 1 - P(Y \leq 2) \\ &= 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)] \\ &= 0.875. \end{aligned}$$

2. $\lambda = 5 \cdot 8 = 40$

$$P(Y = 50) = \frac{e^{-40} 40^{50}}{50!} = 0.018$$

3. $\lambda = 40$

$$P(Y = 0) = \frac{e^{-40} 40^{0}}{0!} = 0.$$

Resposta do exercício 14

Seja X = número de jacarés da espécie A.

$$X \sim HG(m = 4, n = 5, r = 3)$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{5}{3-x}}{\binom{5+4}{3}}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3.$$

1.

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{3-3}}{\binom{5+4}{3}} \\ &= 0.048. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(X > 0) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{3-0}}{\binom{9}{3}} \\ &= 0.881. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= P(X=2) + P(X=3) \\
&= \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{3-2} + \binom{4}{3}\binom{5}{3-3}}{\binom{9}{3}} \\
&= 0.405.
\end{aligned}$$

Resposta do exercício 15

Admite-se que uma pane pode ocorrer em qualquer ponto de uma rede elétrica de 10km.

$$X \sim U(0, 10)$$

$$f(x) = \frac{1}{10}, \quad 0 \leq x \leq 10$$

1.

$$P(X < 0.5) = \int_0^{0.5} \frac{1}{10} dx = \frac{0.5}{10}.$$

$$P(3.5 \leq X \leq 6.5) = \int_3^6 \frac{1}{10} dx = \frac{3}{10}.$$

2. Seja C = custo de reparo.

C	200	400	1000
p_c	p_1	p_2	p_3

$$p_1 = P(C = 200) = P(X \leq 3) = \int_0^3 \frac{1}{10} dx = \frac{3}{10}.$$

$$p_2 = P(C = 400) = P(3 \leq X \leq 8) = \int_3^8 \frac{1}{10} dx = \frac{5}{10}.$$

$$p_3 = P(C = 1000) = P(X > 8) = \int_8^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{2}{10}.$$

$$E(C) = 200 \cdot p_1 + 400 \cdot p_2 + 1000 \cdot p_3 = 460.$$

Resposta do exercício 16

Seja T = tempo até o medicamento fazer efeito.

$$T \sim U(5, 15)$$

$$f(t) = \frac{1}{15-5}, \quad 5 \leq t \leq 15.$$

1.

$$\begin{aligned} P(T \leq 10) &= \int_5^{10} f_t \, dt \\ &= \int_5^{10} \frac{1}{10} \, dt \\ &= 5/10. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(T > 12) &= \int_{12}^{15} \frac{1}{10} \, dt \\ &= 3/10. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(T > 7 | T < 10) &= \frac{P(7 < T < 10)}{P(T < 10)} \\ &= \frac{\int_7^{10} 1/10 \, dt}{\int_5^{10} 1/10 \, dt} \\ &= \frac{3/10}{5/10} \\ &= 3/5. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 17

Seja T = tempo de vida de um vírus exposto ao meio ambiente.

$$T \sim Exp(20)$$

$$f(t) = \frac{1}{20} \cdot e^{-\left(\frac{1}{20}\right)t}, \quad t \geq 0$$

$$\begin{aligned}
P(T > 15|T > 10) &= \frac{P(T > 15)}{P(T > 10)} \\
&= \frac{\int_{15}^{\infty} \frac{1}{20} \cdot e^{-\left(\frac{1}{20}\right)t} \, dt}{\int_{10}^{\infty} \frac{1}{20} \cdot e^{-\left(\frac{1}{20}\right)t} \, dt} \\
&= \frac{0.472}{0.607} \\
&= 0.779
\end{aligned}$$

Resposta do exercício 18

$$\begin{aligned}
X &\sim U(a, b) \\
E(X) &= \frac{a+b}{2} = 1 \\
Var(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Assim, temos $(2 - 2a)^2 = 1 \rightarrow (4a^2 - 8a + 3) = 0$. Resolvendo esta equação temos que $a = 0.5$ e $b = 1.5$ ou $a = 1.5$ e $b = 0.5$. Como $(a < b)$ então a solução é $X \sim U(0.5, 1.5)$.

$$P(X < 3/4) = \int_{0.5}^{0.75} \frac{1}{1.5 - 0.5} \, dx = 0.25$$

Resposta do exercício 19

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

1.

$$\begin{aligned}
P(X \leq 4) &= \int_{-\infty}^{4} f(x) dx \\
&= 0.5.
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
P(4 < X < 5) &= P(X < 5) - P(X < 4) \\
&= 0.341.
\end{aligned}
$$

3.

$$
P(0 \leq X \leq 2) = 0.023.
$$

Resposta do exercício 20

$$
X \sim N(60.000, 9.000^2)
$$

1.

$$
\begin{aligned}
P[X < 47500] &= P\left[Z < \frac{47500 - 60000}{9000}\right] \\
&= P\left[Z < -1.389\right] \\
&= 0.082.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
P[X < 45000] &= P\left[Z < \frac{45000 - 60000}{9000}\right] \\
&= P\left[Z < -1.667\right] \\
&= 0.048.
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
P[X < t] &= 0,04 \ \ ; \ \ t = ? \\
P\left[Z < \frac{t - 60000}{9000}\right] &= 0,04 \\
z &= -1.751 \\
\frac{t - 60000}{9000} &= -1.751 \\
t &= 60000 + 9000(-1.751) \\
&= 4.4243825 \times 10^4.
\end{aligned}
$$

4. Seja Y = número de filtros trocados sob garantia dentre 5 comprados.

$$
\begin{aligned}
Y &\sim b\,(n = 5, p = P[X < 45000] = 0.048) \\
P[Y \geq 1] &= 1 - P[Y = 0] \\
&= 0.217
\end{aligned}
$$

Resposta do exercício 21

1. Seja X = número de acertos até o primeiro erro.

$$
\begin{aligned}
X &\sim \text{G}(0.25) \\
P[X \geq 4] &= 1 - P[X \leq 3] \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{3} (1 - 0.25)^i (0.25) \\
&= 0.316.
\end{aligned}
$$

2. Seja X = número de acertos em cinco perguntas.

$$X \sim \mathrm{b(n=5, p=0.75)}$$

$$\begin{aligned} P[X \geq 4] &= P[X=4] + P[X=5] \\ &= \sum_{i=4}^{5} \binom{5}{i} 0.75^i (1-0.75)^{5-i} \\ &= 0.633. \end{aligned}$$

3. Seja X = número de erros até o terceiro acerto.

$$X \sim \mathrm{BN(r=3, p=0.75)}$$

$$\begin{aligned} P[X = 1] &= \binom{3+1-1}{3-1} 0,75^3 (1-0.75)^1 \\ &= 0.316. \end{aligned}$$

4. Seja X = número de acertos nas seis questões selecionadas.

$$X \sim \mathrm{HG}(30, 10, 6)$$

$$\begin{aligned} P[X \geq 5] &= P[X=5] + P[X=6] \\ &= \sum_{i=5}^{6} \frac{\binom{30}{i}\binom{10}{6-i}}{\binom{40}{6}} \\ &= 0.526. \end{aligned}$$

5. Seja X = número de questões respondidas em 3 minutos.

$$X \sim \mathrm{Po}(3 \cdot 1.8 = 5.4)$$

$$\begin{aligned} P[X \geq 3] &= 1 - P[X \leq 2] \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{\mathrm{e}^{-5.4} 5.4^{\mathrm{i}}}{i!} \\ &= 0.905. \end{aligned}$$

6. Seja X = tempo (em min.) para responder uma questão.

$$\begin{aligned} X &\sim \text{Exp}(\lambda = 1.8) \\ P[X \geq 40/60] &= \int_{40/60}^{\infty} 1.8\text{e}^{-1.8\text{x}}\text{dx} \\ &= 0.301. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 22

1. Seja X = número de pacotes incorretos em 20 pacotes.

$$\begin{aligned} X &\sim b(\ n = 20, p = 0.01\ ) \\ \text{Limite} &: \ 10\% \text{ de } 20 \text{ pacotes} = 2 \text{ pacotes} \\ P[X \leq 2] &= P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] \\ &= \sum_{0}^{2} \binom{20}{x} (0.01)^x (1 - 0.01)^{20-x} \\ &= 0.999 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} X &\sim b(n = 200, p = 0.01) \\ &\approx N\left[\mu = n \cdot p = 2\ ,\ \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 1.98\right] \end{aligned}$$

A aproximação normal não é muito acurada pois $np < 5$, porém conveniente

$$\begin{aligned} P[X \leq 20] &= P[X = 0] + P[X = 1] + \ldots + P[X = 20] \\ &= \sum_{0}^{20} \binom{200}{x} (0.01)^x (1 - 0.01)^{200-x} \\ &\approx P[X_N < 20.5] \\ &= P\left[Z < \frac{20.5 - 2}{\sqrt{1.98}}\right] \\ &\approx 1 \end{aligned}$$

Resposta do exercício 23

Seja X = temperatura do pasteurizador.

$$X \sim N(74.2; 2.2^2)$$

1.
$$P[X < 70] = P\left[Z < \frac{70 - 74.2}{2.2}\right] = 0.0281.$$

2.
$$P[X > 75] = P\left[Z < \frac{75 - 74.2}{2.2}\right] = 0.3581.$$

3. Seja Y = número de pasteurizações que não atingem $70°C$.
$$\begin{aligned} Y &\sim b(20, p) \\ p &= P[X < 70] = 0.0281 \\ P[Y \geq 1] &= 1 - P[Y = 0] = 0.435. \end{aligned}$$

4. Note que
$$\begin{aligned} P[X < 70|\mu_0] &= 0.0005 \\ z_{0.0005} &= (x - \mu_0)/\sigma \\ -3.291 &= (70 - \mu_0)/2.2 \\ \mu_0 = 70 - 2.2(-3.291) &= 77.26 \end{aligned}$$

5. Note que
$$\begin{aligned} P[X < 70|\sigma_0] &= 0.0005 \\ z_{0.0005} &= (x - 74.2)/\sigma_0 \\ -3.291 &= (70 - 74.2)/\sigma_0 \\ \sigma_0 = (70 - 74.2)/(-3.291) &= 1.28 \end{aligned}$$