Cálculo 1 - HONORS - CM311

Aplicações

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Relembrando

- Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos a integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

- Se f é contínua em $[a, b]$, o limite acima sempre existe.

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo II (TFC II)).

Supondo que a integral acima existe e sendo F uma primitiva de f, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

- A motivação inicial foi cálculo de áreas quando $f \geq 0$, mas a definição se generaliza sem essa restrição.

Exemplo 1.2.

Calcule $\int_{-2}^{3} x^3\,dx$ e interprete o resultado em termo de áreas.

Relembrando

- Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos a integral definida
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$
- Se f é contínua em $[a, b]$, o limite acima sempre existe.

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo II (TFC II)).

Supondo que a integral acima existe e sendo F uma primitiva de f, temos
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

- A motivação inicial foi cálculo de áreas quando $f \geq 0$, mas a definição se generaliza sem essa restrição.

Exemplo 1.2.

Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^3\,dx$ e interprete o resultado em termo de áreas.

Relembrando

- Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos a integral definida
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$
- Se f é contínua em $[a, b]$, o limite acima sempre existe.

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo II (TFC II)).

Supondo que a integral acima existe e sendo F uma primitiva de f, temos
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

- A motivação inicial foi cálculo de áreas quando $f \geq 0$, mas a definição se generaliza sem essa restrição.

Exemplo 1.2.

Calcule $\int_{-2}^{3} x^3\,dx$ e interprete o resultado em termo de áreas.

Relembrando

- Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos a integral definida
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$
- Se f é contínua em $[a, b]$, o limite acima sempre existe.

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo II (TFC II)).

Supondo que a integral acima existe e sendo F uma primitiva de f, temos
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

- A motivação inicial foi cálculo de áreas quando $f \geq 0$, mas a definição se generaliza sem essa restrição.

Exemplo 1.2.

Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^3\,dx$ e interprete o resultado em termo de áreas.

Relembrando

- Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos a integral definida
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$
- Se f é contínua em $[a, b]$, o limite acima sempre existe.

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo II (TFC II)).

Supondo que a integral acima existe e sendo F uma primitiva de f, temos
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

- A motivação inicial foi cálculo de áreas quando $f \geq 0$, mas a definição se generaliza sem essa restrição.

Exemplo 1.2.

Calcule $\int_{-2}^{3} x^3\,dx$ e interprete o resultado em termo de áreas.

Propriedades

Propriedade 1.3.

Sendo f, g integráveis em $[a, b]$ temos

a) *Se $c \in [a, b]$ então* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

b) $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

c) $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.

d) $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

e) *Se $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$, então* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Áreas entre curvas

- Sendo uma região R delimitada pelo gráfico de duas funções f e g para $x \in [a, b]$, com $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, temos que a área de R é dada por

$$\text{Área}(R) = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx.$$

Exemplo 2.1.

Calcule a área da região delimitada por $y = \sqrt{x+2}$ e $y = \dfrac{1}{x+1}$ para $x \in [0, 2]$.

- Dependendo da região, pode ser mais vantajoso integrar em y.

Exemplo 2.2.

Esboce a região delimitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$ e calcule a área.

Áreas entre curvas

- Sendo uma região R delimitada pelo gráfico de duas funções f e g para $x \in [a, b]$, com $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, temos que a área de R é dada por

$$\text{Área}(R) = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx.$$

Exemplo 2.1.

Calcule a área da região delimitada por $y = \sqrt{x+2}$ e $y = \dfrac{1}{x+1}$ para $x \in [0, 2]$.

- Dependendo da região, pode ser mais vantajoso integrar em y.

Exemplo 2.2.

Esboce a região delimitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$ e calcule a área.

Áreas entre curvas

- Sendo uma região R delimitada pelo gráfico de duas funções f e g para $x \in [a, b]$, com $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, temos que a área de R é dada por

$$\text{Área}(R) = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx.$$

Exemplo 2.1.

Calcule a área da região delimitada por $y = \sqrt{x+2}$ e $y = \dfrac{1}{x+1}$ para $x \in [0, 2]$.

- Dependendo da região, pode ser mais vantajoso integrar em y.

Exemplo 2.2.

Esboce a região delimitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$ e calcule a área.

Áreas entre curvas

- Sendo uma região R delimitada pelo gráfico de duas funções f e g para $x \in [a, b]$, com $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, temos que a área de R é dada por
$$\text{Área}(R) = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx.$$

Exemplo 2.1.

Calcule a área da região delimitada por $y = \sqrt{x+2}$ e $y = \dfrac{1}{x+1}$ para $x \in [0, 2]$.

- Dependendo da região, pode ser mais vantajoso integrar em y.

Exemplo 2.2.

Esboce a região delimitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$ e calcule a área.

Posição e Velocidade

- Suponha que um objeto se move ao longo de uma reta.
- Se sua função posição é dada por $s(t)$, onde t é o tempo, a velocidade do objeto é dada por $v(t) = s'(t)$.
- Entre os instantes t_1 e t_2 o **deslocamento** do objeto é dado por
$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = s(t_2) - s(t_1).$$
- Entre os instantes t_1 e t_2 a **distância total percorrida** é
$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt.$$

Exemplo 2.3.

Suponha que $v(t) = t^2 - t - 6$ e faça o que se pede.

a) Determine o deslocamento entre $1 \leq t \leq 4$.

b) Determine a distância percorrida neste intervalo $1 \leq t \leq 4$.

c) Supondo que conhecemos a posição do objeto em algum instante, é possível calcular a posição em $t = 4$?

Posição e Velocidade

- Suponha que um objeto se move ao longo de uma reta.
- Se sua função posição é dada por $s(t)$, onde t é o tempo, a velocidade do objeto é dada por $v(t) = s'(t)$.
- Entre os instantes t_1 e t_2 o **deslocamento** do objeto é dado por
$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = s(t_2) - s(t_1).$$
- Entre os instantes t_1 e t_2 a **distância total percorrida** é
$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt.$$

Exemplo 2.3.

Suponha que $v(t) = t^2 - t - 6$ e faça o que se pede.

a) Determine o deslocamento entre $1 \leq t \leq 4$.

b) Determine a distância percorrida neste intervalo $1 \leq t \leq 4$.

c) Supondo que conhecemos a posição do objeto em algum instante, é possível calcular a posição em $t = 4$?

Posição e Velocidade

- Suponha que um objeto se move ao longo de uma reta.
- Se sua função posição é dada por $s(t)$, onde t é o tempo, a velocidade do objeto é dada por $v(t) = s'(t)$.
- Entre os instantes t_1 e t_2 o **deslocamento** do objeto é dado por
$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1).$$
- Entre os instantes t_1 e t_2 a **distância total percorrida** é
$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt.$$

Exemplo 2.3.

Suponha que $v(t) = t^2 - t - 6$ e faça o que se pede.

a) Determine o deslocamento entre $1 \leq t \leq 4$.

b) Determine a distância percorrida neste intervalo $1 \leq t \leq 4$.

c) Supondo que conhecemos a posição do objeto em algum instante, é possível calcular a posição em $t = 4$?

Posição e Velocidade

- Suponha que um objeto se move ao longo de uma reta.
- Se sua função posição é dada por $s(t)$, onde t é o tempo, a velocidade do objeto é dada por $v(t) = s'(t)$.
- Entre os instantes t_1 e t_2 o **deslocamento** do objeto é dado por
$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = s(t_2) - s(t_1).$$
- Entre os instantes t_1 e t_2 a **distância total percorrida** é
$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt.$$

Exemplo 2.3.

Suponha que $v(t) = t^2 - t - 6$ e faça o que se pede.

a) Determine o deslocamento entre $1 \leq t \leq 4$.

b) Determine a distância percorrida neste intervalo $1 \leq t \leq 4$.

c) Supondo que conhecemos a posição do objeto em algum instante, é possível calcular a posição em $t = 4$?

Posição e Velocidade

- Suponha que um objeto se move ao longo de uma reta.
- Se sua função posição é dada por $s(t)$, onde t é o tempo, a velocidade do objeto é dada por $v(t) = s'(t)$.
- Entre os instantes t_1 e t_2 o **deslocamento** do objeto é dado por
$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1).$$
- Entre os instantes t_1 e t_2 a **distância total percorrida** é
$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt.$$

Exemplo 2.3.

Suponha que $v(t) = t^2 - t - 6$ e faça o que se pede.

a) Determine o deslocamento entre $1 \leq t \leq 4$.

b) Determine a distância percorrida neste intervalo $1 \leq t \leq 4$.

c) Supondo que conhecemos a posição do objeto em algum instante, é possível calcular a posição em $t = 4$?