Universidade Federal do Paraná - UFPR
Centro Politécnico
Departamento de Matemática

Disciplina: Cálculo 2 **Código:** CM312 **Semestre:** Semestre 2024/2

Lista 7

1. Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

(a) $f(x,y) = x^2y^3 + 2x^4y$, $(1,-2)$, $\theta = \pi/3$

(b) $f(x,y) = \text{sen}(x+2y)$, $(4,-2)$, $\theta = 3\pi/4$

(c) $f(x,y) = xe^{-2y}$, $(5,0)$, $\theta = \pi/2$

(d) $f(x,y) = (x^2-y)^3$, $(3,1)$, $\theta = 3\pi/4$

(e) $f(x,y) = y^x$, $(1,2)$, $\theta = \pi/2$

2. (i) Determine o gradiente de f.

(ii) Calcule o gradiente no ponto P.

(iii) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

(a) $f(x,y) = x^3 - 4x^2y + y^2$, $P(0,-1)$, $\mathbf{u} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$

(b) $f(x,y) = e^x \,\text{sen}\, y$, $P(1,\pi/4)$, $\mathbf{u} = \langle \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$

(c) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $P(1,-2,1)$, $\mathbf{u} = \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$

(d) $f(x,y,z) = xy + yz^2 + xz^3$, $P(2,0,3)$, $\mathbf{u} = \langle -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

3. Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$.

(a) $f(x,y) = x/y$, $(6,-2)$, $\mathbf{v} = \langle -1, 3 \rangle$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$, $(5,1)$, $\mathbf{v} = \langle 12, 5 \rangle$

(c) $g(x,y) = xe^{xy}$, $(-3,0)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

(d) $g(x,y) = e^x \cos y$, $(1,\pi/6)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

(e) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$, $(2,4,2)$, $\mathbf{v} = \langle 4, 2, -4 \rangle$

(f) $g(x,y,z) = xe^{yz} + xye^z$, $(-2,1,1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

(g) $g(x,y,z) = x \,\text{arctg}(y/z)$, $(1,2,-2)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

(h) $g(x,y,z) = z^3 - x^2y$, $(1,6,2)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

4. Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+2y}$, $(4,10)$,

(b) $f(x,y) = \cos(3x+2y)$, $(\pi/6, -\pi/8)$

(c) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$, $(1,0)$

(d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $(1,2)$

(e) $f(x,y,z) = x + y/z$, $(4,3,-1)$

(f) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, $(4,2,1)$

5. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como a origem. A temperatura no ponto $(1,2,2)$ é de 120.

(a) Determine a taxa de variação de T em $(1,2,2)$ em direção ao ponto $(2,1,3)$

(b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada por um vetor que aponta para a origem.

6. Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a) Determine a taxa de variação do potencial em $P = (3,4,5)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

7. Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A = (1,3)$, $B = (3,3)$, $C = (1,7)$ e $D = (6,15)$. A derivada direcional em A na direção do vetor $\vec{AB}$ é 3, e a derivada direcional em A na direção $\vec{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\vec{AD}$.

8. Determine as equações (i) do plano tangente e (ii) da reta normal para a superfície dada no ponto especificado.

(a) $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$

(b) $xyz = 6$, $(1, 2, 3)$

(c) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 4xz = 4$, $(1, 0, 1)$

(d) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xyz = 4$, $(3, -2, -1)$

(e) $xe^{yz} = 1$, $(1, 0, 5)$

(f) $4x^2 + y^2 + z^2 = 24$, $(2, 2, 2)$

(g) $x^2 - 2y^2 + z^2 = 3$, $(-1, 1, -2)$

9. Se $f(x, y) = xy$, encontre o vetore gradiente $\nabla f(3, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 6$ no ponto $(3, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

10. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela interseção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

11. (a) Mostre que a função $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ é contínua e suas derivadas parciais f_x e f_y existem na origem, mas as derivadas direcionais em todas as outras direções não existem.

(b) Use o computador para traçar o gráfico de f perto da origem e comente como ele confirma a parte (a).

Respostas:

1. (a) $7\sqrt{3} - 16$

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) -10

(d) $-672\sqrt{2}$

(e) 1

2. (a) (i)$(3x^2 - 8xy)\mathbf{i} + (2y - 4x^2)\mathbf{j}$ (ii) $-2\mathbf{j}$ (iii) $-\frac{8}{5}$

(b) (i)$e^x \operatorname{sen} y\mathbf{i} + e^x \cos y\mathbf{j}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}e(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{10}}e$

(c) (i) $\langle y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2\rangle$, $\langle 4, -4, 12\rangle$, (iii)$\frac{20}{\sqrt{3}}$

(d) (i) $\langle y + z^3, x + z^2, 2yz + 3xz^2\rangle$, (ii) $\langle 27, 11, 54\rangle$, (iii) $\frac{43}{3}$

3. (a) $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

(b) $\frac{7}{52}$

(c) $\frac{29}{\sqrt{13}}$

(d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e$

(e) $\frac{1}{6}$

(f) $-\frac{e\sqrt{14}}{7}$

(g) $-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$

(h) 8

4. (a) $\frac{\sqrt{17}}{6}$, $\langle 4, 1\rangle$

(b) $\sqrt{\frac{13}{2}}$, $\langle -3, -2\rangle$

(c) $\sqrt{5}$, $\langle 1, 2\rangle$

(d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\langle 1, 2\rangle$

(e) $\sqrt{11}$, $\langle 1, -1, -3\rangle$

(f) $\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\langle 1, 0, -4\rangle$

5. (a) $\dfrac{40}{3\sqrt{3}}$

(b)

6. (a) $32\sqrt{3}$

(b) $\langle 38, 6, 12\rangle$

(c) $2\sqrt{406}$

7. $\dfrac{327}{13}$

8.

(a) (i) $x+y+z=3$ (ii) $x=y=z$

(b) (i) $6x+3y+2z=18$ (ii) $\frac{1}{6}(x-1)=\frac{1}{3}(y-2)=\frac{1}{2}(z-3)$

(c) (i) $3x-y+z=4$ (ii) $\frac{x-1}{3}=-y=z-1$

(d) (i) $8x+5y=14$, (ii) $\frac{x-3}{8}=\frac{y+2}{5}$ (ii) $z=-1$

(e) (i) $x+5y=1$ (ii) $x-1=\frac{y}{5}$, (ii) $z=5$

(f) (i) $4x+y+z=12$, (ii) $\frac{x-2}{4}=y-2=z-2$

(g) (i) $x+2y+2z+3=0$, (ii) $x+1=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{2}$

9. $\langle 3,2\rangle$, $2x+3y=12$

10. $x=-1-10t$, $y=1-16t$, $z=2-12t$

11. (a)

(b)