Cálculo 1 - HONORS - CM311

Inexistência de Limites

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Limites Laterais

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e com I intervalo aberto tal que $(a, a+r) \subset I$ para algum $r > 0$.
  Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que o limite de f quando x se aproxima de a pela direita é igual à L (em símbolos $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$) se
  $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta, x > a$$
  então
  $$|f(x) - L| < \varepsilon.$$
- A função não precisa estar definida em a, basta estar definida em um intervalo aberto à direita de a.
- Se estiver definida em a, o limite não liga para o valor $f(a)$.
- Também é um conceito local.
- Todas as propriedades e considerações do limite "bilateral" valem para o limite à direita.
- Analogamente podemos considerar $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Limites Laterais

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e com I intervalo aberto tal que $(a, a+r) \subset I$ para algum $r > 0$.
  Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que o limite de f quando x se aproxima de a pela direita é igual à L (em símbolos $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$) se
  $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0, \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta, x > a$$
  então
  $$|f(x) - L| < \varepsilon.$$
- A função não precisa estar definida em a, basta estar definida em um intervalo aberto à direita de a.
- Se estiver definida em a, o limite não liga para o valor $f(a)$.
- Também é um conceito local.
- Todas as propriedades e considerações do limite "bilateral" valem para o limite à direita.
- Analogamente podemos considerar $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Limites Laterais

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e com I intervalo aberto tal que $(a, a+r) \subset I$ para algum $r > 0$.
  Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que o limite de f quando x se aproxima de a pela direita é igual à L (em símbolos $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$) se
  $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta, x > a$$
  então
  $$|f(x) - L| < \varepsilon.$$
- A função não precisa estar definida em a, basta estar definida em um intervalo aberto à direita de a.
- Se estiver definida em a, o limite não liga para o valor $f(a)$.
- Também é um conceito local.
- Todas as propriedades e considerações do limite "bilateral" valem para o limite à direita.
- Analogamente podemos considerar $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Limites Laterais

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e com I intervalo aberto tal que $(a, a + r) \subset I$ para algum $r > 0$.
  Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que o limite de f quando x se aproxima de a pela direita é igual à L (em símbolos $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$) se
  $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta, x > a$$
  então
  $$|f(x) - L| < \varepsilon.$$
- A função não precisa estar definida em a, basta estar definida em um intervalo aberto à direita de a.
- Se estiver definida em a, o limite não liga para o valor $f(a)$.
- Também é um conceito local.
- Todas as propriedades e considerações do limite "bilateral" valem para o limite à direita.
- Analogamente podemos considerar $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Limites Laterais

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e com I intervalo aberto tal que $(a, a+r) \subset I$ para algum $r > 0$.
  Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que o limite de f quando x se aproxima de a pela direita é igual à L (em símbolos $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$) se
  $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta, x > a$$
  então
  $$|f(x) - L| < \varepsilon.$$
- A função não precisa estar definida em a, basta estar definida em um intervalo aberto à direita de a.
- Se estiver definida em a, o limite não liga para o valor $f(a)$.
- Também é um conceito local.
- Todas as propriedades e considerações do limite "bilateral" valem para o limite à direita.
- Analogamente podemos considerar $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Limites Laterais

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e com I intervalo aberto tal que $(a, a+r) \subset I$ para algum $r > 0$.
  Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que o limite de f quando x se aproxima de a pela direita é igual à L (em símbolos $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$) se
  $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0, \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta, x > a$$
  então
  $$|f(x) - L| < \varepsilon.$$
- A função não precisa estar definida em a, basta estar definida em um intervalo aberto à direita de a.
- Se estiver definida em a, o limite não liga para o valor $f(a)$.
- Também é um conceito local.
- Todas as propriedades e considerações do limite "bilateral" valem para o limite à direita.
- Analogamente podemos considerar $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Proposição 1.1.

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com I intervalo aberto com $a \in I$. Teremos que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe se, e somente se, os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existirem e forem iguais.

Exemplo 1.2.

Determine todos o valores de a tais que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{se } x < -1 \\ x, & \text{se } -1 \le x < 1 \\ (x-1)^2, & \text{se } x \ge 1 \end{cases}.$$

- Em quais outros casos o limite não existe?
- Pode acontecer que a função fique "muito grande", ou "muito pequena" ao se aproximar de um ponto.

Limites Laterais

Proposição 1.1.

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com I intervalo aberto com $a \in I$. Teremos que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe se, e somente se, os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existirem e forem iguais.

Exemplo 1.2.

Determine todos o valores de a tais que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{se } x < -1 \\ x, & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ (x-1)^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

- Em quais outros casos o limite não existe?
- Pode acontecer que a função fique “muito grande”, ou “muito pequena” ao se aproximar de um ponto.

Limites Laterais

Proposição 1.1.

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* I *intervalo aberto com* $a \in I$. *Teremos que* $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe se, e somente se, os limites laterais* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *e* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *existirem e forem iguais.*

Exemplo 1.2.

Determine todos o valores de a tais que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{se } x < -1 \\ x, & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ (x-1)^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

- Em quais outros casos o limite não existe?
- Pode acontecer que a função fique "muito grande", ou "muito pequena" ao se aproximar de um ponto.

Limites Laterais

Proposição 1.1.

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* I *intervalo aberto com* $a \in I$. *Teremos que* $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe se, e somente se, os limites laterais* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *e* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *existirem e forem iguais.*

Exemplo 1.2.

Determine todos o valores de a tais que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{se } x < -1 \\ x, & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ (x-1)^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

- Em quais outros casos o limite não existe?
- Pode acontecer que a função fique "muito grande", ou "muito pequena" ao se aproximar de um ponto.

Exemplo 1.3.

Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- Temos que $f(x)$ assume valores tão **grandes** quanto quisermos se tomarmos $x > 0$ suficiente perto de 0.
- Analogamente $f(x)$ assume valores tão **pequenos** quanto quisermos se tomarmos $x < 0$ suficiente perto de 0.
- Como formalizar estes conceitos?

Definição 1.4.

Seja f uma função definida em um intervalo aberto ao redor do ponto $a \in \mathbb{R}$ exceto, possivelmente, no ponto a. Dizemos que o limite que f quando x se aproxima de a é igual à **infinito** se

$$\forall N > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) > N.$$

Notação: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Inexistência de Limites

Exemplo 1.3.

Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- Temos que $f(x)$ assume valores tão **grandes** quanto quisermos se tomarmos $x > 0$ suficiente perto de 0.
- Analogamente $f(x)$ assume valores tão **pequenos** quanto quisermos se tomarmos $x < 0$ suficiente perto de 0.
- Como formalizar estes conceitos?

Definição 1.4.

Seja f uma função definida em um intervalo aberto ao redor do ponto $a \in \mathbb{R}$ exceto, possivelmente, no ponto a. Dizemos que o limite que f quando x se aproxima de a é igual à **infinito** se

$$\forall N > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) > N.$$

Notação: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Inexistência de Limites

Exemplo 1.3.

Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- Temos que $f(x)$ assume valores tão **grandes** quanto quisermos se tomarmos $x > 0$ suficiente perto de 0.
- Analogamente $f(x)$ assume valores tão **pequenos** quanto quisermos se tomarmos $x < 0$ suficiente perto de 0.
- Como formalizar estes conceitos?

Definição 1.4.

Seja f uma função definida em um intervalo aberto ao redor do ponto $a \in \mathbb{R}$ exceto, possivelmente, no ponto a. Dizemos que o limite que f quando x se aproxima de a é igual à **infinito** se

$$\forall N > 0\, \exists \delta > 0 \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) > N.$$

Notação: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Exemplo 1.3.

Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- Temos que $f(x)$ assume valores tão **grandes** quanto quisermos se tomarmos $x > 0$ suficiente perto de 0.
- Analogamente $f(x)$ assume valores tão **pequenos** quanto quisermos se tomarmos $x < 0$ suficiente perto de 0.
- Como formalizar estes conceitos?

Definição 1.4.

Seja f uma função definida em um intervalo aberto ao redor do ponto $a \in \mathbb{R}$ exceto, possivelmente, no ponto a. Dizemos que o limite que f quando x se aproxima de a é igual à **infinito** se

$$\forall N > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) > N.$$

Notação: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Inexistência de Limites

- Analogamente podemos definir $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$

Observação 1.5.

Observe que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ não existe. Mas $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Exemplo 1.6.

Mostre pela definição que valem os limites abaixo

a) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$.

b) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+2}{x-3} = -\infty$.

Inexistência de Limites

- Analogamente podemos definir $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$

Observação 1.5.

Observe que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ não existe. Mas $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Exemplo 1.6.

Mostre pela definição que valem os limites abaixo

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+2}{x-3} = -\infty$.

Inexistência de Limites

- Analogamente podemos definir $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$

Observação 1.5.

Observe que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ não existe. Mas $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Exemplo 1.6.

Mostre pela definição que valem os limites abaixo

a) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$.

b) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+2}{x-3} = -\infty$.

Proposição 1.7.

Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto I ao redor do ponto $a \in \mathbb{R}$ exceto, possivelmente, em a. Se $f(x) > 0$ para todo $x \in I - \{a\}$ e $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

- Resultados similares valem trocando $f(x) > 0$ por $f(x) < 0$, e trocando $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.
- Para lembrar costumo utilizar os símbolos
$$\frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Inexistência de Limites

Proposição 1.7.

Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto I ao redor do ponto $a \in \mathbb{R}$ exceto, possivelmente, em a. Se $f(x) > 0$ para todo $x \in I - \{a\}$ e $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

- Resultados similares valem trocando $f(x) > 0$ por $f(x) < 0$, e trocando $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.
- Para lembrar costumo utilizar os símbolos

$$\frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Inexistência de Limites

Proposição 1.7.

Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto I ao redor do ponto $a \in \mathbb{R}$ exceto, possivelmente, em a. Se $f(x) > 0$ para todo $x \in I - \{a\}$ e $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

- Resultados similares valem trocando $f(x) > 0$ por $f(x) < 0$, e trocando $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.
- Para lembrar costumo utilizar os símbolos

$$\frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Aritmética de Limites com $\pm\infty$

Proposição 1.8.

Sejam f e g com $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$. *Vale*

a) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty.$

b) $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$, *se* $L > 0$.

c) $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$, *se* $L < 0$.

- Resultados análogos valem substituindo $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ por $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, e também substituindo $x \to a$ por $x \to a^+$ ou por $x \to a^-$.
- Para lembrar costumo utilizar os símbolos

$$\pm\infty + L = L \pm \infty = \pm\infty \quad \text{e} \quad (\pm\infty)L = L(\pm\infty) = \pm\infty, \text{ se } L \neq 0.$$

- O símbolo $0.(\pm\infty)$ não está bem definido.

Aritmética de Limites com $\pm\infty$

Proposição 1.8.

Sejam f e g com $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$. Vale

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$.
b) $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$, *se* $L > 0$.
c) $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$, *se* $L < 0$.

- Resultados análogos valem substituindo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ por $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, e também substituindo $x \to a$ por $x \to a^+$ ou por $x \to a^-$.
- Para lembrar costumo utilizar os símbolos

$$\pm\infty + L = L \pm \infty = \pm\infty \quad \text{e} \quad (\pm\infty)L = L(\pm\infty) = \pm\infty, \text{ se } L \neq 0.$$

- O símbolo $0.(\pm\infty)$ não está bem definido.

Aritmética de Limites com $\pm\infty$

Proposição 1.8.

Sejam f *e* g *com* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$. *Vale*

a) $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \to a} f(x).g(x) = +\infty$, *se* $L > 0$.

c) $\lim_{x \to a} f(x).g(x) = -\infty$, *se* $L < 0$.

- Resultados análogos valem substituindo $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ por $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, e também substituindo $x \to a$ por $x \to a^+$ ou por $x \to a^-$.
- Para lembrar costumo utilizar os símbolos

$$\pm\infty + L = L \pm \infty = \pm\infty \quad \text{e} \quad (\pm\infty)L = L(\pm\infty) = \pm\infty, \text{ se } L \neq 0.$$

- O símbolo $0.(\pm\infty)$ não está bem definido.

Aritmética de Limites com $\pm\infty$

Proposição 1.8.

Sejam f e g com $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$. *Vale*

a) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$, *se* $L > 0$.

c) $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$, *se* $L < 0$.

- Resultados análogos valem substituindo $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ por $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, e também substituindo $x \to a$ por $x \to a^+$ ou por $x \to a^-$.
- Para lembrar costumo utilizar os símbolos
  $$\pm\infty + L = L \pm \infty = \pm\infty \quad \text{e} \quad (\pm\infty)L = L(\pm\infty) = \pm\infty, \text{ se } L \neq 0.$$
- O símbolo $0.(\pm\infty)$ não está bem definido.

Aritmética de Limites com $\pm\infty$

- Outros casos onde podemos determinar limites quando temos $\pm\infty$:
  - $\infty + \infty = \infty$.
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
  - $\infty.\infty = (-\infty).(-\infty) = \infty$.
  - $\infty.(-\infty) = (-\infty).\infty = -\infty$.

Exercício.

Mostre algumas das afirmações acima de maneira formal.

- Expressões não definidas/indeterminadas:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0.(\pm\infty),\ \infty + (-\infty),\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Exemplo 1.9.

Valem os seguintes limites

- $\lim_{x\to 0^+} x^0 = 1.$
- $\lim_{x\to 0^+} 0^x = 0.$
- $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = e.$
- $\lim_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$
- $\lim_{x\to 0^+} (e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x})^x = e.$
- $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^x = 1.$

Aritmética de Limites com $\pm\infty$

- Outros casos onde podemos determinar limites quando temos $\pm\infty$:
  - $\infty + \infty = \infty$.
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
  - $\infty.\infty = (-\infty).(-\infty) = \infty$.
  - $\infty.(-\infty) = (-\infty).\infty = -\infty$.

Exercício.

Mostre algumas das afirmações acima de maneira formal.

- Expressões não definidas/indeterminadas:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0.(\pm\infty),\ \infty + (-\infty),\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Exemplo 1.9.

Valem os seguintes limites

- $\lim_{x\to 0^+} x^0 = 1.$
- $\lim_{x\to 0^+} 0^x = 0.$
- $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = e.$
- $\lim_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$
- $\lim_{x\to 0^+} (e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x})^x = e.$
- $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^x = 1.$

Aritmética de Limites com $\pm\infty$

- Outros casos onde podemos determinar limites quando temos $\pm\infty$:
  - $\infty + \infty = \infty$.
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
  - $\infty.\infty = (-\infty).(-\infty) = \infty$.
  - $\infty.(-\infty) = (-\infty).\infty = -\infty$.

Exercício.

Mostre algumas das afirmações acima de maneira formal.

- Expressões não definidas/indeterminadas:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0.(\pm\infty),\ \infty + (-\infty),\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Exemplo 1.9.

Valem os seguintes limites

- $\lim_{x\to 0^+} x^0 = 1.$
- $\lim_{x\to 0^+} 0^x = 0.$
- $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = e.$
- $\lim_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$
- $\lim_{x\to 0^+} (e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x})^x = e.$
- $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^x = 1.$

Aritmética de Limites com $\pm\infty$

- Outros casos onde podemos determinar limites quando temos $\pm\infty$:
  - $\infty + \infty = \infty$.
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
  - $\infty.\infty = (-\infty).(-\infty) = \infty$.
  - $\infty.(-\infty) = (-\infty).\infty = -\infty$.

Exercício.

Mostre algumas das afirmações acima de maneira formal.

- Expressões não definidas/indeterminadas:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0.(\pm\infty),\ \infty + (-\infty),\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Exemplo 1.9.

Valem os seguintes limites

- $\lim_{x\to 0^+} x^0 = 1.$
- $\lim_{x\to 0^+} 0^x = 0.$
- $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = e.$
- $\lim_{x\to 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$
- $\lim_{x\to 0^+} (e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x})^x = e.$
- $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^x = 1.$