Universidade Federal do Paraná - UFPR
Centro Politécnico
Departamento de Matemática

Disciplina: Introdução a Geometría Analítica e Álgebra Linear **Código:** CM303

Lista sistemas lineares

1. Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ 3x - 5y + 3z = 3 \end{cases}.$$

Verifique quais das alternativas abaixo são soluções deste sistema.

(a) $(3,6,8)$. (b)$(2,-1,7)$; (c) $(\sqrt{3},0,-1)$

(d) $(2,3,4)$. (e) $(0,0,0)$.

2. Qual é a classificação (com respeito ao conjunto solução) do sistema linear do exercício anterior?

3. Para cada um dos sistemas lineares abaixo escreva a matriz dos coeficientes, a matriz das variáveis, a matriz dos termos independentes e a representação matricial.

(a) $\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - z + \frac{3}{2}w = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 7x + y = 29 \\ -x + 5y = 2 \\ -y = -4 \end{cases}$

4. Para cada um dos sistemas lineares abaixo, determine o seu conjunto solução usando o método da matriz inversa.

(a) $\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ -x - y + z = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = -19 \\ -x + 2y + 3z = 12 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x - y + z + w = 4 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - 2y + w = 1 \\ 5x + z - w = 5 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + y + z - w = 3 \\ 2x + 3y - z + w = 1 \\ -x + y - z - 2w = -1 \\ x + 2y + 2z + w = 6 \end{cases}$

5. Para cada um dos sistemas lineares abaixo, determine o valor de k para que o sistema seja SPD.

(a) $\begin{cases} x + 2y + kz = -1 \\ kx - y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$

6. Para cada um dos sistemas lineares abaixo, (i) encontre as matrizes A, $\mathbf{b}$ e $[A\,|\,\mathbf{b}]$, (ii) escalone a matriz $[A\,|\,\mathbf{b}]$, (iii) determine as variáveis livres e as variáveis dependentes, (iv) classifique e (v) resolva o sistema (quando houver solução).

(a) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 5 \\ 4x + 2y + z = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - y + z + w = 4 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - 2y + w = 1 \\ 5x + z - w = 5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ 3x - 5y + 3z = 3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 4x + y - z = 4 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x + y + z - w = 2 \\ 2x - y - z - w = -1 \\ x - 2y - 2z = -3 \\ 3x - 3y - 3z - w = -4 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x - y + 3z - w = 2 \\ x - 3y - 2z + 2w = 4 \end{cases}$

(h) $\{\; x - 3y + 5z = 4$

(i) $\{\; -3x + 5z + 4w = 1$

Nesse sistema, y também é uma incógnita.

(j) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$

7. Em cada item, determine o(s) valor(es) de k que torna(m) o sistema: possível determinado, possível indeterminado ou impossível.

(a) $\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y + kz = -1 \\ kx - y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

8. Determine os valores de a e b que tornam o sistema abaixo: possível determinado, possível indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} x + ay + bz = 3 \\ 2x + (2a+1)y + (2b+a)z = b+6 \\ x + (a+2)y + (3a+b)z = 3b+3 \end{cases}$$

9. Determine a função polinomial f de grau dois que satisfaz $f(1) = 0$, $f(3) = 2$ e $f(4) = 6$.

10. Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) determinou-se que:

- O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.
- O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades, respectivamente, das vitaminas A, B e C.
- O alimento III tem 3 unidades de vitamina A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,

(a) Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II, e III, que fornecem a quantidade de vitamina desejada.

(b) Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois custam 10, existe uma solução custando exatamente R$1,00?

11. Três pessoas foram a uma lanchonete. A primeira pagou R$ $4,00$ por dois guaranás e um pastel; a segunda pagou R$ $5,00$ por uma guaraná e dois pastéis; e a terceira pagou R$ $7,00$ por dois guaranás e dois pastéis. Todos pagaram o preço correto? Justifique a sua resposta.

Respostas:

1. (a) É solução. (b)Não é solução. (c) Não é solução. (d) É solução. (e) Não é solução.

2. SPI.

3. (a) Matriz dos coeficientes: $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Matriz das variáveis: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Matriz dos termos independentes: $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Representação matricial: $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(b) Matriz dos coeficientes: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Matriz das variáveis: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$.

Matriz dos termos independentes: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Representação matricial: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(d) Matriz dos coeficientes: $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Matriz das variáveis: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Matriz dos termos independentes: $\begin{bmatrix} 29 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Representação matricial: $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$.

4. (a) $\{(18, -10)\}$.

(b) $\{(-19, 12, -4)\}$.

(c) $\{(1, 2, 3)\}$.

(d) $\{(0, -1, 4, -1)\}$

(e) $\{(0, 1, 2, 0)\}$.

5. (a) Se $k \neq 0$ e $k \neq 1$, é SPD.

(b)Se $k \neq 2$, é SPD.

6. O escalonamento não é único. Como as variáveis livres e dependentes dependem da forma escalona, então a determinação de tais variáveis não é única (porém, o número de variáveis livres e o número de variáveis dependentes são sempre os mesmos, independentemente do caminho escolhido no escalonamento). Abaixo, estão apenas a classificação e o conjunto solução. A escrita do conjunto solução também não é única.

(a) Sistema impossível. O conjunto solução é vazio, isto é, $S = \varnothing$.

(b)Sistema possível e determinado. A única solução é $x = 2$, $y = -\dfrac{7}{3}$ e $z = \dfrac{2}{3}$ ou, em forma de conjunto solução, $S = \left\{ \left(2, -\dfrac{7}{3}, \dfrac{2}{3}\right) \right\}$.

(c)Sistema possível e determinado. A única solução é $x = 0$, $y = -1$, $z = 4$ e $w = -1$ ou, em forma de conjunto solução, $S = \{(0, -1, 4, -1)\}$.

(d)Sistema possível e indeterminado. O conjunto de todas as soluções é $S = \left\{ \left(1 + \dfrac{z}{4}, \dfrac{3z}{4}, z\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$.

(e)Sistema possível e indeterminado. O conjunto de todas as soluções é

$$S = \left\{ \left(\frac{z+6}{7}, \frac{3z+4}{7}, z \right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(f)Sistema possível e indeterminado. O conjunto de todas as soluções é

$$S = \left\{ \left(\frac{2w+1}{3}, -z + \frac{w+5}{3}, z, w \right) \;\middle|\; z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

(g)Sistema possível e indeterminado. O conjunto de todas as soluções é

$$S = \left\{ \left(\frac{-11z+2}{5} + w, \frac{-7z-6}{5} + w, z, w \right) \;\middle|\; z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

(h)Sistema possível e indeterminado. O conjunto de todas as soluções é

$$S = \{(4 + 3y - 5z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

(i)Sistema possível e indeterminado. O conjunto de todas as soluções é

$$S = \left\{ \left(\frac{5z+4w-1}{3}, y, z, w \right) \;\middle|\; y, z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

(j)Sistema possível e indeterminado. O conjunto de todas as soluções é $S = \{(-z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

7. (a) Se $k = -6$, é SPD.
Nunca será SPI.
Se $k \neq -6$, é SI.

(b)Se $k \neq 0$ e $k \neq 1$, é SPD.
Se $k = 1$, é SPI.
Se $k = 0$, é SI.

8. Se $a \neq 0$, é SPD.
Se $a = 0$ e $b = 0$, é SPI.
Se $a = 0$ e $b \neq 0$, é SI.

9. $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

10. Sejam x, y e z as quantidades de alimentos I, II e III respectivamente.

(a) $x = -5 + 3z$; $y = 8 - 3z$ onde $\frac{5}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}$

(b) Sim. $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$

11. Não. Basta observar que o sistema

$$\begin{aligned} 2g + p &= 4 \\ g + 2p &= 5 \\ 2g + 2p &= 7 \end{aligned}$$

é SI.