Exercício 6; considere os limites sendo aplicados em todos os termos

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{\cancel{(x+1)}} = x-1 = 1-1=0$

b) $\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3}{x^3+1} = \frac{(x+1)^3}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} = \frac{0}{1} = 0$

c) $\lim_{H\to 0} \frac{(a+H)^3-a^3}{H} = \frac{a^3+3a^2H+3aH^2+H^3-a^3}{H} = \frac{H(3a^2+3aH+H^2)}{H}$

$= 3a^2+3a\cdot 0+0 = 3a^2$

d) $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} = \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)} = a^2+a^2+a^2 = 3a^2$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{10}-1}{x}$.

Vamos dizer que $(1+2x)^{10}-1 = f(x)$ e $x = g(x)$

$f(0) = (1+0)^{10}-1=0$ e $g(0)=0$, sendo assim reescrevemos como

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}$. Além disso podemos dividir por $(x-0)$ e manter a igualdade.

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{g(x)-g(0)}{x-0}}$. Pela definição de derivada $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x)$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{10(1+2x)^9\cdot 2-0}{1} = 20(1+2x)^9$

Sendo assim, como sabemos que f'(x) e g'(x) são funções continuas, podemos calcular:

$$\lim_{x\to 0} 20(1+2x)^9 = 20(1+0)^9 = 20$$

f) $$\lim_{x\to y}\frac{x^m-y^m}{x-y} = \frac{\cancel{(x-y)}(x^{m-1}+x^{m-2}\cdot y+\dots+x\cdot y^{m-2}+y^{m-1})}{\cancel{x-y}}$$

$$= y^{m-1}+y^{m-2}\cdot y+\dots+y\cdot y^{m-2}+y^{m-1}) = m(y^{m-1})$$

g) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^{m-1}+x^{m-2}\cdot 1+\dots+x\cdot 1^{m-2}+1^{m-1})}{\cancel{(x-1)}(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot 1+\dots+x\cdot 1^{n-2}+1^{n-1})}$$

$$= \frac{1^{m-1}+1^{m-2}\cdot 1+\dots+1\cdot 1^{m-2}+1^{m-1})}{1^{n-1}+1^{n-2}\cdot 1+\dots+1\cdot 1^{n-2}+1^{n-1})} = \frac{m}{n}$$

h) $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

i) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3} = \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2})} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{3^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}\right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{9}$$

j) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3} = \frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)(\sqrt{x^2+9}+3)}{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)(\sqrt{x^2+4}+2)} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2}(\sqrt{x^2+9}+3)}{\cancel{x^2}(\sqrt{x^2+4}+2)} = \frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{4}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$K) \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6} = \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}\right) = \frac{x^2+7-16}{(x-3)(x-2)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$= \frac{x^2+9}{(x-3)(x-2)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x-2)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \frac{6}{(1)\cdot(\sqrt{9+7}+4)} = \frac{6}{4+4}$$

$$= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$L) \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} =$$

$$= \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{2}{3}$$

Exercício 10 (LISTA 1)

Encontrar "a" para que o limite a seguir exista:

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2} \to \lim_{x \to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{(x+2)(x-1)}$$ onde $f(x) = 3x^2+ax+a+3$

Quando aproximamos $x$ de $-2$, temos uma divisão por 0. Sendo assim, temos que levantar o caso $\frac{0}{0}$, para poder verificar se o limite realmente existe.
Fazemos isso fatorando o numerador $f(x)$ para que ele tenha o fator $(x+2)$.

Pelo teorema do resto sabemos que $f(x)$ terá o fator quando:

$f(-2)=0$; $3\cdot(-2)^2-2a+a+3=0 \to 15-a=0 \to a=15$

Dessa forma podemos verificar quando $a=15$

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2+15x+15+3}{(x+2)(x-1)} = \frac{3(x^2+5x+6)}{(x+2)(x-1)} = \frac{3(x+3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-1)} =$$

$$= \frac{3(x+3)}{x-1} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x+3)}{x-1} = \frac{3\cdot(1)}{-3} = -1$$

Sendo assim, o limite existe quando $a=15$, e seu valor é $-1$.

Exercício 16. (LISTA 1)

Sejam f e g funções definidas em $\mathbb{R}$, com $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que o $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Vamos provar que $\exists\ \delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x)| < |g(x)|$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ TQ se

$0 < |x - a| < \delta$ então $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 0\right| < \varepsilon$

Tomando $\varepsilon = 1$ temos que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < 1 \to \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < 1 \to |f(x)| < |g(x)|$$

Sendo assim, provamos que:

Para $\varepsilon = 1\ \exists\ \delta > 0$ TQ se

$0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x)| < |g(x)|$

 

Exercício 17. (LISTA 1)

Supondo que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, vamos provar que $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ TQ se

$0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$

Podemos escrever $|f(x)|$ da seguinte maneira

$|f(x)| = |f(x) + (-L) + L|$; pela desigualdade triangular:

$|f(x) + (-L) + L| \leq |f(x) - L| + |L|$ (subtraindo $|L|$)

$|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L|$ ①

Fazendo a mesma coisa para $|L|$ obtemos $|L| - |f(x)| \leq |f(x) - L|$ ②

Dessa forma:

$||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$, pois caso $||f(x)| - |L|| > 0$ utiliza-se a equação ①, caso $||f(x)| - |L|| < 0$, a equação ② é utilizada.

Sendo assim, $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon$; portanto provando que

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ TQ se $0 < |x - a| < \delta$ então $||f(x)| - |L|| < \varepsilon$

O que provou que $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$