Cálculo 1 - HONORS - CM311

Polinômios de Taylor de Ordem Superior
Variações de Funções

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Relembrando...

- Sendo $y = f(x)$ derivável, para $h \approx 0$ temos
$$f(a+h) \approx f(a) + dy = f(a) + f'(a).h.$$
- Definindo $x = a + h$, temos
$$f(x) \approx f(a) + f'(a).(x-a).$$
- A expressão à direita é chamada de **polinômio de Taylor de ordem 1 de f no ponto a**:
$$T_{1,a}(a) = f(a) + f'(a).(x-a).$$
- Podemos definir polinômios de Taylor de ordem maiores e isso melhora a aproximação acima.

Relembrando...

- Sendo $y = f(x)$ derivável, para $h \approx 0$ temos
$$f(a+h) \approx f(a) + dy = f(a) + f'(a).h.$$
- Definindo $x = a + h$, temos
$$f(x) \approx f(a) + f'(a).(x-a).$$
- A expressão à direita é chamada de **polinômio de Taylor de ordem 1 de f no ponto a**:
$$T_{1,a}(a) = f(a) + f'(a).(x-a).$$
- Podemos definir polinômios de Taylor de ordem maiores e isso melhora a aproximação acima.

Relembrando...

- Sendo $y = f(x)$ derivável, para $h \approx 0$ temos
$$f(a+h) \approx f(a) + dy = f(a) + f'(a).h.$$
- Definindo $x = a + h$, temos
$$f(x) \approx f(a) + f'(a).(x-a).$$
- A expressão à direita é chamada de **polinômio de Taylor de ordem 1 de f no ponto** a:
$$T_{1,a}(a) = f(a) + f'(a).(x-a).$$
- Podemos definir polinômios de Taylor de ordem maiores e isso melhora a aproximação acima.

Relembrando...

- Sendo $y = f(x)$ derivável, para $h \approx 0$ temos
$$f(a+h) \approx f(a) + dy = f(a) + f'(a).h.$$
- Definindo $x = a + h$, temos
$$f(x) \approx f(a) + f'(a).(x-a).$$
- A expressão à direita é chamada de **polinômio de Taylor de ordem 1 de f no ponto** a:
$$T_{1,a}(a) = f(a) + f'(a).(x-a).$$
- Podemos definir polinômios de Taylor de ordem maiores e isso melhora a aproximação acima.

Taylor de Ordem Superior

- Considere o polinômio abaixo na variável x

$$p(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.x^i.$$

- Os coeficientes de p podem ser calculados através de sucessivas derivadas de p em 0. Temos

$$a_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

- Sabendo o valor da derivada de p até ordem n em 0 determinamos de maneira única o polinômio acima.
- Analogamente vale se considerarmos polinômios na variável "$x - a$"

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i.(x-a)^i, \quad \text{com } a_i = \frac{p^{(i)}(a)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Taylor de Ordem Superior

- Considere o polinômio abaixo na variável x

$$p(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.x^i.$$

- Os coeficientes de p podem ser calculados através de sucessivas derivadas de p em 0. Temos

$$a_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

- Sabendo o valor da derivada de p até ordem n em 0 determinamos de maneira única o polinômio acima.
- Analogamente vale se considerarmos polinômios na variável "$x - a$"

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i.(x-a)^i, \quad \text{com } a_i = \frac{p^{(i)}(a)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Taylor de Ordem Superior

- Considere o polinômio abaixo na variável x
$$p(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.x^i.$$
- Os coeficientes de p podem ser calculados através de sucessivas derivadas de p em 0. Temos
$$a_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$
- Sabendo o valor da derivada de p até ordem n em 0 determinamos de maneira única o polinômio acima.
- Analogamente vale se considerarmos polinômios na variável "$x - a$"
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i.(x-a)^i, \quad \text{com } a_i = \frac{p^{(i)}(a)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Taylor de Ordem Superior

- Considere o polinômio abaixo na variável x

$$p(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.x^i.$$

- Os coeficientes de p podem ser calculados através de sucessivas derivadas de p em 0. Temos

$$a_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

- Sabendo o valor da derivada de p até ordem n em 0 determinamos de maneira única o polinômio acima.
- Analogamente vale se considerarmos polinômios na variável "$x - a$"

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i.(x-a)^i, \quad \text{com } a_i = \frac{p^{(i)}(a)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Taylor de Ordem Superior

- Sendo f uma função derivável até ordem n no ponto a podemos definir um (único) polinômio que tenha mesmas derivadas de f até ordem n no ponto a.
- Tal polinômio é chamado de **Polinômio de Taylor de Ordem n de f no ponto a**. Notação $T_{n,a}$.
- De acordo com a discussão anterior temos
$$T_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i.$$
- É possível mostrar que para $x \approx a$ temos que $f(x) \approx T_{n,a}(x)$.

Taylor de Ordem Superior

- Sendo f uma função derivável até ordem n no ponto a podemos definir um (único) polinômio que tenha mesmas derivadas de f até ordem n no ponto a.
- Tal polinômio é chamado de **Polinômio de Taylor de Ordem n de f no ponto a**. Notação $T_{n,a}$.
- De acordo com a discussão anterior temos

$$T_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i.$$

- É possível mostrar que para $x \approx a$ temos que $f(x) \approx T_{n,a}(x)$.

Taylor de Ordem Superior

- Sendo f uma função derivável até ordem n no ponto a podemos definir um (único) polinômio que tenha mesmas derivadas de f até ordem n no ponto a.
- Tal polinômio é chamado de **Polinômio de Taylor de Ordem n de f no ponto a**. Notação $T_{n,a}$.
- De acordo com a discussão anterior temos
$$T_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i.$$
- É possível mostrar que para $x \approx a$ temos que $f(x) \approx T_{n,a}(x)$.

Taylor de Ordem Superior

- Sendo f uma função derivável até ordem n no ponto a podemos definir um (único) polinômio que tenha mesmas derivadas de f até ordem n no ponto a.
- Tal polinômio é chamado de **Polinômio de Taylor de Ordem n de f no ponto a**. Notação $T_{n,a}$.
- De acordo com a discussão anterior temos
$$T_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}.(x-a)^i.$$
- É possível mostrar que para $x \approx a$ temos que $f(x) \approx T_{n,a}(x)$.

Taylor de Ordem Superior

Teorema 1.1 (Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal).

Sendo f derivável até ordem n em a, e $R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$ a função resto, temos que

$$\frac{R_{a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Exemplo 1.2.

Sendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, calcule $T_{3,0}$, $T_{4,0}$ e $T_{5,0}$. Esboce o gráfico destas funções em um mesmo plano cartesiano.

Taylor de Ordem Superior

Teorema 1.1 (Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal).

Sendo f derivável até ordem n em a, e $R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$ a função resto, temos que

$$\frac{R_{a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Exemplo 1.2.

Sendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, calcule $T_{3,0}$, $T_{4,0}$ e $T_{5,0}$. Esboce o gráfico destas funções em um mesmo plano cartesiano.

Variações de Funções

- Podemos usar informações das derivadas para saber informações de como varia uma função, isto é, intervalos de crescimento/ decrescimento, pontos de máximo/mínimo, concavidade, etc.

Definição 2.1.

Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ dizemos que

- f **é crescente em** I se $f(a) < f(b)$ para quaisquer $a, b \in I$, $a < b$,
- f **é decrescente em** I se $f(a) > f(b)$ para quaisquer $a, b \in I$, $a < b$.

Proposição 2.2.

Sendo f derivável em c e $x_1 < c < x_2$, próximos de c, temos que

- *Se $f'(c) > 0$ então $f(x_1) < f(x_2)$.*
- *Se $f'(c) < 0$ então $f(x_1) > f(x_2)$.*

- Existe algum resultado global deste tipo?

Variações de Funções

- Podemos usar informações das derivadas para saber informações de como varia uma função, isto é, intervalos de crescimento/ decrescimento, pontos de máximo/mínimo, concavidade, etc.

Definição 2.1.

Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ dizemos que

- f **é crescente em** I se $f(a) < f(b)$ para quaisquer $a, b \in I$, $a < b$,
- f **é decrescente em** I se $f(a) > f(b)$ para quaisquer $a, b \in I$, $a < b$.

Proposição 2.2.

Sendo f derivável em c e $x_1 < c < x_2$, próximos de c, temos que

- *Se $f'(c) > 0$ então $f(x_1) < f(x_2)$.*
- *Se $f'(c) < 0$ então $f(x_1) > f(x_2)$.*

- Existe algum resultado global deste tipo?

Variações de Funções

- Podemos usar informações das derivadas para saber informações de como varia uma função, isto é, intervalos de crescimento/ decrescimento, pontos de máximo/mínimo, concavidade, etc.

Definição 2.1.

Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ dizemos que

- f **é crescente em** I se $f(a) < f(b)$ para quaisquer $a, b \in I$, $a < b$,
- f **é decrescente em** I se $f(a) > f(b)$ para quaisquer $a, b \in I$, $a < b$.

Proposição 2.2.

Sendo f derivável em c e $x_1 < c < x_2$, próximos de c, temos que

- *Se $f'(c) > 0$ então $f(x_1) < f(x_2)$.*
- *Se $f'(c) < 0$ então $f(x_1) > f(x_2)$.*

- Existe algum resultado global deste tipo?

- Podemos usar informações das derivadas para saber informações de como varia uma função, isto é, intervalos de crescimento/ decrescimento, pontos de máximo/mínimo, concavidade, etc.

Definição 2.1.

Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ dizemos que

- f **é crescente em** I se $f(a) < f(b)$ para quaisquer $a, b \in I$, $a < b$,
- f **é decrescente em** I se $f(a) > f(b)$ para quaisquer $a, b \in I$, $a < b$.

Proposição 2.2.

Sendo f derivável em c e $x_1 < c < x_2$, próximos de c, temos que

- *Se $f'(c) > 0$ então $f(x_1) < f(x_2)$.*
- *Se $f'(c) < 0$ então $f(x_1) > f(x_2)$.*

- Existe algum resultado global deste tipo?

Variações de Funções

Proposição 2.3.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *com* I *um intervalo.*

- *Se* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in I$ *então* f *é crescente em* I.
- *Se* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in I$ *então* f *é decrescente em* I.

- Uma forma de demonstrar o resultado acima é usar o Teorema do Valor Médio.

Teorema 2.4 (Teorema do Valor Médio (TVM)).

Se f *é uma função contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b), *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Variações de Funções

Proposição 2.3.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo.

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.*

- Uma forma de demonstrar o resultado acima é usar o Teorema do Valor Médio.

Teorema 2.4 (Teorema do Valor Médio (TVM)).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposição 2.3.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *com* I *um intervalo.*

- *Se* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in I$ *então* f *é crescente em* I.
- *Se* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in I$ *então* f *é decrescente em* I.

- Uma forma de demonstrar o resultado acima é usar o Teorema do Valor Médio.

Teorema 2.4 (Teorema do Valor Médio (TVM)).

Se f *é uma função contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b), *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exemplo 2.5.

Sendo $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$ determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

- O Teorema do Valor Médio pode ser provado assumindo a validade de um caso particular.

Teorema 2.6 (Teorema de Rolle).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- Já o Teorema de Rolle pode ser provado usando o **Teorema do Valor Extremo (TVE)**

Variações de Funções

Exemplo 2.5.

Sendo $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$ determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

- O Teorema do Valor Médio pode ser provado assumindo a validade de um caso particular.

Teorema 2.6 (Teorema de Rolle).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- Já o Teorema de Rolle pode ser provado usando o **Teorema do Valor Extremo (TVE)**

Exemplo 2.5.

Sendo $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$ determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

- O Teorema do Valor Médio pode ser provado assumindo a validade de um caso particular.

Teorema 2.6 (Teorema de Rolle).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- Já o Teorema de Rolle pode ser provado usando o **Teorema do Valor Extremo (TVE)**

Exemplo 2.5.

Sendo $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$ determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

- O Teorema do Valor Médio pode ser provado assumindo a validade de um caso particular.

Teorema 2.6 (Teorema de Rolle).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- Já o Teorema de Rolle pode ser provado usando o **Teorema do Valor Extremo (TVE)**

Variações de Funções

Teorema 2.7 (Teorema do Valor Extremo (TVE)).

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in I$
  - x_0 é um **ponto de máximo de** f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$,
  - x_0 é um **ponto de mínimo de** f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$,
- O conjunto dos máximos e mínimos são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?

Proposição 2.8.

Se f é derivável no ponto extremo x_0 de f, temos que $f'(x_0) = 0$.

- Se f for derivável em $[a, b]$ os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.

Teorema 2.7 (Teorema do Valor Extremo (TVE)).

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in I$
  - x_0 é um **ponto de máximo de** f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$,
  - x_0 é um **ponto de mínimo de** f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$,
- O conjunto dos máximos e mínimos são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?

Proposição 2.8.

Se f é derivável no ponto extremo x_0 de f, temos que $f'(x_0) = 0$.

- Se f for derivável em $[a, b]$ os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.

Teorema 2.7 (Teorema do Valor Extremo (TVE)).

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in I$
  - x_0 é um **ponto de máximo de** f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$,
  - x_0 é um **ponto de mínimo de** f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$,
- O conjunto dos máximos e mínimos são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?

Proposição 2.8.

Se f é derivável no ponto extremo x_0 de f, temos que $f'(x_0) = 0$.

- Se f for derivável em $[a, b]$ os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.

Teorema 2.7 (Teorema do Valor Extremo (TVE)).

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in I$
  - x_0 é um **ponto de máximo de** f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$,
  - x_0 é um **ponto de mínimo de** f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$,
- O conjunto dos máximos e mínimos são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?

Proposição 2.8.

Se f é derivável no ponto extremo x_0 de f, temos que $f'(x_0) = 0$.

- Se f for derivável em $[a, b]$ os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.

Teorema 2.7 (Teorema do Valor Extremo (TVE)).

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in I$
  - x_0 é um **ponto de máximo de** f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$,
  - x_0 é um **ponto de mínimo de** f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$,
- O conjunto dos máximos e mínimos são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?

Proposição 2.8.

Se f é derivável no ponto extremo x_0 de f, temos que $f'(x_0) = 0$.

- Se f for derivável em $[a, b]$ os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.

Variações de Funções

Teorema 2.7 (Teorema do Valor Extremo (TVE)).

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então existem* $c_1, c_2 \in [a, b]$ *tais que* $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ *para todo* $x \in [a, b]$.

- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in I$
  - x_0 é um **ponto de máximo de** f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$,
  - x_0 é um **ponto de mínimo de** f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$,
- O conjunto dos máximos e mínimos são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?

Proposição 2.8.

Se f *é derivável no ponto extremo* x_0 *de* f, *temos que* $f'(x_0) = 0$.

- Se f for derivável em $[a, b]$ os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.