CM311 - Cálculo 1
Honors - 1sem2024
Prof. Diego Otero
Lista de Exercícios 4

Problemas

1 Derivadas de Funções Inversas

1. Seja f uma função definida em um intervalo I. Suponha que f seja derivável e injetora em I. Denotando a imagem de f por J, temos que sua inversa f^{-1} tem domínio J e imagem I. Faça o que se pede

   a) Supondo que f^{-1} é derivável e que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ para todo $x \in J$, usando a Regra da Cadeia, mostre que
   $$f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

   b) Usando a Regra da Cadeia, mostre que se existe $a \in J$ tal que $f'(f^{-1}(a)) = 0$, então f^{-1} não é derivável em a.

   c) Use o fato acima para explicar porque $(f^{-1})'(0)$ não existe quando $f(x) = x^3$.

2. Nos itens a seguir suponha que f^{-1} existe e use as informações dadas para calcular $(f^{-1})'(a)$, supondo que exista.

   a) $f(6) = 2$, $f'(6) = \dfrac{1}{3}$, $a = 2$.

   b) $f(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{2}$, $f'(\sqrt{3}) = \dfrac{2}{3}$, $a = \dfrac{1}{2}$.

   c) $f(1) = 0$, $f'(1) = -2$, $a = 0$.

   d) $f(1) = -3$, $f'(1) = 10$, $a = -3$.

3. Seja f uma função definida em um intervalo I de modo que seja injetora e derivável, tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Suponha que exista uma função derivável F com $F' = f$ e defina $G(x) = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$. Mostre que $G'(x) = f^{-1}(x)$. Isso quer dizer que se existe uma função tal que a derivada seja f, então vai existir uma função tal que a derivada seja f^{-1}.

2 Funções Trigonométricas Inversas

1. Simplifique as expressões abaixo de modo a obter uma expressão que não envolva funções trigonométricas, nem trigonométricas inversas. Indique para quais valores de u vale a igualdade obtida.

   a) $\cos(\operatorname{arcsen}(u))$.

   b) $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(u))$.

   c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}(1-u))$.

   d) $\cos\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{u}\right)$.

   e) $\cos(\operatorname{arctg}(3u-1))$.

   f) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{u}{\sqrt{2u+1}}\right)$.

2. Prove as igualdades abaixo

   a) $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   b) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

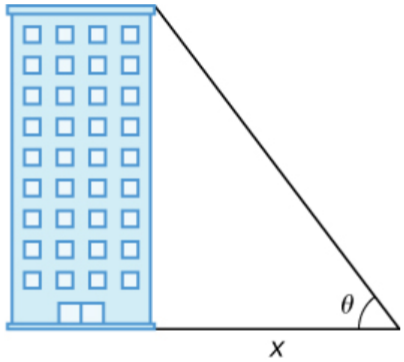
   c) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   d) $(\operatorname{arccossec} x)' = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

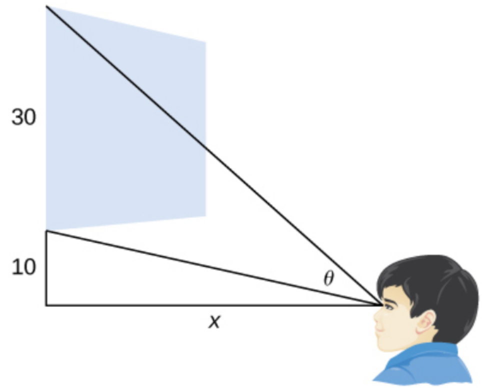
   e) $(\operatorname{arcsec} x)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

   f) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Um prédio de 70m faz uma sombra com comprimento x conforme o dia passa. Um ângulo de elevação θ é formado por segmentos que ligam o topo e a base do prédio até a parte mais distante da sombra, conforme mostra a figura. Encontre a taxa de variação do ângulo de elevação quando $x = 85$m.



4. A tela de um cinema tem 10 metros de altura e está à 3 metros de altura acima do nível dos olhos de uma pessoa que está sentada, conforme ilustrado na figura. O ângulo de visão θ que a pessoa enxerga é dado por $\theta = \operatorname{arccotg} \dfrac{x}{40} - \operatorname{arccotg} \dfrac{x}{10}$, onde x é a distância em metros do lugar que está sentada a pessoa até a parede onde está fixada a tela. Faça o que se pede



   a) Encontre $\dfrac{d\theta}{dx}$.
   b) Calcule $\dfrac{d\theta}{dx}$ para $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ e $x = 5$.
   c) Interprete os resultados obtidos no item anterior.
   d) Calcule $\dfrac{d\theta}{dx}$ para $x = 8$, $x = 9$, $x = 10$, $x = 11$ e $x = 12$.
   e) Interprete os resultados obtidos no item anterior.
   f) Em qual distância x uma pessoa deve se sentar para maximar o ângulo de visão?

3 Exponenciais e Logaritmos

1. Calcule as derivadas das funções abaixo

   a) $f(x) = x^2 e^x$.
   b) $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.
   c) $f(x) = e^x \cos x$.
   d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   e) $f(x) = (x^3 + \ln x) \operatorname{cossec} x$.
   f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x \ln x}$.
   g) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
   h) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
   i) $f(x) = \ln(\sec x)$.
   j) $f(x) = \cos(2x) e^{3x}$.
   k) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$.
   l) $f(x) = \pi^x + 3^x x + 4^x \cos x$.
   m) $f(x) = \log_2(x) + \log_3(x)$.
   n) $f(x) = 2^x \log_3(x)$.
   o) $f(x) = \log_{10}(\operatorname{sen} x)$.
   p) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$.
   q) $f(x) = x^{\operatorname{sen} 3x}$.
   r) $f(x) = x^x$.
   s) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.
   t) $f(x) = (\ln x)^x$.
   u) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$.
   v) $f(x) = x^{e^x}$.

2. Calcule as derivadas abaixo

   a) $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.
   b) $\dfrac{d^5}{dx^5}(\ln x)$.
   c) $\dfrac{d^{1000}}{dx^{1000}}(xe^{-x})$.

3. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que $g(1) = 2$ e $g'(1) = 3$. Calcule $f'(0)$, sendo f dada por $f(x) = e^x g(3x+1)$.

4. Sejam $y_1 = e^{-2x}$ e $y_2 = xe^{-2x}$. Mostre que y_1 e y_2 satisfazem a seguinte *equação diferencial ordinária*
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

5. Determine todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $y = e^{\lambda x}$ seja solução da equação diferencial abaixo
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

6. Verifique que a função $y = e^{-x}\cos(2x)$ satisfaz a equação diferencial
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0.$$

7. Faça o que se pede:

   i) Supondo f derivável, mostre que a derivada de $\ln \circ f$ é f'/f. Essa expressão é chamada de *derivada logarítmica de f*. Em algumas situações é mais fácil calcular a derivada logarítmica do que f'. Por exemplo, quando produtos e potências na expressão de f, estas expressões se tornam somas e produtos para $\ln \circ f$. A derivada f' pode ser calculada multiplicando o cálculo por f. Este processo é chamado de *derivação logarítmica*.

   ii) Usando o processo de derivação logarítmica, calcule f' nos itens abaixo

   a) $f(x) = (1+x)(1+e^{x^2})$.

   b) $f(x) = \dfrac{(3-x)^{1/3}x^2}{(1-x)(3+x)^{2/3}}$.

   c) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$.

   d) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}(1+x^3)}$.

8. As funções abaixo são chamadas de *seno hiperbólico*, *cosseno hiperbólico* e *tangente hiperbólica*, respectivamente. Existem muitos conceitos e propriedades análogas dessas funções com relação as funções trigonométricas. Mostre as igualdades dos itens abaixo.
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$$

   a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

   b) $\operatorname{tgh}^2 x + \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1$.

   c) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$.

   d) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$.

   e) $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$.

   f) $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$.

   g) $(\operatorname{tgh} x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

4 Diferenciais, Aproximações e Polinômios de Taylor

1. Calcule o polinômio de Taylor de ordem 1 das funções abaixo nos pontos indicados

   a) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$.

   b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 8$.

   c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$.

   d) $f(x) = \ln x$, $a = 1$.

2. Use os polinômios de Taylor do exercício anterior para obter valores aproximados dos números abaixo

a) $\sqrt{4{,}001}$. b) $\sqrt[3]{7{,}9}$. c) $\dfrac{1}{1{,}01}$. d) $\ln(0{,}99)$

3. Calcule o polinômio de Taylor de 1a ordem de $f(x) = \cos x$ em $a = \frac{\pi}{2}$. Use este polinômio para encontrar valores aproximados de $\cos(1{,}55)$ e $\cos(1{,}6)$.

4. O raio de uma circunferência circular é de 24cm, com erro possível de 0,2cm. Faça o que se pede

   a) Use diferenciais para calcular o erro máximo na área calculada do disco.

   b) Qual é o erro relativo? Qual o erro percentual?

5. O período de um pêndulo simples é dado por $T = \sqrt{\dfrac{L}{g}}$, onde L é o comprimento do pêndulo, g é a aceleração da gravidade e T é medido em segundos. Suponha que o comprimento do pêndulo é medido com erro máximo de 0,5%. Usando diferenciais calcule a percentagem de erro máximo no período. Usando diferenciais, encontre uma relação entre o erro relativo do período e o erro relativo do comprimento.

6. A capacidade de calor molar à pressão constante é dada por $C = a + bT + cT^2$, onde a, b, c são constantes e T é a temperatura. Faça o que se pede.

   a) Encontre a derivada de C com relação à T e escreva expressões para dC e ΔC.

   b) Para um certo ácido os valores aproximados de b e c são dados respectivamente por $1{,}809.10^{-3}$ e $15{,}465.10^{-73}$. Calcule dC e ΔC quando a temperatura T variar de 400K para 410K.

7. Se uma corrente I passar por um resistor com uma resistência R, a Lei de Ohm afirma que a queda de voltagem é $V = IR$. Se V for constante e R for medido com um certo erro, mostre que o erro relativo do cálculo de I é aproximadamente igual (em módulo) que o erro relativo de R.

8. Quando o sangue e flui a longo de um vaso sanguíneo, o fluxo F (volume de sangue passando, por unidade de tempo, por um ponto dado) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso, ou seja, $F = kR^4$ (Lei de Poiseuille). Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter do tipo balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue. Mostre que a variação relativa em F é cerca de quatro vezes a variação relativa em R. Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo de sangue?

9. Calcule o polinômio de Taylor de ordem 2 nos pontos indicados

   a) $f(x) = 1 + x + x^2$, $a = 1$.

   b) $f(x) = 1 + x + x^2$, $a = -1$.

   c) $f(x) = \cos(2x)$, $a = \pi$.

   d) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$.

   e) $f(x) = \ln x$, $a = 1$.

   f) $f(x) = e^x$, $a = 1$.

10. Usando o polinômio de Taylor de ordem 3 calcule o valor aproximado das expressões abaixo

    a) $\ln(1{,}2)$. b) $\operatorname{sen}(0{,}1)$. c) $\sqrt{4{,}5}$. d) $e^{0{,}07}$. e) $\cosh(-0{,}1)$.

11. Sendo f derivável até ordem n no ponto a é possível mostrar que $f(x) = T_{n,a}(x) + (x-a)^n R_{n,a}(x)$, onde $R_{n,a}(x)$ é uma função que satisfaz $\lim\limits_{x\to a} R_{n,a}(x) = 0$. Esta fórmula é chamada de *fórmula infinitesimal de Taylor de ordem n de f no ponto a*. Use isso para calcular os limites abaixo

    a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{3x^2}$.

    b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.

    c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

    d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x^2}$.

    e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{x^3}$.

    f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3}$.