UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR
CENTRO POLITÉCNICO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Disciplina: Cálculo 2 **Código:** CM312 **Semestre:** Semestre 2024/2

Lista 5

1. Encontre o limite.

(a) $\lim_{t\to 0}\langle t, \cos t, 2\rangle$

(b) $\lim_{t\to 0}\left\langle \frac{1-\cos t}{t}, t^3, e^{-1/t^2}\right\rangle$

(c) $\lim_{t\to 1}\left\langle \sqrt{t+3}\mathbf{i} + \frac{t-1}{t^2-1}\mathbf{j} + \frac{\operatorname{tg}(t)}{t}\mathbf{k}\right\rangle$

(d) $\lim_{t\to \infty}\left\langle e^{-t}\mathbf{i} + \frac{t-1}{t+1}\mathbf{j} + \operatorname{arctg}(t)\mathbf{k}\right\rangle$

2. (i) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada. (ii) Determine $\mathbf{r}'(t)$ e (iii) esboce o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ para o valor dado de t.

(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2\rangle$, $t = 1$

(b) $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j}$, $t = 0$

(c) $\mathbf{r}(t) = \sec(t)\mathbf{i} + \operatorname{tg}(t)\mathbf{j}$, $t = \pi/4$

3. Determine a derivada da função vetorial.

(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$

(b) $\mathbf{r}(t) = \langle t^2-4, \sqrt{t-4}, \sqrt{6-t}\rangle$

(c) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \operatorname{tg}(t)\mathbf{j} + \sec(t)\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{r}(t) = te^{2t}\mathbf{i} + \frac{t-1}{t+1}\mathbf{j} + \operatorname{arctg}(t)\mathbf{k}$

(e) $\mathbf{r}(t) = \ln\big(4-t^2\big)\mathbf{i} + \sqrt{1+t}\mathbf{j} - 4e^{3t}\mathbf{k}$

(f) $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos(t)\mathbf{i} + e^{-t}\operatorname{sen}(t)\mathbf{j} + \ln|t|\mathbf{k}$

4. Determine o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ no ponto com valor do parâmetro t dado.

(a) $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, t-t^2, \operatorname{arctg}(t)\rangle$, $t = 1$

(b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}(t)\mathbf{j} + 3\cos(t)\mathbf{k}$, $t = \pi/6$

(c) $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\cos(t)\mathbf{i} + e^{2t}\operatorname{sen}(t)\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$, $t = \pi/2$

(d) $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, 3t^2, 4t^3\rangle$, $t = 1$

(e) $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t}\rangle$, $t = 0$

5. Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva com as equações paramétricas, dadas no ponto especificado.

(a) $x = t, y = t^2, z = t^3$; $(1,1,1)$

(b) $x = 1+2t, y = 1+t-t^2, z = 1-t+t^2-t^3$; $(1,1,1)$

(c) $x = t\cos(2\pi t), y = t\operatorname{sen}(2\pi t), z = 4t$; $(0, 1/4, 1)$

(d) $x = \operatorname{sen}(\pi t), y = \sqrt{t}, z = \cos(\pi t)$; $(0, 1, -1)$

(e) $x = t, y = \sqrt{2}\cos(t), z = \sqrt{2}\operatorname{sen}(t)$; $(\pi/4, 1, 1)$

(f) $x = \cos(t), y = 3e^{2t}, z = 3e^{-2t}$; $(1,3,3)$

6. Calcule a integral.

(a) $\int_0^1 (t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k})dt$

(b) $\int_1^2 [(1+t^2)\mathbf{i} - 4t^4\mathbf{j} - (t^2-1)\mathbf{k}]dt$

(c) $\int_0^{\pi/4} [\cos(2t)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(2t)\mathbf{j} + t\operatorname{sen}(t)\mathbf{k}]dt$

7. Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada. Esboce a trajetória da partícula e desenhe os vetores velocidade e aceleração para os valores de t especificados.

(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t^2-1, t\rangle$, $t = 1$

(b) $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $t = \pi/3$

(c) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $t = 1$

8. Determine os vetores velocidade e posição de uma partícula, dadas a sua aceleração, velocidade e posição iniciais.

(a) $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

(b) $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

9. (a) Determine o vetor posição de uma partícula, dada sua aceleração, e suas velocidades e posições iniciais.

(b) Utilize o computador para traçar a trajetória percorrida pela partícula.

(a) $\mathbf{a}(t) = 2t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \cos 2t\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

(b) $\mathbf{a}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

10. A função posição de uma partícula é dada por $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 16t\rangle$. Quando sua velocidade escalar é mínima?

11. Um projétil é disparado com uma velocidade escalar inicial de 500 m/s e ângulo de elevação de 30. Determine (a) o alcance do projétil, (b) a altura máxima atingida e (c) a velocidade escalar no impacto.

12. Uma bola é atirada em um ângulo de elevação de 45 em relação ao solo. Se a bola cai no solo a uma altura de 90 m, qual a velocidade escalar inicial da bola?.

Respostas:

1. (a) $\langle 0, 1, 2\rangle$

(b) $\langle 0, 0, 0\rangle$

(c) $\langle 2, \frac{1}{2}, \operatorname{tg} 1\rangle$

(d) $\langle 0, 1, \frac{\pi}{2}\rangle$

2. (a) (ii) $\langle 3t^2, 2t\rangle$

(b) (ii) $e^t\mathbf{i} - 2e^{-2t}\mathbf{j}$

(c) (ii) $\sec(t)\operatorname{tg}(t)\mathbf{i} + \sec^2(t)\mathbf{j}$

3. (a) $\mathbb{R}$, $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2\rangle$

(b) $\{t : 4 \le t \le 6\}$, $\mathbf{r}'(t) = \langle 2t, \frac{1}{2\sqrt{t-4}}, -\frac{1}{2\sqrt{6-t}}\rangle$

(c) $\{t : t \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n$ um inteiro $\}$, $\mathbf{r}'(t) = (\sec^2 t)\mathbf{j} + (\sec t \operatorname{tg} t)\mathbf{k}$

(d) $\{t : t \neq -1\}$, $\mathbf{r}'(t) = (1 + 2t)e^{2t}\mathbf{i} + \frac{2}{(t+1)^2}\mathbf{j} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{k}$

(e) $\mathbf{r}'(t) = -\frac{2t}{4-t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{1+t}}\mathbf{j} - 12e^{3t}\mathbf{k}$

(f) $\mathbf{r}'(t) = -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + e^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$

4. (a) $\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\rangle$

(b) $\frac{2}{5}\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{3}}{5}\mathbf{j} - \frac{3}{5}\mathbf{k}$

(c) $-\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$

(d) $\langle \frac{1}{\sqrt{46}}, \frac{3}{\sqrt{46}}, \frac{16}{\sqrt{46}}\rangle$

(e) $\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\rangle$

5. (a) $x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t$

(b) $x = 1 + 2t, y = 1 + t, z = 1 - t$

(c) $x = -\frac{\pi}{2}t, y = \frac{1}{4} + t, z = 1 + 4t$

(d) $x = -\pi t, y = 1 + \frac{1}{2}t, z = -1$

(e) $x = \frac{\pi}{4} + t, y = 1 - t, z = 1 + t$

(f) $x = 1, y = 3 + 6t, z = 3 - 6t$

6. (a) $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}$

(b) $\frac{10}{3}\mathbf{i} - \frac{124}{5}\mathbf{j} - \frac{4}{3}\mathbf{k}$

(c) $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{4-\pi}{4\sqrt{2}}\mathbf{k}$

7. (a) $\mathbf{t} = \langle 2t, 1\rangle$, $\mathbf{a}(t) = \langle 2, 0\rangle$, $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + 1}$

(b) $\mathbf{v}(t) = -3\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}$, $\mathbf{a}(t) = -3\cos t\mathbf{i} - 2\operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{5\operatorname{sen}^2(t) + 4}$

(c) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$,$\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{j}$, $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$

8. (a)

(b)

9.

(a) (b)

10. $t = 4$

11. (a) ≈ 22 km, (b) $\approx 3,2$ km, (c) 500 m/s

12. 30 m/s