UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR
CENTRO POLITÉCNICO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Disciplina: Introdução a Geometría Analítica e Álgebra Linear **Código:** CM303

Lista semana 10

1. Calcule o ângulo que a reta que passa por $A = (3, -1, 4)$ e $B = (1, 3, 2)$ forma com a sua projeção sobre o plano xy.

2. Seja o plano

$$\pi : \ 3x + y - z - 4 = 0.$$

Calcular:

(a) O ponto de π que tem abscissa 1 e ordenada 3.
(b) O valor de k para que o ponto $P = (k, 2, k - 1) \in \pi$.
(c) O ponto de abscissa 2 e cuja ordenada é o dobro da cota.
(d) O valor de k para que o plano $\pi_1 : \ kx - 4y + 4z - 7 = 0$ seja paralelo a π .

3. Determine m sabendo que o ponto $P = (-1, 0, m)$ pertence ao plano $\pi : \ 2x - y - z = 3$.

4. Em cada item, determine uma equação geral para o plano que contém os pontos A, B e C.

(a) $A = (2, 1, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (3, -2, 4)$.
(b) $A = (0, -1, 1)$, $B = (0, 0, 0)$ e $C = (2, 1, 0)$.

5. Determine a equação do plano paralelo ao plano $\pi : \ 2x - 3y - z + 5 = 0$ e que contenha o ponto $A = (4, -2, 1)$.

6. Calcule a equação do plano perpendicular à reta

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 4t \end{cases},$$

e que contenha o ponto $A = (-1, 2, 3)$.

7. O plano passa por $A = (2, 0, -2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

8. Determine as posições relativas e a intersecção entre quaisquer duas das retas abaixo.

$r_1 : (x, y, z) = (-2, 0, 1) + t(2, 1, 1)$; $\quad r_2 : (x, y, z) = (0, -2, 1) + t(1, 0, -1)$;

$r_3 : (x, y, z) = (-2, -2, 3) + t(-2, 0, 2)$; $\quad r_4 : (x, y, z) = (2, -1, 6) + t(1, -1, 2)$;

$$r_5 : \begin{cases} y = -x \\ z = 2x - 1. \end{cases}$$

9. Em cada item, determine uma equação geral para o plano que se pede.

(a) Plano paralelo ao plano $\pi : 2x - 3y - z + 5 = 0$ e que passa pelo ponto $A = (4, -1, 2)$.
(b) Plano paralelo ao vetor $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ e que contém os pontos $A = (-3, 1, -2)$ e $B = (-1, 2, 1)$.
(c) Plano perpendicular ao plano $\pi : 2x + y - z + 8 = 0$ e que contém os pontos $A = (1, -2, 2)$ e $B = (-3, 1, -2)$.
(d) Plano perpendicular aos planos $\pi_1 : 2x - y - 4z - 6 = 0$ e $\pi_2 : x + y + 2z - 3 = 0$ e que contém o ponto $A = (4, 1, 0)$.

10. Determine a posição relativa e a intersecção entre quaisquer dois dos planos abaixo.

$$\pi_1 : 2x - y - z - 1 = 0; \qquad \pi_2 : 4x - 2y - 2z + 3 = 0;$$

$$\pi_3 : x - y = 0; \qquad \pi_4 : (x, y, z) = (t, t, s).$$

11. Determine a e b sabendo que os planos $\pi_1 : ax + by + 4z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 5y - 2z + 5 = 0$ são paralelos.

12. Determine uma equação geral para o plano que contém o ponto $A = (1, 2, 1)$ e contém a reta de intersecção entre plano $\pi : x - 2y + z - 3 = 0$ e o plano yz.

13. Determine o valor de m para que os planos $\pi_1 : 2mx + 2y - z = 0$ e $\pi_2 : 3x - my + 2z - 1 = 0$ sejam perpendiculares.

14. Em cada item, determine uma equação geral para o plano que se pede.

(a) Plano perpendicular à reta $r : \begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = -y + 1 \end{cases}$ e que contém o ponto $A = (1, 2, 3)$.

(b) Plano paralelo ao eixo z e que contém os pontos $A = (0, 3, 1)$ e $B = (2, 0, -1)$.

(c) Plano paralelo ao eixo y e ao vetor $\vec{v} = (-3, 2, 0)$ e que contém o ponto $A = (1, 0, 0)$.

(d) Plano perpendicular ao eixo y e que contém o ponto $A = (3, 4, -1)$.

(e) Plano que contém as retas

$$r : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \frac{x-1}{3} = \frac{z-1}{5};\ y = -1\ .$$

(f) Plano que contém as retas

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1} \qquad \text{e} \qquad s : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}\ .$$

(g) Plano que contém as retas

$$r : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -t \\ z = 4 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-2};\ z = 0\ .$$

(h) Plano que contém a reta $r : (x, y, z) = (0, 2, 3) + t(1, -1, 2)$ e o ponto $A = (3, -1, 2)$.

(i) Plano que contém o ponto $A = (1, -2, 1)$ e contém o eixo x.

Respostas:

1. $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$.

2. (a) $(1, 3, 2)$.

(b) $k = \frac{1}{2}$.

(c) $k = (2, -4, -2)$.

(d) $k = -12$.

3. $m = -5$.

4. (a) $-3x + 9y + 10z - 13 = 0$.

(b) $-x + 2y + 2z = 0$.

5. $2x - 3y - z - 13 = 0$.

6. $2x - 3y + 4z - 4 = 0$.

7. $3x - 2y - 5z - 16 = 0$.

8.
- r_2 e r_3 são retas coincidentes, portanto $r_2 \cap r_3 = r_2 = r_3$. A partir daqui, faremos as respostas com r_2 e omitiremos as com r_3, pois são a mesma reta.
- r_1 e r_2 são reversas e, portanto, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.
- r_1 e r_4 são concorrentes e $r_1 \cap r_4 = \{(0, 1, 2)\}$.
- r_1 e r_5 são reversas e, portanto, $r_1 \cap r_5 = \varnothing$.
- r_2 e r_4 são reversas e, portanto, $r_2 \cap r_4 = \varnothing$.
- r_2 e r_5 são reversas e, portanto, $r_2 \cap r_5 = \varnothing$.
- r_4 e r_5 são paralelas e, portanto, $r_4 \cap r_5 = \varnothing$.

9. $2x - 3y - z - 9 = 0$.

$3x - 12y + 2z + 25 = 0$.

$x - 12y - 10z - 5 = 0$.

$2x - 8y + 3z = 0$.

10.
- π_3 e π_4 são planos coincidentes, portanto $\pi_3 \cap \pi_4 = \pi_3 = \pi_4$. A partir daqui, faremos as respostas com π_3 e omitiremos as com π_4, pois são o mesmo plano.
- π_1 e π_2 são paralelos e, portanto, $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$.
- π_1 e π_3 são concorrentes e $\pi_1 \cap \pi_3 : \begin{cases} y = x \\ z = x - 1. \end{cases}$
- π_2 e π_3 são concorrentes e $\pi_2 \cap \pi_3 : \begin{cases} y = x \\ z = x + \frac{3}{2}. \end{cases}$

11. $a = -6$ e $b = 10$.

12. $6x - 2y + z - 3 = 0$.

13. $m = \dfrac{1}{2}$.

14. (a) $2x + y - z - 1 = 0$.

(b) $3x + 2y - 6 = 0$.

(c) $z = 0$.

(d) $y = 4$.

(e) $5x - 4y - 3z - 6 = 0$.

(f) $5x - 2y + 4z - 21 = 0$.

(g) $2x + 2y + z + 2 = 0$.

(h) $x + y - 2 = 0$.

(i) $y + 2z = 0$.