Cálculo 1 **Nome:** ______________________________
CM311-HONORS
Prova 1 - 11/04/2024 **GRR:** ______________________________
Duração: 1 hora e 40 minutos
Professor: Diego Otero **Assinatura:** ______________________________

Instruções:

- A prova é individual, sem consulta, e não é permitido se ausentar no período da prova.
- Leia com atenção as questões. Capriche na redação, nos esboços de figuras, justifique todas suas respostas, e simplifique o máximo possível as respostas finais. **Respostas sem justificativas, cálculos e raciocínios necessários não serão consideradas.**
- Não faça marcações na tabela abaixo.

Problema:	1	2	3	4	5	6	Total
Valor:	20	12	15	13	15	25	100
Pontuação:							

BOA PROVA!

---

1. Calcule os limites abaixo justificando as contas. Caso não existam, explique o porquê.

   (a) (5 Pontos) $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-3}{x^2-5}$.

   (b) (5 Pontos) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{|x^2-x|}$.

   (c) (5 Pontos) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{\lfloor x-1\rfloor}$.

   (d) (5 Pontos) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{x-3}$.

Dicas/Respostas:

(a) $\dfrac{1}{6}$.

(b) Não existe pois tem limites laterais diferentes.

(c) 4.

(d) 2π.

---

2. Calcule as derivadas das funções abaixo:

(a) (4 Pontos) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sec(1+x^2)}$.

(b) (8 Pontos) $g(x) = \sqrt[4]{\operatorname{sen}^2(2x+1) + x^4}$.

Dicas/Respostas:

(a) $f'(x) = 3x^2 \cos(1+x^2) - 2x^4 \operatorname{sen}(1+x^2)$.

(b) $g'(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x+1)\cos(2x+1) + x^3}{(\operatorname{sen}^2(2x+1) + x^4)^{3/4}}$.

---

3. Considere a função $f(x) = \dfrac{-4}{x-2} + 5$ e faça o que se pede.
   (a) (5 Pontos) Determine um $\delta > 0$ tal que se $|x| < \delta$ então $|f(x) - 7| < 0{,}1$.
   (b) (10 Pontos) Mostre usando a definição formal de limite (ε/δ) que $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$.

Dicas/Respostas:

(a) Uma possibilidade é $\delta = 0{,}05$.

(b) Para qualquer ε, uma possibilidade é tomar $\delta = \min\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{8}\right)$.

---

4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis. Supondo que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $g(0) = -3$, $g'(0) = 4$, calcule o que se pede abaixo
   (a) (5 Pontos) $h'(0)$ onde $h(x) = f(x).g(x^2 + x)$.
   (b) (8 Pontos) $v'(-1)$ onde $v(x) = f(3 + g(x + x^2 f(x+1)))$.

Dicas/Respostas:

(a) $h'(0) = -2$.

(b) $v'(-1) = 8$.

---

5. (15 Pontos) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável no ponto a. Supondo que $f'(a) = -5$ calcule o limite abaixo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + \operatorname{sen} 5h) - f(a + 3h^2)}{h}.$$

Dicas/Respostas:

O limite é igual à -25.

---

6. Nas afirmações seguintes responda se é verdadeira ou falsa. Caso seja verdadeira explique o porquê, caso seja falso explique o porquê ou dê um contra-exemplo. **Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

   (a) (5 Pontos) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que os limites laterais de f em a existem e são iguais, então f é contínua em a.

   (b) (5 Pontos) Existe $\delta > 0$ tal que se $0 < x < \delta$ então $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} > 123$.

   (c) (5 Pontos) Se $f(x) = x^2|x|$ então $f''(x) = 6|x|$.

   (d) (5 Pontos) Se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = -\infty$ então $\lim\limits_{x\to a^+} (f(x) + g(x)) = 0$.

   (e) (5 Pontos) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas vezes deriváveis então vale $(f \circ g)'' = (f'' \circ g).g''$.

Dicas/Respostas:

(a) Falsa.

(b) Verdadeira.

(c) Verdadeira.

(d) Falsa.

(e) Falsa

<u>FORMULÁRIO/NOTAÇÕES</u>

- $|A + B| \leq |A| + |B|$.
- $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$.
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.
- $(x - y)^n = (x - y).(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-1} + y^{n-1})$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
- $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$.
- $(x^n)' = n.x^{n-1}$.
- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.
- $(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$.