UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM304 Complementos de Matemática - 2024/1

Lista de Exercícios 1

1. Se A significa que Fernanda diz a verdade e B significa que Daniel mente, expresse simbolicamente as seguintes proposições:

   (a) Fernanda ou Daniel dizem a verdade.
   (b) Não é verdade que Fernanda ou Daniel mentem.
   (c) Se Fernanda diz a verdade, então Daniel mente.
   (d) Se Fernanda mente, então Daniel diz a verdade.
   (e) Fernanda mente se, e somente se, Daniel diz a verdade.
   (f) Daniel diz a verdade se, e somente se, Fernanda mente.
   (g) Não é verdade que se Fernanda mente, então Daniel diz a verdade.

2. Escreva a proposição que corresponde a negação de cada uma das proposições a seguir:

   (a) A caixa está selada ou o leite está azedo.
   (b) Pepinos são verdes e têm sementes.
   (c) Se a comida for boa, então o serviço será excelente.
   (d) Se for caro, então a comida será boa e o serviço será excelente.
   (e) O processador é rápido, mas a impressora é lenta.
   (f) O processador é rápido ou a impressora é lenta.
   (g) Se o arquivo não estiver danificado e o processador for rápido, então a impressora será lenta.
   (h) Nem a comida é boa e nem o serviço é excelente.

3. Determine o valor lógico de cada uma das proposições a seguir:

   (a) O número 17 é primo.
   (b) Fortaleza é capital do Maranhão.
   (c) $(-5)^2 = 25$ e $\sqrt{25} = -5$.
   (d) $2 - (-4) = -2$ ou $1 + 3 = 4$.
   (e) Não é verdade que 12 é um número ímpar.
   (f) Se $0 < 1$, então $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   (g) Se $\sqrt{3} > 1$, então $-1 < -2$.
   (h) $\tan 45^\circ = 1$ se, e somente se, $\cos 0^\circ = 1$.
   (i) É falso que $3 + 3 = 6$ e $1 + 1 = 3$.
   (j) $(1 + 5)^0 = 1$ se, e somente se, $|3 - |-5|| = 8$.
   (k) Para todo $a, b \in \mathbf{Z}$, temos que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

4. Sabendo que os valor-verdade de p, q, r, s são, respectivamente, V, F, V, F. Determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

   (a) $p \wedge q \longleftrightarrow r \wedge \neg s$
   (b) $(p \longleftrightarrow q) \to (s \longleftrightarrow r)$
   (c) $(\neg p \to q) \to (s \to r)$
   (d) $(p \wedge q) \vee s \to (p \longleftrightarrow s)$
   (e) $(q \wedge r) \wedge s \to (p \longleftrightarrow s)$
   (f) $p \to \neg q \longleftrightarrow (p \vee r) \wedge s$
   (g) $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \to p \vee s$
   (h) $(\neg p \vee s) \vee (\neg s \wedge r)$

5. Construa a tabela-verdade das seguintes proposições:

(a) $(\neg p) \wedge q$
(b) $\neg(p \wedge q)$
(c) $(p \vee q) \wedge r$
(d) $p \vee (q \wedge r)$
(e) $(p \wedge q) \rightarrow r$
(f) $p \wedge (q \rightarrow r)$
(g) $\neg(p \rightarrow q)$
(h) $\neg p \rightarrow \neg q$
(i) $\neg q \rightarrow \neg p$

6. Se p é uma proposição verdadeira, demonstre que:
   (a) $p \vee q$ é uma tautologia;
   (b) $\neg p \wedge q$ é uma contradição;
   (c) $p \wedge q$ é equivalente a q;
   (d) $\neg p \vee q$ é equivalente a q.
7. Existe uma proposição p tal que $p \wedge \neg p$ seja uma tautologia?
8. Sabendo que a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira, determina o valor lógico de:
   (a) $\neg q \rightarrow \neg p$
   (b) $\neg q \wedge p$
   (c) $p \vee r \rightarrow q \vee r$
   (d) $p \wedge r \rightarrow q \wedge r$
9. Escreva a bicondicional $p \longleftrightarrow q$ como uma proposição equivalente usando:
   (a) Apenas os conectivos $\rightarrow$ e $\wedge$.
   (b) Apenas os conectivos $\wedge$ e $\neg$.
   (c) Apenas os conectivos $\vee$ e $\neg$.
10. Em cada caso, determine se a proposição é uma tautologia ou uma contradição.
    (a) $p \rightarrow p$
    (b) $(p \vee \neg p) \rightarrow (p \wedge \neg p)$
    (c) $p \rightarrow p \vee q$
    (d) $p \wedge q \rightarrow p$
    (e) $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$
    (f) $\neg(p \vee q) \rightarrow (p \longleftrightarrow q)$
11. Se p é a proposição $A \rightarrow B$, então a recíproca de p e $B \rightarrow A$, a inversa de p é $\neg A \rightarrow \neg B$ e a contrapositiva de p é $\neg B \rightarrow \neg A$. Considere que p é a proposição: “Se eu ganhar na Mega-Sena, então eu comprarei um apartamento.” Enuncie, a reciproca, inversa e contrapositiva de p.

12. Mostre que as seguintes proposições são contradições construindo suas tabelas-verdade:
    (a) $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$
    (b) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$
    (c) $p \wedge q \wedge \neg(p \longleftrightarrow q \vee r)$
13. Usando as letras indicadas para as proposições componentes, escreva as afirmações compostas a seguir em notação simbólica:
    (a) p: Os preços subirão;
    q: Haverá muitas casas disponíveis;
    r: as casas estarão caras.

    “Se os preços subirem, então haverá muitas casas disponíveis e caras; mas se as casas não estiverem caras, ainda assim haverá muitas disponíveis.”

    (b) p: O trator vence;
    q: O caminhão vence;
    r: A corrida será excitante.

    “Se o trator ou o caminhão vencer, então a corrida será excitante.”

(c) p: Os coalas serão salvos;
q: As mudanças climáticas serão discutidas;
r: Os níveis dos oceanos subirão.

"Os coalas só serão salvos se as mudanças climáticas forem discutidas; além disso, não discutir as mudanças climáticas fará com que os níveis dos oceanos subam."

(d) p: Janete vence;
q: Janete perde;
r: Janete ficará cansada.

"Janete vai vencer ou, se perder, ficará cansada."

(e) p: Irá chover;
q: Irá nevar;

"Irá chover ou irá nevar, mas não os dois ao mesmo tempo."

(f) p: Rosas são vermelhas;
q: Violetas são azuis;
r: Açúcar é doce.

"Rosas são vermelhas, e, se o açúcar for amargo, então ou violetas não são azuis ou açúcar é doce."

14. Quatro máquinas A, B, C e D estão conectadas em uma rede de computadores. Receia-se que um vírus de computador possa ter infectado a rede. Seu grupo de segurança de rede fez as seguintes afirmações:

    i) Se D estiver infectado, então C também está.
    ii) Se C estiver infectado, A também está.
    iii) Se D estiver limpo, então B está limpo, mas C está infectado.
    iv) Se A estiver infectado, então B está infectado ou C está limpo.

    Supondo que todas as proposições acima são Verdadeiras, o que podemos concluir? Explique seu argumento.

15. Considere o seguinte argumento: José está ou em São Paulo ou em Curitiba, mas não pode estar em ambos os lugares simultaneamente. Se José está em Curitiba, então vai para a aula. Portanto, se José não vai para a aula, ele tem que estar em São Paulo.

    (a) Represente o anterior argumento simbolicamente usando exatamente três proposições.
    (b) Prove que é um argumento valido.

16. Prove a validade do seguinte argumento:

    i. $D \to C$
    ii. $C \to A$
    iii. $\neg D \to (\neg B \wedge C)$
    iv. $A \to (B \vee \neg C)$

    ---

    v. $\therefore D \longleftrightarrow (B \vee \neg C)$

17. Prove a validade do seguinte argumento:

    i. $P \vee Q$
    ii. $\neg(P \wedge Q)$
    iii. $Q \to R$

    ---

    iv. $\therefore \neg R \to P$

18. Prova a validade dos seguintes argumentos usando redução ao absurdo:

(a) i. $(p \vee q)$

ii. $\neg q$

---

iii. $\therefore p$;

(b) i. $p \to \neg r$

ii. $q \to r$

---

iii. $\therefore \neg(p \wedge q)$

19. Mostre que as seguintes formular não são equivalências tautológicas.

    (a) $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$

    (b) $\neg(p \to q)$ e $\neg p \to \neg q$

20. Considere o seguinte argumento: Se estiver chovendo, não irei ao mercado. Se eu não for ao mercado, ficarei sem comida e terei que ir ao restaurante. Dado que ou terei comida ou não irei ao restaurante, concluo que não esta chovendo.

    (a) Represente o anterior argumento simbolicamente usando exatamente quatro proposições.

    (b) Prove que é um argumento valido.