CM311 - Cálculo 1
Honors - 1sem2024
Prof. Diego Otero
Lista de Exercícios 1

Problemas - Limites

1. Para qual valor de δ é verdadeira a afirmação abaixo?

$$|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-3|<10^{-1}, \text{onde } f(x)=4x-1.$$

2. A partir da definição por ε, δ, mostre que as expressões abaixo são verdadeiras (dica para a última: $\cos p - \cos q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{q-p}{2}$ e assuma que vale $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$)

   a) $\lim\limits_{x\to 3} x+6=9.$

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x}=1.$

   c) $\lim\limits_{x\to p} \frac{1}{x}=\frac{1}{p}$, $p\neq 0$.

   d) $\lim\limits_{x\to -1} x^2=1.$

   e) $\lim\limits_{x\to 3} x^3=27.$

   f) $\lim\limits_{x\to a} \cos x=\cos a.$

3. Escreva em palavras o que significa a expressão $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\neq 6$ e traduza para a linguagem de ε, δ.

4. Esboce o gráfico da função abaixo e determine os valores de a tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe:

$$f(x)=\begin{cases} 2-x, & \text{se } x<-1 \\ x, & \text{se } -1\leq x<1 \\ (x-1)^2, & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

5. O que há de errado com a igualdade $\frac{x^2+x-6}{x-2}=x+3$? Porque a igualdade $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2} x+3$ é verdadeira?

6. Calcule os limites abaixo

   a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+1}.$

   b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)^3}{x^3+1}.$

   c) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h}.$

   d) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}.$

   e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{10}-1}{x}.$

   f) $\lim\limits_{x\to y}\frac{x^n-y^n}{x-y}$, $n\in\mathbb{N}$.

   g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\in\mathbb{N}$.

   h) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$

   i) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}.$

   j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}.$

   k) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}.$

   l) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}.$

7. Calcule os limites abaixo caso existam. Se não existir, justifique

   a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, onde $f(x)=\begin{cases} x, & \text{se } x\geq 2 \\ \frac{x^2}{2}, & \text{se } x<2 \end{cases}.$

   b) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, onde $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{se } x\geq 1 \\ 2x, & \text{se } x<1 \end{cases}.$

8. Considerando a função abaixo, determine valores de a e b tais que $\lim_{x\to 2} f(x)$ e $\lim_{x\to 4} f(x)$ existam.

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1, & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 2ax + 2a + b, & \text{se } 2 \leq x < 4 \\ b\sqrt{x} + a - 1, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}.$$

9. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{|2x-1| - |2x+1|}{x}$.

10. Encontre, caso existam, todos os números a para o limite abaixo existir

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}.$$

11. Encontre todos os números a e b tais que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{ax+b} - 2}{x} = 1$.

12. Seja a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x-1|}$ e faça o que se pede

    a) Calcule os limites laterais $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.
    b) Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?
    c) Faça um esboço do gráfico de f.

13. Sabendo que $3x \leq f(x) \leq x^3 + 2$ para $0 \leq x \leq 2$, calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$.

14. Sendo $x \in \mathbb{R}$, denote por $\lfloor x \rfloor$ o maior número inteiro que é menor ou igual à x. Calcule os limites abaixo caso existam. Caso não existam, justifique.

    a) $\lim_{x\to \pi} \lfloor x \rfloor$.
    b) $\lim_{x\to -2^+} \lfloor x \rfloor$.
    c) $\lim_{x\to -2^-} \lfloor x \rfloor$.
    d) $\lim_{x\to -2} \lfloor x \rfloor$.
    e) $\lim_{x\to -2{,}4} \lfloor x \rfloor$.
    f) $\lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor$, $n \in \mathbb{Z}$.
    g) $\lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor$, $n \in \mathbb{Z}$.
    h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$.
    i) $\lim_{x\to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

15. Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ o limite $\lim_{x\to a} \lfloor x \rfloor$ existe?

16. Sejam f, g funções definidas em $\mathbb{R}$ com $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Supondo que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, mostre que existe $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x)| < |g(x)|$.

17. Supondo que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, mostre usando a definição por ε, δ que $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

18. Defina uma função f tal que $\lim_{x\to a} |f(x)|$ existe mas $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe.

19. Usando o Teorema do Confronto, mostre que se $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

20. Responda as perguntas abaixo:

    a) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existem, os limites $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ e $\lim_{x\to a} f(x).g(x)$ não existem?
    b) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ existe, então $\lim_{x\to a} g(x)$ existe?
    c) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existe, então $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ pode existir?

d) Se $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e $\lim_{x \to a} f(x).g(x)$ existe, então $\lim_{x \to a} g(x)$ existe?

21. Mostre que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$, assumindo que um dos limites exista.

22. Faça o que se pede:

    a) Mostre que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se $\lim_{x \to a} f(x) - L = 0$.

    b) Mostre que $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x - a)$.

    c) Mostre que $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x^3)$.

    d) Dê um exemplo onde $\lim_{x \to 0} f(x^2)$ exista, mas $\lim_{x \to 0} f(x)$ não.

23. Faça o que se pede:

    a) Suponha que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

    b) A hipótese no item acima pode ser enfraquecida?

    c) Se $f(x) < g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ necessariamente temos $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$?

24. Faça o que se pede:

    a) Mostre que se $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = L$ e $b \neq 0$ então $\lim_{x \to 0} \frac{f(bx)}{x} = bL$ (dica: escreva $\frac{f(bx)}{x} = b\frac{f(bx)}{bx}$).

    b) O que ocorre se $b = 0$?

    c) Sabendo que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, use o item a) para calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(2x)}{x}$.

25. Sabendo que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, mostre que $\lim_{x \to a} \max(f(x), g(x)) = \max(L, M)$.

26. Mostre que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ não existe. Isto é, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = L$ é falso para todo valor $L \in \mathbb{R}$.

27. Mostre que $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ não existe.

28. Sendo $f(x) = 0$ para x irracional e $f(x) = 1$ para x racional, mostre que $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

29. Sendo $f(x) = -x$ para x irracional e $f(x) = x$ para x racional, mostre que $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. E para $a = 0$?

30. Faça o que se pede:

    a) Mostre que se $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ então $\lim_{x \to 0} g(x) \, \text{sen}(1/x) = 0$.

    b) Mostre que se $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ e $|h(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \to 0} g(x)h(x) = 0$.