UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM304 Complementos de Matemática - 2024/1

Lista de Exercícios 1

1. Se A significa que Fernanda diz a verdade e B significa que Daniel mente, expresse simbolicamente as seguintes proposições:

   (a) Fernanda ou Daniel dizem a verdade.
   (b) Não é verdade que Fernanda ou Daniel mentem.
   (c) Se Fernanda diz a verdade, então Daniel mente.
   (d) Se Fernanda mente, então Daniel diz a verdade.
   (e) Fernanda mente se, e somente se, Daniel diz a verdade.
   (f) Daniel diz a verdade se, e somente se, Fernanda mente.
   (g) Não é verdade que se Fernanda mente, então Daniel diz a verdade.

   Gabarito: A: Fernanda diz a verdade, B: Daniel mente.

$$\begin{array}{llll} a. & A \vee \neg B, & b. & \neg(\neg A \vee B), \\ c. & A \Rightarrow B, & d. & \neg A \Rightarrow \neg B, \\ e. & \neg B \Leftrightarrow \neg A, & f. & \neg B \Leftrightarrow \neg A, \\ g. & \neg(\neg A \Rightarrow \neg B). & & \end{array}$$

2. Escreva a proposição que corresponde a negação de cada uma das proposições a seguir:

   (a) A caixa está selada ou o leite está azedo.
   (b) Pepinos são verdes e têm sementes.
   (c) Se a comida for boa, então o serviço será excelente.
   (d) Se for caro, então a comida será boa e o serviço será excelente.
   (e) O processador é rápido, mas a impressora é lenta.
   (f) O processador é rápido ou a impressora é lenta.
   (g) Se o arquivo não estiver danificado e o processador for rápido, então a impressora será lenta.
   (h) Nem a comida é boa e nem o serviço é excelente.

3. Determine o valor lógico de cada uma das proposições a seguir:

   (a) O número 17 é primo.
   (b) Fortaleza é capital do Maranhão.
   (c) $(-5)^2 = 25$ e $\sqrt{25} = -5$.
   (d) $2 - (-4) = -2$ ou $1 + 3 = 4$.
   (e) Não é verdade que 12 é um número ímpar.
   (f) Se $0 < 1$, então $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   (g) Se $\sqrt{3} > 1$, então $-1 < -2$.
   (h) $\tan 45° = 1$ se, e somente se, $\cos 0° = 1$.
   (i) É falso que $3 + 3 = 6$ e $1 + 1 = 3$.
   (j) $(1 + 5)^0 = 1$ se, e somente se, $|3 - |-5|| = 8$.
   (k) Para todo $a, b \in \mathbf{Z}$, temos que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

   Gabarito:

$$\begin{array}{llll} a. & V, & b. & F, \\ c. & F, & d. & V, \\ e. & V, & f. & V, \\ g. & F, & h. & V, \\ i. & V, & j. & F, \\ k. & F. & & \end{array}$$

4. Sabendo que os valor-verdade de p, q, r, s são, respectivamente, V, F, V, F. Determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

(a) $p \wedge q \longleftrightarrow r \wedge \neg s$

(b) $(p \longleftrightarrow q) \rightarrow (s \longleftrightarrow r)$

(c) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (s \rightarrow r)$

(d) $(p \wedge q) \vee s \rightarrow (p \longleftrightarrow s)$

(e) $(q \wedge r) \wedge s \rightarrow (p \longleftrightarrow s)$

(f) $p \rightarrow \neg q \longleftrightarrow (p \vee r) \wedge s$

(g) $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \rightarrow p \vee s$

(h) $(\neg p \vee s) \vee (\neg s \wedge r)$

Gabarito: p: V, q: F, r: V, s: F

$$\begin{array}{llll} a. & F, & b. & V, \\ c. & V, & d. & V, \\ e. & V, & f. & F, \\ g. & V, & h. & V. \end{array}$$

5. Construa a tabela-verdade das seguintes proposições:

(a) $(\neg p) \wedge q$

(b) $\neg(p \wedge q)$

(c) $(p \vee q) \wedge r$

(d) $p \vee (q \wedge r)$

(e) $(p \wedge q) \rightarrow r$

(f) $p \wedge (q \rightarrow r)$

(g) $\neg(p \rightarrow q)$

(h) $\neg p \rightarrow \neg q$

(i) $\neg q \rightarrow \neg p$

Gabarito: Cada um dos links chamados tabela-verdade encaminha para o site Lightshot que mostra o print de uma tabela-verdade onde T (true) representa o valor lógico verdadeiro e F (false) o valor lógico falso.
a. tabela-verdade, b. tabela-verdade, c. tabela-verdade, d. tabela-verdade, e. tabela-verdade, f. tabela-verdade, g. tabela-verdade, h. tabela-verdade, i. tabela-verdade

6. Se p é uma proposição verdadeira, demonstre que:

(a) $p \vee q$ é uma tautologia;

(b) $\neg p \wedge q$ é uma contradição;

(c) $p \wedge q$ é equivalente a q;

(d) $\neg p \vee q$ é equivalente a q.

Gabarito: a. tabela-verdade, b. tabela-verdade, c. tabela-verdade, d. tabela-verdade.

7. Existe uma proposição p tal que $p \wedge \neg p$ seja uma tautologia?

8. Sabendo que a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira, determina o valor lógico de:

(a) $\neg q \rightarrow \neg p$

(b) $\neg q \wedge p$

(c) $p \vee r \rightarrow q \vee r$

(d) $p \wedge r \rightarrow q \wedge r$

Gabarito: a.V, b.F tabela-verdade, c.V tabela-verdade, d.V tabele-verdade.

9. Escreva a bicondicional $p \longleftrightarrow q$ como uma proposição equivalente usando:

(a) Apenas os conectivos $\rightarrow$ e $\wedge$.

(b) Apenas os conectivos $\wedge$ e $\neg$.

(c) Apenas os conectivos $\vee$ e $\neg$.

Gabarito:a. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, b. tabela-verdade, c. tabela-verdade.

10. Em cada caso, determine se a proposição é uma tautologia ou uma contradição.

(a) $p \rightarrow p$

(b) $(p \vee \neg p) \rightarrow (p \wedge \neg p)$

(c) $p \rightarrow p \vee q$

(d) $p \wedge q \rightarrow p$

(e) $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$

(f) $\neg(p \vee q) \rightarrow (p \longleftrightarrow q)$

11. Se p é a proposição $A \rightarrow B$, então a recíproca de p e $B \rightarrow A$, a inversa de p é $\neg A \rightarrow \neg B$ e a contrapositiva de p é $\neg B \rightarrow \neg A$. Considere que p é a proposição: "Se eu ganhar na Mega-Sena, então eu comprarei um apartamento." Enuncie, a reciproca, inversa e contrapositiva de p.

    Gabarito:

    - Recíproca: "Se eu compraria um apartamento, então eu ganharia a Mega-Sena."
    - Contrapositiva: "Se eu não compraria um apartamento, então eu não ganharia a Mega-Sena."
    - Inversa: "Se eu não ganhar a Mega-Sena, então eu não compraria um apartamento."

12. Mostre que as seguintes proposições são contradições construindo suas tabelas-verdade:

    (a) $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$

    (b) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$

    (c) $p \wedge q \wedge \neg(p \longleftrightarrow q \vee r)$

    Gabarito: a. tabela-verdade, b. tabela-verdade, c. tabela-verdade

13. Usando as letras indicadas para as proposições componentes, escreva as afirmações compostas a seguir em notação simbólica:

    (a) p: Os preços subirão;
    q: Haverá muitas casas disponíveis;
    r: as casas estarão caras.

    "Se os preços subirem, então haverá muitas casas disponíveis e caras; mas se as casas não estiverem caras, ainda assim haverá muitas disponíveis."

    (b) p: O trator vence;
    q: O caminhão vence;
    r: A corrida será excitante.

    "Se o trator ou o caminhão vencer, então a corrida será excitante."

    (c) p: Os coalas serão salvos;
    q: As mudanças climáticas serão discutidas;
    r: Os níveis dos oceanos subirão.

    "Os coalas só serão salvos se as mudanças climáticas forem discutidas; além disso, não discutir as mudanças climáticas fará com que os níveis dos oceanos subam."

    (d) p: Janete vence;
    q: Janete perde;
    r: Janete ficará cansada.

    "Janete vai vencer ou, se perder, ficará cansada."

    (e) p: Irá chover;
    q: Irá nevar;

    "Irá chover ou irá nevar, mas não os dois ao mesmo tempo."

    (f) p: Rosas são vermelhas;
    q: Violetas são azuis;
    r: Açúcar é doce.

    "Rosas são vermelhas, e, se o açúcar for amargo, então ou violetas não são azuis ou açúcar é doce."

    Gabarito: a. $(p \rightarrow (r \wedge q)) \wedge (\neg r \rightarrow q)$; b. $p \vee q \rightarrow r$; c. $(p \longleftrightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow r)$; d. $p \vee (q \rightarrow r)$; e. $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$; f. $p \wedge (\neg r \rightarrow (\neg q \vee r))$.

14. Quatro máquinas A, B, C e D estão conectadas em uma rede de computadores. Receia-se que um vírus de computador possa ter infectado a rede. Seu grupo de segurança de rede fez as seguintes afirmações:

i) Se D estiver infectado, então C também está.
ii) Se C estiver infectado, A também está.
iii) Se D estiver limpo, então B está limpo, mas C está infectado.
iv) Se A estiver infectado, então B está infectado ou C está limpo.

Supondo que todas as proposições acima são Verdadeiras, o que podemos concluir? Explique seu argumento.

Gabarito: tabela-verdade

15. Considere o seguinte argumento: José está ou em São Paulo ou em Curitiba, mas não pode estar em ambos os lugares simultaneamente. Se José está em Curitiba, então vai para a aula. Portanto, se José não vai para a aula, ele tem que estar em São Paulo.
    (a) Represente o anterior argumento simbolicamente usando exatamente três proposições.
    (b) Prove que é um argumento valido.

16. Prove a validade do seguinte argumento:
    i. $D \rightarrow C$
    ii. $C \rightarrow A$
    iii. $\neg D \rightarrow (\neg B \wedge C)$
    iv. $A \rightarrow (B \vee \neg C)$
    ____
    v. $\therefore D \longleftrightarrow (B \vee \neg C)$

    Gabarito:
    i. $D \rightarrow C$
    ii. $C \rightarrow A$
    iii. $\neg D \rightarrow (\neg B \wedge C)$
    iv. $A \rightarrow (B \vee \neg C)$
    ____
    v. $D \rightarrow A$ transitividade de 1 e 2
    vi. $D \rightarrow (B \vee \neg C)$ transitividade de 5 e 4
    vii. $\neg(\neg B \wedge C) \rightarrow \neg\neg D$ contrapositiva em 3
    viii. $(B \vee \neg C) \rightarrow D$ em 7 De Morgan em antecedente e Negação dupla em consequente.
    iX. $(D \rightarrow (B \vee \neg C)) \wedge ((B \vee \neg C) \rightarrow D)$ Conjugação de 6 e 8
    X. $D \longleftrightarrow (B \vee \neg C)$ Definição de equivalência.

    tabela-verdade

17. Prove a validade do seguinte argumento:
    i. $P \vee Q$
    ii. $\neg(P \wedge Q)$
    iii. $Q \rightarrow R$
    ____
    iv. $\therefore \neg R \rightarrow P$

18. Prova a validade dos seguintes argumentos usando redução ao absurdo:

(a)
i. $(p \vee q)$
ii. $\neg q$

---

iii. $\therefore p$;

(b)
i. $p \to \neg r$
ii. $q \to r$

---

iii. $\therefore \neg(p \wedge q)$

19. Mostre que as seguintes formular não são equivalências tautológicas.

    (a) $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$

    (b) $\neg(p \to q)$ e $\neg p \to \neg q$

    Gabarito: a. tabela-verdade, b. tabela-verdade

20. Considere o seguinte argumento: Se estiver chovendo, não irei ao mercado. Se eu não for ao mercado, ficarei sem comida e terei que ir ao restaurante. Dado que ou terei comida ou não irei ao restaurante, concluo que não esta chovendo.

    (a) Represente o anterior argumento simbolicamente usando exatamente quatro proposições.

    (b) Prove que é um argumento valido.

    Gabarito:

    i. $A \to \neg B$
    ii. $\neg B \to (\neg C \wedge D)$
    iii. $C \vee \neg D$

    ---

    iv. $\neg(\neg C \wedge D) \to \neg\neg B$, contra-positiva em 2
    v. $C \vee \neg D \to B$, De Morgam em antecedente e negação dupla em consequente.
    vi. B Modus pones em 3 e 5
    vii. $\neg\neg B \to \neg A$ contra positiva em 1.
    viii. $B \to \neg A$ negação dupla em antecedente de 7.
    iX. $\therefore \neg A$ Modus ponens em 6 e 8

    tabela-verdade