Universidade Federal do Paraná - UFPR
Centro Politécnico
Departamento de Matemática

Disciplina: Introdução a Geometría Analítica e Álgebra Linear **Código:** CM303

Lista semana 3

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calcule:

(a) $-B$;
(b) $B + C$;
(c) $A - C$;
(d) $2B - 3A - 6C$;
(e) $4C + 2A - 6B$.

2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 7 & -4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -7 \\ 6 & 2 & -8 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule.

(a) AB.;
(b) BA.
(c) $(BA)C$.
(d) $B^t A^t$ (compare com o item (a)).
(e) C^2.

3. Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.

(a) $-A^t = (-A)^t$.
(b) $(AB)^t = A^t B^t$.
(c) $(-A)(-B) = -AB$.
(d) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

4. Considere as matrizes

$$A = [\,3\,], \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -7 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

e calcule os determinantes abaixo.

(a) $\det(A)$ (b) $\det(B)$. (c) $\det(C)$.

(d) $\det(D)$. (e) $\det(E)$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a matriz A_1 que é obtida a partir de A substituindo-se a linha 2 pela soma da linha 2 com menos 3 vezes a linha 1.

(b) Determine a matriz A_2 que é obtida a partir de A_1 substituindo-se a linha 3 pela soma da linha 3 com menos 4 vezes a linha 1.

(c) Determine a matriz A_3 que é obtida a partir de A_2 substituindo-se a linha 4 pela linha 4 menos a linha 1.

(d) Determine a matriz A_4 que é obtida a partir de A_3 dividindo-se a linha 2 por -7.

(e) Determine a matriz A_5 que é obtida a partir de A_4 substituindo-se a linha 3 pela linha 3 mais 9 vezes a linha 2.

(f) Note que a matriz A_5 é triangular superior. Usando as propriedades de determinantes, calcule os determinantes das matrizes A, A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5

6. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, calcule os determinantes a seguir.

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2g & h & i \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} b & a & 4c \\ e & d & 4f \\ h & g & 4i \end{vmatrix}$

7. Considere as matrizes A,B, C, D e E da pergunta 6 e calcule os determinantes a seguir.

(a)$\det(CD)$ (b) $\det(DC)$ (c) $\det(C^t)$

(d)$\det(4B)$ (e) $\det(-2B)$

Respostas:

1. $-B = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 9 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

$B + C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$.

$A - C = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 3 & -5 & -12 \end{bmatrix}$.

$2B - 3A - 6C = \begin{bmatrix} 4 & -77 & -90 \\ -18 & -13 & -16 \end{bmatrix}$.

$4C + 2A - 6B = \begin{bmatrix} -26 & 84 & 102 \\ 12 & -10 & 6 \end{bmatrix}$.

2. $AB = \begin{bmatrix} -11 & -1 & 11 & -13 \\ 9 & 11 & -23 & -18 \\ -17 & 13 & -3 & -61 \\ 59 & 33 & -97 & -8 \end{bmatrix}$.

$BA = \begin{bmatrix} -60 & -42 \\ -29 & 49 \end{bmatrix}$.

$(BA)C = \begin{bmatrix} 6 & -450 \\ -205 & 129 \end{bmatrix}$.

$$B^tA^t = \begin{bmatrix} -11 & 9 & -17 & 59 \\ -1 & 11 & 13 & 33 \\ 11 & -23 & -3 & -97 \\ -13 & -18 & -61 & -8 \end{bmatrix}.$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} -8 & 28 \\ -21 & 13 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Verdadeira. (b) Falsa. (c) Falsa. (d) Falsa.

4. (a) $\det(A) = 3$. (b) $\det(B) = -11$. (c) $\det(C) = -27$ (d) $\det(D) = -15$. (e) $\det(E) = -8$.

5. (a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.

(b) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \\ 0 & -9 & -20 & -26 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.

(c) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \\ 0 & -9 & -20 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$.

(d) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -20 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$

(d)$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$.

(d)$\det(A_5) = \det(A_4) = 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-9) = 18$ e $\det(A) = \det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3) = -7 \cdot \det(A_4) = -7 \cdot 18 = -126$.

6. (a) -3.
(b) 3.
(c) 0.
(d) 6.
(e) -6.
(f) -12.

7. (a) $\det(CD) = 405$.
(b)$\det(DC) = 405$.
(c) $\det(C^t) = -27$.
(d) $\det(4B) = -176$.
(e) $\det(-2B) = -44$..