"Vocês se mudam para um lugar e se multiplicam, e se multiplicam até que todos os recursos naturais se esgotem ... [agem como] um vírus" (Agente Smith).

Multiplicação em Binário

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Relembrando

Um exemplo na base 10 para relembrar:

$$
\begin{array}{r}
123 \\
\underline{\times 321}
\end{array}
$$

Relembrando

Um exemplo na base 10 para relembrar:

```
  123   ←—— Multiplicando
 x321   ←—— Multiplicador
```

Relembrando

Um exemplo na base 10 para relembrar:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{\times 321} \\ 123 \end{array}$$

Relembrando

Um exemplo na base 10 para relembrar:

```
  123
 x321
-----
  123
 2460  ← Desloca uma casa para a esquerda e adiciona um zero.
```

Relembrando

Um exemplo na base 10 para relembrar:

```
   123
  x321
   123
 +2460
 36900
 39483
```

Desloca duas casas para a esquerda e adiciona um zero.

Relembrando

Um exemplo na base 10 para relembrar:

```
  123
 x321
  123
+2460
36900
39483
```

Intuição: O produto é **muito** maior do que o multiplicando ou o multiplicador.

Relembrando

Um exemplo na base 10 para relembrar:

```
  123
 x321
  123
+2460
36900
39483
```

Ao se multiplicar um valor que possui m casas por um de n casas, teremos potencialmente um resultado que ocupa $m+n$ casas.

Esse raciocínio se estende para as demais bases.

Overflows são mais prováveis!

Multiplicações

Precisamos compreender todas as intuições no algoritmo de multiplicação na base 10 para transferir o raciocínio para outras bases.

Por que deslocamos cada resultado intermediário para a esquerda?

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

```
  22
x 23
```

$\longrightarrow$ (22)*(23)

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

```
  22
x 23
```

$\longrightarrow$

```
(22)*(23)
(22)*(3+20)
```

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

```
  22
x 23
```

$\rightarrow$

```
(22)*(23)
(22)*(3+20)
(22)*(3+(2*10))
```

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

```
   22
x  23
```

$\longrightarrow$

```
(22)*(23)
(22)*(3+20)
(22)*(3+(2*10))
22*3 + 22*2*10
```

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

```
  22
x 23
  66
```

$$\begin{array}{r} 22 \\ \underline{\times\ 23} \\ 66 \end{array} \longrightarrow$$

```
(22)*(23)
(22)*(3+20)
(22)*(3+(2*10))
22*3 + 22*2*10
```

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

```
   22
 x 23
   66
+  44
```

$$(22)*(23)$$
$$(22)*(3+20)$$
$$(22)*(3+(2*10))$$
$$22*3 + 22*2*10$$

Outro exemplo

Outro exemplo na base 10

```
   22
 x 23
   66
+ 440
  506
```

```
(22)*(23)
(22)*(3+20)
(22)*(3+(2*10))
22*3 + 22*2*10
```

Em Binário

O raciocínio em binário (ou em qualquer outra base) é o mesmo.

Realizar as multiplicações, deslocar os bits, e depois somar os resultados intermediários.

Esse algoritmo é usado em nossas máquinas.

O hardware **que geralmente** implementa esse algoritmo.

Em hardwares mais sofisticados.

- As multiplicações dos bits individuais é feita em paralelo para economizar tempo.
- Mas o algoritmo continua sendo o mesmo.

Exemplo

Considere os valores na base 2 (base ocultada para facilitar a visualização).

```
    11101
  x 11110
```

Exemplo

Considere os valores na base 2 (base ocultada para facilitar a visualização).

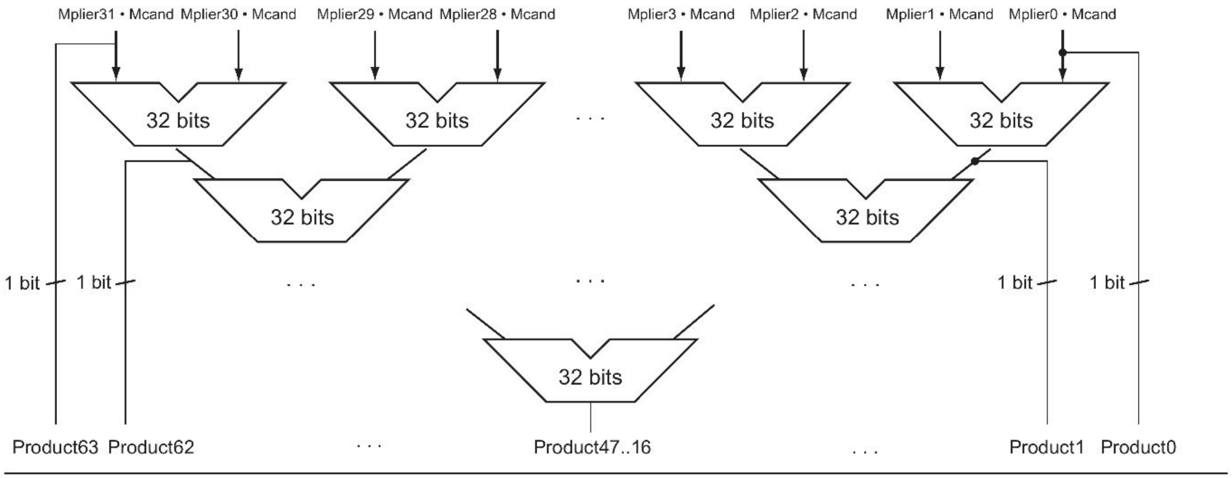
```
      11101
   x  11110
      00000
     11101
    11101
   11101
+ 11101
```

Exemplo

Considere os valores na base 2 (base ocultada para facilitar a visualização).

```
      11101
    x 11110
      00000
     11101
    11101
   11101
+ 11101
 1101100110
```

Em Paralelo

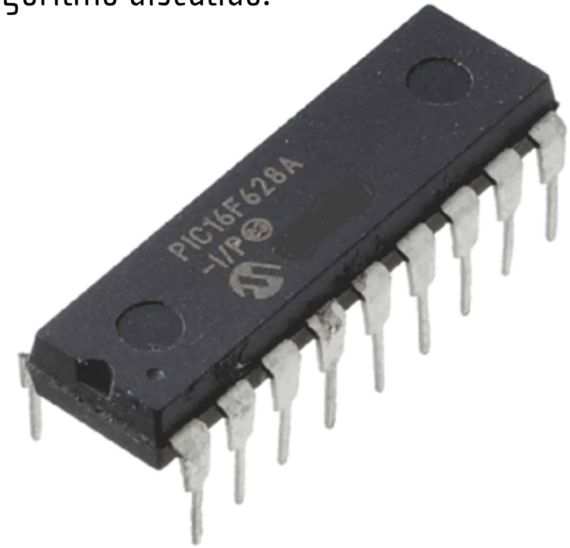


Hennessy, Patterson (2014)

Observações

Alguns processadores, principalmente para sistemas embarcados (ex.: PIC 16F628a), não possuem instruções de multiplicação via hardware.

Se você precisar multiplicar, precisa criar um programa (ex.: função) que executa o algoritmo discutido.



Observações

Realizar divisões em binário seguem raciocínios semelhantes.

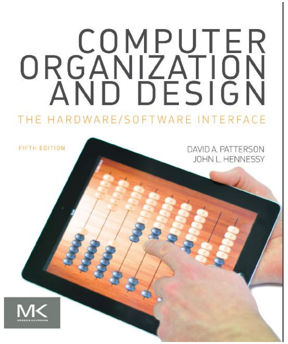
Implementamos os mesmos métodos utilizados na base 10.

Exercícios

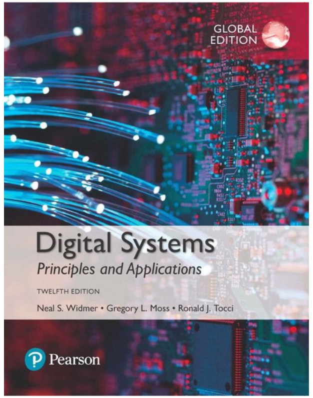
1. Realize as seguintes multiplicações:
   a. $11111_2 * 1100_2$
   b. $111100_2 * 111110_2$
   c. $100000_2 * 11_2$
   d. $111111_2 * 1000_2$

Referências

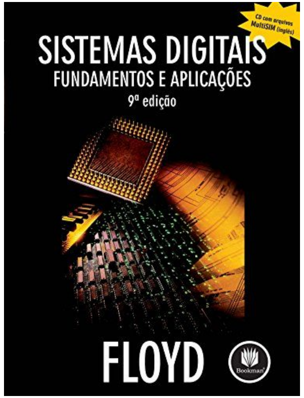
Hennessy, J. L., Patterson, D. A. Computer Organization and Design: The Hardware/Software Interface. 2014.



Ronald J. Tocci, Gregory L. Moss, Neal S. Widmer. Sistemas digitais. 10a ed. 2017.



Thomas Floyd. Widmer. Sistemas Digitais: Fundamentos e Aplicações. 2009.



Licença

Esta obra está licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional.