CE009- Introdução à Estatística

Lista 4

Exercício 1

Uma variável aleatória X tem a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 10 \\ 0.2 & se\ 10 \leq x < 12; \\ 0.5 & se\ 12 \leq x < 13; \\ 0.9 & se\ 13 \leq x < 25; \\ 1 & se\ x \geq 25. \end{cases}$$

Determine:

1. A função de probabilidade de X.

2. $P(X \leq 12)$.

3. $P(X < 12)$.

4. $P(12 \leq X \leq 20)$.

5. $P(X > 18)$.

Para ver a resposta clique aqui: 1

Exercício 2

Um agricultor cultiva laranjas e também produz mudas para vender. Após alguns meses a muda pode ser atacada por fungos com probabilidade 0.05 e, nesse caso, ela é escolhida para ser recuperada probabilidade 0.5. Admita que o processo de recuperação é infalível. O custo de cada muda produzida é R$ 1.00; acrescido de mais 50 centavos se precisar ser recuperada. Cada muda é vendida a R$ 3.00 e são descartadas as mudas não recuperadas de ataque de fungos. Estude como se comporta o ganho por muda produzida.

Para ver a resposta clique aqui: 2

Exercício 3

Num certo restaurante, paga-se pelo almoço uma quantia fixa dependendo da escolha feita de prato e bebida. A carne de peixe tem 10% de preferência, enquanto o frango tem 40% e carne bovina 50% . As três escolhas de bebida estão condicionadas à opção do prato:

Opção: Peixe	Cerveja	Água	Vinho
P(Bebida|Peixe)	0.4	0.3	0.3

Opção: Frango	Cerveja	Água	Vinho
P(Bebida|Frango)	0.3	0.5	0.2

Opção: Bovina	Cerveja	Água	Vinho
P(Bebida|Bovina)	0.6	0.3	0.1

Admita os seguintes preços:

Pedido	Peixe	Frango	Bovina	Cerveja	Água	Vinho
Preço	12	15	18	6	3	9

1. Dado que alguém escolhe peixe, qual a probabilidade de que escolha cerveja?
2. Se escolhe carne bovina, qual a probabilidade de tomar vinho?
3. Sabendo que tomou água, qual a chance de ter escolhido frango?
4. Determine a função de probabilidade para cada uma das variáveis:
   - X = preço do almoço;
   - Y = preço do almoço par aqueles que preferem cerveja.

Para ver a resposta clique aqui: 3

Exercício 4

Verifique se as expressões a seguir são funções densidade de probabilidade (assuma que elas são zero fora dos intervalos especificados).

1. $f(x) = 3x$, se $0 \leq x \leq 1$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, se $x \geq 0$.

3. $f(x) = \dfrac{(x-3)}{2}$, se $3 \leq x \leq 5$.

4. $f(x) = 2$, se $0 \leq x \leq 2$.

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2+x)}{4}, & se \ -2 \leq x < 0; \\ \dfrac{(2-x)}{4}, & se \ 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

Para ver a resposta clique aqui: 4

Exercício 5

A quantia gasta anualmente, em milhões de reais, na manutenção do asfalto, em uma cidade do interior, é representada pela variável Y com densidade dada por:

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{8y}{9} - \dfrac{4}{9}, & \text{se } 0.5 \leq y < 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtenha:

1. $P(Y < 0.8)$.

2. $P(Y > 1.5 | Y \geq 1)$.

3. O valor esperado e a variância de Y.

Para ver a resposta clique aqui: 5

Exercício 6

O tempo, em minutos, de digitação de um texto, por secretárias experientes, é uma variável aleatória contínua X. Sua densidade é apresentada a seguir.

$$f(x) = \begin{cases} 1/4, & \text{se } 0 \leq x < 2; \\ 1/8, & \text{se } 2 \leq x \leq 6; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

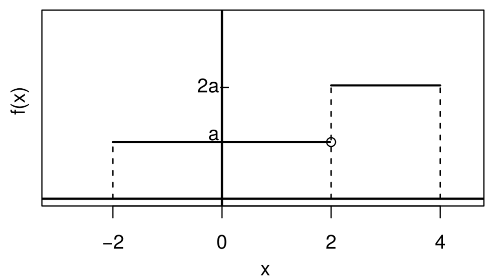
Determine:

1. $P(X > 3)$.
2. $P(1 < X \leq 4)$.
3. $P(X < 3 | X \geq 1)$.
4. Um número b tal que $P(X > b) = 0.6$.
5. O valor esperado e a variância de X.

Para ver a resposta clique aqui: 6

Exercício 7

O gráfico abaixo representa a densidade de uma variável aleatória X.



1. Obtenha o valor de a.
2. Determine $P(X > 0 | X < 3)$.
3. Calcule a $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{V}ar(X)$.

Para ver a resposta clique aqui: 7

Exercício 8

Numa certa região, fósseis de pequenos animais são frequentemente encontrados e um arqueólogo estabeleceu o seguinte modelo de probabilidade para o comprimento, em centímetros, desses fósseis.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{40}x, & 4 \leq x \leq 8; \\ -\dfrac{1}{20}x + \dfrac{3}{5}, & 8 \leq x \leq 10; \\ \dfrac{1}{10}, & 10 \leq x \leq 11; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Faça um gráfico da função densidade.

2. Para um fóssil encontrado nessa região, determine a probabilidade do comprimento ser inferior a 6 centímetros. E de ser superior a 5 mas inferior a 10.5 cm.

3. Encontre o valor esperado para o comprimento dos fósseis da região.

Para ver a resposta clique aqui: 8

Exercício 9

Um atacadista recebe de vários fornecedores uma certa peça para revenda. A peça é produzida com material de qualidade diferente e, portanto, tem custo diferenciado. Levando em conta a proporção fornecida e o preço apresentado por cada fabricante, pode-se admitir que o custo de uma peça em reais, escolhida ao acaso, é uma variável aleatória (C). Admita que a seguinte função de probabilidade para C:

C	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40
p_i	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

1. Determine a $\mathbb{E}[C]$;

2. Suponha que o atacadista revenda cada peça acrescentado 50% sobre seu custo, além de um adicional de R$ 0,10 pelo frete. Calcule a esperança da variável `preço de revenda`.

Para ver a resposta clique aqui: 9

Exercício 10

Seja X uma v.a. com função de probabilidade dada a seguir. Encontre a esperança de X.

X	-2	0	2
p_i	1/3	1/3	1/3

Para ver a resposta clique aqui: 10

Exercício 11

Num certo bairro da cidade de São Paulo, as companhias de seguro estabeleceram o seguinte modelo para número de veículos furtados por semana:

Furtos	0	1	2	3	4
p_i	1/4	1/2	1/8	1/16	1/16

Calcule a média e a variância do número de furtos semanais desse bairro.

Para ver a resposta clique aqui: 11

Exercício 12

Num jogo de dados, um jogador paga R$ 5 para lançar um dado equilibrado e ganha R$ 10 se der face 6, ganha R$ 5 se der face 5 e não ganha nada com as outras faces. Defina a variável **lucro por jogada** com sendo o saldo do que o jogador ganhou menos o pagamento inicial (prejuízo é lucro negativo). Determine média e variância dessa variável.

Para ver a resposta clique aqui: 12

Exercício 13

Num teste de digitação, o tempo em minutos (T) que os candidatos levaram para digitar um texto é modelado, de forma aproximada, pela seguinte função de probabilidade:

T	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1

O candidato recebe 4 pontos se terminar a digitação em 9 minutos, 5 se terminar em 8 minutos e assim por diante. Determine a média e a variância do n$^{\underline{o}}$ de pontos obtidos no teste.

Para ver a resposta clique aqui: 13

Exercício 14

Um caminho para chegar a uma festa pode ser divido em três etapas. Sem enganos o trajeto é feito em 1 hora. Se enganos acontessem na primeira etapa, acrescente 10 minutos ao tempo do trajeto. Para enganos na segunda etapa, o acréscimo é 20 e, para terceira, 30 minutos. Admita que a probabilidade de engano é 0.1; 0.2 e 0.3 para a primeira, segunda e terceira etapas, respectivamente. É provável haver atraso na chegada à festa? Determine a probabilidade de haver atraso, e o atraso não passar de 40 minutos.

Para ver a resposta clique aqui: 14

Exercício 15

Um pai leva o filho ao cinema e vai gastar nas duas entradas R$ 15. O filho vai pedir para comer pipoca com probabilidade 0.7 e, além disso, pode pedir bala com probabilidade 0.5; independentemente um do outro. Se a pipoca custa R$ 2 e a bala R$ 3, estude o gasto efetuado com a ida ao cinema.

Para ver a resposta clique aqui: 15

Respostas

Resposta do exercício 1

1. Baseado na definição de *f.p.*, temos que a função de probabilidades é dada por:

X	10	12	13	25
$P(X=x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

2. $P(X \leq 12) = F(12) = 0.5$.

3. $P(X < 12) = F(10) = 0.2$.

4. $P(12 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X < 12) = F(13) - F(10) = 0.7$

5. $P(X > 18) = 1 - P(X \leq 18) = 1 - F(18) = 1 - F(13) = 0.1$.

Resposta do exercício 2

Sejam os eventos:

- A = muda atacada por fungos, então $P(A) = 0.05$.
- E = muda é escolhida para ser recuperada, então $P(E|A) = 0.5$.

Defina a variável aleatória G = ganho de cada muda produzida. Então:

- $G = 2$ se não precisar ser recuperada e $P(G = 2) = P(A^c) = 0.95$.
- $G = 1.5$ se precisar ser recuperada e $P(G = 1.5) = P(A \cap E) = P(A)P(E|A) = 0.025$.
- $G = -1$ se for descartada e $P(G = -1) = P(A \cap E^c) = P(A)P(E^c|A) = 0.025$.

G	-1	1.5	2
p_i	0.025	0.025	0.95

Resposta do exercício 3

1. $P(\text{Cerveja}|\text{Peixe}) = 0.4$.

2. $P(\text{Vinho}|\text{Carne Bovina}) = 0.1$.

3. Inicialmente vamos calcular $P(\text{Água})$:

$$\begin{aligned} P(\text{Água}) &= P(\text{Água} \cap \text{Peixe}) + P(\text{Água} \cap \text{Frango}) + P(\text{Água} \cap \text{Carne Bovina}) \\ &= 0.03 + 0.20 + 0.15 \\ &= 0.38. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} P(\text{Frango}|\text{Água}) &= \frac{P(\text{Frango}) \cdot P(\text{Água}|\text{Frango})}{P(\text{Água})} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.5}{0.38} \\ &= 0.53. \end{aligned}$$

4. Sejam os eventos:

- P: a escolha é peixe;
- F: a escolha é frango;
- B: para escolha por carne bovina;
- C: a bebida é cerveja;
- A: a bebida é água;
- V: a bebida é vinho.

Dessa forma, temos:

Ω	(P,C)	(P,A)	(P,V)	(F,C)	(F,A)	(F,V)	(B,C)	(B,A)	(B,V)
Preço	18	15	21	21	18	24	24	21	27
p	0.04	0.03	0.03	0.12	0.2	0.08	0.3	0.15	0.05

Assim, a função de probabilidade do preço do almoço é:

Preço	15	18	21	24	27
p_i	0.03	0.24	0.3	0.38	0.05

Para obter a função de probabilidade da variável: preço do almoço para aqueles que preferem cerveja. Inicialmente note que:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap P) + P(C \cap F) + P(C \cap B) \\ &= 0.04 + 0.12 + 0.30 \\ &= 0.46. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(P|C) &= \frac{P(P \cap C)}{P(C)} = \frac{0.04}{0.46} = 0.087 \\ &= P(Y = 18) \\ P(F|C) &= \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0.12}{0.46} = 0.261 \\ &= P(Y = 21) \\ P(B|C) &= \frac{P(B \cap C)}{P(C}) = \frac{0.30}{0.46} = 0.652 \\ &= P(Y = 24) \end{aligned}$$

Então,

Preço (c/cerveja)	18	21	24
p_i	0.087	0.261	0.652

Resposta do exercício 4

Para ser uma função de densidade de probabilidade é necessário satisfazer as propriedades:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1 \end{cases}$$

1. Não, pois $\displaystyle\int_0^1 3x dx = \frac{3}{2}$
2. Não, pois $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{2} dx = \text{diverge;}$
3. Sim, pois $\displaystyle\int_3^5 \frac{x-3}{2} dx = 1$
4. Não, pois $\displaystyle\int_0^2 2\ dx = 4$
5. Sim, pois $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{2+x}{4}\ dx + \int_0^2 \frac{2-x}{4}\ dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Resposta do exercício 5

1. $\displaystyle P(Y < 0.8) = \int_{0.5}^{0.8} \left(\frac{8y}{9} - \frac{4}{9}\right)\ dy = 0.04.$

2. $$P(Y > 1.5 | Y \geq 1) = \frac{\int_{1.5}^2 \left(\frac{8y}{9} - \frac{4}{9}\right)\ dy}{\int_1^2 \left(\frac{8y}{9} - \frac{4}{9}\right)\ dy}$$
$$= \frac{0.5556}{0.8889} = 0.625.$$

3. $\mathbb{E}[Y] = \int_{0.5}^2 y \left(\frac{8y}{9} - \frac{4}{9}\right)\ dy = 1.50.$

   $\mathbb{E}[Y^2] = \int_{0.5}^2 y^2 \left(\frac{8y}{9} - \frac{4}{9}\right)\ dy = 2.375.$

   $\mathbb{V}ar[Y] = 2.375 - (1.5)^2 = 0.125.$

Resposta do exercício 6

Resolvendo pelo cálculo de áreas:

1. $P(X \geq 3) = \int_3^6 \frac{1}{8}\ dx = \frac{3}{8}$.

2. $P(1 < X \leq 4) = \int_1^2 \frac{1}{4}\ dx + \int_2^4 \frac{1}{8}\ dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

3. $P(X < 3|X \geq 1) = \dfrac{\left(\int_1^2 \frac{1}{4}\ dx + \int_2^3 \frac{1}{8}\ dx\right)}{\left(\int_1^2 \frac{1}{4}\ dx + \int_2^6 \frac{1}{8}\ dx\right)} = \dfrac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}$.

4. $\int_0^b \frac{1}{4}\ dx = 0.4$. Então, $\frac{b}{4} = 0.4$. Logo, $b = 1.6$.

5. $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_0^2 x\frac{1}{4}\ dx + \int_2^6 x\frac{1}{8}\ dx = \frac{5}{2} = 2.5.$

   $\mathbb{E}[X^2] = \displaystyle\int_0^2 x^2\frac{1}{4}\ dx + \int_2^6 x^2\frac{1}{8}\ dx = \frac{28}{3} = 9.33.$

   $\mathbb{V}ar[X] = \dfrac{28}{3} - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 3.08.$

Resposta do exercício 7

1. Temos que:

   $$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } -2 \leq x \leq 2; \\ 2a & \text{se } 2 \leq x \leq 4; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Assim,

   $$\int_{-2}^2 adx + \int_2^4 2adx = 1 \quad \rightarrow \quad ax|_{-2}^2 + 2ax|_2^4 = 1$$

   $$2a + 2a + 8a - 4a = 1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{8}$$

2. $P(X > 0|X < 3) = \dfrac{\int_0^2 \frac{1}{8}\ dx + \int_2^3 \frac{2}{8}\ dx}{\int_{-2}^2 \frac{1}{8}\ dx + \int_2^3 \frac{2}{8}\ dx} = \dfrac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)} = \dfrac{2}{3}.$

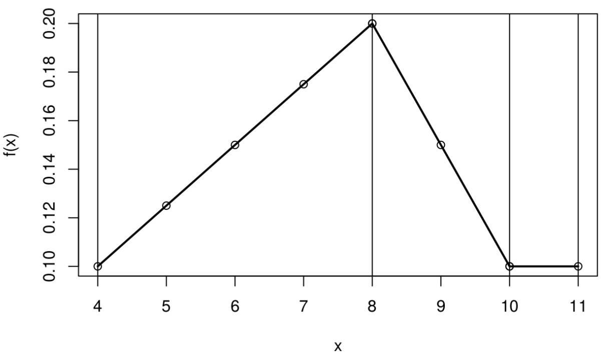
3. $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x}{8}\ dx + \int_{2}^{4} \frac{2x}{8}\ dx = 1.5.$

   $\mathbb{E}[X^2] = \displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^2}{8}\ dx + \int_{2}^{4} \frac{2x^2}{8}\ dx = \frac{16}{3}.$

   $\mathbb{V}ar[X] = \dfrac{16}{3} - (1.5)^2 = 3.08.$

Resposta do exercício 8

1.



2. $P(X \leq 6) = \displaystyle\int_4^6 \frac{x}{40}\ dx = \frac{6^2}{80} - \frac{4^2}{80} = \frac{1}{4}$

   $$P(5 \leq X \leq 10.5) = \int_5^8 \frac{x}{40}\ dx \ + \ \int_8^{10} \left(-\frac{x}{20} + \frac{3}{5}\right)\ dx \ + \ \int_{10}^{10.5} \frac{1}{10}\ dx.$$

   $$= \frac{39}{80} \ + \ \frac{3}{10} \ + \ 0.05 \ = \ 0.84.$$

3. $$\mathbb{E}[X] \ = \ \int_4^8 x \cdot \frac{x}{40} dx \ + \ \int_8^{10} x\left(-\frac{x}{20} \ + \ \frac{3}{5}\right) dx \ + \ \int_{10}^{11} x \cdot \frac{1}{10} dx$$

   $$= \ \frac{56}{15} \ + \ \frac{8}{3} \ + \ \frac{21}{20} \ = \ 7.45$$

Resposta do exercício 9

1. $\mathbb{E}[X] = 1.00 \cdot 0.2 + 1.10 \cdot 0.3 + 1.20 \cdot 0.2 + 1.30 \cdot 0.2 + 1.40 \cdot 0.1 = 1.17$

2. Preço de revenda: $V = 1.5C + 0.1$. Assim,

V	1.6	1.75	1.9	2.05	2.2
p_i	0.2	0.3	0.2	0.2	0.1

Então, $\mu_v = 1.86$.

Resposta do exercício 10

$\mathbb{E}[X] = -2 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 2 \cdot 1/3 = 0.$

Resposta do exercício 11

A média do número de furtos semanais desse bairro é:

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 1.19.$$

A variância é:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (0-\mu)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-\mu)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-\mu)^2 \cdot \frac{1}{8} + (3-\mu)^2 \cdot \frac{1}{16} + (4-\mu)^2 \cdot \frac{1}{16} \\ &= 1.15. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 12

Para a variável lucro temos:

Lucro	-5	0	5
p_i	4/6	1/6	1/6

A média é:

$$\mu = -5 \cdot \frac{4}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = -2.5;$$

E a variância é:

$$\sigma^2 = \left[(-5)^2 \cdot \frac{4}{6} + 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6}\right] - \mu^2 = 14.58.$$

Resposta do exercício 13

O número médio de pontos será:

$\mu = 10 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.1 + \ldots + 4 \cdot 0.1 = 7$

E a variância será:

$\sigma^2 = (10^2 \cdot 0.1 + 9^2 \cdot 0.1 + \ldots + 4^2 \cdot 0.1) - 7^2 = 3.$

Resposta do exercício 14

Seja o evento:

- E = engano na etapa.

O espaço amostral será:

$$\Omega = \{(E,E,E),(E,E,E^c),(E,E^c,E),(E,E^c,E^c),\\ (E^c,E,E),(E^c,E,E^c),(E^c,E^c,E),(E^c,E^c,E^c)\}$$

Considere a variável aleatória T = tempo total gasto no trajeto. Cada elemento de Ω leva a um tempo total gasto no trajeto t.

Ω	(E,E,E)	(E,E,E^c)	(E,E^c,E)	(E,E^c,E^c)	(E^c,E,E)	(E^c,E,E^c)	(E^c,E^c,E)	(E^c,E^c,E^c)
T	120	90	100	70	110	80	90	60
p_i	0.006	0.014	0.024	0.056	0.054	0.126	0.216	0.504

Dessa forma, a distribuição de probabilidade de T é dada por:

T	60	70	80	90	100	110	120
$p(T)$	0.504	0.056	0.126	0.230	0.024	0.054	0.006

$$\begin{aligned} P(\text{atraso}) &= P(T > 60) = 1 - P(T < 60) \\ &= 1 - 0.504 \\ &= 0.496. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{atraso ser de até 40 min.}) &= P(60 < T \leq 100) \\ &= 0.436. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 15

Suponha que o pai não irá consumir guloseimas e defina os eventos:

- P: o filho pede pipoca;
- B: o filho pede bala;

Defina a variável aleatória G: gasto total com a ida ao cinema, temos:

Ω	(P^c, B^c)	(P, B^c)	(P^c, B)	(P, B)
g	15	17	18	20
$P(G = g)$	$0.3 \cdot 0.5 = 0.15$	$0.7 \cdot 0.5 = 0.35$	$0.3 \cdot 0.5 = 0.15$	$0.7 \cdot 0.5 = 0.35$