Cálculo 1 - HONORS - CM311

Teorema do Confronto

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Teorema do Confronto

Proposição 1.1.

*Sejam f, g funções definidas em um intervalo aberto I exceto, possivelmente, em $a \in I$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$ e $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ **existem**, então vale que $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.*

Teorema 1.2 (Teorema do Confronto).

*Sejam f, g, h funções definidas em um intervalo aberto I exceto, possivelmente, em $a \in I$. Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$, e $\lim_{x \to a} g(x)$ e $\lim_{x \to a} h(x)$ **existem e são iguais à** L, vale que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.*

- Resultados análogos valem trocando $x \to a$ por $x \to a^{\pm}$.
- Um bom exercício é pensar se o Teorema do Confronto vale se tivermos limites iguais à $\pm\infty$.

Teorema do Confronto

Proposição 1.1.

Sejam f, g funções definidas em um intervalo aberto I exceto, possivelmente, em $a \in I$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$ e $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ ***existem****, então vale que $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.*

Teorema 1.2 (Teorema do Confronto).

Sejam f, g, h funções definidas em um intervalo aberto I exceto, possivelmente, em $a \in I$. Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$, e $\lim_{x \to a} g(x)$ e $\lim_{x \to a} h(x)$ ***existem e são iguais à*** *L, vale que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.*

- Resultados análogos valem trocando $x \to a$ por $x \to a^{\pm}$.
- Um bom exercício é pensar se o Teorema do Confronto vale se tivermos limites iguais à $\pm\infty$.

Teorema do Confronto

Proposição 1.1.

Sejam f, g funções definidas em um intervalo aberto I exceto, possivelmente, em $a \in I$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$ e $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ ***existem****, então vale que $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.*

Teorema 1.2 (Teorema do Confronto).

Sejam f, g, h funções definidas em um intervalo aberto I exceto, possivelmente, em $a \in I$. Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$, e $\lim_{x \to a} g(x)$ e $\lim_{x \to a} h(x)$ ***existem e são iguais à*** *L, vale que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.*

- Resultados análogos valem trocando $x \to a$ por $x \to a^{\pm}$.
- Um bom exercício é pensar se o Teorema do Confronto vale se tivermos limites iguais à $\pm\infty$.

Teorema do Confronto

Proposição 1.1.

Sejam f, g funções definidas em um intervalo aberto I exceto, possivelmente, em $a \in I$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$ e $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ ***existem****, então vale que $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.*

Teorema 1.2 (Teorema do Confronto).

Sejam f, g, h funções definidas em um intervalo aberto I exceto, possivelmente, em $a \in I$. Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$, e $\lim_{x \to a} g(x)$ e $\lim_{x \to a} h(x)$ ***existem e são iguais à*** *L, vale que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.*

- Resultados análogos valem trocando $x \to a$ por $x \to a^{\pm}$.
- Um bom exercício é pensar se o Teorema do Confronto vale se tivermos limites iguais à $\pm\infty$.

Teorema do Confronto

Exemplo 1.3.

Sabendo que $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, calcule $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Exemplo 1.4.

Calcule $\lim_{x \to 0} x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Definição 1.5.

Uma função f é dita limitada em um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se existir $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I$.

Proposição 1.6.

Considere f, g definidas em um intervalo aberto I, exceto em $a \in I$, possivelmente. Se f é limitada e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} f(x).g(x) = 0$.

Teorema do Confronto

Exemplo 1.3.

Sabendo que $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, calcule $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Exemplo 1.4.

Calcule $\lim_{x \to 0} x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Definição 1.5.

Uma função f é dita limitada em um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se existir $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I$.

Proposição 1.6.

Considere f, g definidas em um intervalo aberto I, exceto em $a \in I$, possivelmente. Se f é limitada e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} f(x).g(x) = 0$.

Exemplo 1.3.

Sabendo que $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, calcule $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

Exemplo 1.4.

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Definição 1.5.

Uma função f é dita limitada em um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se existir $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I$.

Proposição 1.6.

Considere f, g definidas em um intervalo aberto I, exceto em $a \in I$, possivelmente. Se f é limitada e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = 0$.

Teorema do Confronto

Exemplo 1.3.

Sabendo que $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, calcule $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Exemplo 1.4.

Calcule $\lim_{x \to 0} x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Definição 1.5.

Uma função f é dita limitada em um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se existir $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I$.

Proposição 1.6.

Considere f, g definidas em um intervalo aberto I, exceto em $a \in I$, possivelmente. Se f é limitada e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} f(x).g(x) = 0$.

Proposição 1.7.

Seja função f definidas em um intervalo aberto I, exceto em $a \in I$, possivelmente. Se $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$ então $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Observação 1.8.

A proposição acima não vale se $\lim_{x \to a} |f(x)| \neq 0$. Por exemplo, considere a função abaixo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$, temos que

- $\lim_{x \to a} |f(x)| = 1$.
- $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

Proposição 1.7.

Seja função f definidas em um intervalo aberto I, exceto em $a \in I$, possivelmente. Se $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$ então $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Observação 1.8.

A proposição acima não vale se $\lim_{x \to a} |f(x)| \neq 0$. Por exemplo, considere a função abaixo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$, temos que

- $\lim_{x \to a} |f(x)| = 1.$
- $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

Teorema do Confronto

Proposição 1.7.

Seja função f definidas em um intervalo aberto I, exceto em $a \in I$, possivelmente. Se $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$ então $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Observação 1.8.

A proposição acima não vale se $\lim_{x \to a} |f(x)| \neq 0$. Por exemplo, considere a função abaixo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$, temos que

- $\lim_{x \to a} |f(x)| = 1$.
- $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

Teorema do Confronto

Proposição 1.7.

Seja função f definidas em um intervalo aberto I, exceto em $a \in I$, possivelmente. Se $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$ *então* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Observação 1.8.

A proposição acima não vale se $\lim_{x \to a} |f(x)| \neq 0$. Por exemplo, considere a função abaixo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$, temos que

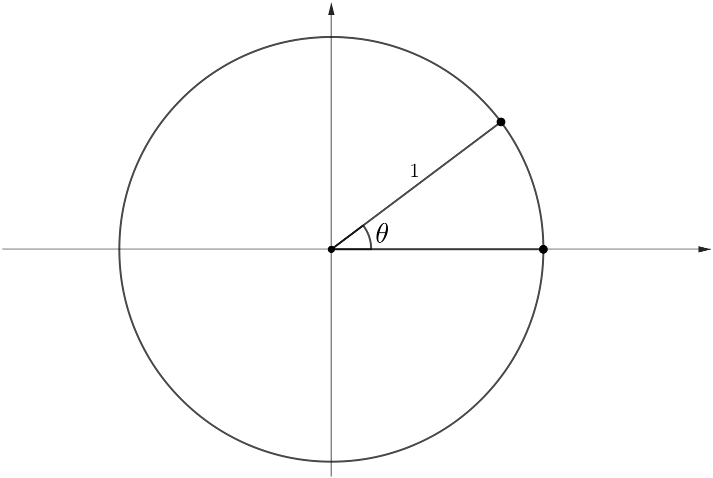
- $\lim_{x \to a} |f(x)| = 1$.
- $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

Continuidade de Funções Trigonométricas

- Vamos mostrar continuidade das funções trigonométricas assumindo alguns fatos/propriedades básicas que vimos no ensino médio.
- Círculo trigonométrico:

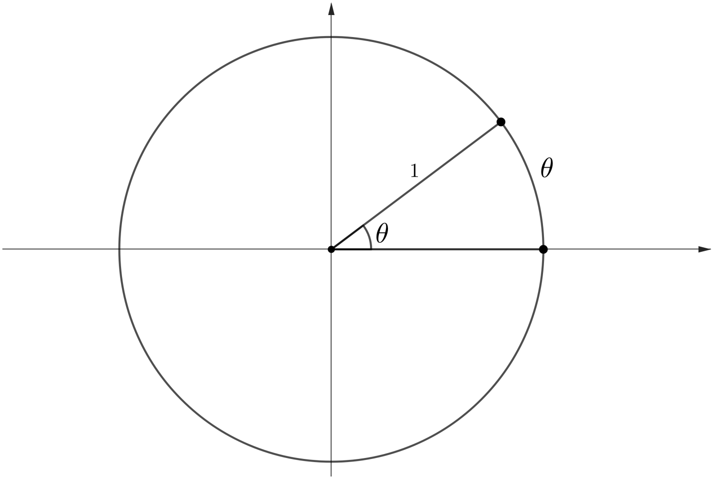
Continuidade de Funções Trigonométricas

- Vamos mostrar continuidade das funções trigonométricas assumindo alguns fatos/propriedades básicas que vimos no ensino médio.
- Círculo trigonométrico:



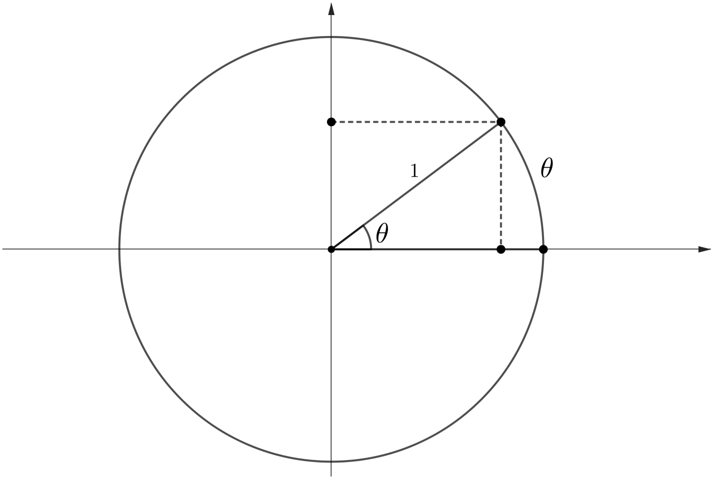
Continuidade de Funções Trigonométricas

- Vamos mostrar continuidade das funções trigonométricas assumindo alguns fatos/propriedades básicas que vimos no ensino médio.
- Círculo trigonométrico:



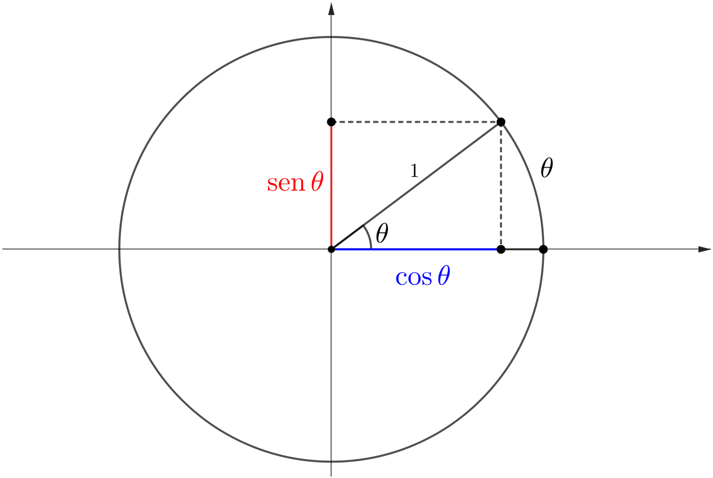
Continuidade de Funções Trigonométricas

- Vamos mostrar continuidade das funções trigonométricas assumindo alguns fatos/propriedades básicas que vimos no ensino médio.
- Círculo trigonométrico:



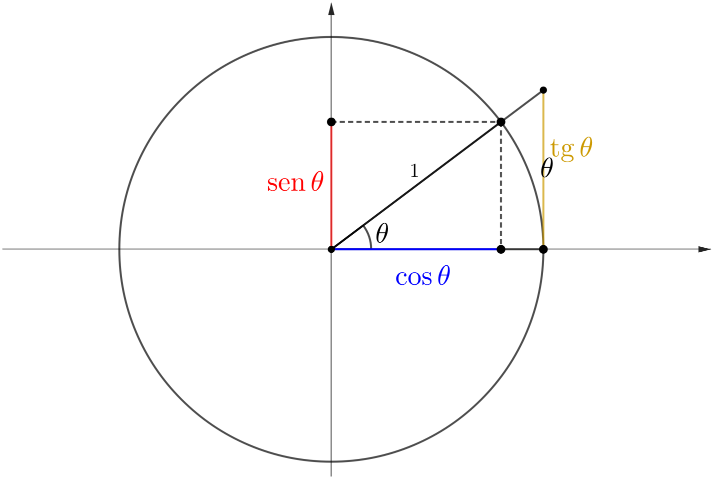
Continuidade de Funções Trigonométricas

- Vamos mostrar continuidade das funções trigonométricas assumindo alguns fatos/propriedades básicas que vimos no ensino médio.
- Círculo trigonométrico:



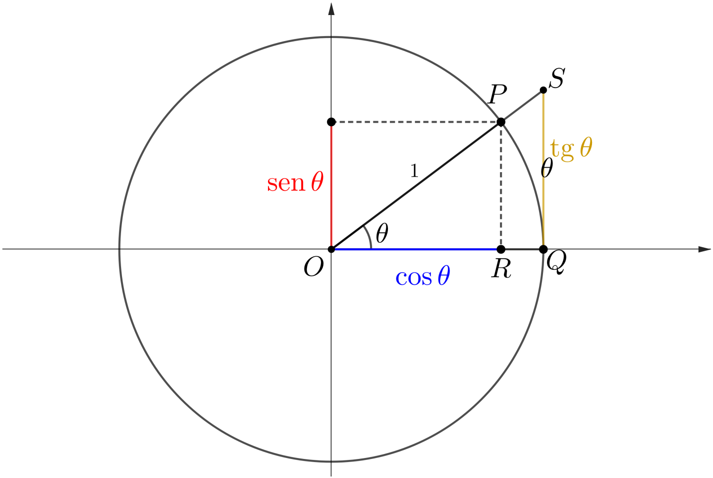
Continuidade de Funções Trigonométricas

- Vamos mostrar continuidade das funções trigonométricas assumindo alguns fatos/propriedades básicas que vimos no ensino médio.
- Círculo trigonométrico:



Continuidade de Funções Trigonométricas

- Vamos mostrar continuidade das funções trigonométricas assumindo alguns fatos/propriedades básicas que vimos no ensino médio.
- Círculo trigonométrico:



Continuidade de Funções Trigonométricas

Proposição 1.9.

Para todo θ *suficientemente próximo de* 0, *vale* $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta| \leq |\operatorname{tg}\theta|$.

- Identidades importantes:
  - $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.
  - $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A.\cos B + \operatorname{sen} B.\cos A$.
  - $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B$.
  - $\operatorname{sen} 2D - \operatorname{sen} 2E = 2\operatorname{sen}(D-E)\cos(D+E)$.
  - $\cos 2D - \cos 2E = 2\operatorname{sen}(D+E)\operatorname{sen}(E-D)$.

Proposição 1.10.

Todas as funções trigonométricas são contínuas em seus domínios.

- Ideia: provar que seno e cosseno são contínuas, e usar propriedades de limites para provar que as demais são.

Continuidade de Funções Trigonométricas

Proposição 1.9.

Para todo θ suficientemente próximo de 0, *vale* $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta| \leq |\operatorname{tg}\theta|$.

- Identidades importantes:
  - $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.
  - $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A.\cos B + \operatorname{sen} B.\cos A$.
  - $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B$.
  - $\operatorname{sen} 2D - \operatorname{sen} 2E = 2\operatorname{sen}(D-E)\cos(D+E)$.
  - $\cos 2D - \cos 2E = 2\operatorname{sen}(D+E)\operatorname{sen}(E-D)$.

Proposição 1.10.

Todas as funções trigonométricas são contínuas em seus domínios.

- Ideia: provar que seno e cosseno são contínuas, e usar propriedades de limites para provar que as demais são.

Continuidade de Funções Trigonométricas

Proposição 1.9.

Para todo θ suficientemente próximo de 0, *vale* $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta| \leq |\operatorname{tg}\theta|$.

- Identidades importantes:
  - $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1.$
  - $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A.\cos B + \operatorname{sen} B.\cos A.$
  - $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.$
  - $\operatorname{sen} 2D - \operatorname{sen} 2E = 2\operatorname{sen}(D-E)\cos(D+E).$
  - $\cos 2D - \cos 2E = 2\operatorname{sen}(D+E)\operatorname{sen}(E-D).$

Proposição 1.10.

Todas as funções trigonométricas são contínuas em seus domínios.

- Ideia: provar que seno e cosseno são contínuas, e usar propriedades de limites para provar que as demais são.

Continuidade de Funções Trigonométricas

Proposição 1.9.

Para todo θ suficientemente próximo de 0, *vale* $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta| \leq |\operatorname{tg}\theta|$.

- Identidades importantes:
  - $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.
  - $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A.\cos B + \operatorname{sen} B.\cos A$.
  - $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B$.
  - $\operatorname{sen} 2D - \operatorname{sen} 2E = 2\operatorname{sen}(D-E)\cos(D+E)$.
  - $\cos 2D - \cos 2E = 2\operatorname{sen}(D+E)\operatorname{sen}(E-D)$.

Proposição 1.10.

Todas as funções trigonométricas são contínuas em seus domínios.

- Ideia: provar que seno e cosseno são contínuas, e usar propriedades de limites para provar que as demais são.

Continuidade de Funções Trigonométricas

Proposição 1.9.

Para todo θ *suficientemente próximo de* 0, *vale* $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta| \leq |\operatorname{tg}\theta|$.

- Identidades importantes:
  - $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.
  - $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A.\cos B + \operatorname{sen} B.\cos A$.
  - $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B$.
  - $\operatorname{sen} 2D - \operatorname{sen} 2E = 2\operatorname{sen}(D-E)\cos(D+E)$.
  - $\cos 2D - \cos 2E = 2\operatorname{sen}(D+E)\operatorname{sen}(E-D)$.

Proposição 1.10.

Todas as funções trigonométricas são contínuas em seus domínios.

- Ideia: provar que seno e cosseno são contínuas, e usar propriedades de limites para provar que as demais são.

Continuidade de Funções Trigonométricas

Proposição 1.9.

Para todo θ suficientemente próximo de 0, vale $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta| \leq |\operatorname{tg}\theta|$.

- Identidades importantes:
  - $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.
  - $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A.\cos B + \operatorname{sen} B.\cos A$.
  - $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B$.
  - $\operatorname{sen} 2D - \operatorname{sen} 2E = 2\operatorname{sen}(D-E)\cos(D+E)$.
  - $\cos 2D - \cos 2E = 2\operatorname{sen}(D+E)\operatorname{sen}(E-D)$.

Proposição 1.10.

Todas as funções trigonométricas são contínuas em seus domínios.

- Ideia: provar que seno e cosseno são contínuas, e usar propriedades de limites para provar que as demais são.

Continuidade de Funções Trigonométricas

Proposição 1.9.

Para todo θ suficientemente próximo de 0, vale $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta| \leq |\operatorname{tg}\theta|$.

- Identidades importantes:
  - $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.
  - $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A.\cos B + \operatorname{sen} B.\cos A$.
  - $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B$.
  - $\operatorname{sen} 2D - \operatorname{sen} 2E = 2\operatorname{sen}(D-E)\cos(D+E)$.
  - $\cos 2D - \cos 2E = 2\operatorname{sen}(D+E)\operatorname{sen}(E-D)$.

Proposição 1.10.

Todas as funções trigonométricas são contínuas em seus domínios.

- Ideia: provar que seno e cosseno são contínuas, e usar propriedades de limites para provar que as demais são.

Continuidade de Funções Trigonométricas

Proposição 1.9.

Para todo θ *suficientemente próximo de* 0, *vale* $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta| \leq |\operatorname{tg}\theta|$.

- Identidades importantes:
  - $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.
  - $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A.\cos B + \operatorname{sen} B.\cos A$.
  - $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B$.
  - $\operatorname{sen} 2D - \operatorname{sen} 2E = 2\operatorname{sen}(D-E)\cos(D+E)$.
  - $\cos 2D - \cos 2E = 2\operatorname{sen}(D+E)\operatorname{sen}(E-D)$.

Proposição 1.10.

Todas as funções trigonométricas são contínuas em seus domínios.

- Ideia: provar que seno e cosseno são contínuas, e usar propriedades de limites para provar que as demais são.

Continuidade de Funções Trigonométricas

Proposição 1.9.

Para todo θ *suficientemente próximo de* 0*, vale* $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta| \leq |\operatorname{tg}\theta|$.

- Identidades importantes:
  - $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.
  - $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A . \cos B + \operatorname{sen} B . \cos A$.
  - $\cos(A+B) = \cos A . \cos B - \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B$.
  - $\operatorname{sen} 2D - \operatorname{sen} 2E = 2 \operatorname{sen}(D-E)\cos(D+E)$.
  - $\cos 2D - \cos 2E = 2 \operatorname{sen}(D+E)\operatorname{sen}(E-D)$.

Proposição 1.10.

Todas as funções trigonométricas são contínuas em seus domínios.

- Ideia: provar que seno e cosseno são contínuas, e usar propriedades de limites para provar que as demais são.

Continuidade de Funções Trigonométricas

- Seja $a \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que para todo x suficientemente próximo de a, vale
$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| \leq |x - a|.$$
- Assim, pelo teorema do confronto, teremos que $\lim\limits_{x \to a} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = 0$, e então
$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a.$$
- Analogamente a função cosseno é contínua (lista 1).

Exemplo 1.11.

Pelas propriedades de limites temos
$$\lim_{x \to a} \frac{3x^2 - x^3 + \sqrt{x} - \operatorname{sen}^3 x}{1 + \cos^2 x} = \frac{3a^2 - a^3 + \sqrt{a} - \operatorname{sen}^3 a}{1 + \cos^2 a}$$

- Como calcular $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen}(3x^2 - x + 7)$?

Continuidade de Funções Trigonométricas

- Seja $a \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que para todo x suficientemente próximo de a, vale
$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| \leq |x - a|.$$
- Assim, pelo teorema do confronto, teremos que $\lim_{x \to a} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = 0$, e então
$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a.$$
- Analogamente a função cosseno é contínua (lista 1).

Exemplo 1.11.

Pelas propriedades de limites temos
$$\lim_{x \to a} \frac{3x^2 - x^3 + \sqrt{x} - \operatorname{sen}^3 x}{1 + \cos^2 x} = \frac{3a^2 - a^3 + \sqrt{a} - \operatorname{sen}^3 a}{1 + \cos^2 a}$$

- Como calcular $\lim_{x \to a} \operatorname{sen}(3x^2 - x + 7)$?

Continuidade de Funções Trigonométricas

- Seja $a \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que para todo x suficientemente próximo de a, vale
$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| \leq |x - a|.$$
- Assim, pelo teorema do confronto, teremos que $\lim_{x \to a} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = 0$, e então
$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a.$$
- Analogamente a função cosseno é contínua (lista 1).

Exemplo 1.11.

Pelas propriedades de limites temos
$$\lim_{x \to a} \frac{3x^2 - x^3 + \sqrt{x} - \operatorname{sen}^3 x}{1 + \cos^2 x} = \frac{3a^2 - a^3 + \sqrt{a} - \operatorname{sen}^3 a}{1 + \cos^2 a}$$

- Como calcular $\lim_{x \to a} \operatorname{sen}(3x^2 - x + 7)$?

Continuidade de Funções Trigonométricas

- Seja $a \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que para todo x suficientemente próximo de a, vale
$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| \leq |x - a|.$$
- Assim, pelo teorema do confronto, teremos que $\lim\limits_{x \to a} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = 0$, e então
$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a.$$
- Analogamente a função cosseno é contínua (lista 1).

Exemplo 1.11.

Pelas propriedades de limites temos
$$\lim_{x \to a} \frac{3x^2 - x^3 + \sqrt{x} - \operatorname{sen}^3 x}{1 + \cos^2 x} = \frac{3a^2 - a^3 + \sqrt{a} - \operatorname{sen}^3 a}{1 + \cos^2 a}$$

- Como calcular $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen}(3x^2 - x + 7)$?

Continuidade de Funções Trigonométricas

- Seja $a \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que para todo x suficientemente próximo de a, vale
$$\left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a\right| \leq |x - a|.$$
- Assim, pelo teorema do confronto, teremos que $\lim\limits_{x\to a} \left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a\right| = 0$, e então
$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a.$$
- Analogamente a função cosseno é contínua (lista 1).

Exemplo 1.11.

Pelas propriedades de limites temos
$$\lim_{x\to a} \frac{3x^2 - x^3 + \sqrt{x} - \operatorname{sen}^3 x}{1 + \cos^2 x} = \frac{3a^2 - a^3 + \sqrt{a} - \operatorname{sen}^3 a}{1 + \cos^2 a}$$

- Como calcular $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen}(3x^2 - x + 7)$?

Limite Fundamental $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

- Com este desenvolvimento, também podemos provar que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$
- Sendo $x \neq 0$, suficientemente próximo de 0:
$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x| \Rightarrow |\cos x| \leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq 1.$$
- Pela simetria das funções seno e cosseno, temos para todo $x \neq 0$, suficientemente próximo de 0:
$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1.$$
- Pelo teorema do confronto, o resultado segue.

Exemplo 1.12.

A função abaixo é continua para todo $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Limite Fundamental $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

- Com este desenvolvimento, também podemos provar que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$
- Sendo $x \neq 0$, suficientemente próximo de 0:
$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x| \Rightarrow |\cos x| \leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq 1.$$
- Pela simetria das funções seno e cosseno, temos para todo $x \neq 0$, suficientemente próximo de 0:
$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1.$$
- Pelo teorema do confronto, o resultado segue.

Exemplo 1.12.

A função abaixo é continua para todo $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Limite Fundamental $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

- Com este desenvolvimento, também podemos provar que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$
- Sendo $x \neq 0$, suficientemente próximo de 0:
$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x| \Rightarrow |\cos x| \leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq 1.$$
- Pela simetria das funções seno e cosseno, temos para todo $x \neq 0$, suficientemente próximo de 0:
$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1.$$
- Pelo teorema do confronto, o resultado segue.

Exemplo 1.12.

A função abaixo é continua para todo $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Limite Fundamental $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

- Com este desenvolvimento, também podemos provar que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$
- Sendo $x \neq 0$, suficientemente próximo de 0:
$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x| \Rightarrow |\cos x| \leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq 1.$$
- Pela simetria das funções seno e cosseno, temos para todo $x \neq 0$, suficientemente próximo de 0:
$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1.$$
- Pelo teorema do confronto, o resultado segue.

Exemplo 1.12.

A função abaixo é continua para todo $a \in \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

- Com este desenvolvimento, também podemos provar que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$
- Sendo $x \neq 0$, suficientemente próximo de 0:
$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x| \Rightarrow |\cos x| \leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq 1.$$
- Pela simetria das funções seno e cosseno, temos para todo $x \neq 0$, suficientemente próximo de 0:
$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1.$$
- Pelo teorema do confronto, o resultado segue.

Exemplo 1.12.

A função abaixo é continua para todo $a \in \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$