Cálculo 1 **Nome:** ____________________

CM311-HONORS

Prova 3 - 08/08/2024 **GRR:** ____________________

Duração: 1 hora e 40 minutos

Professor: Diego Otero **Assinatura:** ____________________

Instruções:

- A prova é individual, sem consulta, e não é permitido se ausentar no período da prova.
- Leia com atenção as questões. Capriche na redação, nos esboços de figuras, justifique todas suas respostas, e simplifique o máximo possível as respostas finais. **Respostas sem justificativas, cálculos e raciocínios necessários não serão consideradas.**
- Não faça marcações na tabela abaixo.

Problema:	1	2	3	4	5	6	Total
Valor:	20	20	15	25	15	20	115
Pontuação:							

BOA PROVA!

---

1. Calcule as integrais abaixo

   (a) (6 Pts.) $\displaystyle\int \frac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$ (b) (7 Pts.) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-3}\,dx.$ (c) (7 Pts.) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\cos^2(1-x^3)}\,dx.$

   Dicas/Respostas:

   (a) $\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{6}{5}^{5/6} + C.$ (b) $\frac{(2x-3)^{5/2}}{10} + \frac{(2x-3)^{3/2}}{2} + C.$ (c) $\frac{-\operatorname{tg}(1-x^3)}{3} + C$

---

2. Calcule limites abaixo

   (a) (10 Pts.) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - \cos x + 1}{x \operatorname{sen} x}.$ (b) (10 Pts.) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x + \cos(x-1) - 2}{x-1}.$

Dicas/Respostas:

(a) $\frac{3}{2}$. (b) 1.

---

3. Duas partículas A e B se movimentam ao longo do eixo x. Suas funções velocidades v_A, v_B satisfazem $v_A(t) - v_B(t) = t.e^{-t^2}$, onde $t \geq 0$ é o tempo.
   (a) (5 Pts.) Supondo que as partículas têm mesma posição inicial (em $t = 0$), existe algum outro instante t de modo que elas estejam na mesma posição? Justifique.
   (b) (10 Pts.) Encontre uma condição, em termos das posições iniciais de cada uma (em $t = 0$), de modo que a distância entre as partículas fique cada vez mais perto de zero, conforme o tempo passa.

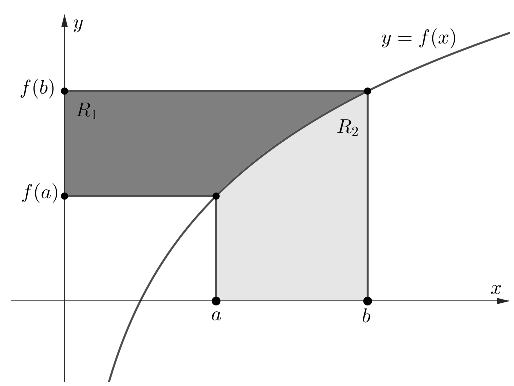
Dicas/Respostas:

(a) Sendo x_A, x_B as funções posição das partículas A e B, respectivamente, temos que $x_A(t) - x_B(t) = -\frac{e^{-t^2}}{2} + \frac{1}{2}$. Como a função $-\frac{e^{-t^2}}{2} + \frac{1}{2}$ é crescente para $t \geq 0$, as partículas não estarão em posições iguais para $t > 0$.

(b) Temos que ter $x_A(0) = x_B(0) - \frac{1}{2}$.

---

4. Considere as regiões R_1 e R_2 dadas na figura ao lado onde $f(x) = \ln x$, $a = 2$ e $b = 4$.
   (a) (10 Pts.) Calcule a área de R_1.
   (b) (15 Pts.) **(Bônus)** Calcule o volume do sólido obtido ao rotacionar R_2 ao redor do eixo x.



Dicas/Respostas:

(a) 2. (b) $\pi(14(\ln 2)^2 - 12\ln 2 + 4)$.

5. (15 Pts.) Calcule a derivada da função f abaixo no ponto $x = 0$

$$f(x) = \int_0^{x^2-2x-\ln(x+1)} (t+1)^2 \cos(3t)\, dt.$$

Dicas/Respostas:

$f'(0) = -3$.

---

6. Seja $f(x) = \ln(x+1)$.
   (a) (10 Pts.) Calcule o polinômio de Taylor, T_3, de ordem 3 de f, centrado em 0.
   (b) (10 Pts.) Usando a fórmula do resto de Lagrange estime para quais valores de $x > 0$ podemos aproximar f por T_3 tal que o valor absoluto do erro não seja maior que $\frac{1}{4}.10^{-4}$.

Dicas/Respostas:

(a) $T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

(b) Para $0 < x < \frac{1}{9}$.

FORMULÁRIO/NOTAÇÕES

- $|A+B| \leq |A|+|B|$.
- $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$.
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.
- $(x-y)^n = (x-y).(\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i)$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
- $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$.
- $(x^n)' = n.x^{n-1}$.
- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$.
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cossec}^2 x$.
- $(\sec x)' = \operatorname{tg} x . \sec x$.
- $(\operatorname{cossec} x)' = -\operatorname{cotg} x . \operatorname{cossec} x$.
- $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
- $(e^x)' = e^x$.
- $(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- $T_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a).(x-a)^i}{i!}$.
- $f(x) - T_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c).(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$.
- $\int f(g(x))g'(x)\, dx \overset{u=g(x)}{=} \int f(u)\, du$
- $\int f'g = fg - \int fg'$.