Prova 2

1. (3 pontos) Durante o monitoramento de uma rede de computadores, foi medida a latência de resposta (em milissegundos) entre um servidor e um cliente, representada pela variável aleatória X. Com base em dados históricos, obteve-se a seguinte $f.d.a$ para X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 20 \\ 0{,}15 & \text{se } 20 \leq x < 40 \\ 0{,}4 & \text{se } 40 \leq x < 60 \\ 0{,}85 & \text{se } 60 \leq x < 100 \\ 1 & \text{se } x \geq 100 \end{cases}$$

Com base nessas informações, determine:

(a) (1 ponto) A função de probabilidade de X.

x	20	40	60	100
$P(X = x)$	0,15	0,25	0,45	0,15

(b) (1 ponto) A probabilidade da latência estar entre 40 e 80, incluindo esses dois valores.

$$P(40 \leq X \leq 80) = P(X = 40) + P(X = 60) = 0{,}25 + 0{,}45 = 0{,}70$$

(c) (1 ponto) A esperança matemática (valor esperado) de X.

$$E(X) = 20 \cdot 0{,}15 + 40 \cdot 0{,}25 + 60 \cdot 0{,}45 + 100 \cdot 0{,}15 = 3 + 10 + 27 + 15 = 55$$

2. (2,5 pontos) Em um sistema de segurança cibernética, utiliza-se um algoritmo de detecção de intrusos para classificar o comportamento dos usuários como malicioso ou normal, com base em padrões de uso. Esse algoritmo classifica erroneamente comportamentos

maliciosos como normais em 10% dos casos. Por outro lado, 1% dos usuários normais são incorretamente identificados como maliciosos. Sabe-se, com base em registros históricos da rede, que apenas 5% dos usuários apresentam comportamento malicioso. Dado que o sistema classificou um determinado usuário como malicioso, qual é a probabilidade de que ele seja, na verdade, um usuário normal?

$$P(M) = 0{,}05 \qquad \text{(malicioso)}$$
$$P(N) = 0{,}95 \qquad \text{(normal)}$$
$$P(A|M) = 0{,}9 \qquad \text{(acerto)}$$
$$P(A|N) = 0{,}01 \qquad \text{(falso positivo)}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|M)P(M) + P(A|N)P(N) \\ &= 0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}01 \cdot 0{,}95 = 0{,}045 + 0{,}0095 = 0{,}0545 \end{aligned}$$

$$P(N|A) = \frac{P(A|N)P(N)}{P(A)} = \frac{0{,}0095}{0{,}0545} \approx 0{,}1743$$

3. (2,5 pontos) O tempo de execução de um algoritmo de ordenação, ao processar grandes volumes de dados, segue aproximadamente uma distribuição normal com média de 1,8 segundos e desvio padrão de 0,2 segundos. Durante uma bateria de testes de desempenho, deseja-se avaliar qual a probabilidade de que o algoritmo leve mais de 2 segundos para concluir a ordenação?

$$Z = \frac{2{,}0 - 1{,}8}{0{,}2} = 1 \Rightarrow P(X > 2) = P(Z > 1) = 0{,}1587$$

4. (2 pontos) Em um sistema de comunicação de dados, os pacotes são transmitidos por uma rede, mas nem todos os pacotes chegam corretamente ao destino, por vários motivos (interferência, congestionamento, perda de sinal etc.). Em média, apenas 80% dos pacotes são recebidos com sucesso. Um protocolo de controle exige que um servidor só processe

os dados após receber com sucesso 5 pacotes (não necessariamente consecutivos). Assuma que as transmissões são independentes e considere X como a v.a. que representa o número total de transmissões necessárias até que 5 pacotes sejam recebidos com sucesso. Qual a probabilidade de que o servidor precise de no máximo 7 transmissões para obter os 5 pacotes bem-sucedidos?

$$X \sim \text{Binomial Negativa}(r = 5, p = 0{,}8)$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 7) &= \binom{4}{4}(0{,}8)^5(0{,}2)^0 + \binom{5}{4}(0{,}8)^5(0{,}2)^1 + \binom{6}{4}(0{,}8)^5(0{,}2)^2 \\ &= 1(0{,}8)^5 + 5(0{,}8)^5(0{,}2) + 15(0{,}8)^5(0{,}2)^2 \\ &= 0{,}852 \end{aligned}$$

Modelo Exponencial $f(x;\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}, & \text{se } x \geq 0. \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$

Modelo Uniforme $f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta. \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$

Binomial Negativa $p(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r} \cdot p^r & , \text{ se } x \in \{r, r+1, r+2, \ldots\} \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$

Distribuição Geométrica $p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p, & \text{se } x = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$

Distribuição de Poisson $p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, 2 \ldots \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$

Distribuição Hipergeométrica $p(x) = \begin{cases} \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \text{se } max(0, n-N+r) \leq x \leq min(r,n). \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$

Distribuição Binomial $p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, & \text{se } x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$

Distribuição de Bernoulli $p(x) = \begin{cases} p, & \text{se } x = 1 \textbf{ (sucesso)} \\ 1-p, & \text{se } x = 0 \textbf{ (fracasso)} \end{cases}$