CE009- Introdução à Estatística

Lista 7

Exercício 1

O consumo médio de gasolina num certo tipo de automóvel, segundo a montadora, é de 15 km/litro. Uma revista especializada verificou o consumo de 25 desses veículos, escolhidos ao acaso. Admita que o consumo siga o modelo Normal com variância igual a 9 (km/litro)^2.

(a) Formule o problema como um teste de hipótese para verificar a afirmação da montadora.

(b) Qual seria a região crítica se $\alpha = 0,06$? Encontre os valores de consumo médio de combustível que limitam a região crítica.

(c) Para uma amostra com $\bar{y} = 17$, o consumo difere ou não da afirmação da montadora? Justifique a sua resposta.

Para ver a resposta clique aqui: 1

Exercício 2

Uma máquina deve produzir peças com diâmetro de 2 cm. Entretanto, variações acontecem e vamos assumir que o diâmetro dessas peças siga o modelo Normal com variância igual a 0,09 cm^2. Para testar se a máquina está bem regulada, uma amostra de 100 peças foi coletada.

1. Formule o problema como um teste de hipótese.

2. Qual seria a região crítica se $\alpha = 0,02$?

3. Se para essa amostra $\bar{y} = 2,02$, qual a conclusão a respeito da regulagem da máquina?

Para ver a resposta clique aqui: 2

Exercício 3

Uma máquina automática para encher pacotes de café enche-os segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão sempre igual a 20 gramas. A máquina foi regulada para $\mu = 500$ gramas. Periodicamente, coletamos uma amostra de 16 pacotes e verificamos se a produção está sob controle.

1. Formule o problema como um teste de hipótese.
2. Defina a região crítica quando $\alpha = 0,01$.
3. Se para a amostra coletada $\bar{y} = 492$ g, qual a conclusão a respeito da regulagem da máquina?

Para ver a resposta clique aqui: 3

Exercício 4

O atual tempo de travessia com balsas entre Santos e Guarujá é considerado uma variável aleatória com distribuição Normal de média 10 minutos e desvio padrão de 3 minutos. Uma nova balsa vai entrar em operação e desconfia-se que será mais lenta que as anteriores, isto é, haverá um aumento na média especificada pelo modelo acima.

1. Especifique as hipóteses em discussão.
2. Interprete os erros tipo I e tipo II no contexto do problema.
3. Para uma amostra de 20 tempos de travessia com a nova balsa, obtenha a região crítica considerando um nível de 5%.
4. Calcule a probabilidade do erro tipo II, se a nova balsa demora, em média, 2 minutos a mais que as anteriores para completar a travessia. Depois calcule para 3 e 4 minutos a mais.

Para ver a resposta clique aqui: 4

Exercício 5

Um criador constatou uma proporção de 10% do rebanho com verminose. O veterinário alterou a dieta dos animais e acredita que a doença diminuiu de intensidade. Um exame em 100 cabeças do rebanho, escolhidas ao acaso, indicou 8 delas com verminose.

(a) Formule o problema como um teste de hipótese para verificar a afirmação do veterinário.

(b) Qual a região crítica se $\alpha = 0,08$? Encontre o(s) valor(es) de proporção que limita(m) a região crítica.

(c) Considere a amostra observada. A dieta proposta pelo veterinário tem efeito na redução da verminose do rebanho? Justifique a sua resposta.

Para ver a resposta clique aqui: 5

Exercício 6

Um fabricante afirma que seus cigarros contêm não mais que 30 mg de nicotina. Uma amostra de 25 cigarros fornece média de 31,5 mg e desvio padrão 3 mg.

(a) No nível de 5%, os dados refutam ou não a firmação do fabricante?

(b) Calcule o p-valor do teste.

Para ver a resposta clique aqui: 6

Exercício 7

Os novos operários de uma empresa são treinados a operarem uma máquina, cujo tempo Y (em horas) de aprendizado é anotado. Observou-se que Y segue a distribuição $N(25, 100)$. Uma nova técnica de ensino, que deve melhorar o tempo de aprendizado, foi testada em 16 novos empregados, os quais apresentaram 20,5 horas como tempo médio de aprendizado. Usando o p-valor, você diria que a nova técnica é melhor que a anterior?

Para ver a resposta clique aqui: 7

Exercício 8

Suponha que se deseja testar $H_0 : \mu = 50$ versus $H_1 : \mu > 50$, em que μ é a média de uma variável aleatória Normal com desvio padrão igual a 10. Extraída uma amostra de $n = 36$ elementos da população, observou-se $\bar{y} = 53$. Faça o teste utilizando os níveis 1%, 2% e 5%.

Para ver a resposta clique aqui: 8

Exercício 9

Uma estação de televisão afirma que 60% dos televisores estavam ligados no seu programa especial da última segunda-feira. Uma rede concorrente deseja contestar essa afirmação e decide usar uma amostra de 200 famílias para um teste.

1. Formule o problema como um teste de hipótese para verificar a afirmação da estação de televisão.
2. Qual a região crítica do teste para um nível de significância $\alpha = 5\%$?
3. Admita que, com a pesquisa feita com as 200 pessoas, obtivemos 104 pessoas que estavam assistindo ao programa. O que podemos dizer a respeito da afirmação da estação de televisão?
4. Calcule o p-valor do teste para o problema apresentado.

Para ver a resposta clique aqui: 9

Exercício 10

O consumidor de um certo produto acusou o fabricante, dizendo que mais de 20% das unidades fabricadas apresentaram defeito. Para embasar sua acusação, ele usou uma amostra de tamanho $n = 50$, na qual 27% eram defeituosas. Mostre se fabricante poderia refutar a acusação com um teste estatístico de hipótese. Use um nível de significância de 10%.

Para ver a resposta clique aqui: 10

Exercício 11

Em um procedimento de avaliação, um mesmo exame foi aplicado aos mesmos alunos quando estavam em períodos inicial e final de um curso. A variável D_i corresponde a diferença de notas de fim e início do curso. Faça um teste de comparação de médias adequado considerando nível de significância $\alpha = 0,05$.

Início	37	57	34	40	21	28	35	80	65	47	28	67
Fim	65	92	56	70	52	73	50	90	88	71	52	88
d_i	28	35	22	30	31	45	15	10	23	24	24	21

Para ver a resposta clique aqui: 11

Exercício 12

Dois tipos de plásticos, I e II, são adequados para uso na produção de certo componente eletrônico. A tensão de ruptura do material é uma característica importante. Sabe-se que $\sigma_I = \sigma_{II} = 1$ psi. Uma amostra aleatória com $n_I = 10$ e $n_{II} = 12$ fornece $\overline{x}_I = 162,5$ e $\overline{x}_{II} = 155,0$. Por razões de custo, a companhia não adotará o plástico I a menos que este tenha uma resistência média que exceda a do plástico II em pelo menos 10 psi. Proceda um teste de hipótese adequado para saber se, baseando-se nas informações da amostra, a companhia deve adotar o plástico I (use $\alpha = 0,05$).

Para ver a resposta clique aqui: 12

Exercício 13

Um experimento foi feito para comparar os custos de reparo de dois tipos de bombas (A e B). Para isto registrou-se o custo para 16 bombas de cada tipo, ao longo de um ano de operação. Faça um teste de hipótese adequado, com nível de significância $\alpha = 0,05$, para comparar os custos de reparo das duas bombas. Considere as seguintes informações:

$$\begin{cases} \bar{x}_A = 1,888 \quad \text{e} \quad S_A^2 = 1,168 \quad \text{e} \quad n_A = 16 \\ \bar{x}_B = 1,413 \quad \text{e} \quad S_B^2 = 0,896 \quad \text{e} \quad n_B = 16 \end{cases}$$

Para ver a resposta clique aqui: 13

Exercício 14

Duas técnicas de venda são aplicadas por dois grupos de vendedores: a técnica A por 12 vendedores, a técnica B por 15 vendedores. Espera-se que a técnica B produza melhores resultados. No final de um mês, obtiveram-se os resultados a seguir:

$$\begin{cases} \bar{x}_A = 68 \quad \text{e} \quad S_A^2 = 50 \quad \text{e} \quad n_A = 12 \\ \bar{x}_B = 76 \quad \text{e} \quad S_B^2 = 52 \quad \text{e} \quad n_B = 15 \end{cases}$$

Teste, para o nível de significância de 5%, se há diferença significativa entre as vendas resultantes das duas técnicas. Supondo que as vendas sejam normalmente distribuídas, faça um teste para igualdade de variâncias e depois para a média populacional.

Para ver a resposta clique aqui: 14

Exercício 15

Queremos testar as resistências de dois tipos de vigas de aço, A e B. Tomando-se $n_A = 15$ vigas do tipo A e $n_B = 20$ vigas do tipo B, obtemos os valores dados a seguir.

$$\begin{cases} \bar{x}_A = 70,5 \quad \text{e} \quad S_A^2 = 81,6 \quad \text{e} \quad n_A = 15 \\ \bar{x}_B = 84,5 \quad \text{e} \quad S_B^2 = 210,8 \quad \text{e} \quad n_B = 20 \end{cases}$$

Conduza um teste de hipótese adequado, considerando nível de significância de 10%.

Para ver a resposta clique aqui: 15

Respostas

Resposta do exercício 1

(a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_1 : \mu \neq 15 \end{cases}$$

(b) Região crítica:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- $\bar{y}_{c1} = 15 - 1,88 \dfrac{3}{\sqrt{25}} = 13,87$
- $\bar{y}_{c2} = 15 + 1,88 \dfrac{3}{\sqrt{25}} = 16,13$

A região crítica é dada por $RC\{ \ \bar{y} \ \in \ \mathbb{R} \mid \bar{y} \ < \ 13,87 \ \cup \ \bar{y} \ > \ 16,13\}$.

(c) O consumo difere, pois a média observada pertence a região crítica. Logo, rejeita-se a hipótese nula de que o consumo de combustível é de 15 km por litro, ao nível de confiança de 94%.

Resposta do exercício 2

(a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2 \\ H_1 : \mu \neq 2 \end{cases}$$

(b) Região crítica:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{y}_{c1} = 2 - 2,33 \frac{0,3}{\sqrt{100}} = 1,93$$

$$\bar{y}_{c2} = 2 + 2,33 \frac{0,3}{\sqrt{100}} = 2,07$$

A região crítica é dada por $RC = \{ \ \bar{y} \in \mathbb{R} \mid \bar{y} < 1,93 \ \cup \ \bar{y} > 2,07\}$.

(c) Não rejeitamos a hipótese nula de que a máquina está regulada e produzindo peças dentro do padrão desejado, ao nível de confiança de 98%.

Resposta do exercício 3

(a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 500 \\ H_1 : \mu \neq 500 \end{cases}$$

(b) Região crítica:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{y}_{c1} = 500 - 2,58 \frac{20}{\sqrt{16}} = 487,10$$

$$\bar{y}_{c2} = 500 + 2,58 \frac{20}{\sqrt{16}} = 512,90$$

A região crítica é dada por $RC = \{\ \bar{y} \in \mathbb{R} \mid \bar{y} < 487,10 \quad \cup \quad \bar{y} > 512,90\}$.

(c) Não rejeitamos a hipótese nula de que a máquina está produzindo pacotes com peso médio de 500 g, ao nível de confiança de 99%.

Resposta do exercício 4

(a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu > 10 \end{cases}$$

(b)
- Erro Tipo I: rejeitar $H_0|H_0V$, ou seja, não rejeitar que a média de tempo para travessia aumentou, mas na verdade continua com média de 10 minutos.
- Erro Tipo II: não rejeitar $H_0|H_0F$, ou seja, não rejeitar que a média de tempo para travessia não aumentou, $(\mu = 10)$, quando, na verdade, aumentou.

(c)

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{y}_{c1} = 10 + 1,64\frac{3}{\sqrt{20}} =$$
$$= 11,10.$$

A região crítica é dada por $RC = \{\bar{y} \in \mathbb{R} | \bar{y} > 11,10\}$.

(d)

$$\begin{aligned}
\beta(12) &= P(\text{erro tipo II}) \\
&= P(\text{não rejeitar} \quad H_0 | H_0 \quad \text{falsa}) \\
&= P(\bar{y}_c \leq 11,10 | \mu = 12,0) \\
&= P\left(\frac{\bar{y}_c - 12}{\sqrt{3^2/20}} \leq -1,34\right) \\
&= P(z \leq -1,34) \\
&= 0,090.
\end{aligned}$$

Assim, caso $\mu = 12,0$ estaríamos concluindo, de forma equivocada, que H_0 não deveria ser rejeitada, com probabilidade de $0,090$. Para 3 e 4 minutos a mais, temos que a probabilidade é $0,002$ e ≈ 0, respectivamente.

Resposta do exercício 5

Sabemos que $\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$.

(a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,10 \\ H_1 : p < 0,10 \end{cases}$$

(b) Região crítica:

$$z_c = \frac{\hat{p}_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \quad \rightarrow \quad \hat{p}_c = p - z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\hat{p}_c = 0,10 - 1,41\sqrt{\frac{0,10(1-0,10)}{100}} = 0,058.$$

A região crítica é dada por $RC = \{\ \hat{p} \in [0,1] \mid \hat{p} < 0,058\ \}$.

(c) Note que é necessário calcular a proporção amostral de animais com verminose como $\hat{p} = \frac{8}{100} = 0,08$. Podemos afirmar que a incidência não diminuiu, uma vez que o valor de proporção observado na amostra $\hat{p} = 0,08$ está dentro da região de não rejeição da hipótese nula.

Resposta do exercício 6

(a) Note que foi obtido uma amostra de tamanho 25, onde a média $(\bar{Y})$ e o desvio padrão (S) amostral foram calculadas. Assim, a variável padronizada segue uma distribuição t com $n-1$ graus de liberdade. Isso quer dizer que

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}.$$

As hipóteses estabelecidas são

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 30 \\ H_1 : \mu > 30 \end{cases}$$

Por ser um teste unilateral, devemos procurar o valor de t_c tal que

$$P(T > t_c) = 0,05.$$

A partir da tabela t de Student, obtemos que $t_c = 1,711$. Isso quer dizer que a região crítica para a estatística T é $RC = [1,711; \infty)$. O valor observado da estatística é

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{5}(31,5 - 30)}{3} \\ &= 2,5. \end{aligned}$$

Como t pertence a região crítica, rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que os cigarros contenham mais de 30 g de nicotina.

(b) Para calcular o p-valor, considere que

$$\begin{aligned} \alpha^* &= P(T > t|H_0) = P(T > 2,5|H_0) \\ &= 0,01 = 1\%. \end{aligned}$$

Esse valor pequeno de $\hat{\alpha}$ leva a rejeição de H_0.

Resposta do exercício 7

Considerando que $\bar{Y} \sim N(25, 100/16)$.

As hipóteses estabelecidas são

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 25 \\ H_1 : \mu < 25 \end{cases}$$

Para calcular o p-valor, considere que a variância dada é populacional. Então,

$$\begin{aligned} \alpha^* &= P(Z < z) \\ &= P\left(\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{20,5 - 25}{10/\sqrt{16}}\right) \\ &= P(Z < -1,8) \\ &= 0,036 \\ &= 3,60\%. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 8

Sabemos que $\bar{Y} \sim N(\mu, 10^2/36)$

- Para 1%:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_c &= 50 + 2,33\frac{10}{\sqrt{36}} \\ &= 53,88. \end{aligned}$$

- Para 2%:

$$\begin{aligned} \bar{y}_c &= 50 + 2,06\frac{10}{\sqrt{36}} \\ &= 53,43. \end{aligned}$$

- Para 5%:

$$\begin{aligned} \bar{y}_c &= 50 + 1,64\frac{10}{\sqrt{36}} \\ &= 52,73. \end{aligned}$$

Nos níveis de 1% e 2% não rejeitamos, mas rejeitamos no nível de 5%.

Resposta do exercício 9

Sabemos que $\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$.

(a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,60 \\ H_1 : p < 0,60 \end{cases}$$

(b) Região crítica:

$$z_c = \frac{\hat{p}_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \quad \rightarrow \quad \hat{p}_c = p + z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\hat{p}_c = 0,60 - 1,64\sqrt{\frac{0,60(1-0,60)}{200}} = 0,54.$$

A região crítica é dada por $RC = \{\ \hat{p} \in [0,1] \mid \hat{p} < 0,54\}$.

(c) Na amostra de tamanho $n = 200$, temos que $\hat{p} = \frac{104}{200} = 0,52$. Assim, podemos notar que $0,52 \in RC$. Portanto, somos levados a rejeitar a hipótese nula. Isto é, há evidências de que a ausência do programa de segunda-feira não foi de 60%, mas inferior.

(d) Os passos para calcular o p-valor são parecidos com aqueles já apresentados, mas a principal diferença está em não construir a região crítica. O que fazemos é apresentar a probabilidade de ocorrer valores da estatística mais extremos do que o observado, considerando a hipótese nula verdadeira. Portanto,

$$\begin{aligned} P(\hat{p} < 0,52 | p = 0,60) &= P\left(Z < \frac{0,52 - 0,60}{\sqrt{\frac{0,60(1-0,60)}{200}}}\right) \\ &= P(Z < -2,30) \\ &= 0,01 = 1\%. \end{aligned}$$

Resposta do exercício 10

População:

$$Y: \text{presença de defeito (0 - não, 1 - sim)}$$

$$Y : B(p)$$

Amostra:

$$n = 50$$

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^{50} y_i = 0,27$$

Teste de hipótese:

$$H_0 : p = 0,20 \; vs \; H_1 : p > 0,20$$

$$\alpha = 0,10 \rightarrow z_c = 1,28$$

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,27 - 0,20}{\sqrt{\frac{0,20(1-0,20)}{50}}} = 1,24$$

Conclusão: Como $z < z_c$, ou, equivalentemente como o p-valor é $0,108$, então não rejeita-se H_0 ao nível de 10% de significância, ou seja, não há evidência suficiente na amostra para acusar o fabricante.

Resposta do exercício 11

$$H_0 : \mu_{fim} = \mu_{inicio} \;\; (d = 0) \text{ vs } \mu_{fim} \neq \mu_{inicio} \;\; (d > 0)$$

$$\alpha = 0,05$$

$$\bar{d} = 25,7 \text{ e } S_d^2 = 83,7$$

$$t = \frac{25,7 - 0}{\sqrt{83,7/12}}$$

$$= 9,72$$

$$RC : \{t = 9,72 > t_c = 1,796\}$$

$$t \in RC.$$

Rejeita-se que a diferença das notas seja nula. Ou seja, houve um aumento nas notas.

Resposta do exercício 12

$$H_0 : \mu_I - \mu_{II} = 10 \;\; \text{vs} \;\; H_0 : \mu_I - \mu_{II} > 10$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\overline{x_I} - \overline{x_{II}}) - (\mu_I - \mu_{II})}{\sqrt{(\sigma_I^2/n_I) + (\sigma_{II}^2/n_{II})}} \\ &= \frac{(162,5 - 155) - (10)}{\sqrt{(1/10) + (1/12)}} \\ &= -5,84 \end{aligned}$$

- $RC : \{t > t_c = 1,645\}$

$$\begin{aligned} p - valor = \alpha^* &= P(Z > z_{obs}) \\ &= P(Z > -5,84) \\ &= 0,999. \end{aligned}$$

Não rejeita-se H_0. Não há evidências de que a média do tipo I supere a do tipo II em pelo menos 10 unidades, ao nível de 5%.

Resposta do exercício 13

Primeiro, vamos testar a igualdade das variâncias populacionais. No entanto, note que temos apenas as variâncias amostrais, denotadas por S_A^2 e S_B^2. Podemos formular as hipóteses da seguinte forma:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_0 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases}$$

Sob a suposição de H_0 ser verdadeira, temos que o valor calculado é $F = S_A^2/S_B^2 \sim F(n_A - 1, n_B - 1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} F &= S_A^2/S_B^2 \\ &= 1,168/0,896 \\ &= 1,304. \end{aligned}$$

Considerando $\alpha = 0,05$, temos que os valores críticos da distribuição $F_{(15,15)}$ são $f_1 = 0,349$ e $f_2 = 2,862$, isto é, a região crítica é dada por $RC = \{f \in R^+ : f < 0,349 \cup f > 2,862\}$. Como

F está fora da região crítica, não rejeitamos a hipótese nula de que as variâncias não diferem ao nível de significância de 5%.

Para ambas as populações, temos a mesma variância. Suponha que temos o interesse em testar as hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_0 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

Vamos considerar que $\bar{d} = \bar{x}_A - \bar{x}_B$. A variância comum combinada é dada por

$$S_c^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)}.$$

Então,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\bar{D} - (\mu_A - \mu_B)}{S_c\sqrt{1/n_A + 1/n_B}} \\ &= \frac{(1,888 - 1,413)}{1,016\sqrt{1/16 + 1/16}} \\ &= 1,322. \end{aligned}$$

Considerando que T possui uma distribuição t-Student com $n_A + n_B - 2$ graus de liberdade, a quantidade t_{tab} é obtida na tabela da distribuição t-Student. Então, fixando α, encontramos o valor de t_{tab} como $\alpha = P(T < -t_c \ \cup \ T > t_c|H_0)$, com região crítica dada por $RC = \{T \in \Re : T < -2,042 \ \cup \ T > 2,042\}$. Logo, concluímos que a hipótese H_0 não é rejeitada ao nível de significância de 5%, pois o valor T calculado não pertence a região crítica.

Resposta do exercício 14

Teste de hipótese para variância populacional:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_0 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases}$$

Sob a suposição de H_0 ser verdadeira, temos que o valor calculado é $F = S_B^2/S_A^2 \sim F(n_B - 1, n_A - 1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} F &= S_B^2/S_A^2 \\ &= 52/50 \\ &= 1,040. \end{aligned}$$

Considerando $\alpha = 0,05$, temos que os valores críticos da distribuição $F_{(14,11)}$ são $f_1 = 0,323$ e $f_2 = 3,359$, isto é, a região crítica é dada por $RC = \{f \in R^+ : f < 0,323 \cup f > 3,359\}$. Como F está fora da região crítica, não rejeitamos a hipótese nula de que as variâncias não diferem ao nível de significância de 5%.

Teste de hipótese para média populacional:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_0 : \mu_A < \mu_B \end{cases}$$

Vamos considerar que $\bar{d} = \bar{x}_A - \bar{x}_B$. A variância comum combinada é dada por

$$\begin{aligned} S_c^2 &= \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)} \\ &= \frac{(12 - 1)50 + (15 - 1)52}{(12 - 1) + (15 - 1)} \\ &= 51,12. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\bar{D} - (\mu_A - \mu_B)}{S_c\sqrt{1/n_A + 1/n_B}} \\ &= \frac{(68 - 76)}{7,15\sqrt{1/12 + 1/15}} \\ &= -2,89. \end{aligned}$$

Considerando que T possui uma distribuição t-Student com n_A+n_B-2 graus de liberdade, a quantidade t_{tab} é obtida na tabela da distribuição t-Student. Então, fixando α, encontramos o valor de t_{tab} como $\alpha = P(T < -t_{tab}|H_0)$, com região crítica dada por $RC = \{T \in \Re : T < -1,708\}$. Logo, concluímos que a hipótese H_0 é rejeitada ao nível de significância de 5%, pois o valor T calculado pertence a região crítica.

Resposta do exercício 15

Teste de hipótese para variância populacional:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_0 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases}$$

Sob a suposição de H_0 ser verdadeira, temos que o valor calculado é $F_c = S_B^2/S_A^2 \sim F(n_B - 1, n_A - 1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} F_c &= S_B^2/S_A^2 \\ &= 210,8/84,3 \\ &= 2,583. \end{aligned}$$

Considerando $\alpha = 0,1$, temos que os valores críticos da distribuição $F_{(19,14)}$ são $f_1 = 0,443$ e $f_2 = 2,400$, isto é, a região crítica é dada por $RC = \{f \in R^+ : f < 0,443 \cup f > 2,400\}$. Como F pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese nula de que as variâncias não diferem ao nível de significância de 10%.

Teste de hipótese para média populacional:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_0 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

Vamos considerar que $\bar{d} = \bar{x}_A - \bar{x}_B$.

$$\begin{aligned} T &= \frac{\bar{D} - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{S_A^2/n_A + S_B^2/n_B}} \\ &= \frac{(70,5 - 84,3)}{\sqrt{81,6/15 + 210,8/20}} \\ &= -3,452. \end{aligned}$$

Como as variâncias são distintas, T possui uma distribuição t-Student com ν graus de liberdade dado por

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{(W_A + W_B)^2}{W_A^2/(n_A - 1) + W_B^2/(n_B - 1)} \\ &= \frac{(5,44 + 10,54)^2}{5,44^2/(15-1) + 10,54^2/(20-1)} \\ &= 32,077. \end{aligned}$$

sendo, $W_A = S_A^2/n_A = 81,6/15 = 5,44$ e $W_A = S_B^2/n_B = 210,8/20 = 10.54$

A quantidade t_c é obtida na tabela da distribuição t-Student. Então, fixando α, encontramos o valor de t_c para 30 graus de liberdade como $\alpha = P(T < -t_c \cup T > t_c | H_0)$, com região crítica dada por $RC = \{T \in \Re : T < -1,697 \cup T > 1,697\}$. Logo, concluímos que a hipótese H_0 é rejeitada ao nível de significância de 10%, pois o valor T calculado pertence a região crítica.