Cálculo 1 - HONORS - CM311

Limites Infinitos e Regra de L'Hopital

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Relembrando

- Definimos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- Todas as propriedades de $\lim_{x \to a}$, também valem para $\lim_{x \to \pm\infty}$.

Proposição 1.1.

Vale $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{u \to 0^+} f\left(\frac{1}{u}\right) = L.$

Exemplo 1.2.

Calcule

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$.

b) $\lim_{x \to +\infty} 2x - \sqrt{x^2 + 3}$.

- Podemos também dar significado para os símbolos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$:

Relembrando

- Definimos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ quando
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$
- Todas as propriedades de $\lim_{x \to a}$, também valem para $\lim_{x \to \pm\infty}$.

Proposição 1.1.

Vale $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{u \to 0^+} f\left(\frac{1}{u}\right) = L.$

Exemplo 1.2.

Calcule

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}.$ b) $\lim_{x \to +\infty} 2x - \sqrt{x^2 + 3}.$

- Podemos também dar significado para os símbolos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$:

Relembrando

- Definimos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ quando

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- Todas as propriedades de $\lim_{x\to a}$, também valem para $\lim_{x\to\pm\infty}$.

Proposição 1.1.

Vale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{u\to 0^+} f\left(\frac{1}{u}\right) = L.$

Exemplo 1.2.

Calcule

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+3}{3x^2+x+1}$. b) $\lim_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x^2+3}$.

- Podemos também dar significado para os símbolos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

Relembrando

- Definimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ quando
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$
- Todas as propriedades de $\lim\limits_{x \to a}$, também valem para $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$.

Proposição 1.1.

Vale $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{u \to 0^+} f\left(\dfrac{1}{u}\right) = L.$

Exemplo 1.2.

Calcule

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - \sqrt{x^2 + 3}$.

- Podemos também dar significado para os símbolos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$:

Relembrando

- Definimos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ quando

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0,\ \text{tal que se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- Todas as propriedades de $\lim_{x\to a}$, também valem para $\lim_{x\to\pm\infty}$.

Proposição 1.1.

Vale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{u\to0^+} f\left(\frac{1}{u}\right) = L.$

Exemplo 1.2.

Calcule

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$.

b) $\lim_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x^2 + 3}$.

- Podemos também dar significado para os símbolos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

Limites Infinitos no Infinito

- Definimos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ quando
$$\forall M > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } f(x) > M.$$
- Analogamente podemos definir $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Proposição 2.1.

Vale $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{u \to 0^+} f\left(\frac{1}{u}\right) = +\infty$.

- As manipulações anteriores com $\pm\infty$ valem também nestes casos.

Exemplo 2.2.

Mostre que $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Limites Infinitos no Infinito

- Definimos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ quando
$$\forall M > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } f(x) > M.$$
- Analogamente podemos definir $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Proposição 2.1.

Vale $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{u \to 0^+} f\left(\frac{1}{u}\right) = +\infty.$

- As manipulações anteriores com $\pm\infty$ valem também nestes casos.

Exemplo 2.2.

Mostre que $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Limites Infinitos no Infinito

- Definimos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ quando
$$\forall M > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } f(x) > M.$$
- Analogamente podemos definir $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Proposição 2.1.

Vale $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{u \to 0^+} f\left(\frac{1}{u}\right) = +\infty$.

- As manipulações anteriores com $\pm\infty$ valem também nestes casos.

Exemplo 2.2.

Mostre que $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Limites Infinitos no Infinito

- Definimos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ quando
$$\forall M > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } f(x) > M.$$
- Analogamente podemos definir $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Proposição 2.1.

Vale $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{u \to 0^+} f\left(\frac{1}{u}\right) = +\infty.$

- As manipulações anteriores com $\pm\infty$ valem também nestes casos.

Exemplo 2.2.

Mostre que $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Limites Infinitos no Infinito

Exemplo 2.3.

Calcule

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x + 1.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \sqrt{3x^3+2}.$

Proposição 2.4.

Sendo $a \in \mathbb{R}$ defina α como $\alpha = a, a^+, a^-, +\infty$ ou $-\infty$. Vale

a) *Se* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty$, *então* $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$

b) *Se* $f(x) > 0$ *perto de* α, *e* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$, *então* $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty.$

Exemplo 2.3.

Calcule

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + 1$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{3x^3 + 2}$.

Proposição 2.4.

Sendo $a \in \mathbb{R}$ *defina* α *como* $\alpha = a, a^+, a^-, +\infty$ *ou* $-\infty$. *Vale*

a) *Se* $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \pm\infty$, *então* $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

b) *Se* $f(x) > 0$ *perto de* α, *e* $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = 0$, *então* $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Teorema do Valor Médio de Cauchy

Teorema 3.1 (TVMC).

Sejam f, g contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Existe $c \in (a, b)$, tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c),$$

ou

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ se } g(b) \neq g(a) \text{ e } g'(c) \neq 0.$$

- O TVM é um caso particular deste com $g(x) = x$.

Prova: Exercício.

Defina a função $h(x) = (f(b) - f(a)).g(x) - (g(b) - g(a)).f(x)$ e use o Teorema de Rolle em h... □

- Interpretação geométrica?
- **Curvas paramétricas** no plano!

Teorema do Valor Médio de Cauchy

Teorema 3.1 (TVMC).

Sejam f, g contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Existe $c \in (a, b)$, tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c),$$

ou

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ se } g(b) \neq g(a) \text{ e } g'(c) \neq 0.$$

- O TVM é um caso particular deste com $g(x) = x$.

Prova: Exercício.

Defina a função $h(x) = (f(b) - f(a)).g(x) - (g(b) - g(a)).f(x)$ e use o Teorema de Rolle em h... □

- Interpretação geométrica?
- **Curvas paramétricas** no plano!

Teorema do Valor Médio de Cauchy

Teorema 3.1 (TVMC).

Sejam f, g contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Existe $c \in (a, b)$, tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c),$$

ou

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ se } g(b) \neq g(a) \text{ e } g'(c) \neq 0.$$

- O TVM é um caso particular deste com $g(x) = x$.

Prova: Exercício.

Defina a função $h(x) = (f(b) - f(a)).g(x) - (g(b) - g(a)).f(x)$ e use o Teorema de Rolle em h... □

- Interpretação geométrica?
- **Curvas paramétricas** no plano!

Teorema do Valor Médio de Cauchy

Teorema 3.1 (TVMC).

Sejam f, g contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Existe $c \in (a, b)$, tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c),$$

ou

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ se } g(b) \neq g(a) \text{ e } g'(c) \neq 0.$$

- O TVM é um caso particular deste com $g(x) = x$.

Prova: Exercício.

Defina a função $h(x) = (f(b) - f(a)).g(x) - (g(b) - g(a)).f(x)$ e use o Teorema de Rolle em h... $\square$

- Interpretação geométrica?
- **Curvas paramétricas** no plano!

Teorema do Valor Médio de Cauchy

Teorema 3.1 (TVMC).

Sejam f, g contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Existe $c \in (a, b)$, tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c),$$

ou

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ se } g(b) \neq g(a) \text{ e } g'(c) \neq 0.$$

- O TVM é um caso particular deste com $g(x) = x$.

Prova: Exercício.

Defina a função $h(x) = (f(b) - f(a)).g(x) - (g(b) - g(a)).f(x)$ e use o Teorema de Rolle em h... □

- Interpretação geométrica?
- **Curvas paramétricas** no plano!

Curvas Paramétricas no Plano

Definição 3.2.

Uma curva paramétrica no plano é uma função $\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Podemos representar $\vec{r}$ como

$$\vec{r}(t) = (g(t), f(t)),$$

onde f, g são funções reais definidas em I.

Exemplo 3.3.

Vamos descrever a curva paramétrica $\vec{r}(t) = (t, t^2)$.

Exemplo 3.4.

Vamos descrever a curva paramétrica $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Curvas Paramétricas no Plano

Definição 3.2.

Uma curva paramétrica no plano é uma função $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Podemos representar $\vec{r}$ como

$$\vec{r}(t) = (g(t), f(t)),$$

onde f, g são funções reais definidas em I.

Exemplo 3.3.

Vamos descrever a curva paramétrica $\vec{r}(t) = (t, t^2)$.

Exemplo 3.4.

Vamos descrever a curva paramétrica $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Curvas Paramétricas no Plano

Definição 3.2.

Uma curva paramétrica no plano é uma função $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Podemos representar $\vec{r}$ como

$$\vec{r}(t) = (g(t), f(t)),$$

onde f, g são funções reais definidas em I.

Exemplo 3.3.

Vamos descrever a curva paramétrica $\vec{r}(t) = (t, t^2)$.

Exemplo 3.4.

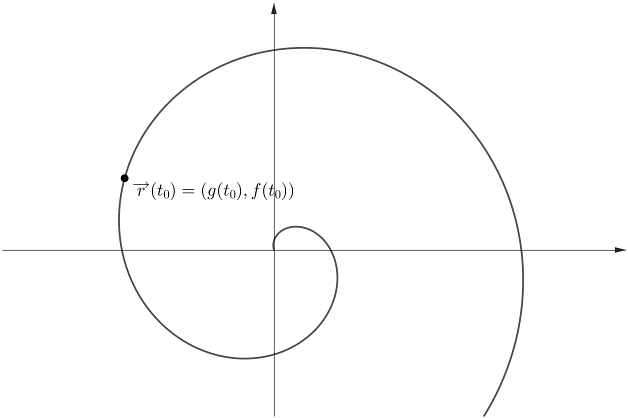
Vamos descrever a curva paramétrica $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Reta Tangente e Vetor Velocidade

- Sendo $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$ uma curva paramétrica com f, g deriváveis, a inclinação da reta tangente à $\vec{r}(t_0)$ é dada por $\dfrac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$.
- Outra maneira: vetor velocidade $\vec{r}'(t_0) = (g'(t_0), f'(t_0))$.

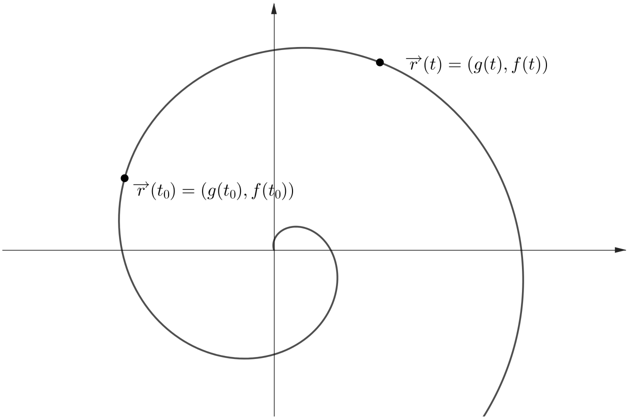
Reta Tangente e Vetor Velocidade

- Sendo $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$ uma curva paramétrica com f, g deriváveis, a inclinação da reta tangente à $\vec{r}(t_0)$ é dada por $\dfrac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$.
- Outra maneira: vetor velocidade $\vec{r}'(t_0) = (g'(t_0), f'(t_0))$.



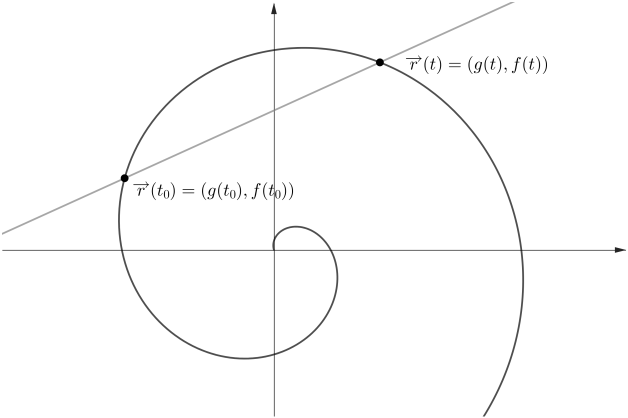
Reta Tangente e Vetor Velocidade

- Sendo $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$ uma curva paramétrica com f, g deriváveis, a inclinação da reta tangente à $\vec{r}(t_0)$ é dada por $\dfrac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$.
- Outra maneira: vetor velocidade $\vec{r}'(t_0) = (g'(t_0), f'(t_0))$.



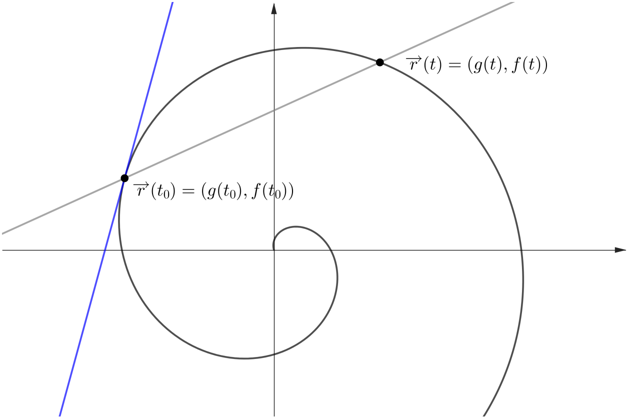
Reta Tangente e Vetor Velocidade

- Sendo $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$ uma curva paramétrica com f, g deriváveis, a inclinação da reta tangente à $\vec{r}(t_0)$ é dada por $\dfrac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$.
- Outra maneira: vetor velocidade $\vec{r}'(t_0) = (g'(t_0), f'(t_0))$.



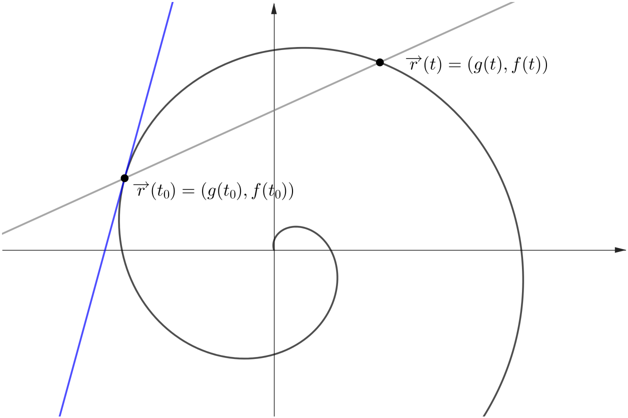
Reta Tangente e Vetor Velocidade

- Sendo $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$ uma curva paramétrica com f, g deriváveis, a inclinação da reta tangente à $\vec{r}(t_0)$ é dada por $\dfrac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$.
- Outra maneira: vetor velocidade $\vec{r}\,'(t_0) = (g'(t_0), f'(t_0))$.



Reta Tangente e Vetor Velocidade

- Sendo $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$ uma curva paramétrica com f, g deriváveis, a inclinação da reta tangente à $\vec{r}(t_0)$ é dada por $\dfrac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$.
- Outra maneira: vetor velocidade $\vec{r}\,'(t_0) = (g'(t_0), f'(t_0))$.



Intuição Geométrica TVMC

- Sendo f, g funções defina $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$.
- A existência de $c \in (a, b)$ para que seja satisfeita a equação abaixo, pode ser interpretada no traço da curva,
$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

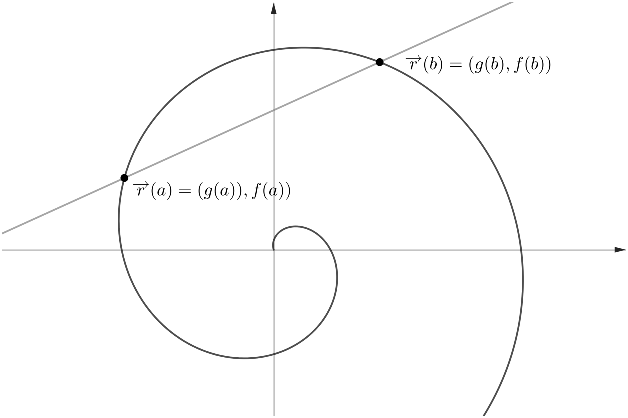
Intuição Geométrica TVMC

- Sendo f, g funções defina $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$.
- A existência de $c \in (a, b)$ para que seja satisfeita a equação abaixo, pode ser interpretada no traço da curva,
$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Intuição Geométrica TVMC

- Sendo f, g funções defina $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$.
- A existência de $c \in (a, b)$ para que seja satisfeita a equação abaixo, pode ser interpretada no traço da curva,

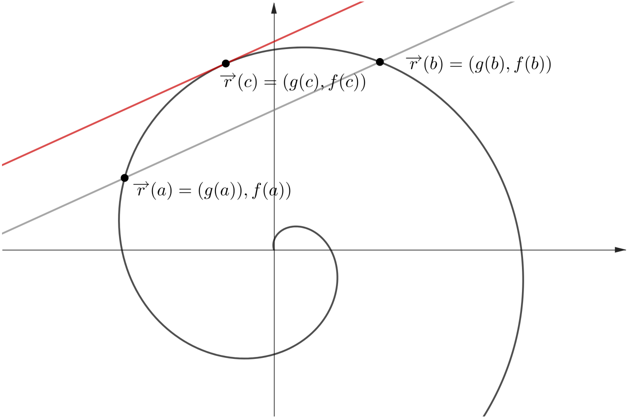
$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$



Intuição Geométrica TVMC

- Sendo f, g funções defina $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$.
- A existência de $c \in (a, b)$ para que seja satisfeita a equação abaixo, pode ser interpretada no traço da curva,

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$



Regra de L'Hôpital

Teorema 4.1 (Regra de L'Hôpital).

Sejam f, g funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, e que $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ exista. Então $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe e

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação 4.2.

O fato de $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existir significa que

- As derivadas $f'(x), g'(x)$ existem para x suficientemente perto de a, exceto possivelmente em $x = a$.
- Temos que $g'(x) \neq 0$ para x suficientemente perto de a, exceto possivelmente em $x = a$.

Regra de L'Hôpital

Teorema 4.1 (Regra de L'Hôpital).

Sejam f, g funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, *e que* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *exista. Então* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *existe e*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação 4.2.

O fato de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existir significa que

- As derivadas $f'(x), g'(x)$ existem para x suficientemente perto de a, exceto possivelmente em $x = a$.
- Temos que $g'(x) \neq 0$ para x suficientemente perto de a, exceto possivelmente em $x = a$.

Observações

- A regra de L'Hôpital funciona nos casos que $x \to a^{\pm}$ e $x \to \pm\infty$.
- Vale também para indeterminações do tipo $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 4.3.

Calcule os limites abaixo

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Observações

- A regra de L'Hôpital funciona nos casos que $x \to a^{\pm}$ e $x \to \pm\infty$.
- Vale também para indeterminações do tipo $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 4.3.

Calcule os limites abaixo

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Observações

- A regra de L'Hôpital funciona nos casos que $x \to a^{\pm}$ e $x \to \pm\infty$.
- Vale também para indeterminações do tipo $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 4.3.

Calcule os limites abaixo

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.