Cálculo 1 - HONORS - CM311

Concavidade e Limites no Infinito

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Projeto Honors

Relembrando

- Extremos locais: máximos e mínimos locais.
- Pontos críticos: pontos onde a derivada não existe ou onde a derivada é igual à zero.
- Todo extremo local é um ponto crítico.
- A volta não vale.

Proposição 1.1.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo.

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.*

Corolário 1.2.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Temos que x_0 é ponto crítico de f se, e somente se, a derivada f' muda de sinal ao passar por x_0.

Relembrando

- Extremos locais: máximos e mínimos locais.
- Pontos críticos: pontos onde a derivada não existe ou onde a derivada é igual à zero.
- Todo extremo local é um ponto crítico.
- A volta não vale.

Proposição 1.1.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo.

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.*

Corolário 1.2.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Temos que x_0 é ponto crítico de f se, e somente se, a derivada f' muda de sinal ao passar por x_0.

Relembrando

- Extremos locais: máximos e mínimos locais.
- Pontos críticos: pontos onde a derivada não existe ou onde a derivada é igual à zero.
- Todo extremo local é um ponto crítico.
- A volta não vale.

Proposição 1.1.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo.

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.*

Corolário 1.2.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Temos que x_0 é ponto crítico de f se, e somente se, a derivada f' muda de sinal ao passar por x_0.

Relembrando

- Extremos locais: máximos e mínimos locais.
- Pontos críticos: pontos onde a derivada não existe ou onde a derivada é igual à zero.
- Todo extremo local é um ponto crítico.
- A volta não vale.

Proposição 1.1.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo.

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.*

Corolário 1.2.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Temos que x_0 é ponto crítico de f se, e somente se, a derivada f' muda de sinal ao passar por x_0.

Relembrando

- Extremos locais: máximos e mínimos locais.
- Pontos críticos: pontos onde a derivada não existe ou onde a derivada é igual à zero.
- Todo extremo local é um ponto crítico.
- A volta não vale.

Proposição 1.1.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo.

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.*

Corolário 1.2.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Temos que x_0 é ponto crítico de f se, e somente se, a derivada f' muda de sinal ao passar por x_0.

Relembrando

- Extremos locais: máximos e mínimos locais.
- Pontos críticos: pontos onde a derivada não existe ou onde a derivada é igual à zero.
- Todo extremo local é um ponto crítico.
- A volta não vale.

Proposição 1.1.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo.

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.*

Corolário 1.2.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Temos que x_0 é ponto crítico de f se, e somente se, a derivada f' muda de sinal ao passar por x_0.

Concavidade

- Considere uma função derivável crescente em um intervalo.

- Podemos caracterizar em termos das retas tangentes

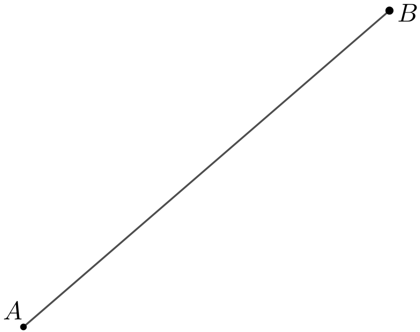
Concavidade

- Considere uma função derivável crescente em um intervalo.

- Podemos caracterizar em termos das retas tangentes

Concavidade

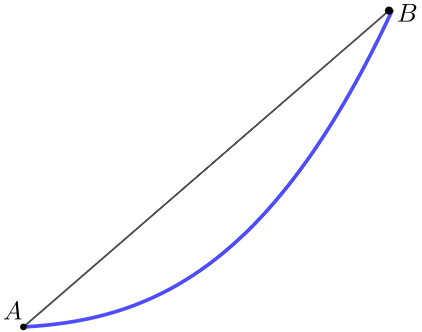
- Considere uma função derivável crescente em um intervalo.



- Podemos caracterizar em termos das retas tangentes

Concavidade

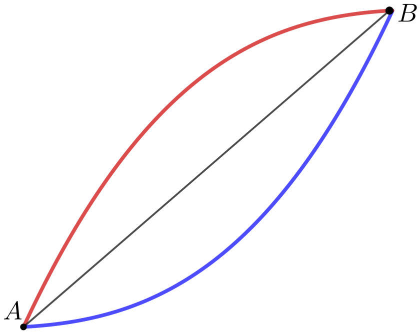
- Considere uma função derivável crescente em um intervalo.



- Podemos caracterizar em termos das retas tangentes

Concavidade

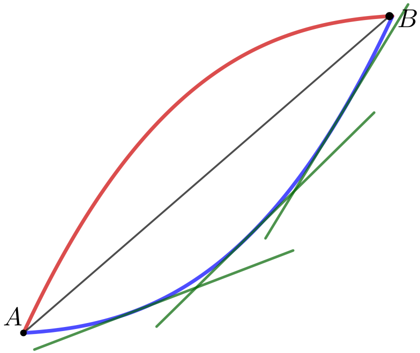
- Considere uma função derivável crescente em um intervalo.



- Podemos caracterizar em termos das retas tangentes

Concavidade

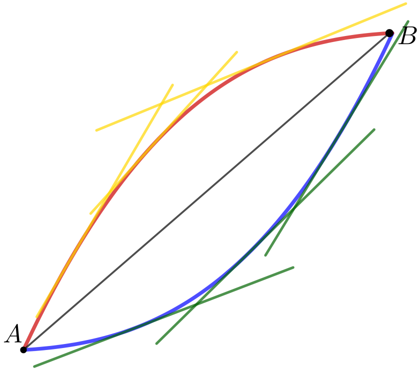
- Considere uma função derivável crescente em um intervalo.



- Podemos caracterizar em termos das retas tangentes

Concavidade

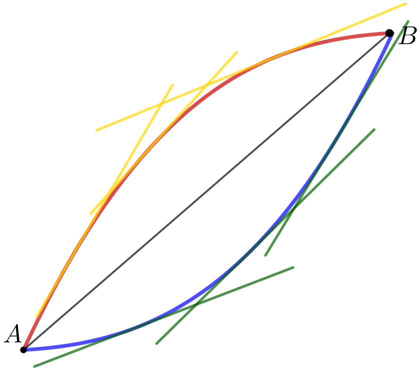
- Considere uma função derivável crescente em um intervalo.



- Podemos caracterizar em termos das retas tangentes

Concavidade

- Considere uma função derivável crescente em um intervalo.



- Podemos caracterizar em termos das retas tangentes

Concavidade

Definição 1.3.

Suponha que f seja derivável no intervalo aberto I. Para cada $p \in I$, considere a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(p, f(p))$,

$$r_p(x) = f(p) + f'(p).(x - p).$$

Dizemos que:

- f **tem concavidade para cima em** I se $f(x) > r_p(x)$ para todo $x, p \in I$, $x \neq p$.
- f **tem concavidade para baixo em** I se $f(x) < r_p(x)$ para todo $x, p \in I$, $x \neq p$.

Definição 1.4.

Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, dizemos que x_0 **é um ponto de inflexão de** f, se a concavidade de f mudar ao passar pelo ponto x_0.

Concavidade

Definição 1.3.

Suponha que f seja derivável no intervalo aberto I. Para cada $p \in I$, considere a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(p, f(p))$,

$$r_p(x) = f(p) + f'(p).(x - p).$$

Dizemos que:

- f **tem concavidade para cima em** I se $f(x) > r_p(x)$ para todo $x, p \in I$, $x \neq p$.
- f **tem concavidade para baixo em** I se $f(x) < r_p(x)$ para todo $x, p \in I$, $x \neq p$.

Definição 1.4.

Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, dizemos que x_0 **é um ponto de inflexão de** f, se a concavidade de f mudar ao passar pelo ponto x_0.

Concavidade

Definição 1.3.

Suponha que f seja derivável no intervalo aberto I. Para cada $p \in I$, considere a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(p, f(p))$,

$$r_p(x) = f(p) + f'(p).(x - p).$$

Dizemos que:

- f **tem concavidade para cima em** I se $f(x) > r_p(x)$ para todo $x, p \in I$, $x \neq p$.
- f **tem concavidade para baixo em** I se $f(x) < r_p(x)$ para todo $x, p \in I$, $x \neq p$.

Definição 1.4.

Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, dizemos que x_0 **é um ponto de inflexão de** f, se a concavidade de f mudar ao passar pelo ponto x_0.

Concavidade

Teorema 1.5.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável em I.

- *Se $f''(x) > 0$ em I, então f é concava para cima em I.*
- *Se $f''(x) < 0$ em I, então f é concava para baixo em I.*

Exemplo 1.6.

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.

Exemplo 1.7.

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = e^x/x^2$.

Concavidade

Teorema 1.5.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável em I.

- *Se $f''(x) > 0$ em I, então f é concava para cima em I.*
- *Se $f''(x) < 0$ em I, então f é concava para baixo em I.*

Exemplo 1.6.

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.

Exemplo 1.7.

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = e^x/x^2$.

Teorema 1.5.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável em I.

- *Se $f''(x) > 0$ em I, então f é concava para cima em I.*
- *Se $f''(x) < 0$ em I, então f é concava para baixo em I.*

Exemplo 1.6.

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.

Exemplo 1.7.

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = e^x/x^2$.

Limites no Infinito

- Podemos estender o conceito de limite $\lim_{x \to a} f(x)$ da seguinte forma:
- Ao invés de estudar o comportamento da função perto do ponto a, queremos saber como ela se comporta para valores de x arbitrariamente grandes ($x \to +\infty$), e também para valores arbitrariamente pequenos ($x \to -\infty$).

Definição 2.1.

Considere uma função f que esteja definida em $(r, +\infty)$, com $r \in \mathbb{R}$. Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que o limite de f quando x tende à mais infinito é igual à L se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em símbolos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

- Analogamente podemos definir $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Limites no Infinito

- Podemos estender o conceito de limite $\lim_{x \to a} f(x)$ da seguinte forma:
- Ao invés de estudar o comportamento da função perto do ponto a, queremos saber como ela se comporta para valores de x arbitrariamente grandes ($x \to +\infty$), e também para valores arbitrariamente pequenos ($x \to -\infty$).

Definição 2.1.

Considere uma função f que esteja definida em $(r, +\infty)$, com $r \in \mathbb{R}$. Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que o limite de f quando x tende à mais infinito é igual à L se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em símbolos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

- Analogamente podemos definir $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Limites no Infinito

- Podemos estender o conceito de limite $\lim_{x \to a} f(x)$ da seguinte forma:
- Ao invés de estudar o comportamento da função perto do ponto a, queremos saber como ela se comporta para valores de x arbitrariamente grandes ($x \to +\infty$), e também para valores arbitrariamente pequenos ($x \to -\infty$).

Definição 2.1.

Considere uma função f que esteja definida em $(r, +\infty)$, com $r \in \mathbb{R}$. Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que o limite de f quando x tende à mais infinito é igual à L se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em símbolos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

- Analogamente podemos definir $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

- Podemos estender o conceito de limite $\lim_{x \to a} f(x)$ da seguinte forma:
- Ao invés de estudar o comportamento da função perto do ponto a, queremos saber como ela se comporta para valores de x arbitrariamente grandes $(x \to +\infty)$, e também para valores arbitrariamente pequenos $(x \to -\infty)$.

Definição 2.1.

Considere uma função f que esteja definida em $(r, +\infty)$, com $r \in \mathbb{R}$. Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que o limite de f quando x tende à mais infinito é igual à L se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tal que se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em símbolos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

- Analogamente podemos definir $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Limites no Infinito

- Todas as propriedades de $\lim\limits_{x\to a}$, também valem para $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$.

Propriedade 2.2.

Sejam f e g duas funções definidas em $(r;+\infty)$. Suponha que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = M.$$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} c = c,\ c\in\mathbb{R}.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = L+M.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-g(x)) = L-M.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x).g(x)) = L.M.$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L}{M},\ M\neq 0.$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^n = L^n,\ n\in\mathbb{N}.$

Proposição 2.3.

Vale $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{u}\right) = L.$

Limites no Infinito

- Todas as propriedades de $\lim_{x\to a}$, também valem para $\lim_{x\to\pm\infty}$.

Propriedade 2.2.

Sejam f e g duas funções definidas em $(r; +\infty)$. Suponha que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = M.$$

a) $\lim_{x\to+\infty} c = c,\ c \in \mathbb{R}.$

b) $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = L + M.$

c) $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = L - M.$

d) $\lim_{x\to+\infty} (f(x).g(x)) = L.M.$

e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M},\ M \neq 0.$

f) $\lim_{x\to+\infty} (f(x))^n = L^n,\ n \in \mathbb{N}.$

Proposição 2.3.

Vale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{u\to 0^+} f\left(\frac{1}{u}\right) = L.$

Limites no Infinito

- Todas as propriedades de $\lim\limits_{x\to a}$, também valem para $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$.

Propriedade 2.2.

Sejam f e g duas funções definidas em $(r;+\infty)$. Suponha que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = M.$$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} c = c,\ c \in \mathbb{R}.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = L + M.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-g(x)) = L - M.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x).g(x)) = L.M.$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L}{M},\ M \neq 0.$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^n = L^n,\ n \in \mathbb{N}.$

Proposição 2.3.

Vale $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{u\to0^+} f\left(\dfrac{1}{u}\right) = L.$

Limites no Infinito

- Todas as propriedades de $\lim\limits_{x\to a}$, também valem para $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$.

Propriedade 2.2.

Sejam f e g duas funções definidas em $(r;+\infty)$. Suponha que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = M.$$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} c = c,\ c\in\mathbb{R}.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = L+M.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-g(x)) = L-M.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x).g(x)) = L.M.$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L}{M},\ M\neq 0.$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^n = L^n,\ n\in\mathbb{N}.$

Proposição 2.3.

Vale $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{u}\right) = L.$

Limites Infinitos no Infinito

Exemplo 2.4.

Mostre que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Exemplo 2.5.

Calcule

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{3x^2+x+1}$.

b) $\lim_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{x^2+3}$.

Exemplo 2.4.

Mostre que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Exemplo 2.5.

Calcule

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$.

b) $\lim_{x \to +\infty} 2x - \sqrt{x^2 + 3}$.