CM311 - Cálculo 1
Honors - 1sem2024
Prof. Diego Otero
Lista de Exercícios 3

Problemas

1 Mais Derivadas

1. Determine a 2a derivada das funções abaixo

   a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

   b) $f(x) = \cos x . \operatorname{sen} x$.

   c) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

   d) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

2. Determine $f^{(2024)}(x)$ para as funções abaixo

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   b) $f(x) = x^{2025}$.

   c) $f(x) = \sqrt{x}$.

   d) $f(x) = \cos x . \operatorname{sen} x$.

3. Determine $f'(x)$:

   a) $f(x) = (3x^2+1)^{(2024)}$.

   b) $f(x) = \cos 3x$.

   c) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$.

   d) $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$.

   e) $f(x) = \sqrt[3]{a+bx^3}$.

   f) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg}(\frac{1}{x})$.

   g) $f(x) = x^4(1-2x^3)^2$.

   h) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$.

   i) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{x}$.

   j) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$.

   k) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{sen} x))$.

   l) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$.

   m) $f(x) = \operatorname{sen}^2((x + \operatorname{sen} x)^2)$.

   n) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x^2$.

4. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e seja $f(x) = xg(x^2)$. Faça o que se pede

   a) Mostre que $f'(x) = g(x^2) + 2x^2g'(x^2)$.

   b) Calcule $f'(1)$ supondo que $g(1) = 4$ e $g'(1) = 2$.

5. Considere a função $f(x) = x|x|$. Faça o que se pede:

   a) Mostre que f é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$.

   b) Qual é o valor de $f'(0)$?

   c) A função f é duas vezes derivável? Em caso negativo, em quais pontos f não é duas vezes derivável?

6. Seja g derivável tal que $g(2) = 2$ e $g'(2) = 2$. Calcule $h'(2)$, onde $h(x) = g(g(g(x)))$.

7. A reta tangente à curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ no ponto $(a, b), a, b > 0$ intersecta os eixos x e y nos pontos P e Q, respectivamente. Mostre que a distância entre P e Q não depende de (a, b).

8. Sendo $0 < \beta < 1$, mostre que se f satisfaz $|f(x)| \geq |x|^\beta$ e $f(0) = 0$ então f não é derivável em 0.

9. Suponha que $f(a) = g(a) = h(a)$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x e que $f'(a) = g'(a)$. Prove que g é derivável em a e que $f'(a) = g'(a) = h'(a)$. A conclusão é válida se omitirmos $f(a) = g(a) = h(a)$?

10. Encontre f' em função de g':

    (a) $f(x) = g(x + g(x))$.

    (b) $f(x) = g(x.g(a))$.

    (c) $f(x) = g(a)(x - a)$.

    (d) $f(x + 3) = g(x^2)$.

11. Sejam f, g, h funções deriváveis. Encontre uma expressão para a derivada das funções abaixo:

    (a) $(f.g.h)(x)$.

    (b) $(f \circ g \circ h)(x)$.

12. Mostre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen}^n(x)\cos(xn)) = n \operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos((n+1)x)$.

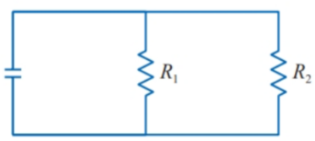
13. Se uma bola de neve derrete de forma que a área de sua superfície decresce a uma taxa de 1 cm^3/min, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10 cm. Aqui, $A = 4\pi r^2$.

14. Ao meio-dia, o navio A está a 150 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o leste a 35 km/h e o navio B está navegando para norte a 25 km/h. Quão rápido a distância entre os navios está variando às 16h?

15. A altura de um triângulo está aumentando a uma taxa de 1 cm/min, enquanto a área do triângulo está aumentando a uma taxa de 2 cm^2/min. A que taxa a base do triângulo está variando quando a altura for 10 cm e a área for 100 cm^2?

16. A Lei de Boyle afirma que, quando uma amostra de gás está sendo comprimida a uma temperatura constante, a pressão P e o volume V satisfazem a equação $PV = C$, em que C é uma constante. Suponha que, em certo momento, o volume seja de 600 cm^3, a pressão de 150 kPa, e a pressão cresça a uma taxa de 20 kPa/min. A que taxa está decrescendo o volume nesse instante?

17. Se dois resistores com resistências $R1$ e $R2$ estão conectados em paralelo, então a resistência total R, medida em ohms (Ω), é dada por $\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$. Se $R1$ e $R2$ estão aumentando a taxas de 0.3 Ω/s e 0.2 Ω/s, respectivamente, quão rápido R está variando quando $R1 = 80\Omega$ e $R2 = 100\Omega$?

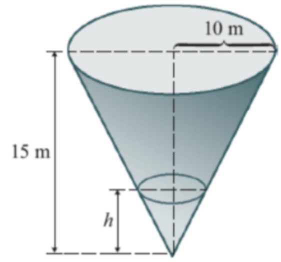


18. O raio r de uma esfera está variando, com o tempo, a uma taxa constante de 5 m/s. Com que taxa estará variando o volume da esfera no instante em que $r = 2$ m? Aqui, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

19. Ar está sendo bombeado para um balão esférico de modo que seu volume aumenta a uma taxa de 100 cm^3/s. Quão rápido o raio do balão está aumentando quando o diâmetro for 50 cm?

20. Uma escada de 8 m está encostada em uma parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/s, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a extremidade inferior estiver a 3 m da parede?

21. Enche-se um reservatório, cuja forma é a de um cone circular reto, de água a uma taxa de 0.1 m^3/s. O vértice está a 15 m do topo e o raio do topo é de 10 m. Com que velocidade o nível h da água está subindo no instante em que $h = 5$ m? Aqui, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



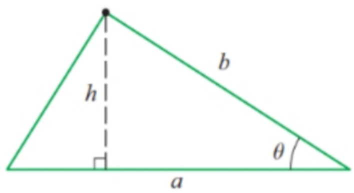
22. Cada lado de um quadrado está aumentando a uma taxa de 6 cm/s. A que taxa a área do quadrado está aumentando quando a área do quadrado for 16 cm^2?

23. O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de 8 cm/s e sua largura está aumentando numa taxa de 3 cm/s. Quando o comprimento for 20 cm e a largura for 10 cm, quão rápido a área do retângulo está aumentando?

24. Suponha que vaze petróleo por uma ruptura de um petroleiro e espalhe-se em um padrão circular. Se o raio do petróleo derramado crescer a uma taxa constante de 2 m/s, quão rápido a área do vazamento está crescendo quando o raio é igual a 30 m?

25. Um tanque cilíndrico com raio 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m^3/min. Quão rápido a altura da água está aumentando?

26. A área de um triângulo com lados de comprimentos a e b e ângulo interno θ é $A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$.



a) Se $a = 2$ cm e $b = 3$ cm e θ aumenta a uma taxa de 0.2 rad/min, quão rápido a área está crescendo quando $\theta = \frac{\pi}{3}$?

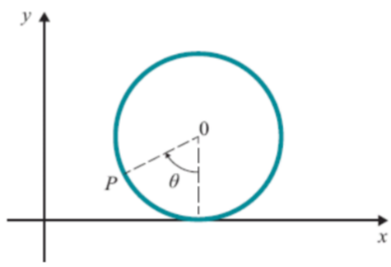
b) Se $a = 2$ cm, b cresce com uma taxa de 1.5 cm/min e θ cresce a uma taxa de 0.2 rad/min, quão rápido a área está crescendo quando $b = 3$ cm e $\theta = \frac{\pi}{3}$?

c) Se a cresce a uma taxa de 2.5 cm/min, b cresce a uma taxa de 1.5 cm/min e θ cresce a uma taxa de 0.2 rad/min, quão rápido a área está crescendo quando $a = 2$ cm, $b = 3$ cm e $\theta = \frac{\pi}{3}$?

27. O peso de uma astronauta, w (em newtons), está associado à sua altitude relativa à superfície da Terra, h (em quilômetros), por meio da equação $w = w_0 \frac{6370}{6370+h}^2$, onde w_0 é o peso do astronauta na superfície da Terra. Suponha que a astronauta pese 580 N na Terra e esteja a bordo de um foguete lançado na vertical e que viaja a uma velocidade de 19 km/s. Determine a taxa de variação de seu peso (em N/s) quando esta está a 60 km da superfície da Terra.

28. Suponha que, enquanto uma bola de neve rola, seu volume V aumente de modo que $\frac{dV}{dt}$ seja proporcional à área da superfície da bola no instante t. Mostre que o raio da bola r cresce a uma taxa constante.

29. O ponto $P = (x, y)$ está fixo na roda de raio 1m, que rola, sem escorregamento, sobre o eixo x. O ângulo θ está variando a uma taxa constante de 1 rad/s. Expresse as velocidades da abcissa e ordenada de P em função de θ.



30. A água flui a partir de um tanque cuja área de secção transversal é constante e igual a $50m^2$. Localizado na parte inferior do tanque, existe um orifício cuja secção é sempre $14m^2$. Inicialmente, a altura da água no tanque era de $20m$ e t segundos mais tarde, era dada pela a equação

$$2\sqrt{h} + \frac{1}{25}t - 2\sqrt{20} = 0,06t \quad \text{para } 0 \leq t \leq 50\sqrt{20}$$

Quão rápido a altura da água está diminuindo no instante em que ela vale $9m$?

31. Cristais de clorato de sódio são fáceis de crescer no formato de cubos permitindo uma solução de água e clorato de sódio evaporar vagarosamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x:

    (a) Calcule $\frac{dV}{dx}$ quando $x = 3mm$ e explique seu significado.

    (b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual a metade da área da superfície do cubo.

32. Uma pedra caiu dentro de um lago, produzindo uma ondulação circular que cresce a uma velocidade radial de $60m/s$. Encontre a taxa conforme a qual a área do círculo está crescendo depois de 1 segundo, 3 segundos e 5 segundos. O que você pode concluir?

33. A Lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão e do volume permanece constante: $PV = C$, onde C é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume é de $600cm^3$, a pressão é de $150kPa$ e a pressão cresce a uma taxa de $20kPa/min$. A que taxa está decrescendo o volume nesse instante?

34. Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um lago e colhida regularmente. Um modelo para a variação da população é dada pela equação:

$$\frac{dP}{dt} = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right) P(t) - \beta P(t)$$

    onde r_0 é a taxa de nascimento dos peixes (em %), P_c é a população máxima que o pequeno lago pode manter (capacidade de suporte) e β é a percentagem da população que é colhida.

    (a) Qual o valor de $\frac{dP}{dt}$ corresponde à população estável?

    (b) Se o pequeno lago pode manter 10000 peixes a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita é de 4%, encontre o nível estável da população.

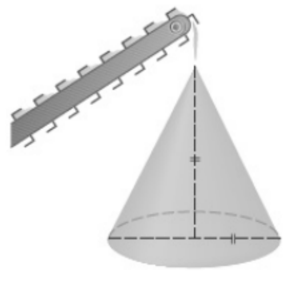
    (c) O que acontece se β é elevado a 5%?

35. Se uma bola de neve derrete de tal forma que sua área de superfície decresce a uma taxa de $1cm^2/min$, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é $10cm$.

36. Dois carros iniciam o movimento no mesmo ponto. Um viaja para o sul a $60km/h$ e o outro para oeste a $25km/h$. A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois?

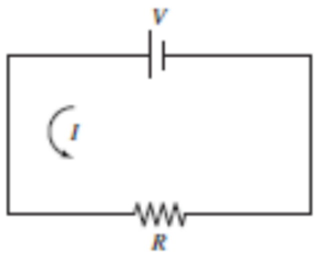
37. A água está vazando de um tanque cônico invertido a uma taxa de $10.000cm^3/min$. Ao mesmo tempo está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem $6m$ de altura e o diâmetro no topo é $4m$. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de $20cm/min$ quando a altura da água for $2m$, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.

38. Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de $30m^3/min$ formando uma pilha na forma de cone com diâmetro da base e da altura sempre iguais. Quão rápido está crescendo a altura da pilha, quando sua altura é de $10m$?



39. Uma escada com $10m$ de comprimento está apoiada contra uma parede vertical. Se a base da escada desliza afastando-se da parede a uma velocidade de $2m/s$. Quão rápido está variando o ângulo entre o topo da escada e a parede quando o ângulo é $\pi/4$?

40. (Circuito Elétrico) A tensão T em volts (V) em um circuito elétrico está relacionada com a corrente I em amperes (A) e a resistência R, em ohms pela equação de $T = IR$. Quando $T = 12$, $I = 2$, T está aumentando a uma taxa de $2V/seg$, e I está crescendo a uma taxa de $12A/seg$, a que taxa a resistência está mudando?



41. Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de $1,5m/s$. Um holofote localizado no chão a $6m$ do caminho é mantido focalizado no homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a $8m$ do ponto do caminho mais próximo da luz?

42. De um petroleiro quebrado vaza um grande volume V de óleo num mar calmo. Após a turbulência inicial ter acabado, o petrôleo se expande num contorno circular de raio r e espessura uniforme h, onde r cresce e h decresce de um modo determinado pela viscosidade e flutuabilidade do óleo. Experiências de laboratório sugerem que a espessura é inversamente propocional à raiz quadrada do tempo decorrido: $h = \sqrt{c}t$. Mostre que a taxa $\frac{dr}{dt}$ com que o petróleo se expande é inversamente proporcional a $t^{\frac{3}{4}}$.

43. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $p \in (a, b)$. Podemos mostrar que

$$f''(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) + f(p-h) - 2f(p)}{h^2} = f''(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+2h) - 2f(p+h) - f(p)}{h^2}.$$

Dê um exemplo em que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) + f(p-h) - 2f(p)}{h^2}$$

existe, mas $f''(p)$ não existe.