CM311 - Cálculo 1
Honors - 1sem2024
Prof. Diego Otero
Lista de Exercícios 5

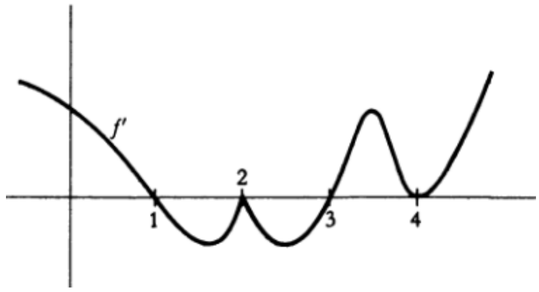
Problemas

1 Extremos

1. Encontre os valores extremos de f no intervalo indicado

   a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$, $[-2, 3]$.
   b) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, $[-2, 2]$.
   c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$, $[0, 3]$.
   d) $f(x) = x^{-2} \ln x$, $[\frac{1}{2}, 4]$.
   e) $f(x) = xe^{x/2}$, $[-3, 1]$.
   f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, $[0, 5]$.

2. A figura ao lado mostra o gráfico da derivada de f. Quais são os máximos e mínimos locais de f?



3. Faça um esboço do gráfico das funções abaixo

   a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
   b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.
   c) $f(x) = e^x - e^{3x}$.
   d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$.

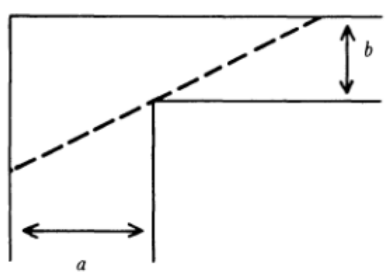
4. De todos os cilindros circulares retos com volume fixo V, qual deles tem a menor área superficial (contando a área lateral e as áreas superior e inferior).

5. Uma reta r passa pelo ponto $(1, 2)$ e intercepta os pontos $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$ com $a, b > 0$. Determine a reta r de modo que a distância entre A e B seja a menor possível.

6. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é
$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta},$$
onde μ é uma constante positiva chamada de *coeficiente de atrito*, g é a aceleração da gravidade e $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Mostre que F é minimizada quando $\operatorname{tg} \theta = \mu$.

7. Um triângulo retângulo com hipotenusa medindo a é rotacionado ao redor de um de seus catetos para gerar um cone circular. Qual é o maior volume possível do cone gerado desta maneira?

8. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um corredor de largura b, conforme mostra a figura. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada ao longo do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual é o comprimento da maior barra que pode passar pela esquina?



9. Uma caixa sem tampa é feita de papelão em formato retangular, removendo quadrados iguais em cada vértice. Encontre as dimensões da caixa de maior volume que pode ser construída dessa maneira nos casos em que o retângulo tem medidas **a)** 10×10, **b)** 12×18 e **c)** $a \times b$ com $a \leq b$.

10. Suponha que $f'(x) > g'(x)$ para todo x e que $f(a) = g(a)$. Mostre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ e $f(x) < g(x)$ para $x < a$. O resultado valeria se removermos a hipótese $f(a) = g(a)$? Em caso afirmativo, explique. Em caso negativo, mostre um contra-exemplo.

2 Teorema do Valor Médio

1. O teorema do valor médio vale sem a hipótese de ser contínua no intervalo fechado? E sem a hipótese de ser derivável no interior do intervalo? Justifique.

2. Existe uma função f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ e $f'(x) \leq 2$ para todo x?

3. Mostre que a equação $2x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = 0$ tem no máximo uma raiz real.

4. Use o teorema do valor médio para mostrar que $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$ para $a, b \geq 1$.

5. Use o teorema do valor médio para provar que
$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}.$$

6. Considere uma função f contínua em $[a, b]$ de modo que a derivada segunda f'' existe para todo ponto no intervalo (a, b). O segmento que liga $(a, f(a))$ em $(b, f(b))$ intersecta o gráfico de f em um ponto $(c, f(c))$, $c \in (a, b)$. Mostre que $f''(d) = 0$ para algum $d \in (a, b)$.

3 Regra de L'Hopital e Polinômio de Taylor de Ordem Superior

1. Use a regra de L'Hopital para calcular os limites abaixo

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{(x \operatorname{sen} x)^{3/2}}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(2x) - 2\operatorname{arcsen} x}{x^3}$.

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(x-1)$.

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x - \ln x$.

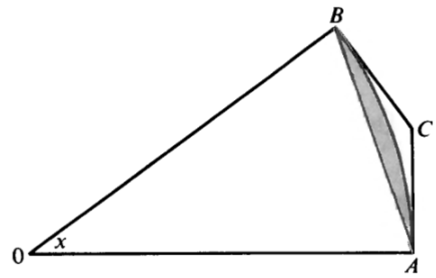
i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (1 + 3x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x - 1)}$.

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)} - 1$.

l) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

2. Um arco circular $\widehat{\text{AOB}}$ de raio 1 é definido por um ângulo central x, conforme figura ao lado. O ponto C é dado pela intersecção das retas tangentes ao arco nos pontos A e B. Seja $T(x)$ a área do triângulo ABC e $S(x)$ a área da região sombreada. Calcule: **a)** $T(x)$, **b)** $S(x)$ e **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{T(x)}{S(x)}$.



3. Para quais valores de a temos a igualdade $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e$?

4. Quantos termos do polinômio de Taylor em 0 são necessários para aproximar:

a) e com um erro inferior à 10^{-3} ?

b) e^2 com um erro inferior à 10^{-5} ?

c) $\cos(1)$ com um erro inferior à 10^{-4} ?

d) $\text{sen}(1)$ com um erro inferior à 10^{-7} ?

4 Teorema do Valor Intermediário

1. Use o teorema do valor intermediário para provar que as equações abaixo possuem raiz no intervalo dado

   (a) $x^4 + x - 3 = 0$, $[1, 2]$.

   (b) $\cos(x) = x$, $[0, 1]$.

   (c) $\ln x = e^{-x}$, $[1, 2]$.

2. Use o teorema do valor intermediário para provar que todo número positivo $a \in \mathbb{R}$ possui uma raiz n-éssima, $n \in \mathbb{N}$. Isto é, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$.

3. Mostre que todo polinômio de grau ímpar admite uma raiz real.

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que a imagem de f é um intervalo fechado.

5. Sejam f e g contínuas em $[a, b]$ tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que $f(c) = g(c)$ para algum $c \in [a, b]$.

6. Seja f contínua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Mostre que existe algum $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.