UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR
CENTRO POLITÉCNICO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Disciplina: Introdução a Geometría Analítica e Álgebra Linear **Código:** CM303

Lista semana 2

1. Encontre, se existir, a inversa das matrizes abaixo.

(a) $A = [\,-5\,]$;

(b) $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$;

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$;

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Determine o(s) valor(es) de k para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & k \end{bmatrix}$ não tenha inversa.

3. Determine o(s) valor(es) de k para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ tenha inversa.

4. Suponha que A, B e C sejam matrizes quadradas inversíveis de mesma dimensão e conhecidas. Nos itens abaixo, determine (em função de A, B e C) a matriz X que satisfaz a igualdade.

(a) $2X + A = B$.

(b) $XA = B$.

(c) $AXC = B$.

(d) $AX = BA$.

(e) $3AX^tC^t = B$.

(f) $AX - 3CX = B$ (suponha $A - 3C$ inversível).

5. Indique as matrizes que estão na forma escalonada e destas determine os pivôs e o posto.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplique consecutivamente

(a) $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$;

(b) $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$;

(c) $L_2 \leftrightarrow L_3$;

(d) $L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2$;;

(e) $L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2$;

(f) $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$;

(g) $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$.

7. Para cada uma das matrizes abaixo, encontre uma forma escalonada, encontre os pivôs e determine o posto.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ a & -1 & 4 \\ -6 & -1 & -17 \end{bmatrix}$.

(g) $G = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & a & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(h) $H = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 & b \\ 1 & 2 & 1 & c \\ -1 & 2 & 0 & d \end{bmatrix}$.

8. Determine o valor de x para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ x & 6 & -3 \end{bmatrix}$ tenha posto igual a 1.

9. Determine o valor de x para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & -8 & -3 \\ x & -3 & -1 \end{bmatrix}$ tenha posto igual a 2.

10. Foram aplicadas as seguintes operações elementares nas linhas de uma matriz quadradada A:

- permutação das linhas 1 e 3, obtendo a matriz A_1;
- substituição da linha 2 de A_1 pela soma da linha 2 de A_1 com menos 3 vezes a linha 1 de A_1, obtendo a matriz A_2;
- substituição da linha 3 de A_2 pela soma da linha 3 de A_2 com 5 vezes a linha 1 de A_2, obtendo a matriz A_3;
- permutação das linhas 2 e 3 da matriz A_3, obtendo a matriz A_4;
- substituição da linha 3 de A_4 pela soma da linha 3 de A_4 com 2 vezes a linha 2 de A_4, obtendo a matriz A_5.

Sabendo que $\det(A_5) = 37$ calcule o determinante da matriz A.

11. Utilize o método de Gauss-Jordan para encontrar, se existir, a inversa das matrizes abaixo.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Respostas:

1. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{14} & \frac{2}{7} \\ \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

Como $\det(C) = 0$, C não possui inversa.

$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

2. $k = 9$.

3. $k \neq 0$.

4. (a) $X = \dfrac{1}{2}(B - A)$.

(b) $X = BA^{-1}$.

(c) $X = A^{-1}BC^{-1}$.

(d) $X = A^{-1}BA$.

(e) $X = \dfrac{1}{3}C^{-1}B^t(A^{-1})^t$.

(f) $X = (A - 3C)^{-1}B$.

5. As matrizes que estão na forma escalonada são: A, C, E e G. Os pivôs da matriz A são $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ e $a_{33} = 1$ e o seu posto é 3; os pivôs da matriz C são $c_{11} = 2$ e $c_{22} = 3$ e o seu posto é 2; os pivôs da matriz E são $e_{11} = 1$ e $e_{23} = 5$ e o seu posto é 2; os pivôs da matriz G são $g_{11} = -3$ e $g_{24} = 1$ e o seu posto é 2.

6. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

7. (a) $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{6} \end{bmatrix}$ e posto$(A) = 3$.

(b) $\begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-7} \end{bmatrix}$ e posto$(B) = 4$.

(c) $\begin{bmatrix} \boxed{-2} & 3 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{\frac{7}{2}} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ e posto$(C) = 2$.

(d) $\begin{bmatrix} \boxed{-1} & -2 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ e posto$(D) = 1$.

(e) $\begin{bmatrix} 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e posto$(E) = 1$.

(f) Se $a = 1$, então uma forma escalonada para F é a matriz $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e posto$(F) = 2$

Se $a \neq 1$, então uma forma escalonada para F é a matriz $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -3a+4 \\ 0 & 0 & \boxed{3a-3} \end{bmatrix}$ e posto$(F) = 3$.

(g) Uma forma escalonada para G é a matriz $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -8-8a \end{bmatrix}$ e posto$(G) = 3$.

(h) Se $c - 2b + a = 0$, então uma forma escalonada para H é a matriz $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & c \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -2c+b \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -7c+4b+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e posto$(H) = 3$.

Se $c-2b+a \neq 0$, então uma forma escalonada para H é a matriz $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & c \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -2c+b \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -7c+4b+d \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{c-2b+a} \end{bmatrix}$ e posto$(H) = 4$.

8. $x = 3$.

9. $x = -1$.

10. $\det(A) = 37$.

11. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Não possui inversa, pois $\text{posto}(B) = 2$.

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

(d) Não possui inversa, pois $\text{posto}(D) = 2$.