



UFPR - UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CM304 COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA - 2024/1

Lista de Relações

1. Considere as relações:

$$A = \{1, 2, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 7, 8\}$$

$$C = \{7, 8\}$$

Quais das proposições a seguir são verdadeiras? Justifique.

(a) $(4, 2) \in A \times B$

(d) $(4, 2) \in (A \cup B) \times B$

(g) $((2, 8), 5) \in (A \times C) \times B$

(b) $(4, 2) \in B \times A$

(e) $(2, 7) \in A \times A$

(h) $(4, (7, 1)) \in B \times (C \times A)$

(c) $(2, 8) \in (A \cap B) \times C$

(f) $(7, 7) \in C \times B$

(i) $(1, 3) \in A \times \emptyset$

2. Seja A um conjunto qualquer. Sabendo que $A \times A$ possui 9 elementos e que $(-1, 0) \in A \times A$ e $(0, 1) \in A \times A$, determine quem é o conjunto A .
3. Sejam A e B conjuntos quaisquer. Sabendo que $A \times B$ possui 8 elementos, que $B \subseteq A$ e que $(2, 5) \in A \times B$, $(6, 9) \in A \times B$, determine quem é o conjunto A e quem é o conjunto B .
4. Prove usando indução matemática que se $\text{Card}(A) = n$ e $\text{Card}(B) = m$, então $\text{Card}(A \times B) = nm$.
5. Considere as relações:

$$R = \{(a, 2), (2, 3), (b, a), (a, x), (x, 2), (3, x), (c, 5), (5, c), (5, 3)\}$$

$$S = \{(3, x), (3, 2), (2, 2), (a, b), (x, a), (a, a), (2, 5)\}, \quad T = \{(z, y), (x, 3), (a, a), (2, z)\}.$$

Realize as seguintes atividades com estas 3 relações:

- Encontrar domínios e imagens.
 - Encontrar $\text{Dom}(R) \cap \text{Dom}(S)$ e $\text{Im}(R) \cap \text{Im}(S) \cap \text{Im}(T)$.
 - Encontrar $\text{Dom}(R \cup S)$ e comprovar que $\text{Dom}(R \cup S) = \text{Dom}(R) \cup \text{Dom}(S)$.
 - Encontrar $\text{Dom}(R \cap S)$ e comprovar que $\text{Dom}(R \cap S) \neq \text{Dom}(R) \cap \text{Dom}(S)$.
 - Efetuar: $R \circ S$, $R \circ T$ e $T \circ S$.
 - Efetuar: $R^{-1} \circ S$ e $T \circ R \circ S$.
 - Efetuar: $R \circ R^{-1}$ e $S \circ S$.
6. Se R é uma relação do conjunto A para o conjunto B . Demonstre que $R \circ \text{Id}_A = R$ e que $\text{Id}_B \circ R = R$, onde Id_A denota a relação identidade do conjunto A .
 7. Para cada uma das relações binárias R a seguir, definidas em \mathbb{N} , decida quais dos pares ordenados dados pertencem a R .
 - (a) $xRy \leftrightarrow x + y < 7$; $(1, 3), (2, 5), (3, 3), (4, 4)$
 - (b) $xRy \leftrightarrow x = y + 2$; $(0, 2), (4, 2), (6, 3), (5, 3)$
 - (c) $xRy \leftrightarrow 2x + 3y = 10$; $(5, 0), (2, 2), (3, 1), (1, 3)$
 - (d) $xRy \leftrightarrow y$ é um quadrado perfeito; $(1, 1), (4, 2), (2, 4), (5, 36)$
 8. Se R é um relação: Prove que:
 - $b \in \text{Dom}(R) \implies (b, b) \in R^{-1} \circ R$.
 - $a \in \text{Im}(R) \implies (a, a) \in R \circ R^{-1}$.
 9. Sejam R e S relações binárias em \mathbb{N} definidas por: $xRy \leftrightarrow x$ divide y e $xSy \leftrightarrow 5x \leq y$. Decida quais dos pares ordenados dados satisfazem as relações correspondentes indicada em cada item:

- (a) $R \cup S$; $(2, 6), (3, 17), (2, 1), (0, 0)$
 (b) $R \cap S$; $(3, 6), (1, 2), (2, 12)$
 (c) R^C ; $(1, 5), (2, 8), (4, 15)$
 (d) S^C ; $(1, 1), (2, 10), (4, 8)$
10. Sejam R e S relações binárias de P em C , em que $P = \{\text{pessoas no Brasil}\}$, $C = \{\text{cidades no Brasil}\}$, $xRy \leftrightarrow x$ mora em y e $xSy \leftrightarrow x$ trabalha em y . Descreva o que significa cada item a seguir:
- (a) $(\text{Joaquim}, \text{Curitiba}) \in R \cap S$
 (b) $(\text{Laura}, \text{Araucária}) \in R \cup S$
 (c) $(\text{Mauro}, \text{Colombo}) \in R \cap S^C$
 (d) $(\text{Bruna}, \text{Campo Largo}) \in R^C \cap S$
11. Dada a relação $H = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$, escrever uma relação G que tenha 6 ou mais pares e tal que $G \circ H = \{(a, 2), (a, 3), (b, 4), (c, 4)\}$.
12. Seja $A = \{\text{pessoas}\}$. Verifique se as relações em A dadas a seguir são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.
- (a) $xRy \leftrightarrow x$ é mais alto que y
 (b) $xRy \leftrightarrow x$ tem a mesma altura que y
 (c) $xRy \leftrightarrow x$ tem os mesmos pais que y
 (d) $xRy \leftrightarrow x$ é filho ou filha de y
 (e) $xRy \leftrightarrow x$ é cônjuge de y
13. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Verifique se as relações em A dadas a seguir são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.
- (a) $R = \{(1, 3), (3, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 3), (1, 1), (1, 2)\}$
 (b) $R = \{(1, 1), (3, 3), (2, 2)\}$
 (c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3)\}$
 (d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$
14. Seja $A = \{0, 1, 2, 4, 6\}$. Verifique se as relações em A dadas a seguir são reflexivas, simétricas, antissimétricas ou transitivas.
- (a) $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 6)\}$
 (b) $R = \{(0, 1), (1, 0), (2, 4), (4, 2), (4, 6), (6, 4)\}$
 (c) $R = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2), (2, 0), (2, 1), (1, 0), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$
 (d) $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (4, 6), (6, 4)\}$
15. Verifique que o produto cartesiano $A \times A$ não é relação antissimétrica no conjunto $A = \{a, b\}$.
16. Apresentar contraexemplos que mostrem que a relação $N = \{(a, b), (a, c), (c, a), (a, a)\}$ não é reflexiva, nem simétrica, nem antissimétrica no conjunto $A = \{a, b, c\}$.