Cálculo 1 - HONORS - CM311

Extremos e Gráficos

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Projeto Honors

Teoremas Importantes

Teorema 1.1 (Teorema do Valor Médio (TVM)).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 1.2 (Teorema de Rolle).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 1.3 (Teorema do Valor Extremo (TVE)).

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

- Faltou explicar porque TVE $\Rightarrow$ Rolle...

Teoremas Importantes

Teorema 1.1 (Teorema do Valor Médio (TVM)).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 1.2 (Teorema de Rolle).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 1.3 (Teorema do Valor Extremo (TVE)).

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

- Faltou explicar porque TVE $\Rightarrow$ Rolle...

Teoremas Importantes

Teorema 1.1 (Teorema do Valor Médio (TVM)).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 1.2 (Teorema de Rolle).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 1.3 (Teorema do Valor Extremo (TVE)).

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

- Faltou explicar porque TVE $\Rightarrow$ Rolle...

Teoremas Importantes

Teorema 1.1 (Teorema do Valor Médio (TVM)).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 1.2 (Teorema de Rolle).

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 1.3 (Teorema do Valor Extremo (TVE)).

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a, b]$.

- Faltou explicar porque TVE $\Rightarrow$ Rolle...

Extremos em Intervalos Fechados

- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos $x_0 \in I$ que são máximos ou mínimos de f são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?
- Se f for derivável em (a, b) os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.

Exemplo 1.4.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ no intervalo $[0, 3]$.

- Se f não for derivável em algum ponto do intervalo, este ponto é candidato à extremo.

Exemplo 1.5.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^2}$ no intervalo $[-1, 3]$.

Extremos em Intervalos Fechados

- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos $x_0 \in I$ que são máximos ou mínimos de f são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?
- Se f for derivável em (a, b) os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.

Exemplo 1.4.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ no intervalo $[0, 3]$.

- Se f não for derivável em algum ponto do intervalo, este ponto é candidato à extremo.

Exemplo 1.5.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^2}$ no intervalo $[-1, 3]$.

Extremos em Intervalos Fechados

- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos $x_0 \in I$ que são máximos ou mínimos de f são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?
- Se f for derivável em (a, b) os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.

Exemplo 1.4.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ no intervalo $[0, 3]$.

- Se f não for derivável em algum ponto do intervalo, este ponto é candidato à extremo.

Exemplo 1.5.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^2}$ no intervalo $[-1, 3]$.

Extremos em Intervalos Fechados

- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos $x_0 \in I$ que são máximos ou mínimos de f são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?
- Se f for derivável em (a, b) os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.

Exemplo 1.4.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ no intervalo $[0, 3]$.

- Se f não for derivável em algum ponto do intervalo, este ponto é candidato à extremo.

Exemplo 1.5.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^2}$ no intervalo $[-1, 3]$.

Extremos em Intervalos Fechados

- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos $x_0 \in I$ que são máximos ou mínimos de f são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?
- Se f for derivável em (a, b) os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.

Exemplo 1.4.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ no intervalo $[0, 3]$.

- Se f não for derivável em algum ponto do intervalo, este ponto é candidato à extremo.

Exemplo 1.5.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^2}$ no intervalo $[-1, 3]$.

Extremos em Intervalos Fechados

- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos $x_0 \in I$ que são máximos ou mínimos de f são chamados de **extremos de** f.
- Dada uma função contínua f em $[a, b]$ o TVE garante que existem extremos de f no intervalo $[a, b]$. Como encontrar tais extremos?
- Se f for derivável em (a, b) os pontos extremos estarão entre aqueles que satisfazem $f'(x) = 0$, ou $x = a$, ou $x = b$.

Exemplo 1.4.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ no intervalo $[0, 3]$.

- Se f não for derivável em algum ponto do intervalo, este ponto é candidato à extremo.

Exemplo 1.5.

Calcule os extremos de $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^2}$ no intervalo $[-1, 3]$.

Extremos Locais

- O problema de encontrar extremos em casos gerais é difícil.
- Primeiramente vamos fazer uma análise local.
- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, é um **extremo local de** f se x_0 for um extremo de f restrita a $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, para algum $\delta > 0$.
- Se f for derivável em x_0 e for extremo local, teremos que $f'(x_0) = 0$.

Definição 1.6.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Dizemos que x_0 é um ponto crítico de f se $f'(x_0) = 0$ ou se $f'(x_0)$ não existir.

Proposição 1.7.

Se x_0 é extremo local então x_0 é ponto crítico.

Observação 1.8.

Nem todo ponto crítico é um extremo local.

Extremos Locais

- O problema de encontrar extremos em casos gerais é difícil.
- Primeiramente vamos fazer uma análise local.
- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, é um **extremo local de** f se x_0 for um extremo de f restrita a $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, para algum $\delta > 0$.
- Se f for derivável em x_0 e for extremo local, teremos que $f'(x_0) = 0$.

Definição 1.6.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Dizemos que x_0 é um ponto crítico de f se $f'(x_0) = 0$ ou se $f'(x_0)$ não existir.

Proposição 1.7.

Se x_0 é extremo local então x_0 é ponto crítico.

Observação 1.8.

Nem todo ponto crítico é um extremo local.

Extremos Locais

- O problema de encontrar extremos em casos gerais é difícil.
- Primeiramente vamos fazer uma análise local.
- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, é um **extremo local de** f se x_0 for um extremo de f restrita a $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, para algum $\delta > 0$.
- Se f for derivável em x_0 e for extremo local, teremos que $f'(x_0) = 0$.

Definição 1.6.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Dizemos que x_0 é um ponto crítico de f se $f'(x_0) = 0$ ou se $f'(x_0)$ não existir.

Proposição 1.7.

Se x_0 é extremo local então x_0 é ponto crítico.

Observação 1.8.

Nem todo ponto crítico é um extremo local.

Extremos Locais

- O problema de encontrar extremos em casos gerais é difícil.
- Primeiramente vamos fazer uma análise local.
- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, é um **extremo local de** f se x_0 for um extremo de f restrita a $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, para algum $\delta > 0$.
- Se f for derivável em x_0 e for extremo local, teremos que $f'(x_0) = 0$.

Definição 1.6.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Dizemos que x_0 é um ponto crítico de f se $f'(x_0) = 0$ ou se $f'(x_0)$ não existir.

Proposição 1.7.

Se x_0 é extremo local então x_0 é ponto crítico.

Observação 1.8.

Nem todo ponto crítico é um extremo local.

Extremos Locais

- O problema de encontrar extremos em casos gerais é difícil.
- Primeiramente vamos fazer uma análise local.
- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, é um **extremo local de** f se x_0 for um extremo de f restrita a $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, para algum $\delta > 0$.
- Se f for derivável em x_0 e for extremo local, teremos que $f'(x_0) = 0$.

Definição 1.6.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Dizemos que x_0 é um ponto crítico de f se $f'(x_0) = 0$ ou se $f'(x_0)$ não existir.

Proposição 1.7.

Se x_0 é extremo local então x_0 é ponto crítico.

Observação 1.8.

Nem todo ponto crítico é um extremo local.

Extremos Locais

- O problema de encontrar extremos em casos gerais é difícil.
- Primeiramente vamos fazer uma análise local.
- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, é um **extremo local de** f se x_0 for um extremo de f restrita a $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, para algum $\delta > 0$.
- Se f for derivável em x_0 e for extremo local, teremos que $f'(x_0) = 0$.

Definição 1.6.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Dizemos que x_0 é um ponto crítico de f se $f'(x_0) = 0$ ou se $f'(x_0)$ não existir.

Proposição 1.7.

Se x_0 é extremo local então x_0 é ponto crítico.

Observação 1.8.

Nem todo ponto crítico é um extremo local.

Extremos Locais

- O problema de encontrar extremos em casos gerais é difícil.
- Primeiramente vamos fazer uma análise local.
- Sendo $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, é um **extremo local de** f se x_0 for um extremo de f restrita a $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, para algum $\delta > 0$.
- Se f for derivável em x_0 e for extremo local, teremos que $f'(x_0) = 0$.

Definição 1.6.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Dizemos que x_0 é um ponto crítico de f se $f'(x_0) = 0$ ou se $f'(x_0)$ não existir.

Proposição 1.7.

Se x_0 é extremo local então x_0 é ponto crítico.

Observação 1.8.

Nem todo ponto crítico é um extremo local.

Extremos Locais

Exemplo 1.9.

Encontre os pontos críticos de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$.

- Dentre os pontos críticos, como podemos identificar os extremos locais (máximos e mínimos locais)?

Proposição 1.10.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo.

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.*

Corolário 1.11 (Teste da Derivada Primeira).

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Temos que x_0 é ponto crítico de f se, e somente se, a derivada f' muda de sinal ao passar por x_0.

Extremos Locais

Exemplo 1.9.

Encontre os pontos críticos de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$.

- Dentre os pontos críticos, como podemos identificar os extremos locais (máximos e mínimos locais)?

Proposição 1.10.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo.

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.*

Corolário 1.11 (Teste da Derivada Primeira).

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Temos que x_0 é ponto crítico de f se, e somente se, a derivada f' muda de sinal ao passar por x_0.

Extremos Locais

Exemplo 1.9.

Encontre os pontos críticos de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$.

- Dentre os pontos críticos, como podemos identificar os extremos locais (máximos e mínimos locais)?

Proposição 1.10.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo.

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.*

Corolário 1.11 (Teste da Derivada Primeira).

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Temos que x_0 é ponto crítico de f se, e somente se, a derivada f' muda de sinal ao passar por x_0.

Extremos Locais

Exemplo 1.9.

Encontre os pontos críticos de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$.

- Dentre os pontos críticos, como podemos identificar os extremos locais (máximos e mínimos locais)?

Proposição 1.10.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com I um intervalo.

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.*

Corolário 1.11 (Teste da Derivada Primeira).

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Temos que x_0 é ponto crítico de f se, e somente se, a derivada f' muda de sinal ao passar por x_0.

Extremos Locais

Exemplo 1.12.

Classifique os extremos locais de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3.$

- Em muitas situações é útil o resultado abaixo (consequência do Teorema do Valor Intermediário)

Proposição 1.13.

Seja $g : I \to \mathbb{R}$ contínua, I intervalo, tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se $g(c) > 0$ para algum $c \in I$ então $g(x) > 0$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.14.

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Extremos Locais

Exemplo 1.12.

Classifique os extremos locais de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$.

- Em muitas situações é útil o resultado abaixo (consequência do Teorema do Valor Intermediário)

Proposição 1.13.

Seja $g : I \to \mathbb{R}$ contínua, I intervalo, tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se $g(c) > 0$ para algum $c \in I$ então $g(x) > 0$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.14.

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Extremos Locais

Exemplo 1.12.

Classifique os extremos locais de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$.

- Em muitas situações é útil o resultado abaixo (consequência do Teorema do Valor Intermediário)

Proposição 1.13.

Seja $g : I \to \mathbb{R}$ contínua, I intervalo, tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se $g(c) > 0$ para algum $c \in I$ então $g(x) > 0$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.14.

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Extremos Locais

Exemplo 1.12.

Classifique os extremos locais de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$.

- Em muitas situações é útil o resultado abaixo (consequência do Teorema do Valor Intermediário)

Proposição 1.13.

Seja $g : I \to \mathbb{R}$ contínua, I intervalo, tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se $g(c) > 0$ para algum $c \in I$ então $g(x) > 0$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.14.

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.