Universidade Federal do Paraná - UFPR
Centro Politécnico
Departamento de Matemática

Disciplina: Introdução a Geometría Analítica e Álgebra Linear **Código:** CM303 2

Lista semana 7

1. Considere os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 1, 2)$. Determine o que se pede.

(a) $\vec{w} \times \vec{v}$.
(b) $\vec{v} \times \vec{w}$.
(c)$\vec{v} \times \vec{u}$.
(d) $\vec{v} \times (\vec{w} - \vec{u})$.
(e) $\vec{v} \times (5\vec{v})$.
(f) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$.
(g) $(2\vec{u}) \times (3\vec{v})$.
(h) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.
(i) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.
(j) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$.
(k) $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$.
(l) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.
(m) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.
(n) $|\vec{v} \times \vec{w}|$.
(o) O versor de $\vec{v} \times \vec{w}$.
(p) O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$.

2. Sejam $A = (2, 0, 3)$, $B = (-1, 1, 2)$ e $C = (4, 1, 2)$. Calcule $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

3. Encontre todos os vetores de módulo igual a 5 que são ortogonais a $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (2, -1, 3)$.

4. Se $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = \sqrt{2}$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/4$, determine $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

5. Determine a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 1, 2)$ e $\vec{v} = (4, -1, 0)$.

6. Calcule a área do triângulo determinado pelos vetores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (3, 0, -1)$.

7. Determine a medida da altura relativa ao lado BC do triângulo de vértices $A = (0, 1, -1)$, $B = (-2, 0, 1)$ e $C = (1, -2, 0)$.

8. Considere os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 1, 2)$. Determine o que se pede (note que esses são os mesmos vetores do exercício 1).

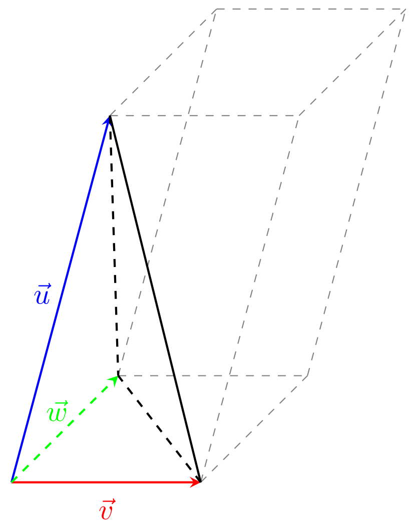
(a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
(b) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$.
(c)$(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$.
(d)$(2\vec{u}, -3\vec{v}, 4\vec{w})$.
(e) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v})$.
(f) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$.

9. Em cada item, verifique se são coplanares os vetores.
(a) $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 3, 4)$.
(b) $\vec{u} = (2, -1, 0)$, $\vec{v} = (3, 1, 2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 2)$.

10. Em cada item, verifique se são coplanares os pontos.
(a) $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, -1, -3)$, $C = (0, 2, -2)$ e $D = (-1, 0, -2)$.
(b) $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 0, 3)$, $C = (2, 4, 1)$ e $D = (-1, -2, 2)$.

11. Determine o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ e $\vec{w} = (-1, 0, 1)$.

12. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não coplanares em $\mathbb{R}^3$. Da mesma forma que podemos gerar um paralelepípedo com estes vetores também podemos gerar um tetraedro (lembre que com dois vetores, podemos gerar um paralelogramo e também um triângulo). A figura abaixo ilustra o tetraedro.



Mostre que o volume do tetraedro é dado por

$$V_{\text{tetr}} = \frac{1}{6}|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|.$$

Sugestão. O tetraedro é uma pirâmide e, portanto, seu volume é um terço do produto entre a área da base e a medida da altura. Qual é a relação entre a área da base e a altura do tetraedro e do paralelepípedo?

13. Considere os pontos $A = (-1, 3, 2)$, $B = (0, 1, -1)$, $C = (-2, 0, 1)$ e $D = (1, -2, 0)$.

(a) Determine o volume do tetraedro de vértices A, B, C e D.

(b) Determine a medida da altura traçada da base BCD até o vértice A.

Respostas:

1. (a) $(2, 2, 0)$.

(b) $(-2, -2, 0)$.

(c) $(-1, -1, 1)$.

(d) $(-1, -1, -1)$.

(e) $(0, 0, 0)$.

(f) $(-2, -2, 2)$.

(g) $(6, 6, -6)$.

(h) -2.

(i) -2.

(j) 0.

(k) 0.

(l) $(3, -1, 2)$.

(m) $(2, -2, -6)$.

(n) $2\sqrt{2}$.

(o) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

(p) $\pi/2$.

2. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, -5, -5)$.

3. Há dois vetores: $\left(\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$.

4. $|\vec{u} \times \vec{v}| = 3$.

5. $3\sqrt{13}$.

6. $\sqrt{11}$.

7. $\frac{3\sqrt{35}}{7}$.

8.

(a)$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -2$.

(b) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = 2$.

(c) $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = 2$.

(d) $(2\vec{u}, -3\vec{v}, 4\vec{w}) = 48$.

(e) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = 0$.

(f) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}) = 3$.

9. (a) Não são coplanares.

(b) São coplanares.

10. (a) São coplanares.

(b)Não são coplanares.

11. 8.

12.

13. (a) 4.

(b)$\dfrac{8}{\sqrt{10}}$.