Exercício 5 da Lista 0

Demonstrar que ...

$$MAX(X;Y) = \frac{X+Y+|Y-X|}{2} \quad e \quad MIN(X,Y) = \frac{X+Y-|Y-X|}{2}$$

Para o $MAX(X;Y)$:

Quando $Y>X$ temos que $\frac{X+Y+Y-X}{2} = \frac{2Y}{2} = Y$

Quando $Y=X$ temos que $\frac{Y+Y}{2} = \frac{2Y}{2} = Y$

Quando $Y<X$ temos que $\frac{X+Y-Y+X}{2} = \frac{2X}{2} = X$

Para o $MIN(X;Y)$:

Quando $Y>X$ temos que $\frac{X+Y-Y+X}{2} = \frac{2X}{2} = X$

Quando $Y=X$ temos que $\frac{X+X}{2} = \frac{2X}{2} = X$

Quando $Y<X$ temos que $\frac{X+Y+Y-X}{2} = \frac{2Y}{2} = Y$

Agora uma forma análoga para $MAX(X;Y;Z)$ e $MIN(X;Y;Z)$

$$MAX(X;Y;Z) = \frac{2X+Y+Z+|Z-Y| + |Y+Z+|Z-Y|-2X|}{4}$$

Exemplo do caso $Z>X>Y$:

$$\frac{2X+Y+Z+Z-Y+Y+Z+Z-Y-2X}{4} = \frac{2X+2Z+2Z-2X}{4} = \frac{4Z}{4} = Z$$

$$MIN(X;Y;Z) = \frac{2X+Y+Z-|Z-Y| - |Y+Z-|Z-Y|-2X|}{4}$$

Exercício 8 (Lista 0)

Sendo $\varepsilon > 0$, $X_0 \neq 0$ e $|X - X_0| < \text{MIN}\left(\frac{|X_0|}{2}; \frac{\varepsilon |X_0|^2}{2}\right)$

Provaremos que $f(x) = \left|\frac{1}{X} - \frac{1}{X_0}\right| < \varepsilon$ e $X \neq 0$

I) Provar que $f(x) < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{X} - \frac{1}{X_0}\right| \to \frac{|X_0 - X|}{|X \cdot X_0|} \to \frac{|X - X_0|}{|X| \cdot |X_0|} \to |X - X_0| \cdot \frac{1}{|X|} \cdot \frac{1}{|X_0|}$$

Sendo $|X_0| = |X_0 + X - X|$ temos que

$$|X_0| \leq |X - X_0| + |X| \to |X_0| \leq \frac{|X_0|}{2} + |X| \to \frac{|X_0|}{2} \leq |X|$$

$$\to \frac{1}{|X|} < \frac{2}{|X_0|}$$

Dessa forma:

$$|X - X_0| \cdot \frac{1}{|X|} \cdot \frac{1}{|X_0|} < \frac{\varepsilon |X_0|^2}{2} \cdot \frac{2}{|X_0|} \cdot \frac{1}{|X_0|} = |X - X_0| \cdot \frac{1}{|X|} \cdot \frac{1}{|X_0|} < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$?

Logo $\left|\frac{1}{X} - \frac{1}{X_0}\right| < \varepsilon$

II Provar que $X \neq 0$

$$|X - X_0| < \frac{|X_0|}{2} \to -\frac{|X_0|}{2} < X - X_0 < \frac{|X_0|}{2} \to -\frac{|X_0|}{2} + X_0 < X < \frac{|X_0|}{2} + X_0$$

Para $(X_0 > 0)$: $\frac{X_0}{2} < X < \frac{3X_0}{2}$; Para $(X_0 < 0)$: $\frac{3X_0}{2} < X < \frac{X_0}{2}$;

Como $X_0 \neq 0$ então $X \neq 0$

Propriedade do quociente

Supondo que as funções f e g sejam definidas em intervalos abertos ao redor de $a \in \mathbb{R}$, exceto possivelmente em a e que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, onde $M \neq 0$, queremos provar que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

Pela Regra do Produto:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)}$$

Vamos provar que $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ TQ se

$0 < |x - a| < \delta$ então $|g(x) - L| < \min\left(\frac{|M|}{2}, \frac{\varepsilon |M|^2}{2}\right)$

Pelo exercício 8 sabemos que $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \varepsilon$

Sendo assim, isso prova que

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ TQ se

$0 < |x - a| < \delta$ então $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \varepsilon$

O que prova que:

$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$; finalmente provando que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$