

Se parece fácil demais, algo deve estar errado.

Derivando Expressões

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

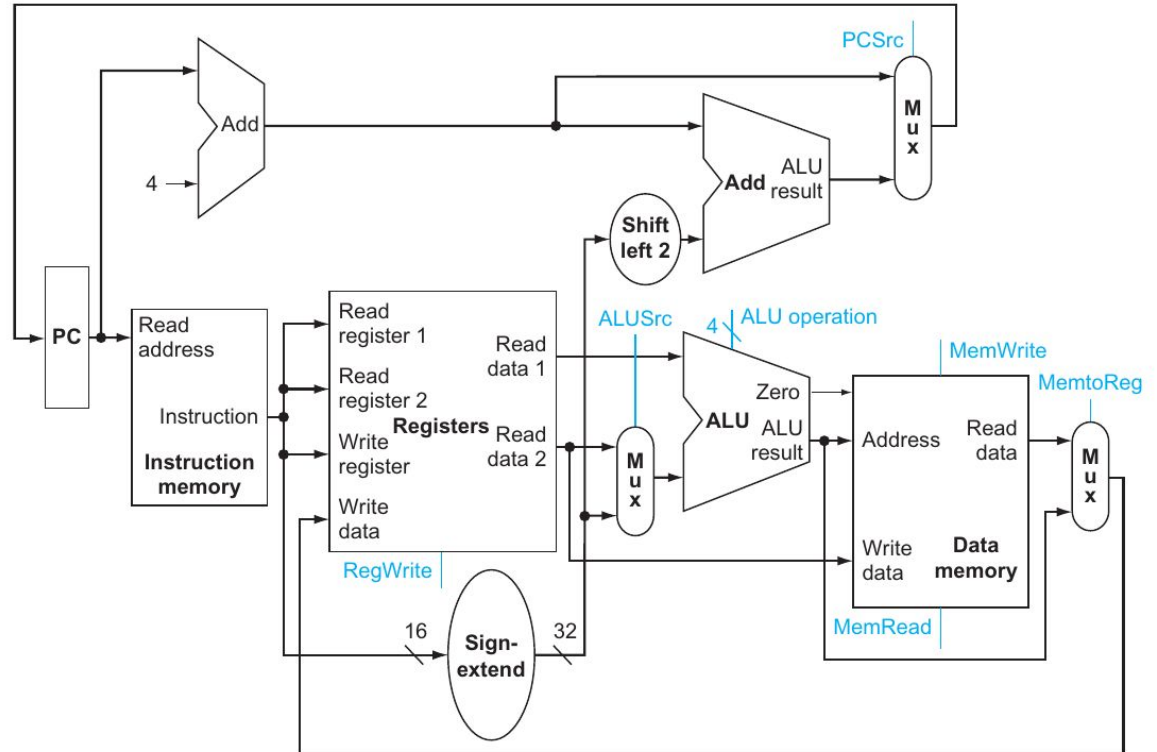


Derivando expressões

No mundo real, é muito comum termos apenas as tabelas verdade.

A partir da tabela verdade, precisamos derivar uma expressão lógica.

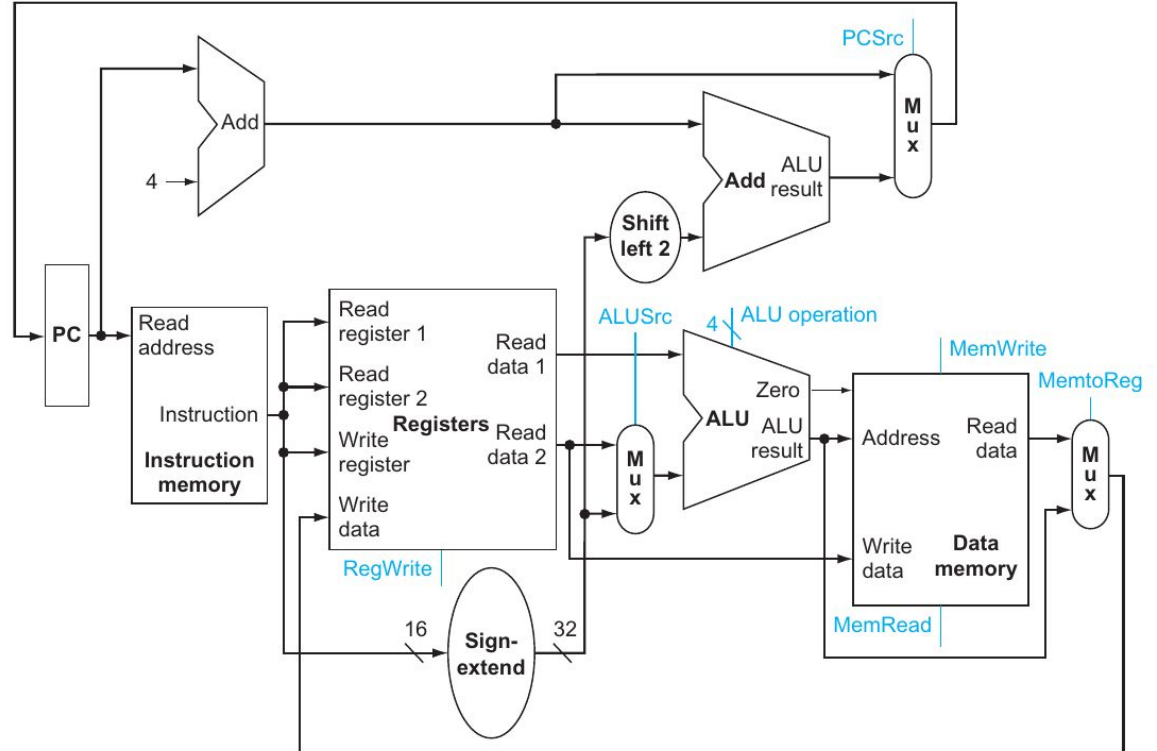
Um Exemplo



Um Exemplo

Não se assuste!

Esse é o esquema de uma CPU Simples.



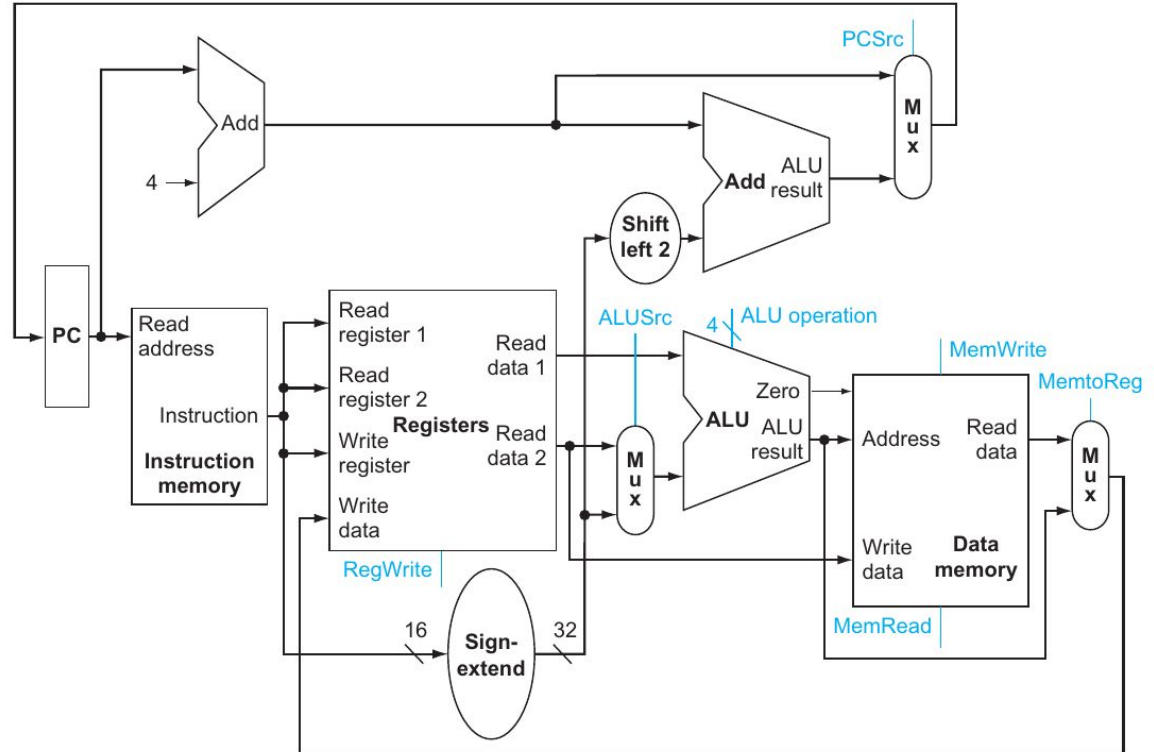
Um Exemplo

Não se assuste!

Esse é o esquema de uma CPU Simples.

Você não precisa entender o esquema completo.

Vai aprender ele em Arquitetura de Computadores.



Um Exemplo

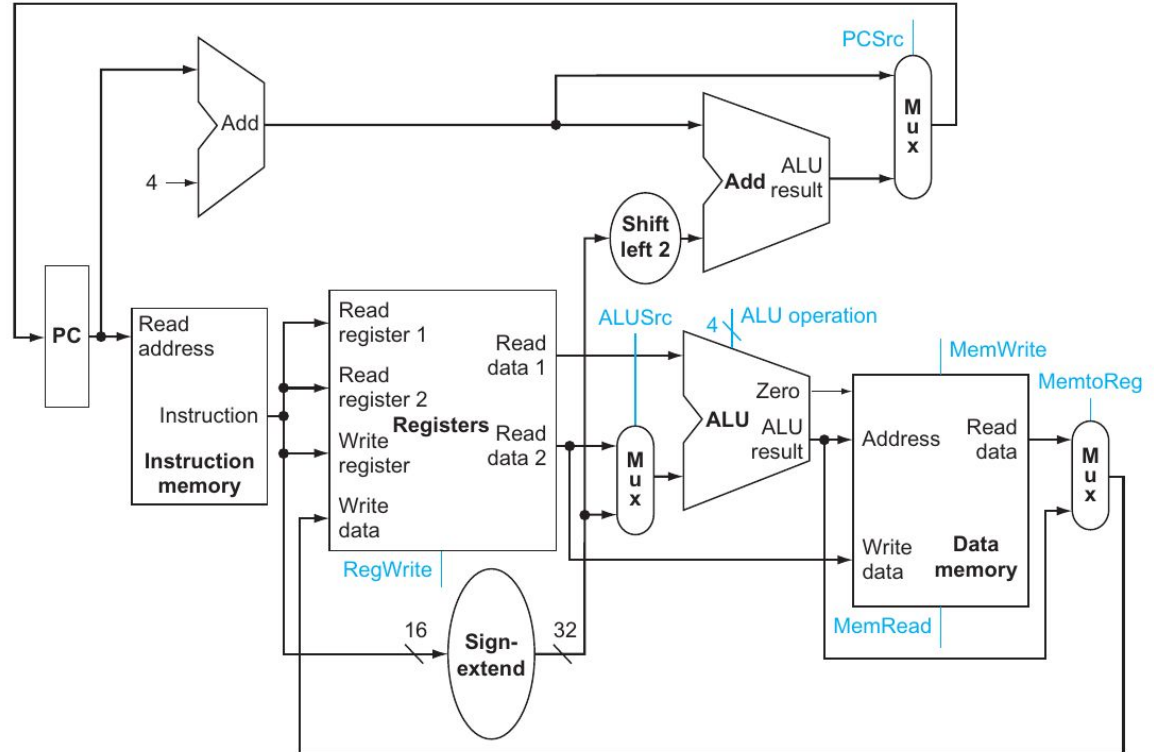
Não se assuste!

Esse é o esquema de uma CPU Simples.

Você não precisa entender o esquema completo.

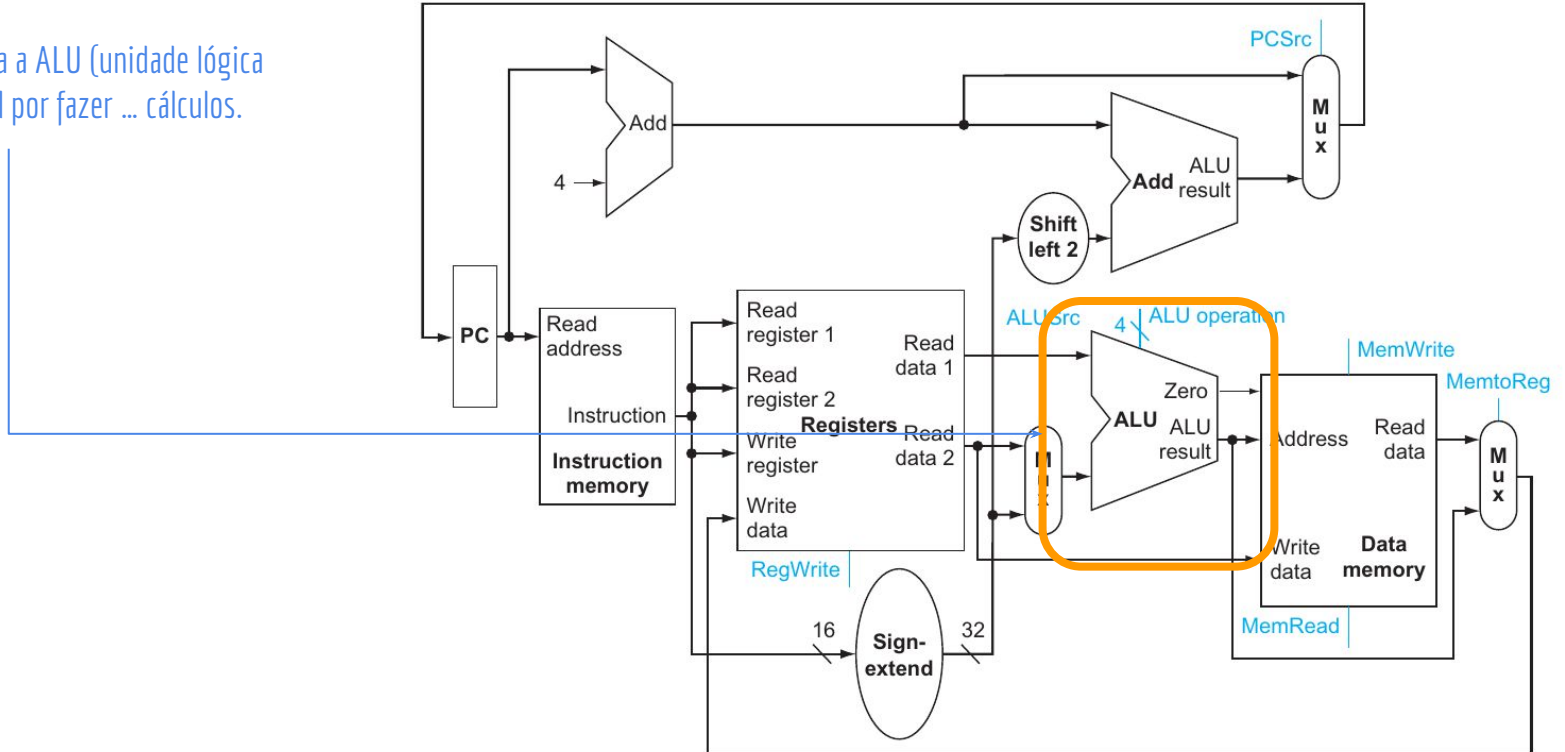
Vai aprender ele em Arquitetura de Computadores.

Vamos usar apenas um trecho para um exemplo do mundo real.



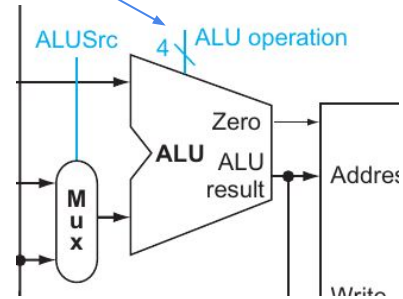
Um Exemplo

Esse símbolo representa a ALU (unidade lógica aritmética), responsável por fazer ... cálculos.



Um Exemplo

A ALU recebe quatro variáveis booleanas, que indicam o que ela precisa fazer (uma soma, uma multiplicação, uma conjunção, uma disjunção, ...)



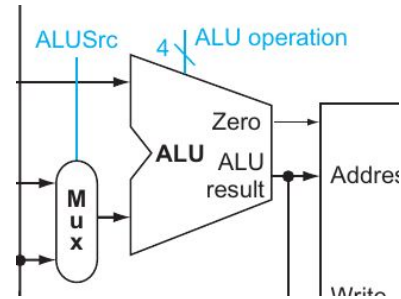
Um Exemplo

A ALU recebe quatro variáveis booleanas, que indicam o que ela precisa fazer (uma soma, uma multiplicação, uma conjunção, uma disjunção, ...)

Vamos criar uma função que indica se o somador da ALU precisa ser ativado (verdadeiro) ou não (falso).

Essa função pode ser implementada no circuito, para comandar o somador da ALU.

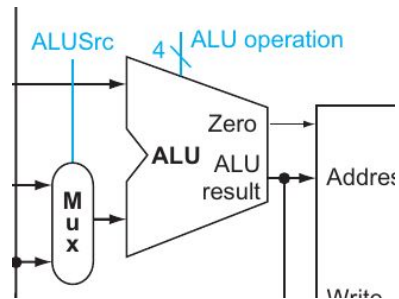
Veremos como fazer essas implementações no futuro.



Um Exemplo

De acordo com a especificação da CPU, as quatro variáveis booleanas que controlam a operação ativam o somador de acordo com a seguinte tabela verdade.

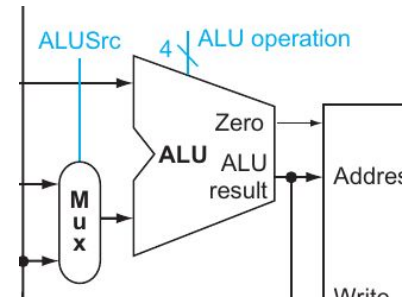
Não vamos nos preocupar nesse exemplo sobre o exato motivo dessas variáveis ativarem ou não o somador. Se você quiser ver esses detalhes, leia em Hennessy, Patterson (2014).



Um Exemplo

S indica se o somador deve ser ativado ou não de acordo com as variáveis A, B, C e D.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0



Problema

Temos uma tabela verdade, mas precisamos definir uma função booleana a partir dela.

Forma Normal Disjuntiva

A Forma Normal Disjuntiva (FND) também é conhecida como:

Soma dos Produtos.

Soma de Mintermos.

Forma Normal Disjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 1 como resposta.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Forma Normal Disjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 1 como resposta.

Faça o produto (conjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 0 nessa linha.

O produto das variáveis é denominado **mintermo** ou **minitermo**.

Mintermo Mintermo Mintermo



$\bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D}$ $\bar{A}.B.C.\bar{D}$ $\bar{A}.B.C.D$

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Forma Normal Disjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 1 como resposta.

Faça o produto (conjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 0 nessa linha.

O produto das variáveis é denominado **mintermo** ou **minitermo**.

Faça a soma (disjunção) dos mintermos.

$$S = \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.B.C.\bar{D} + \bar{A}.B.C.D$$

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Faça você mesmo

Derive uma expressão para F usando a Forma Normal Disjuntiva.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Faça você mesmo

Derive uma expressão para F usando a Forma Normal Disjuntiva.

$$F = \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C}$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forma Normal Conjuntiva

A Forma Normal Conjuntiva (FNC) também é conhecida como:

- Produto das Somas.

- Produto de Maxtermos.

- Forma **dual** da soma dos produtos.

Forma Normal Conjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 0 como resposta.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forma Normal Conjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 0 como resposta.

Faça a soma (disjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 1 nessa linha.

A soma das variáveis é denominado **maxtermo** ou **maxitermo**.

$$S = A+B+C \quad A+B+\bar{C} \quad \bar{A}+B+C \quad \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forma Normal Conjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 0 como resposta.

Faça a soma (disjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 1 nessa linha.

A soma das variáveis é denominado **maxtermo** ou **maxitermo**.

Faça multiplicação (conjunção) dos mintermos.

$$S = A+B+C \cdot A+B+\bar{C} \cdot \bar{A}+B+C \cdot \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forma Normal Conjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 0 como resposta.

Faça a soma (disjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 1 nessa linha.

A soma das variáveis é denominado **maxtermo** ou **maxitermo**.

Faça multiplicação (conjunção) dos mintermos.

Tem algo errado aqui!

$$S = A+B+C \cdot A+B+\bar{C} \cdot \bar{A}+B+C \cdot \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Forma Normal Conjuntiva

Na tabela verdade, identifique todas as linhas que a função tem 0 como resposta.

Faça a soma (disjunção) das variáveis em cada linha, negando as variáveis que aparecem com 1 nessa linha.

A soma das variáveis é denominado **maxtermo** ou **maxitermo**.

Faça multiplicação (conjunção) dos mintermos.

$$S = (A+B+C).(A+B+\bar{C}).\bar{A}+B+C.(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Faça você mesmo

Derive uma expressão para F usando a Forma Normal Conjuntiva.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Faça você mesmo

Derive uma expressão para F usando a Forma Normal Conjuntiva.

$$F = (\bar{A} + B + C).(\bar{A} + B + \bar{C}).(\bar{A} + \bar{B} + C)$$

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

FORMAS CANÔNICAS

Tanto a FND quanto a FNC são **formas canônicas** ou **formas padrão**.

Simplificações

As formas canônicas são úteis e simples para, por exemplo, encontrarmos a função booleana através de sua tabela verdade.

Mas a implementação dessas funções requer muitas portas lógicas.

Podemos simplificar as expressões através de, por exemplo.

- Mapas de Karnaugh.

- Teoremas e Postulados da Álgebra de Boole.

Veremos adiante...

Exercícios

1. Derive a expressão para o somador do primeiro exemplo usando a Forma Normal Conjuntiva
2. Faça a soma dos produtos e o produto das somas para a tabela verdade ao lado.

Solução na Seção 4-4 de Tocci et al.

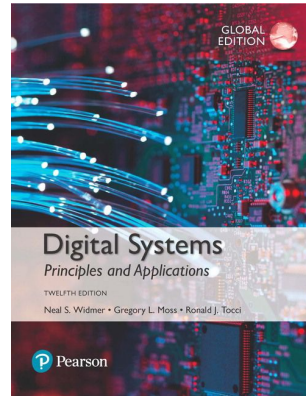
3. Crie uma tabela verdade com:

- a. Pelo menos 3 variáveis
- b. Uma função de saída F
- c. Faça a soma dos produtos e o produto das somas para essa tabela verdade.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Referências

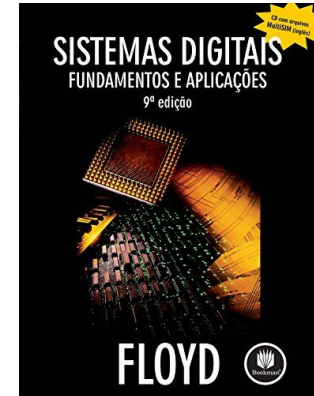
Ronald J. Tocci, Gregory L. Moss, Neal S. Widmer. Sistemas digitais. 10a ed. 2017.



Hennessy, J. L., Patterson, D. A. Computer Organization and Design: The Hardware/Software Interface. 2014.



Thomas Floyd. Widmer. Sistemas Digitais: Fundamentos e Aplicações. 2009.



Licença

Esta obra está licenciada com uma Licença [Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).