Cálculo 1 - HONORS - CM311

Derivadas e Propriedades

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Aula Passada...

- Definimos derivada em um ponto

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Se a função tiver derivada em vários pontos, definimos a função derivada f'.

Exemplo 1.1.

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- Como calcular a derivada da função abaixo?

$$f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x) - \frac{x^2 - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

- Existem propriedades que relacionam as operações fundamentais e o cálculo das derivadas
- Mas antes, vamos ver mais algumas derivadas...

Aula Passada...

- Definimos derivada em um ponto
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
- Se a função tiver derivada em vários pontos, definimos a função derivada f'.

Exemplo 1.1.

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2$. b) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- Como calcular a derivada da função abaixo?
$$f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x) - \frac{x^2 - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$
- Existem propriedades que relacionam as operações fundamentais e o cálculo das derivadas
- Mas antes, vamos ver mais algumas derivadas...

Aula Passada...

- Definimos derivada em um ponto
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
- Se a função tiver derivada em vários pontos, definimos a função derivada f'.

Exemplo 1.1.

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- Como calcular a derivada da função abaixo?
$$f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x) - \frac{x^2 - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$
- Existem propriedades que relacionam as operações fundamentais e o cálculo das derivadas
- Mas antes, vamos ver mais algumas derivadas...

Aula Passada...

- Definimos derivada em um ponto

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Se a função tiver derivada em vários pontos, definimos a função derivada f'.

Exemplo 1.1.

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- Como calcular a derivada da função abaixo?

$$f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x) - \frac{x^2 - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

- Existem propriedades que relacionam as operações fundamentais e o cálculo das derivadas

- Mas antes, vamos ver mais algumas derivadas...

Aula Passada...

- Definimos derivada em um ponto
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- Se a função tiver derivada em vários pontos, definimos a função derivada f'.

Exemplo 1.1.

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2$. b) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- Como calcular a derivada da função abaixo?
$$f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x) - \frac{x^2-1}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$
- Existem propriedades que relacionam as operações fundamentais e o cálculo das derivadas
- Mas antes, vamos ver mais algumas derivadas...

Aula Passada...

- Definimos derivada em um ponto

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Se a função tiver derivada em vários pontos, definimos a função derivada f'.

Exemplo 1.1.

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2$. b) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- Como calcular a derivada da função abaixo?

$$f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x) - \frac{x^2 - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

- Existem propriedades que relacionam as operações fundamentais e o cálculo das derivadas
- Mas antes, vamos ver mais algumas derivadas...

Propriedades Derivadas

Exemplo 1.2.

Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. b) $f(x) = \sqrt{x}$. c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exercício.

Calcular as derivadas das funções abaixo

a) $f(x) = \cos x$. b) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Existe alguma relação entre continuidade e derivabilidade?

Proposição 1.3.

Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

- A recíproca não vale! Exemplos:
  - $f(x) = |x|$ (bico).
  - $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (reta tangente vertical).

Propriedades Derivadas

Exemplo 1.2.

Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. b) $f(x) = \sqrt{x}$. c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exercício.

Calcular as derivadas das funções abaixo

a) $f(x) = \cos x$. b) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Existe alguma relação entre continuidade e derivabilidade?

Proposição 1.3.

Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

- A recíproca não vale! Exemplos:
  - $f(x) = |x|$ (bico).
  - $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (reta tangente vertical).

Propriedades Derivadas

Exemplo 1.2.

Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. b) $f(x) = \sqrt{x}$. c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exercício.

Calcular as derivadas das funções abaixo

a) $f(x) = \cos x$. b) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Existe alguma relação entre continuidade e derivabilidade?

Proposição 1.3.

Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

- A recíproca não vale! Exemplos:
  - $f(x) = |x|$ (bico).
  - $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (reta tangente vertical).

Exemplo 1.2.

Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. b) $f(x) = \sqrt{x}$. c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exercício.

Calcular as derivadas das funções abaixo

a) $f(x) = \cos x$. b) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Existe alguma relação entre continuidade e derivabilidade?

Proposição 1.3.

Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

- A recíproca não vale! Exemplos:
  - $f(x) = |x|$ (bico).
  - $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (reta tangente vertical).

Propriedades Derivadas

Exemplo 1.2.

Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. b) $f(x) = \sqrt{x}$. c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exercício.

Calcular as derivadas das funções abaixo

a) $f(x) = \cos x$. b) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Existe alguma relação entre continuidade e derivabilidade?

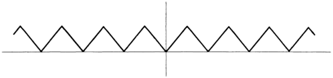
Proposição 1.3.

Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

- A recíproca não vale! Exemplos:
  - $f(x) = |x|$ (bico).
  - $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (reta tangente vertical).

Propriedades Derivadas

- É fácil pensar em funções contínuas onde não tem derivadas em alguns pontos.



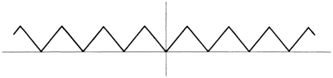
- Existe alguma função que é contínua em todo ponto, mas não é derivável em nenhum ponto? Sim: **função de Weierstrass**

- Pode ser definida pela fórmula abaixo (série) para a, b apropriados

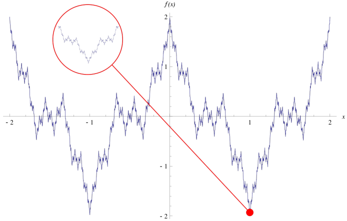
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

Propriedades Derivadas

- É fácil pensar em funções contínuas onde não tem derivadas em alguns pontos.



- Existe alguma função que é contínua em todo ponto, mas não é derivável em nenhum ponto? Sim: **função de Weierstrass**

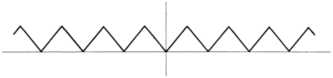


- Pode ser definida pela fórmula abaixo (série) para a, b apropriados

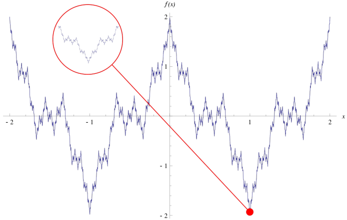
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

Propriedades Derivadas

- É fácil pensar em funções contínuas onde não tem derivadas em alguns pontos.



- Existe alguma função que é contínua em todo ponto, mas não é derivável em nenhum ponto? Sim: **função de Weierstrass**



- Pode ser definida pela fórmula abaixo (série) para a, b apropriados

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

Propriedades Derivadas

Proposição 1.4.

Sendo f, g funções deriváveis, $c \in \mathbb{R}$, vale:

1. $(f+g)' = f' + g'$.
2. $(c.f)' = c.f'$.
3. $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$.

Exemplo 1.5.

Calcule as derivadas das funções abaixo

- $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- $f(x) = x \operatorname{tg} x$.
- $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
- $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x) - \dfrac{x^2-1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Exemplo 1.6 (Movimento Uniformemente Variado).

Sendo $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, temos $v(t) = s'(t) = v_0 + a.t$. E também $a(t) = v'(t) = s''(t) = a = \text{const.}$.

Propriedades Derivadas

Proposição 1.4.

Sendo f, g funções deriváveis, $c \in \mathbb{R}$, vale:

1. $(f+g)' = f' + g'$.
2. $(c.f)' = c.f'$.
3. $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$.

Exemplo 1.5.

Calcule as derivadas das funções abaixo

- $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
- $f(x) = x \operatorname{tg} x$.
- $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x) - \frac{x^2-1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Exemplo 1.6 (Movimento Uniformemente Variado).

Sendo $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, temos $v(t) = s'(t) = v_0 + a.t$. E também $a(t) = v'(t) = s''(t) = a = \text{const.}$.

Propriedades Derivadas

Proposição 1.4.

Sendo f, g funções deriváveis, $c \in \mathbb{R}$, vale:

1. $(f+g)' = f' + g'$.
2. $(c.f)' = c.f'$.
3. $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$.

Exemplo 1.5.

Calcule as derivadas das funções abaixo

- $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
- $f(x) = x \operatorname{tg} x$.
- $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x) - \dfrac{x^2-1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Exemplo 1.6 (Movimento Uniformemente Variado).

Sendo $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, temos $v(t) = s'(t) = v_0 + a.t$. E também $a(t) = v'(t) = s''(t) = a = \text{const.}$.

Propriedades Derivadas

Proposição 1.4.

Sendo f, g funções deriváveis, $c \in \mathbb{R}$, vale:

1. $(f+g)' = f' + g'$.
2. $(c.f)' = c.f'$.
3. $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$.

Exemplo 1.5.

Calcule as derivadas das funções abaixo

- $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
- $f(x) = x \operatorname{tg} x$.
- $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x) - \frac{x^2-1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Exemplo 1.6 (Movimento Uniformemente Variado).

Sendo $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, temos $v(t) = s'(t) = v_0 + a.t$. E também $a(t) = v'(t) = s''(t) = a = \text{const.}$.

Derivadas de Ordem Superior

- Podemos definir a **2a derivada da função** f, caso a função derivada f' seja derivável, como sendo $f'' = (f')'$.
- Analogamente podemos definir derivadas com ordem maiores.
- Notação $f^{(n)}$ = derivada de ordem n de f.

Definição 1.7.

Supondo que f seja n-vezes derivável, se $f^{(n)}$ for derivável, definimos a derivada de ordem $n+1$ como sendo $f^{(n+1)} = (f^n)'$.

Exemplo 1.8.

Calcule as derivadas de ordem superior abaixo

a) $f^{(3)}(x)$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

b) $f^{(2024)}(x)$, $f(x) = \cos(x)$.

Derivadas de Ordem Superior

- Podemos definir a **2a derivada da função** f, caso a função derivada f' seja derivável, como sendo $f'' = (f')'$.
- Analogamente podemos definir derivadas com ordem maiores.
- Notação $f^{(n)} =$ derivada de ordem n de f.

Definição 1.7.

Supondo que f seja n-vezes derivável, se $f^{(n)}$ for derivável, definimos a derivada de ordem $n+1$ como sendo $f^{(n+1)} = (f^n)'$.

Exemplo 1.8.

Calcule as derivadas de ordem superior abaixo

a) $f^{(3)}(x)$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

b) $f^{(2024)}(x)$, $f(x) = \cos(x)$.

Derivadas de Ordem Superior

- Podemos definir a **2a derivada da função** f, caso a função derivada f' seja derivável, como sendo $f'' = (f')'$.
- Analogamente podemos definir derivadas com ordem maiores.
- Notação $f^{(n)} =$ derivada de ordem n de f.

Definição 1.7.

Supondo que f seja n-vezes derivável, se $f^{(n)}$ for derivável, definimos a derivada de ordem $n+1$ como sendo $f^{(n+1)} = (f^n)'$.

Exemplo 1.8.

Calcule as derivadas de ordem superior abaixo

a) $f^{(3)}(x)$,
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

b) $f^{(2024)}(x)$, $f(x) = \cos(x)$.

- Podemos definir a **2a derivada da função** f, caso a função derivada f' seja derivável, como sendo $f'' = (f')'$.
- Analogamente podemos definir derivadas com ordem maiores.
- Notação $f^{(n)} =$ derivada de ordem n de f.

Definição 1.7.

Supondo que f seja n-vezes derivável, se $f^{(n)}$ for derivável, definimos a derivada de ordem $n+1$ como sendo $f^{(n+1)} = (f^n)'$.

Exemplo 1.8.

Calcule as derivadas de ordem superior abaixo

a) $f^{(3)}(x)$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

b) $f^{(2024)}(x)$, $f(x) = \cos(x)$.

Derivadas de Ordem Superior

- Podemos definir a **2a derivada da função** f, caso a função derivada f' seja derivável, como sendo $f'' = (f')'$.
- Analogamente podemos definir derivadas com ordem maiores.
- Notação $f^{(n)} =$ derivada de ordem n de f.

Definição 1.7.

Supondo que f seja n-vezes derivável, se $f^{(n)}$ for derivável, definimos a derivada de ordem $n+1$ como sendo $f^{(n+1)} = (f^n)'$.

Exemplo 1.8.

Calcule as derivadas de ordem superior abaixo

a) $f^{(3)}(x)$,
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

b) $f^{(2024)}(x)$, $f(x) = \cos(x)$.