UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM304 Complementos de Matemática - 2024/1

Lista de Funções

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Determine se cada uma das relações abaixo é uma função com domínio em A e contradomínio B. Se esse for o caso, determine o conjunto imagem da função. Além disso, é uma função injetora? É sobrejetora? Justifique as suas respostas.
   (a) $f = \{(2, a), (5, c), (1, d), (0, a), (4, b), (3, c)\}$
   (b) $f = \{(1, c), (3, d), (2, c), (4, b), (5, a)\}$
   (c) $f = \{(3, d), (5, a), (4, c), (1, d), (2, a)\}$
   (d) $f = \{(1, b), (3, d), (2, a), (4, c), (5, e)\}$
2. Sejam $C = \{1, 2, 3, 4\}$ e $D = \{a, b, c, d, e\}$. Determine se cada uma das relações abaixo é uma função com domínio em C e contradomínio D. Se esse for o caso, determine o conjunto imagem da função. Além disso, é uma função injetora? É sobrejetora? Justifique as suas respostas.
   (a) $f = \{(1, d), (2, c), (4, e)\}$
   (b) $f = \{(4, a), (3, d), (2, e), (1, a)\}$
   (c) $f = \{(2, c), (1, e), (3, a), (2, d), (4, b)\}$
   (d) $f = \{(3, e), (2, a), (4, c), (1, b)\}$
3. Verifique se cada afirmação abaixo é Verdadeira ou Falsa, justificando sua resposta.
   (a) Uma função ser injetora significa que todo elemento no contradomínio tem que ter uma única imagem inversa.
   (b) Uma função ser sobrejetora significa que todo elemento no contradomínio tem que ter uma única imagem inversa.
   (c) Uma função ser injetora significa que dois elementos diferentes em seu domínio nunca podem ir no mesmo elemento no contradomínio.
   (d) Se todo elemento no domínio tiver uma imagem, a função terá que ser sobrejetora.
   (e) Se todo elemento no contradomínio tiver uma imagem, a função terá que ser sobrejetora.
   (f) Se o domínio for maior que o contradomínio, a função não poderá ser injetora.
   (g) Se todo elemento no contradomínio tiver uma imagem inversa, a função terá que ser sobrejetora.
   (h) Que uma função seja sobrejetora significa que Imagem $\cap$ Contradominio $= \varnothing$.
   (i) Que uma função seja injetora significa que todo elemento no contradomínio tem que ter no máximo uma imagem inversa.
   (j) Que uma função seja sobrejetora significa que Imagem $\cap$ Contradominio = Contradominio.
4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = 3x + 2$. Verifique que essa função é bijetora e determine sua função inversa.
5. Seja $\mathbb{R}^*$ o conjunto dos números reais excluindo o zero, isto é $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é bijetora e determine sua função inversa.

Para os Exercícios 6 à 10, considere $A = \{0, 1\}$ e B o conjunto de todas as cadeias finitas formadas com digitos em A. Por exemplo, $010110 \in B$, $0110101011 \in B$, etc.

6. Defina $f : B \to \mathbb{Z}$ da seguinte maneira: para $c \in B$, $f(c)$ =número de caracteres de c. A função f é injetora? A função f é sobrejetora?
7. Defina $g : B \to \mathbb{Z}$ da seguinte maneira: para $c \in B$, $g(c)$ = número de caracteres iguais a 0 em c menos o número de caracteres 1 em c. A função g é injetora? A função g é sobrejetora?

8. Defina $h : B \to B$ da seguinte maneira: para $c \in B$, $h(c) =$ cadeia obtida escrevendo c na ordem inversa. A função h é injetora? A função h é sobrejetora?

9. Defina $w : B \to B$ da seguinte maneira: para $c \in B$, $w(c) =$ cadeia obtida ao trocar os dígitos de c de 0 para 1 e de 1 para 0. A função w é injetora? A função w é sobrejetora?

10. Defina $u : B \to B$ da seguinte maneira: para $c \in B$, $u(c) = 0c$, ou seja, a cadeia obtida ao colocar 0 antes de c. A função u é injetora? A função u é sobrejetora?

11. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ e $C = \{6, 7, 8, 9\}$. Determine a função composta $g \circ f$ em cada caso. Além disso, a função $g \circ f$ é uma função injetora? É sobrejetora? Justifique as suas respostas.

    (a) $f = \{(2, a), (3, b), (1, d), (4, b)\}$ e $g = \{(a, 7), (b, 8), (c, 9), (d, 6)\}$.

    (b) $f = \{(1, c), (3, d), (2, b), (4, a)\}$ e $g = \{(d, 9), (c, 9), (b, 6), (a, 9)\}$.

    (c) $f = \{(3, d), (1, a), (4, c), (2, a)\}$ e $g = \{(c, 7), (a, 6), (d, 9), (b, 8)\}$.

    (d) $f = \{(4, b), (3, d), (2, a), (1, c)\}$ e $g = \{(b, 9), (d, 8), (a, 6), (c, 7)\}$.

12. Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $g(x) = 3x$. Calcule o valor das seguintes expressões:

    (a) $(g \circ f)(5)$ (c) $(g \circ f)(x)$ (e) $(f \circ f)(x)$

    (b) $(f \circ g)(5)$ (d) $(f \circ g)(x)$ (f) $(g \circ g)(x)$

13. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções injetoras. Mostre que a função composta $g \circ f : A \to C$ é uma função injetora.

14. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções sobrejetoras. Mostre que a função composta $g \circ f : A \to C$ é uma função sobrejetora.

15. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções bijetoras. Mostre que a inversa da função composta $g \circ f : A \to C$ é a função $(g \circ f)^{-1} : C \to A$ dada por $(g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x)$

16. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Prove que se $g \circ f$ é injetora, então f é uma função injetora. Além disso, exiba um exemplo em que $g \circ f$ é injetora, mas g não é injetora.

17. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Prove que se $g \circ f$ é sobrejetora, então g é uma função sobrejetora. Além disso, exiba um exemplo em que $g \circ f$ é sobrejetora, mas f não é sobrejetora.

18. Seja $f : A \to B$ uma função. Determine a seguinte relação em A:

$$xRy \leftrightarrow f(x) = f(y).$$

    (a) Mostre que essa é uma relação de equivalência.

    (b) Se f é uma função injetora, o que podemos dizer sobre as classes de equivalência desta relação?

    (c) Mostre que $g : A/R \to B$ dada por $g([x]) = f(x)$ define uma função que é injetora.