Cálculo 1 - HONORS - CM311

Limites e Propriedades

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Propriedade 1.1.

Sejam f e g duas funções definidas em intervalos abertos que contenham um ponto $a \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Sendo $c \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\lim_{x \to a} c = c$.

b) $\lim_{x \to a} x = a$.

c) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$.

d) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M$.

e) $\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = L.M$.

f) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

g) $\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}$.

- Assim, é fácil mostrar que $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = a^3 - 3a^2 - 2a - 5$.

Limites - Propriedades

Propriedade 1.1.

Sejam f e g duas funções definidas em intervalos abertos que contenham um ponto $a \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Sendo $c \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\lim\limits_{x \to a} c = c.$

b) $\lim\limits_{x \to a} x = a.$

c) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$

d) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M.$

e) $\lim\limits_{x \to a} (f(x).g(x)) = L.M.$

f) $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

g) $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = L^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}$.

- Assim, é fácil mostrar que $\lim\limits_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = a^3 - 3a^2 - 2a - 5.$

Limites - Propriedades

- A demonstração segue dos exercícios finais da lista 0.
- Por exemplo, para demonstrar a propriedade do produto, use o exercício 7: sendo $\varepsilon > 0$, mostre que se
$$|x - x_0| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1\right) \quad \text{e} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)},$$
então
$$|x.y - x_0.y_0| < \varepsilon.$$
- Para mostrar a propriedade do quociente use que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x).\dfrac{1}{g(x)}$ e o exercício 8.

Limites - Propriedades

- A demonstração segue dos exercícios finais da lista 0.
- Por exemplo, para demonstrar a propriedade do produto, use o exercício 7: sendo $\varepsilon > 0$, mostre que se
$$|x - x_0| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right) \quad \text{e} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)},$$
então
$$|x.y - x_0.y_0| < \varepsilon.$$
- Para mostrar a propriedade do quociente use que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x).\dfrac{1}{g(x)}$ e o exercício 8.

Limites - Propriedades

- A demonstração segue dos exercícios finais da lista 0.
- Por exemplo, para demonstrar a propriedade do produto, use o exercício 7: sendo $\varepsilon > 0$, mostre que se
$$|x - x_0| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right) \quad \text{e} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)},$$
então
$$|x.y - x_0.y_0| < \varepsilon.$$
- Para mostrar a propriedade do quociente use que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x).\dfrac{1}{g(x)}$ e o exercício 8.

Definição 1.2.

Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto no domínio de uma função f. Dizemos que f é contínua em a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definição 1.3.

Uma função f é dita contínua se for contínua em todo ponto do seu domínio

Exercício.

Mostre que as funções que estão nas famílias abaixo são contínuas em seus domínios

- Polinomiais.
- Racionais.

Funções Contínuas

Definição 1.2.

Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto no domínio de uma função f. Dizemos que f é contínua em a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definição 1.3.

Uma função f é dita contínua se for contínua em todo ponto do seu domínio

Exercício.

Mostre que as funções que estão nas famílias abaixo são contínuas em seus domínios

- Polinomiais.
- Racionais.

Funções Contínuas

Definição 1.2.

Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto no domínio de uma função f. Dizemos que f é contínua em a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definição 1.3.

Uma função f é dita contínua se for contínua em todo ponto do seu domínio

Exercício.

Mostre que as funções que estão nas famílias abaixo são contínuas em seus domínios

- Polinomiais.
- Racionais.

Limites - Propriedades

- Pelas propriedades, muitos limites ficam triviais de serem calculados.
- Um caso não trivial envolvendo quociente de funções, seria o seguinte: se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, como calcular o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\,?$$

- Não dá pra usar a regra do quociente.
- Em alguns casos simplificamos o quociente para determinar.
- Antes de ver exemplos, é importante a observação abaixo:

Observação 1.4.

Seja I um intervalo aberto com $a \in I$. Considere funções f e g definidas em I exceto, possivelmente, no ponto a. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, vale a igualdade abaixo, caso um dos limites existam

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Limites - Propriedades

- Pelas propriedades, muitos limites ficam triviais de serem calculados.
- Um caso não trivial envolvendo quociente de funções, seria o seguinte: se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, como calcular o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\ ?$$

- Não dá pra usar a regra do quociente.
- Em alguns casos simplificamos o quociente para determinar.
- Antes de ver exemplos, é importante a observação abaixo:

Observação 1.4.

Seja I um intervalo aberto com $a \in I$. Considere funções f e g definidas em I exceto, possivelmente, no ponto a. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, vale a igualdade abaixo, caso um dos limites existam

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Limites - Propriedades

- Pelas propriedades, muitos limites ficam triviais de serem calculados.
- Um caso não trivial envolvendo quociente de funções, seria o seguinte: se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, como calcular o limite
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\ ?$$
- Não dá pra usar a regra do quociente.
- Em alguns casos simplificamos o quociente para determinar.
- Antes de ver exemplos, é importante a observação abaixo:

Observação 1.4.

Seja I um intervalo aberto com $a \in I$. Considere funções f e g definidas em I exceto, possivelmente, no ponto a. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, vale a igualdade abaixo, caso um dos limites existam
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Limites - Propriedades

- Pelas propriedades, muitos limites ficam triviais de serem calculados.
- Um caso não trivial envolvendo quociente de funções, seria o seguinte: se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, como calcular o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\ ?$$

- Não dá pra usar a regra do quociente.
- Em alguns casos simplificamos o quociente para determinar.
- Antes de ver exemplos, é importante a observação abaixo:

Observação 1.4.

Seja I um intervalo aberto com $a \in I$. Considere funções f e g definidas em I exceto, possivelmente, no ponto a. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, vale a igualdade abaixo, caso um dos limites existam

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Limites - Propriedades

- Pelas propriedades, muitos limites ficam triviais de serem calculados.
- Um caso não trivial envolvendo quociente de funções, seria o seguinte: se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, como calcular o limite
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\,?$$
- Não dá pra usar a regra do quociente.
- Em alguns casos simplificamos o quociente para determinar.
- Antes de ver exemplos, é importante a observação abaixo:

Observação 1.4.

Seja I um intervalo aberto com $a \in I$. Considere funções f e g definidas em I exceto, possivelmente, no ponto a. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, vale a igualdade abaixo, caso um dos limites existam
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Limites - Propriedades

- Pelas propriedades, muitos limites ficam triviais de serem calculados.
- Um caso não trivial envolvendo quociente de funções, seria o seguinte: se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, como calcular o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\,?$$

- Não dá pra usar a regra do quociente.
- Em alguns casos simplificamos o quociente para determinar.
- Antes de ver exemplos, é importante a observação abaixo:

Observação 1.4.

Seja I um intervalo aberto com $a \in I$. Considere funções f e g definidas em I exceto, possivelmente, no ponto a. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, vale a igualdade abaixo, caso um dos limites existam

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Exemplo 1.5.

Determine os limites abaixo

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-3x+6}{x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-3x^2+3x+6}{2x+2}$.

c) $\lim\limits_{t\to 4} 10\dfrac{\sqrt{t}-2}{t-4}$.

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$.

- O último limite não existe, mas a função se aproxima de números à esquerda e à direita de 2.
- A definição formal é mesma, apenas tem que especificar se estamos nos aproximando à esquerda ou à direita do ponto.

Exemplo 1.5.

Determine os limites abaixo

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-3x+6}{x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-3x^2+3x+6}{2x+2}$.

c) $\lim\limits_{t\to 4} 10\dfrac{\sqrt{t}-2}{t-4}$.

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$.

- O último limite não existe, mas a função se aproxima de números à esquerda e à direita de 2.
- A definição formal é mesma, apenas tem que especificar se estamos nos aproximando à esquerda ou à direita do ponto.

Limites - Propriedades

Exemplo 1.5.

Determine os limites abaixo

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{-3x+6}{x-2}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{-3x^2+3x+6}{2x+2}$.

c) $\displaystyle\lim_{t\to 4} 10\frac{\sqrt{t}-2}{t-4}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{|x-2|}$.

- O último limite não existe, mas a função se aproxima de números à esquerda e à direita de 2.
- A definição formal é mesma, apenas tem que especificar se estamos nos aproximando à esquerda ou à direita do ponto.