Cálculo 1 - HONORS - CM311

Recapitulação
Taxas de Variação e Diferenciais

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Relembrando...

- Ideias principais: limite, continuidade e **derivadas**.
- Dois exemplos para aquecer

Exemplo 1.1.

Calcule y', onde

$$y = (x^3 + \ln(x^2 + 1)).\operatorname{cossec}(e^{2x-3}).$$

Exemplo 1.2.

Suponha que f seja uma função que satisfaça

$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2.$

Calcule $f'(x)$.

Relembrando...

- Ideias principais: limite, continuidade e **derivadas**.
- Dois exemplos para aquecer

Exemplo 1.1.

Calcule y', onde
$$y = (x^3 + \ln(x^2+1)).\,\text{cossec}(e^{2x-3}).$$

Exemplo 1.2.

Suponha que f seja uma função que satisfaça
$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$.
Calcule $f'(x)$.

Relembrando...

- Ideias principais: limite, continuidade e **derivadas**.
- Dois exemplos para aquecer

Exemplo 1.1.

Calcule y', onde

$$y = (x^3 + \ln(x^2+1)).\operatorname{cossec}(e^{2x-3}).$$

Exemplo 1.2.

Suponha que f seja uma função que satisfaça $f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$. Calcule $f'(x)$.

Relembrando...

- Ideias principais: limite, continuidade e **derivadas**.
- Dois exemplos para aquecer

Exemplo 1.1.

Calcule y', onde

$$y = (x^3 + \ln(x^2 + 1)).\operatorname{cossec}(e^{2x-3}).$$

Exemplo 1.2.

Suponha que f seja uma função que satisfaça

$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$.

Calcule $f'(x)$.

Taxas de Variação

- Sendo $y = f(x)$, a derivada mede a taxa de variação instantânea de y com relação à x:
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
- Na notação de Leibniz, sendo $\Delta x = h$ e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$:
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para $dx = \Delta x \approx 0$ temos $\Delta y \approx dy = f'(x)dx$.
- Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$, a Regra da Cadeia fica
$$y' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}.$$
- A fórmula acima relaciona as taxas de variação das medidas y, u, x quando estão relacionadas da forma acima.
- Essa fórmula pode ser útil para calcular alguma das taxas de variação, conhecendo as outras duas.

Taxas de Variação

- Sendo $y = f(x)$, a derivada mede a taxa de variação instantânea de y com relação à x:
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
- Na notação de Leibniz, sendo $\Delta x = h$ e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$:
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para $dx = \Delta x \approx 0$ temos $\Delta y \approx dy = f'(x)dx$.
- Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$, a Regra da Cadeia fica
$$y' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}.$$
- A fórmula acima relaciona as taxas de variação das medidas y, u, x quando estão relacionadas da forma acima.
- Essa fórmula pode ser útil para calcular alguma das taxas de variação, conhecendo as outras duas.

Taxas de Variação

- Sendo $y = f(x)$, a derivada mede a taxa de variação instantânea de y com relação à x:
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
- Na notação de Leibniz, sendo $\Delta x = h$ e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$:
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para $dx = \Delta x \approx 0$ temos $\Delta y \approx dy = f'(x)dx$.
- Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$, a Regra da Cadeia fica
$$y' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}.$$
- A fórmula acima relaciona as taxas de variação das medidas y, u, x quando estão relacionadas da forma acima.
- Essa fórmula pode ser útil para calcular alguma das taxas de variação, conhecendo as outras duas.

Taxas de Variação

- Sendo $y = f(x)$, a derivada mede a taxa de variação instantânea de y com relação à x:
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
- Na notação de Leibniz, sendo $\Delta x = h$ e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$:
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para $dx = \Delta x \approx 0$ temos $\Delta y \approx dy = f'(x)dx$.
- Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$, a Regra da Cadeia fica
$$y' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}.$$
- A fórmula acima relaciona as taxas de variação das medidas y, u, x quando estão relacionadas da forma acima.
- Essa fórmula pode ser útil para calcular alguma das taxas de variação, conhecendo as outras duas.

Taxas de Variação

- Sendo $y = f(x)$, a derivada mede a taxa de variação instantânea de y com relação à x:
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
- Na notação de Leibniz, sendo $\Delta x = h$ e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$:
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para $dx = \Delta x \approx 0$ temos $\Delta y \approx dy = f'(x)dx$.
- Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$, a Regra da Cadeia fica
$$y' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}.$$
- A fórmula acima relaciona as taxas de variação das medidas y, u, x quando estão relacionadas da forma acima.
- Essa fórmula pode ser útil para calcular alguma das taxas de variação, conhecendo as outras duas.

Taxas de Variação

- Sendo $y = f(x)$, a derivada mede a taxa de variação instantânea de y com relação à x:
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
- Na notação de Leibniz, sendo $\Delta x = h$ e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$:
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para $dx = \Delta x \approx 0$ temos $\Delta y \approx dy = f'(x)dx$.
- Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$, a Regra da Cadeia fica
$$y' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}.$$
- A fórmula acima relaciona as taxas de variação das medidas y, u, x quando estão relacionadas da forma acima.
- Essa fórmula pode ser útil para calcular alguma das taxas de variação, conhecendo as outras duas.

Taxas Relacionadas

Exemplo 2.1.

Se uma bola de neve derrete de forma que a área de sua superfície decresce a uma taxa de 1 cm^2/min, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10 cm. Aqui, $A = 4\pi r^2$.

Exemplo 2.2.

Uma escada de 8 m está encostada em uma parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/s, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a extremidade inferior estiver a 3 m da parede?

Exemplo 2.1.

Se uma bola de neve derrete de forma que a área de sua superfície decresce a uma taxa de 1 cm^2/min, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10 cm. Aqui, $A = 4\pi r^2$.

Exemplo 2.2.

Uma escada de 8 m está encostada em uma parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/s, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a extremidade inferior estiver a 3 m da parede?

Estimativas Usando Diferenciais

- Sendo $y = f(x)$ com f derivável temos
$$\Delta y \approx dy = f'(x)\, dx.$$
- A expressão acima não é uma igualdade.
- Mas Δy fica próximo de dy ao tomarmos dx perto de 0.
- Como $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$ podemos usar a diferencial para obter uma estimativa do valor $f(x + dx)$, se $dx = \Delta x \approx 0$:

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x).dx.$$

Estimativas Usando Diferenciais

- Sendo $y = f(x)$ com f derivável temos
$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx.$$
- A expressão acima não é uma igualdade.
- Mas Δy fica próximo de dy ao tomarmos dx perto de 0.
- Como $\Delta y = f(x+dx) - f(x)$ podemos usar a diferencial para obter uma estimativa do valor $f(x+dx)$, se $dx = \Delta x \approx 0$:

$$f(x+dx) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x).dx.$$

Estimativas Usando Diferenciais

- Sendo $y = f(x)$ com f derivável temos
$$\Delta y \approx dy = f'(x)\, dx.$$
- A expressão acima não é uma igualdade.
- Mas Δy fica próximo de dy ao tomarmos dx perto de 0.
- Como $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$ podemos usar a diferencial para obter uma estimativa do valor $f(x + dx)$, se $dx = \Delta x \approx 0$:
$$f(x + dx) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x).dx.$$

Estimativas Usando Diferenciais

- Sendo $y = f(x)$ com f derivável temos
$$\Delta y \approx dy = f'(x)\, dx.$$
- A expressão acima não é uma igualdade.
- Mas Δy fica próximo de dy ao tomarmos dx perto de 0.
- Como $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$ podemos usar a diferencial para obter uma estimativa do valor $f(x + dx)$, se $dx = \Delta x \approx 0$:

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x).dx.$$

Exemplo 2.3.

Sendo $f(x) = 3xe^{2x-10}$, use a diferencial no ponto $x = 5$ para estimar o valor de $f(5{,}03)$.

Exemplo 2.4.

Usando diferenciais, explique porque temos $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ para x próximo de 0.

Exemplo 2.5.

Usando diferenciais, estime a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05cm de tinta a um domo esférico (semi-esfera) com diâmetro de 50m.

Estimativas Usando Diferenciais

Exemplo 2.3.

Sendo $f(x) = 3xe^{2x-10}$, use a diferencial no ponto $x = 5$ para estimar o valor de $f(5{,}03)$.

Exemplo 2.4.

Usando diferenciais, explique porque temos $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ para x próximo de 0.

Exemplo 2.5.

Usando diferenciais, estime a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05cm de tinta a um domo esférico (semi-esfera) com diâmetro de 50m.

Estimativas Usando Diferenciais

Exemplo 2.3.

Sendo $f(x) = 3xe^{2x-10}$, use a diferencial no ponto $x = 5$ para estimar o valor de $f(5{,}03)$.

Exemplo 2.4.

Usando diferenciais, explique porque temos $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ para x próximo de 0.

Exemplo 2.5.

Usando diferenciais, estime a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05cm de tinta a um domo esférico (semi-esfera) com diâmetro de 50m.

Estimativas Usando Diferenciais

- Se $y = f(x)$ representar uma medida de y em função de x, podemos usar diferenciais para estimar erros em y com relação à erros em x.
- Sendo $dx = \Delta x$ um erro máximo que tivemos ao medir x, o erro máximo cometido ao obter y é Δy:
- Assim podemos aproximar usando diferenciais

$$(\text{Erro máx. em } y) = \Delta y \approx dy = f'(x).dx = f'(x).(\text{Erro máx. em } x).$$

- O **erro relativo** é por definição o quociente entre o erro e a medida realizada. Podemos também usar diferenciais para aproximar esta medida de erro

$$\text{Erro relativo em } y = \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}.$$

Estimativas Usando Diferenciais

- Se $y = f(x)$ representar uma medida de y em função de x, podemos usar diferenciais para estimar erros em y com relação à erros em x.
- Sendo $dx = \Delta x$ um erro máximo que tivemos ao medir x, o erro máximo cometido ao obter y é Δy:
- Assim podemos aproximar usando diferenciais

$$(\text{Erro máx. em } y) = \Delta y \approx dy = f'(x).dx = f'(x).(\text{Erro máx. em } x).$$

- O **erro relativo** é por definição o quociente entre o erro e a medida realizada. Podemos também usar diferenciais para aproximar esta medida de erro

$$\text{Erro relativo em } y = \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}.$$

Estimativas Usando Diferenciais

- Se $y = f(x)$ representar uma medida de y em função de x, podemos usar diferenciais para estimar erros em y com relação à erros em x.
- Sendo $dx = \Delta x$ um erro máximo que tivemos ao medir x, o erro máximo cometido ao obter y é Δy:
- Assim podemos aproximar usando diferenciais

  $$(\text{Erro máx. em } y) = \Delta y \approx dy = f'(x).dx = f'(x).(\text{Erro máx. em } x).$$
- O **erro relativo** é por definição o quociente entre o erro e a medida realizada. Podemos também usar diferenciais para aproximar esta medida de erro

  $$\text{Erro relativo em } y = \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}.$$

Estimativas Usando Diferenciais

- Se $y = f(x)$ representar uma medida de y em função de x, podemos usar diferenciais para estimar erros em y com relação à erros em x.
- Sendo $dx = \Delta x$ um erro máximo que tivemos ao medir x, o erro máximo cometido ao obter y é Δy:
- Assim podemos aproximar usando diferenciais
  $(\text{Erro máx. em } y) = \Delta y \approx dy = f'(x).dx = f'(x).(\text{Erro máx. em } x).$
- O **erro relativo** é por definição o quociente entre o erro e a medida realizada. Podemos também usar diferenciais para aproximar esta medida de erro

$$\text{Erro relativo em } y = \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}.$$

Exemplo 2.6.

A aresta de um cubo tem 30cm, com possível erro máximo de medida de 0,1cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível e o erro relativo no cálculo do **(a)** volume do cubo e da **(b)** área superficial do cubo.

Exemplo 2.7.

Sabe-se que um lado de um triângulo retângulo mede 20cm e o ângulo oposto foi medido com 30°, com erro máximo de 1°. Use diferenciais para estimar o erro máximo e o erro relativo no cálculo da hipotenusa.

Estimativas Usando Diferenciais

Exemplo 2.6.

A aresta de um cubo tem 30cm, com possível erro máximo de medida de 0,1cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível e o erro relativo no cálculo do **(a)** volume do cubo e da **(b)** área superficial do cubo.

Exemplo 2.7.

Sabe-se que um lado de um triângulo retângulo mede 20cm e o ângulo oposto foi medido com 30°, com erro máximo de 1°. Use diferenciais para estimar o erro máximo e o erro relativo no cálculo da hipotenusa.