CM311 - Cálculo 1
Honors - 1sem2024
Prof. Diego Otero
Lista de Exercícios 2

Problemas

1 Mais Limites e Funções Contínuas

1. Calcule os limites abaixo usando, quando necessário, as propriedades de limites laterais e limites infinitos

a) $\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$.

b) $\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$.

c) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$.

d) $\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

e) $\lim_{x\to 3^-} \frac{4}{x-3}$.

f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x^2-x}$.

g) $\lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x^2-x}$.

h) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$.

i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$.

2. Suponha f, g definidas em um intervalo aberto I exceto em a, possivelmente. Se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L$, onde $L \in \mathbb{R}$, mostre que

a) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$.

b) $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = -\infty$, se $L > 0$.

c) $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = +\infty$, se $L < 0$.

d) Se $L = 0$, é possível dizer alguma coisa sobre o limite $\lim_{x\to a}(f(x).g(x))$.

3. Suponha f, g definidas em um intervalo aberto I exceto em a, possivelmente. Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, mostre que

a) $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = -\infty$.

b) É possível dizer alguma coisa sobre o limite $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$?

c) É possível dizer alguma coisa sobre o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$?

4. Calcule os limites abaixo usando propriedades de limites e limites já conhecidos:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}(mx)}$.

b) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg}(3x)$.

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen} x}$.

d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1-\operatorname{tg} x}$.

e) $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}(3x)\operatorname{cossec}(6x)$.

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{x^2}$.

g) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x^3-1)\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt{x-1}}$.

h) $\lim_{x\to 0} x.2^{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})+1} + \frac{4\operatorname{sen}(2x)}{3x}$.

i) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{2x-\pi}$.

j) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{tg} x}{x+\operatorname{tg} x}$.

k) $\lim_{x\to p} \frac{\operatorname{tg}(x-p)}{x^2-p^2}$, $p \neq 0$.

l) $\lim_{x\to p} \frac{\operatorname{sen}(x^2-p^2)}{x-p}$.

m) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x))}{x}$.

n) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2+\frac{1}{x})-\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x}$.

o) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$.

5. Calcule os limites abaixo onde p é um ponto no domínio das funções trigonométricas em cada item:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p}{x-p}$. b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} p}{x-p}$. c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sec x - \sec p}{x-p}$.

6. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Calcule os limites abaixo

   a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(3x)}{x}$. b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x^2)}{x}$. c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x^2-1)}{x-1}$. d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(6x)}{3x}$.

7. Seja f definida em $\mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$. Sabendo que $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} = L$, calcule

   a) $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(p+h)-f(p)}{h}$.

   b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(p+h)-f(p-h)}{h}$.

   c) $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(p+3h)-f(p)}{h}$.

   d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(p-h)-f(p)}{h}$.

8. Seja f definida em um intervalo aberto I exceto em $a \in I$, possivelmente. Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$. Prove a *Lei de Conservação de Sinal*: mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$, $0 < |x-a| < \delta$ temos $f(x) > 0$. Além disso, prove um resultado análogo para $L < 0$ e discuta o caso $L = 0$.

9. Para cada uma das funções abaixo, encontre e classifique os pontos de descontinuidade

   a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4)+5 & , \text{ se } x > 2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2} & , \text{ se } x < 2 \\ 5 & , \text{ se } x = 2 \end{cases}$.

   b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{|x-3|} & , \text{ se } x \neq 3 \\ 1 & , \text{ se } x = 3 \end{cases}$.

   c) $f(x) = \dfrac{1+(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{2} \operatorname{sen}(\pi x)$.

10. Suponha que f esteja definida em $\mathbb{R}$, que satisfaça $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e que f seja contínua em 0. Mostre que f é contínua em todo $p \in \mathbb{R}$.

11. Suponha que $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua em 0.

12. Dê um exemplo de uma função que é contínua em 0, mas que seja descontínua em todo outro ponto.

13. Sabendo que g é contínua em 0, $g(0) = 0$ e $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que f é contínua em 0.

14. Seja f definida em $\mathbb{R}$ e suponha que f é contínua em a com $f(a) = 0$. Mostre que se $\alpha \neq 0$, então existe um intervalo aberto I contendo o ponto a tal que a função $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, onde $g(x) = f(x) + \alpha$.

15. Faça o que se pede

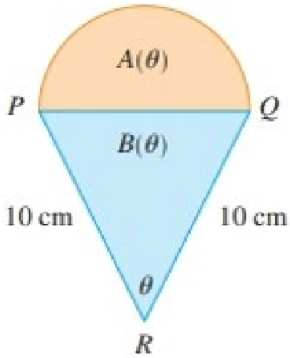
   a) Mostre que se f é contínua em a então a função $|f|$ também é contínua em a.

   b) Sendo f uma função contínua definida em $\mathbb{R}$, mostre $f = g+h$, onde g é uma função contínua ímpar e h é uma função contínua par.

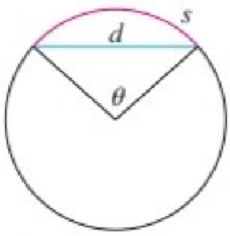
   c) Mostre que se f, g são contínuas, então $\max(f, g)$ também é contínua.

   d) Mostre que toda função contínua f pode ser escrita como $f = g - h$, onde g, h são funções contínuas não negativas.

16. Um semi-círculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com formato de sorvete, conforme mostra a figura. Se $A(\theta)$ é a área do semi círculo e $B(\theta)$ é a área do triângulo, encontre $\lim_{\theta \to 0^+} \dfrac{A(\theta)}{B(\theta)}$.



17. A figura abaixo mostra um arco de círculo com comprimento s e uma corda com comprimento d, ambos subentendidos por um ângulo central θ. Calcule $\lim_{\theta \to 0^+} \dfrac{s}{d}$.



2 Derivadas

1. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $(a, f(a))$ nos casos abaixo

   a) $f(x) = x^2, a = 2$.

   b) $f(x) = \sqrt{x}, a = 9$.

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, a = 2$.

   d) $f(x) = \operatorname{sen} x, a = 0$.

2. Seja $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$. Determine o ponto do gráfico de f em que a reta tangente, neste ponto, seja paralela ao eixo x.

3. Dê um exemplo, exibindo o gráfico de uma função f, definida em $\mathbb{R}$, que satisfaça as condições de cada item abaixo

   a) f é derivável e $f'(1) = 0$.

   b) f é derivável e $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) f é derivável, $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e f é limitada em $\mathbb{R}$.

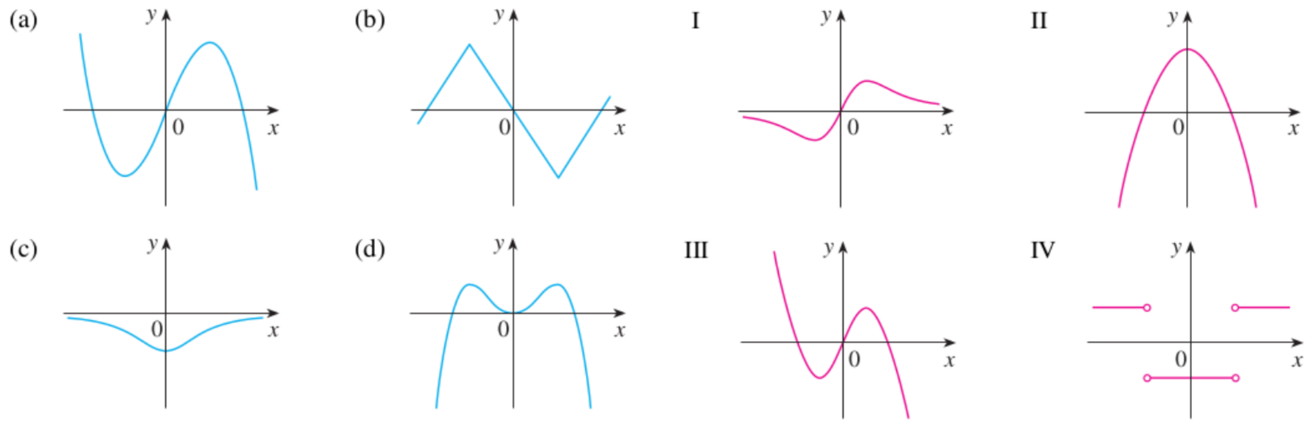
   d) f é derivável, $f'(0) < f'(1)$.

   e) f é contínua e $f'(1)$ não existe.

   f) f é derivável e $f'(x) > 0$ para $x < 1$ e $f'(x) < 0$ para $x > 1$.

   g) f é contínua e $f'(-1)$, $f'(0)$ e $f'(1)$ não existem.

4. Associe o gráfico de cada função de (a), (b), (c), (d), com o gráfico de sua derivada em I, II, III, IV. Justifique



5. Seja f um função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x^3 + x^2|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f é derivável em 0?

6. Seja f derivável em $(0, +\infty)$. Calcule em termos de $f'(a)$ o limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$, para $a \in (0, +\infty)$.

7. Sendo $a \neq 0$, mostre que a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto $x = a$ não intersecta o gráfico de f, com exceção do ponto $(a, \frac{1}{a})$.

8. Sendo f uma função derivável e $c \in \mathbb{R}$, mostre pela definição de derivada que

   a) Se $g(x) = f(x) + c$ então $g'(x) = f'(x)$.
   b) Se $g(x) = cf(x)$ então $g'(x) = cf'(x)$.
   c) Se $g(x) = f(x + c)$ então $g'(x) = f'(x + c)$.
   d) Se $g(x) = f(cx)$ então $g'(x) = cf'(cx)$.

9. Calcule $f'(x)$ e $f'(x + 3)$ pela definição, nos seguintes casos abaixo:

   a) $f(x) = (x + 3)^5$.
   b) $f(x + 3) = x^5$.
   c) $f(x + 3) = (x + 5)^7$.

10. Mostre que a função $g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x < 1 \\ -x + 4 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ não é derivável em $a = 1$. Esboce o gráfico de g.

11. Seja $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{se } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Mostre que g é derivável em $a = 1$ e calcule $g'(1)$. Esboce o gráfico de g.

12. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Calcule, caso exista, $f'(0)$.

13. Sabendo que para $n \in \mathbb{N}$ temos $(x^n)' = nx^{n-1}$, mostre pela definição de derivada que $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. Calcule, pela definição a derivada das funções abaixo

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   b) $f(x) = \sec x$.
   c) $f(x) = \operatorname{cossec} x$.
   d) $f(x) = \operatorname{cotg} x$.
   e) $f(x) = \cos^2 x$.
   f) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.

15. Se f for uma função derivável e $g(x) = xf(x)$, use a definição de derivada para mostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

16. Suponha que f seja uma função que satisfaça $f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ para todos x, y, e $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Calcule:

    a) $f(0)$.
    b) $f'(0)$.
    c) $f'(x)$.

17. Suponha que f seja uma função com a propriedade que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x. Mostre que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$.

18. Seja g uma função derivável em $x = a$ com $g(a) \neq 0$. Mostre pela definição de derivada, que $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(p)}{g(p)^2}$. Com isso, conclua a fórmula da derivada do quociente, utilizando a fórmula para a derivada do produto.

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto a. Mostre que $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$. Dê um exemplo em que o limite da expressão anterior exista e é finito, mas $f'(a)$ não existe.

20. Prove cada uma das afirmações a seguir:

    a) A derivada de uma função par, é uma função par.
    b) A derivada de uma função ímpar, é uma função ímpar.
    c) A derivada de uma função periódica, é uma função periódica.

21. Calcule f' para as funções f abaixo

    a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$.
    b) $f(x) = x^4 + \operatorname{sen} x$.
    c) $f(x) = x^4 \operatorname{sen} x$.
    d) $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
    e) $f(x) = \frac{x}{x-1}$.
    f) $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$.
    g) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2 + 1}$.
    h) $f(x) = \frac{2 - \operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$.
    i) $f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + x^2}$.
    j) $f(x) = \sqrt{x} \sec x$.
    k) $f(x) = x^2 + 3x \operatorname{tg} x$.
    l) $f(x) = \frac{x + \sqrt[4]{x}}{x^2 + 3}$.
    m) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sec x}$.
    n) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{cossec} x}$.
    o) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$.

22. Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funções com derivadas $f_1', f_2', \ldots, f_n'$. Encontre uma regra para calcular a derivada de $g(x) = f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$. Nos pontos x em que as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ não se anulam, mostre que $\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} \cdots \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$

23. Duas funções f, g possuem primeiras e segundas derivadas em 0 e satisfazem as condições abaixo. Faça o que se pede:

$$f(0) = \frac{2}{g(0)}, \quad f'(0) = 2g'(0) = 4g(0), \quad g''(0) = 5f''(0) = 6f(0) = 3.$$

    a) Sendo $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calcule $h'(0)$.
    b) Sendo $k(x) = f(x)g(x) \operatorname{sen} x$, calcule $k'(0)$.
    c) Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$.

24. Seja f uma função e suponha que $f'(a)$ exista. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) $f'(a) = \lim_{h \to a} \frac{f(h) - f(a)}{h - a}$.

b) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a - f(a - h))}{h}$.

c) $f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + 2t) - f(a)}{t}$.

d) $f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + 2t) - f(a + t)}{2t}$.

25. Suponha que ao invés da definição usual de derivada, definimos uma "outra derivada", denotada por f^* dada por

$$f^*(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^2(x + h) - f^2(x)}{h},$$

onde $f^2(x) = f(x).f(x) = (f(x))^2$. Faça o que se pede:

a) Derive fórmulas da soma, diferença, produto e quociente para calcular essa "outra derivada".

b) Expresse $f^*(x)$ em termos de $f'(x)$.

c) Para quais funções f temos $f^*(x) = f'(x)$?