Cálculo 1 - HONORS - CM311

Limites Infinitos e Regra de L'Hopital

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Relembrando

- Sendo a defina o símbolo $\alpha = a, a^+, a^-, +\infty,$ ou $-\infty$.
- Sejam f, g tais que
$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0 = \lim_{x\to\alpha} g(x) \text{ ou } \lim_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to\alpha} g(x).$$
- Se $\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemplo 1.1.

Calcule os limites abaixo

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Relembrando

- Sendo a defina o símbolo $\alpha = a, a^+, a^-, +\infty,$ ou $-\infty$.
- Sejam f, g tais que
$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0 = \lim_{x\to\alpha} g(x) \text{ ou } \lim_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to\alpha} g(x).$$
- Se $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemplo 1.1.

Calcule os limites abaixo

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Relembrando

- Sendo a defina o símbolo $\alpha = a, a^+, a^-, +\infty,$ ou $-\infty$.
- Sejam f, g tais que
$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0 = \lim_{x\to\alpha} g(x) \text{ ou } \lim_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to\alpha} g(x).$$
- Se $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemplo 1.1.

Calcule os limites abaixo

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Relembrando

- Sendo a defina o símbolo $\alpha = a, a^+, a^-, +\infty,$ ou $-\infty$.
- Sejam f, g tais que
$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0 = \lim_{x\to\alpha} g(x) \text{ ou } \lim_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to\alpha} g(x).$$
- Se $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemplo 1.1.

Calcule os limites abaixo

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Formas Indeterminadas

- Outras expressões não definidas/indeterminadas:

$$0.(\pm\infty),\ \infty+(-\infty),\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^\infty$$

- É possível aplicar a regra de L'Hopital com expressões do tipo acima, porém antes é necessário manipular para deixar em expressões indeterminada do tipo $0/0$ ou ∞/∞.

Exemplo 1.2.

Calcule os limites abaixo

a) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

c) $\lim_{x\to 0} x^x$.

d) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x+1}$.

Formas Indeterminadas

- Outras expressões não definidas/indeterminadas:

$$0.(\pm\infty),\ \infty + (-\infty),\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^\infty$$

- É possível aplicar a regra de L'Hopital com expressões do tipo acima, porém antes é necessário manipular para deixar em expressões indeterminada do tipo $0/0$ ou ∞/∞.

Exemplo 1.2.

Calcule os limites abaixo

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x+1}$.

Formas Indeterminadas

- Outras expressões não definidas/indeterminadas:
$$0.(\pm\infty),\ \infty + (-\infty),\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^\infty$$
- É possível aplicar a regra de L'Hopital com expressões do tipo acima, porém antes é necessário manipular para deixar em expressões indeterminada do tipo $0/0$ ou ∞/∞.

Exemplo 1.2.

Calcule os limites abaixo

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^x.$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x+1}.$

Fórmula de Taylor

- Sendo f uma função derivável de ordem n no ponto a, o polinômio de Taylor de f de ordem n no ponto a é dado por

$$T_{a,n}(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(i)(a)}}{i!}(x-a)^i + \dots \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n.$$

- Reduzidamente temos

$$T_{a,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Teorema 2.1 (Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal).

Sendo f derivável até ordem n em a, considere a função resto $R_{a,n}(x) = f(x) - T_{a,n}(x)$. Temos que

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Fórmula de Taylor

- Sendo f uma função derivável de ordem n no ponto a, o polinômio de Taylor de f de ordem n no ponto a é dado por

$$T_{a,n}(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(i)(a)}}{i!}(x-a)^i + \dots \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n.$$

- Reduzidamente temos

$$T_{a,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Teorema 2.1 (Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal).

Sendo f derivável até ordem n em a, considere a função resto $R_{a,n}(x) = f(x) - T_{a,n}(x)$. Temos que

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Fórmula de Taylor

- Sendo f uma função derivável de ordem n no ponto a, o polinômio de Taylor de f de ordem n no ponto a é dado por

$$T_{a,n}(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(i)(a)}}{i!}(x-a)^i + \ldots \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n.$$

- Reduzidamente temos

$$T_{a,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Teorema 2.1 (Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal).

Sendo f derivável até ordem n em a, considere a função resto $R_{a,n}(x) = f(x) - T_{a,n}(x)$. Temos que

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Teste da Derivada 2a de Extremos Locais

Teorema 2.2.

Suponha que f seja duas vezes derivável em a tal que $f'(a) = 0$. Temos

a) *Se $f''(a) > 0$ então a é mínimo local.*
b) *Se $f''(a) < 0$ então a é máximo local.*
c) *Se $f''(a) = 0$ o teste é inconclusivo.*

Teorema 2.3 (Teste Generalizado de Ordem Superior).

Suponha que $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ com $f^{(n)}(a) \neq 0$.

a) *Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$ então a é mínimo local.*
b) *Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$ então a é máximo local.*
c) *Se n é ímpar então a é ponto de sela.*

Teste da Derivada 2a de Extremos Locais

Teorema 2.2.

Suponha que f seja duas vezes derivável em a tal que $f'(a) = 0$. Temos

a) *Se $f''(a) > 0$ então a é mínimo local.*
b) *Se $f''(a) < 0$ então a é máximo local.*
c) *Se $f''(a) = 0$ o teste é inconclusivo.*

Teorema 2.3 (Teste Generalizado de Ordem Superior).

Suponha que $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ com $f^{(n)}(a) \neq 0$.

a) *Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$ então a é mínimo local.*
b) *Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$ então a é máximo local.*
c) *Se n é ímpar então a é ponto de sela.*

Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

- É possível deduzir outras fórmulas que envolvem o polinômio de Taylor com funções resto diferentes.

Teorema 2.4 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange).

Seja $f : I \to \mathbb{R}$, $n+1$ vezes derivável. Sendo $[a, x] \subset I$ temos que existe $c \in (a, x)$ tal que

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1}.$$

Ideia da Prova:

Ideia: considere a função abaixo e use o teorema de Rolle, onde K é uma constante que vamos determinar

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i + K(x-t)^{n+1}.$$

$\square$

Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

- É possível deduzir outras fórmulas que envolvem o polinômio de Taylor com funções resto diferentes.

Teorema 2.4 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange).

Seja $f : I \to \mathbb{R}$, $n+1$ vezes derivável. Sendo $[a, x] \subset I$ temos que existe $c \in (a, x)$ tal que

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1}.$$

Ideia da Prova:

Ideia: considere a função abaixo e use o teorema de Rolle, onde K é uma constante que vamos determinar

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i + K(x-t)^{n+1}.$$

Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

- É possível deduzir outras fórmulas que envolvem o polinômio de Taylor com funções resto diferentes.

Teorema 2.4 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange).

Seja $f : I \to \mathbb{R}$, $n+1$ vezes derivável. Sendo $[a, x] \subset I$ temos que existe $c \in (a, x)$ tal que

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1}.$$

Ideia da Prova:

Ideia: considere a função abaixo e use o teorema de Rolle, onde K é uma constante que vamos determinar

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i + K(x-t)^{n+1}.$$

$\square$

Aproximações Usando a Fórmula de Taylor

- Podemos usar a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para aproximar valores de funções, supondo estimativas nas derivadas.

Proposição 2.5.

Considere f derivável até ordem $n+1$ no intervalo aberto I e $a \in I$. Supondo que exista $M > 0$ tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para todo $x \in I$, então

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Exemplo 2.6.

Calcule $T_{4,0}$ de $f(x) = \cos x$. Use este polinômio para aproximar o valor de $\cos(0,1)$ e estime o erro usando o resto de Lagrange.

Exemplo 2.7.

Obtenha uma aproximação de e com exatidão até a quinta casa decimal, usando polinômio de Taylor.

Aproximações Usando a Fórmula de Taylor

- Podemos usar a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para aproximar valores de funções, supondo estimativas nas derivadas.

Proposição 2.5.

Considere f derivável até ordem $n+1$ no intervalo aberto I e $a \in I$. Supondo que exista $M > 0$ tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para todo $x \in I$, então

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Exemplo 2.6.

Calcule $T_{4,0}$ de $f(x) = \cos x$. Use este polinômio para aproximar o valor de $\cos(0,1)$ e estime o erro usando o resto de Lagrange.

Exemplo 2.7.

Obtenha uma aproximação de e com exatidão até a quinta casa decimal, usando polinômio de Taylor.

Aproximações Usando a Fórmula de Taylor

- Podemos usar a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para aproximar valores de funções, supondo estimativas nas derivadas.

Proposição 2.5.

Considere f derivável até ordem $n+1$ no intervalo aberto I e $a \in I$. Supondo que exista $M > 0$ tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para todo $x \in I$, então

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Exemplo 2.6.

Calcule $T_{4,0}$ de $f(x) = \cos x$. Use este polinômio para aproximar o valor de $\cos(0,1)$ e estime o erro usando o resto de Lagrange.

Exemplo 2.7.

Obtenha uma aproximação de e com exatidão até a quinta casa decimal, usando polinômio de Taylor.

Aproximações Usando a Fórmula de Taylor

- Podemos usar a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para aproximar valores de funções, supondo estimativas nas derivadas.

Proposição 2.5.

Considere f derivável até ordem $n+1$ no intervalo aberto I e $a \in I$. Supondo que exista $M > 0$ tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para todo $x \in I$, então

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Exemplo 2.6.

Calcule $T_{4,0}$ de $f(x) = \cos x$. Use este polinômio para aproximar o valor de $\cos(0,1)$ e estime o erro usando o resto de Lagrange.

Exemplo 2.7.

Obtenha uma aproximação de e com exatidão até a quinta casa decimal, usando polinômio de Taylor.