UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM304 Complementos de Matemática - 2024/1

Lista 3 Conjuntos

1. Sejam

$$A = \{1, 2, 5, 7\} \qquad B = \{1, 2, 4, 7, 8\} \qquad C = \{7, 8\}$$

Quais das proposições a seguir são verdadeiras? Justifique.

(a) $5 \subseteq A$ (c) $\{5\} \subseteq A$ (e) $\varnothing \in A$ (g) $\{2, 5\} \subseteq A$ (i) $A \subseteq B$
(b) $5 \in A$ (d) $C \subseteq B$ (f) $7 \in B$ (h) $\varnothing \subseteq C$ (j) $\{5\} \in A$

2. Considere o conjunto universo $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, construa o Diagrama de Venn para representar os conjuntos do Exercício 1.

3. Sejam

$$R = \{1, 3, \pi, 4, 9, 10\} \qquad S = \{\{1\}, 3, 9, 10\} \qquad T = \{1, 3, \pi\} \qquad V = \{\{1, \pi, 3\}, 1\}$$

Classifique as proposições a seguir como verdadeiras ou falsas? Justifique sua resposta.

(a) $\{1\} \in S$ (c) $1 \in R$ (e) $T \in V$ (g) $T \subseteq R$ (i) $1 \subseteq V$
(b) $1 \in S$ (d) $T \subseteq V$ (f) $T \notin R$ (h) $\{1\} \subseteq S$ (j) $S \subseteq R$

4. Escreva por extensão cada um dos seguintes conjuntos:

(a) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$
(b) $\{p \in \mathbb{Z} \mid p \text{ é primo ímpar e } p < 20\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ é solução da equação } x^2 - 2 = 0\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ é solução da equação } x^2 + 1 = 0\}$
(e) $\{a \in \mathbb{Z} \mid 9 < a^2 < 49\}$
(f) $\{t_n \mid t_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \text{ e } t_n < 12\}$

5. Em cada um dos seguintes conjuntos determine um conjunto universo e alguma propriedade $P(x)$ sobre seus elementos, que permita escrever cada um dos conjuntos por compreensão, ou seja, da forma $\{x \in \mathcal{U} \mid P(x)\}$:

(a) $\{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$
(b) $\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$
(c) $\{5, 7, 9, 11, 13, \cdots\}$
(d) $\{5, 7, 9, 11, 13\}$
(e) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$
(f) $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots\}$
(g) $\{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$

6. Considere $A = \{a, b, c, d, e\}$.

(a) Encontre todos os subconjuntos de A, ou seja, descreva os elementos de $\mathcal{P}(A)$.
(b) Quanto subconjuntos com 2 elementos tem A?

Reflita: Dados dos números inteiros n e k com $k \leq n$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é um número que representa de quantas maneiras diferentes podemos escolher k elementos de um conjunto de n elementos, sem considerar a ordem da escolha. Esse numero é definido como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

onde $n!$ denota o fatorial de n e é definido como: $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. Qual é a relação entre o coeficiente binomial e o cardinal do conjunto de partes.

7. Demonstre que:
   (a) $a \in A$ se, e somente se, $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$;
   (b) $A \subseteq B$ se, e somente se, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;
   (c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
   (d) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

8. Demonstrar que $\{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}\}$.

9. Investigue se o valor lógico da proposição $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Justifique sua resposta.

10. Considere o conjunto universo $\mathcal{U} = \{p, q, r, s, t, u, v, w, \}$, e considere os seguintes conjuntos

    $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{r, t, v\}$, $C = \{p, s, t, u\}$.

    Encontre:

    (a) $B \cap C$, (c) C^C, (e) $A \cup B \cup C$, (g) $A \cap (B \cup C)$, (i) $(A \cap C)^C$,
    (b) $A \cup C$, (d) $A \cap B \cap C$, (f) $B \cup C$, (h) $C \cup (A \cap B)$, (j) B^C.

    Construa o diagrama de Venn para representar cada caso.

11. Considere os seguintes subconjuntos do conjunto de todos os estudantes:

    $A =$ o conjunto de todos os estudantes de ciência da computação.
    $B =$ o conjunto de todos os estudantes de física.
    $C =$ o conjunto de todos os estudantes de matemática.
    $D =$ o conjunto de todas as estudantes mulheres.

    Usando as operações definidas nos conjuntos, descreva cada um dos conjuntos a seguir em termos de A, B, C e D:

    (a) o conjunto de todos os estudantes que não são de matemática.
    (b) o conjunto de todas as mulheres estudantes de física.
    (c) o conjunto de todos os estudantes que pretendem se formar, ao mesmo tempo, em ciência da computação e em física.
    (d) o conjunto de todos os homens estudantes de ciência da computação.
    (e) o conjunto de todos os homens que não são estudantes de física.
    (f) o conjunto de todos os estudantes de matemática que não são de ciência da computação.
    (g) o conjunto de todos os estudantes que são mulheres ou que estudam matemática.
    (h) o conjunto de todos os estudantes de matemática que não estudam ciência da computação nem física.

12. Seja $\mathcal{U}$ um conjunto universo e A e B dois subconjuntos dele. Definimos a **diferença simétrica** de A por B, denotada por $A\Delta B$, como o conjunto a seguir:

    $$A\Delta B := (A - B) \cup (B - A).$$

    (a) Desenhe um diagrama de Venn que ilustre $A\Delta B$.
    (b) Se $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$, $A = \{3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, determine a diferença simétrica de A por B.
    (c) Prove que a diferença simétrica é comutativa: $A\Delta B = B\Delta A$.
    (d) Quem são $A\Delta\mathcal{U}$ e $A\Delta\varnothing$?
    (e) Mostre que $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

13. Investigue se a diferença de conjuntos é uma operação associativa, isso é, se para A, B e C conjuntos quaisquer, é verdade que $(A - B) - C = A - (B - C)$.

14. Sejam A, B e C conjuntos. Prove as seguintes afirmações, e não esqueça ilustrar cada situação usando diagramas de Venn.

    (a) $A \cap B = A$ se, e somente se, $A \subseteq B$.

    (b) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ se, e somente se, $C \subseteq A$.

    (c) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

    (d) $(A - B) - C = (A - C) - B$.

    (e) $A - (A - B) = A \cap B$.