UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM304 Complementos de Matemática

Lista de Exercícios 6

1. Mostre que cada uma das seguintes congruências é verdadeira:
   (a) $13 \equiv 1 \pmod{2}$
   (b) $22 \equiv 7 \pmod{5}$
   (c) $91 \equiv 0 \pmod{13}$
   (d) $69 \equiv 62 \pmod{7}$
   (e) $-2 \equiv 1 \pmod{3}$
   (f) $-3 \equiv 30 \pmod{11}$
   (g) $111 \equiv -9 \pmod{40}$
   (h) $666 \equiv 0 \pmod{37}$

2. Para cada um dos pares de inteiros abaixo, determine se eles são congruentes módulo 7:
   (a) 1, 15
   (b) 0, 42
   (c) 2, 99
   (d) -1, 8
   (e) -9, 5
   (f) -1, 699

3. Para quais inteiros positivos m cada uma das seguintes afirmações é verdadeira?
   (a) $27 \equiv 5 \pmod{m}$
   (b) $1000 \equiv 1 \pmod{m}$
   (c) $1331 \equiv 0 \pmod{m}$

4. Mostre que se a é um inteiro par, então $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$, e se a é um inteiro ímpar, então $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

5. Encontre o resto da divisão dos seguintes números:
   (a) 2^{35} dividido por 7
   (b) 5^{31} dividido por 12
   (c) 23^{1001} dividido por 17
   (d) 19^{1976} dividido por 23

6. Mostre que se a é um inteiro ímpar, então $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

7. Encontre o menor resíduo não-negativo módulo 13 de cada um dos seguintes inteiros:
   (a) 22
   (b) 100
   (c) 1001
   (d) -1
   (e) -100
   (f) -1000

8. Encontre o menor resíduo não-negativo módulo 28 de cada um dos seguintes inteiros:
   (a) 99
   (b) 1100
   (c) 12 345
   (d) -1
   (e) -1000
   (f) $-54\,321$

9. Encontre o menor resíduo positivo de $1! + 2! + 3! + \cdots + 10!$ módulo cada um dos seguintes inteiros:
   (a) 3
   (b) 11
   (c) 4
   (d) 23

10. Encontre o menor resíduo positivo de $1! + 2! + 3! + \cdots + 100!$ módulo cada um dos seguintes inteiros:

(a) 2
(b) 7
(c) 12
(d) 25

11. Encontre todos os inteiros x que satisfazem:

(a) $2x \equiv 1 \pmod 7$
(b) $2x \equiv 3 \pmod 7$
(c) $3x \equiv 9 \pmod{13}$
(d) $5x \equiv 7 \pmod{13}$
(e) $4x \equiv 2 \pmod 9$
(f) $6x \equiv 5 \pmod{11}$
(g) $7x \equiv 1 \pmod{10}$
(h) $8x \equiv 6 \pmod{14}$
(i) $9x \equiv 4 \pmod{13}$
(j) $11x \equiv 3 \pmod{17}$

12. Prove cada uma das proposições a seguinte, onde a, n, p são inteiros positivos e p é primo.

(a) Se $2a \equiv 0 \pmod p$ e p é um primo ímpar, então $a \equiv 0 \pmod p$.
(b) Verifique que $n^2 + n \equiv 0 \pmod 2$.
(c) Verifique que $n^4 + 2n^3 + n^2 \equiv 0 \pmod 4$.
(d) Verifique que $2n^3 + 3n^2 + n \equiv 0 \pmod 6$.