

"... Um profissional de qualquer campo da computação não deve considerar o computador como uma caixa preta que executa programas por mágica" (IEEE/ACM Computer Science Curriculum, 2008).

# Mapas de karnaugh

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida



# Mapas de Karnaugh

Método gráfico para:

- Simplificar equações booleanas;

- Converter tabelas verdade em suas respectivas equações.

**Mostra a mesma informação que a tabela verdade.**

# Mapas de Karnaugh

Método gráfico para:

- Simplificar equações booleanas;

- Converter tabelas verdade em suas respectivas equações.

**Mostra a mesma informação que a tabela verdade.**

Na teoria serve para problemas envolvendo qualquer número de variáveis.

- Na prática, problemas com mais de 6 variáveis se tornam difíceis de serem resolvidos por humanos.

- Mesmo uma quantidade relativamente pequena de variáveis (e.g., 32) pode ser impraticável para uma máquina.

# Exemplo

Tabela verdade

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\bar{A}\bar{B}$

$AB$

Mapa de Karnaugh

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	1	0
A	0	1

# Exemplo

Tabela verdade

A	B	C	X
0	0	0	1 $\rightarrow \overline{A}\overline{B}\overline{C}$
0	0	1	1 $\rightarrow \overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	1 $\rightarrow \overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1 $\rightarrow AB\overline{C}$
1	1	1	0

# Exemplo

Tabela verdade

A	B	C	X
0	0	0	1 → $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
0	0	1	1 → $\overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	1 → $\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1 → $AB\overline{C}$
1	1	1	0

Mapa de Karnaugh

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\overline{B}$	1	1
$\overline{A}B$	1	0
$AB$	1	0
$A\overline{B}$	0	0

# Exemplo

Tabela verdade

A	B	C	D	X
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1 → $\bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1 → $AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1 → $ABCD$

# Exemplo

Tabela verdade

A	B	C	D	X
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1 → $\bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1 → $AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1 → $ABCD$

Mapa de Karnaugh

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	0	0
$AB$	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0



# Construção do Mapa

Exemplo com 4 variáveis.

Cada nova coluna deve diferir por apenas uma variável da coluna anterior.

Comece pelos valores negados.

Cada nova linha deve diferir por apenas uma variável da linha anterior.

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$				
$\bar{A}B$				
$AB$				
$A\bar{B}$				

Coloque os  
valores da tabela  
verdade aqui

# Faça você mesmo

Qual o mapa de Karnaugh para  
F considerando a tabela  
verdade ao lado?

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

# Faça você mesmo

Qual o mapa de Karnaugh para  
F considerando a tabela  
verdade ao lado?

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	1
$\bar{A}B$	0	1	1	0
$AB$	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	1	0

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

# Adjacências

Blocos que **diferem por apenas uma variável** são considerados **adjacentes**.





Considera-se que os blocos estão “enrolados” (*wrapped*).

Blocos do topo são vizinhos dos blocos inferiores, e vice-versa.

Blocos da esquerda são vizinhos dos da direita, e vice-versa.







# Exemplo

Alguns exemplos de adjacências.

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$				
$\bar{A}B$				
$AB$				
$A\bar{B}$				


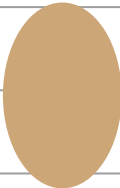






# Exemplo

Alguns exemplos de adjacências.

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$				
$\bar{A}B$				
$AB$				
$A\bar{B}$				

# Exemplo

Alguns exemplos de adjacências.

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$				
$\bar{A}B$				
$AB$				
$A\bar{B}$				

# Agrupamentos

A ideia é agrupar os 1's que aparecem no mapa de maneira adjacente.

Também é possível agrupar 0's, mas vamos ver apenas com 1's.

Variáveis que aparecem em ambas as formas (normal e negada) podem ser descartadas da expressão final.



# Exemplo

	$\bar{C}$	$C$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	0
$AB$	1	0
$A\bar{B}$	0	0

(a)

# Exemplo

No agrupamento temos A e  $\bar{A}$ .

Logo, A pode ser ignorado na expressão final.

A expressão simplificada contém apenas B e  $\bar{C}$ , que não mudam no agrupamento.

$$F = B\bar{C}$$

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	0
$AB$	1	0
$A\bar{B}$	0	0

(a)

# Faça você mesmo

Quais as expressões simplificadas a seguir?

	$\bar{C}$	$C$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	1
$AB$	0	0
$A\bar{B}$	0	0

(a)

	$\bar{C}$	$C$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0
$\bar{A}B$	0	0
$AB$	0	0
$A\bar{B}$	1	0

(b)

# Faça você mesmo

Quais as expressões simplificadas a seguir?

a)  $\bar{A}.B$

b)  $\bar{B}.\bar{C}$

	$\bar{C}$	$C$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	1
$AB$	0	0
$A\bar{B}$	0	0

(a)

	$\bar{C}$	$C$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0
$\bar{A}B$	0	0
$AB$	0	0
$A\bar{B}$	1	0

(b)

# Quartetos

Se possível, faça quartetos de 1's.

O princípio é o mesmo.

Elimina-se as variáveis que aparecem em suas formas não-negadas e negadas no quarteto.

Exemplo:

$$F = C$$

	$\bar{C}$	$C$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1
$\bar{A}B$	0	1
$AB$	0	1
$A\bar{B}$	0	1

# Faça você mesmo

Quais as expressões simplificadas a seguir?

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
$AB$	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	0
$AB$	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

(b)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
$AB$	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

(c)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
$AB$	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

(d)

# Faça você mesmo

Quais as expressões simplificadas a seguir?

a)  $F = A.B$    b)  $F = B.D$    c)  $F = \bar{B}.\bar{D}$    d)  $F = A.\bar{D}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
$AB$	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	0
$AB$	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

(b)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
$AB$	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

(c)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
$AB$	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

(d)

# Octetos

Para quatro variáveis, existe ainda a possibilidade de octetos de 1's existirem.

Nesse caso 3 variáveis são eliminadas.

Exemplo:

$$F = B$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
$AB$	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0



# Faça você mesmo

Quais as expressões simplificadas a seguir?

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	0
$\bar{A}B$	1	1	0	0
$AB$	1	1	0	0
$A\bar{B}$	1	1	0	0

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	1	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
$AB$	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	1	1	1

(b)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	1	0	0	1
$AB$	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

(c)

# Faça você mesmo

Quais as expressões simplificadas a seguir?

a)  $F = \bar{C}$    b)  $F = \bar{B}$    c)  $F = \bar{D}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	0
$\bar{A}B$	1	1	0	0
$AB$	1	1	0	0
$A\bar{B}$	1	1	0	0

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	1	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
$AB$	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	1	1	1

(b)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	1	0	0	1
$AB$	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

(c)

# Processo de Simplificação

Faça o Mapa de Karnaugh.

Marque os agrupamentos.

..., Octetos, quartetos, duetos, variáveis sozinhas.

**Sempre comece pelos maiores agrupamentos possíveis.**

Faça a soma (OR) de cada um dos agrupamentos encontrados.

Elimine as variáveis que aparecem da forma negada e não negada em cada agrupamento.

# Faça você mesmo

Qual a expressão simplificada do primeiro exercício apresentado nos slides? O Mapa de Karnaugh do exercício é apresentado a seguir:

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	1
$\bar{A}B$	0	1	1	0
$AB$	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	1	0

# Faça você mesmo

Qual a expressão simplificada do primeiro exercício apresentado nos slides? O Mapa de Karnaugh do exercício é apresentado a seguir:

$$F = \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + B.D + A.C.D$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	1
$\bar{A}B$	0	1	1	0
$AB$	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	1	0

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	$CD$	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0 <sub>1</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>
$\bar{A}B$	0 <sub>5</sub>	1 <sub>6</sub>	1 <sub>7</sub>	0 <sub>8</sub>
$AB$	0 <sub>9</sub>	1 <sub>10</sub>	1 <sub>11</sub>	0 <sub>12</sub>
$A\bar{B}$	0 <sub>13</sub>	0 <sub>14</sub>	1 <sub>15</sub>	0 <sub>16</sub>

# Don't Care

Algumas vezes determinada combinação de variáveis gera um resultado irrelevante.

Não nos importamos (*don't care*) se a saída da função  $F$  é 0 ou 1 para determinada condição.

Nesses casos basta inserir um X nas tabelas verdade ou mapas de Karnaugh.

Ao simplificar o circuito, você pode escolher se é 0 ou 1.

Escolha o que trazer a melhor simplificação.

A escolha nem sempre é simples.

# Don't Care

A	B	C	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	x
1	0	0	x
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(a)

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	x
$AB$	1	1
$A\bar{B}$	x	1

(b)

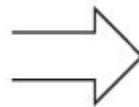
# Don't Care

A	B	C	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	x
1	0	0	x
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(a)

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	x
$AB$	1	1
$A\bar{B}$	x	1

(b)



	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	0
$AB$	1	1
$A\bar{B}$	1	1

$z = A$

(c)



# Limitações

Para mais do que 6 variáveis, os Mapas de Karnaugh se tornam complicados para humanos resolverem.

Podemos criar programas que resolvem os mapas, mas isso também tem suas limitações.

Uma implementação ingênua que armazena o mapa inteiro na memória:

- Considerando que cada posição do mapa ocupa 1 bit na memória.

- Para 30 variáveis o mapa ocupará 128 MiB.

# Limitações

Para mais do que 6 variáveis, os Mapas de Karnaugh se tornam complicados para humanos resolverem.

Podemos criar programas que resolvem os mapas, mas isso também tem suas limitações.

Uma implementação ingênua que armazena o mapa inteiro na memória:

Considerando que cada posição do mapa ocupa 1 bit na memória.

Para 30 variáveis o mapa ocupará 128 MiB.

Para 40 variáveis o mapa ocupará 128 GiB.

Encontrar os agrupamentos em espaços de busca tão grandes se torna complicado e lento!

# Exercícios

1. Faça o Mapa de Karnaugh para o primeiro exercício da aula passada e gere a expressão simplificada. Noque que algumas coisas não são diretamente visíveis em Mapas de Karnaugh, como a última distributiva que pode ser aplicada.
2. Dados os Mapas de Karnaugh a seguir, dê as expressões simplificadas.

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}.\bar{B}$	0	0
$\bar{A}.B$	0	0
$A.B$	1	X
$A.\bar{B}$	1	1

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	$C.D$	$C.\bar{D}$
$\bar{A}.\bar{B}$	0	0	1	0
$\bar{A}.B$	1	1	X	X
$A.B$	1	1	0	0
$A.\bar{B}$	0	0	0	0

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	$C.D$	$C.\bar{D}$
$\bar{A}.\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}.B$	0	1	1	1
$A.B$	1	1	1	0
$A.\bar{B}$	0	0	1	0

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	$C.D$	$C.\bar{D}$
$\bar{A}.\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}.B$	0	1	1	1
$A.B$	0	0	0	1
$A.\bar{B}$	1	1	0	1

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	$C.D$	$C.\bar{D}$
$\bar{A}.\bar{B}$	1	1	0	1
$\bar{A}.B$	1	1	0	1
$A.B$	1	1	0	1
$A.\bar{B}$	1	1	1	1

# Exercícios

3. Dadas as tabelas verdade a seguir, faça os Mapas de Karnaugh e dê as expressões simplificadas para as funções F.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

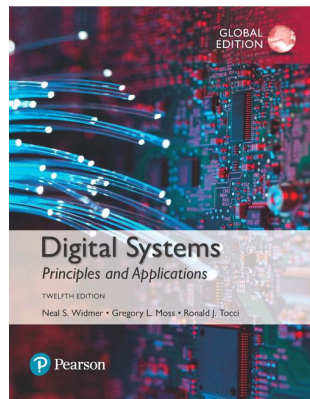
A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

# Exercícios

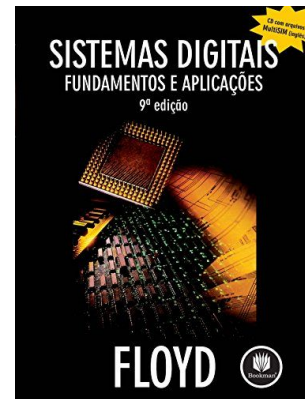
4. Faça os Mapas de Karnaugh para algumas funções da lista de exercícios da aula passada, e simplifique utilizando os mapas. Compare com suas respostas usando Álgebra de Boole.

# Referências

Ronald J. Tocci, Gregory L. Moss, Neal S. Widmer. Sistemas digitais. 10a ed. 2017.



Thomas Floyd. Widmer. Sistemas Digitais: Fundamentos e Aplicações. 2009.



# Licença

Esta obra está licenciada com uma Licença [Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).