Cálculo 1 - HONORS - CM311

Derivadas e Propriedades

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Projeto Honors

Aula Passada

- Sendo f derivável em a, o polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a é dado por
$$P(h) = f(a) + f'(a).h \Leftrightarrow \tilde{P}(x) = P(x-a) = f(a) + f'(a).(x-a).$$
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a).h$ temos
$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Reescrevendo
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h), \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Definindo $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Aula Passada

- Sendo f derivável em a, o polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a é dado por
$$P(h) = f(a) + f'(a).h \Leftrightarrow \tilde{P}(x) = P(x-a) = f(a) + f'(a).(x-a).$$
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a).h$ temos
$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Reescrevendo
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h), \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Definindo $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Aula Passada

- Sendo f derivável em a, o polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a é dado por
$$P(h) = f(a) + f'(a).h \Leftrightarrow \tilde{P}(x) = P(x-a) = f(a) + f'(a).(x-a).$$
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a).h$ temos
$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Reescrevendo
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h), \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Definindo $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Aula Passada

- Sendo f derivável em a, o polinômio de Taylor de 1a ordem de f em a é dado por
$$P(h) = f(a) + f'(a).h \Leftrightarrow \tilde{P}(x) = P(x-a) = f(a) + f'(a).(x-a).$$
- Sendo $r(h) = f(a+h) - P(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a).h$ temos
$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Reescrevendo
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h), \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
- Definindo $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$ temos
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + h.\rho(h), \text{ com } \rho \text{ contínua em } 0.$$

Notação de Leibniz - Diferenciais

- Seja f derivável em a e defina $y = f(x)$.
- Denotamos $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ o incremento em y ao incrementar x por Δx com relação ao ponto $x = a$.
- Temos
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para Δx próximo de 0 temos $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$.
- Denotamos $dy = f'(a)dx$, assim $dy \approx \Delta y$ para dx próximo de zero.
- A expressão acima é chamada de **diferencial de** f **no ponto** a.
- Além da dependência do ponto a, temos a dependência de dx.
- Dizemos que uma função é **diferenciável no ponto** a se a diferencial for uma boa aproximação, isto é, se tiver derivada no ponto a. Ou seja, **diferenciável** e **derivável** são sinônimos.

Exemplo 1.1.

Calcule a diferencial de $f(x) = x^2$ e estime, usando diferenciais, Δy para $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}001$.

Notação de Leibniz - Diferenciais

- Seja f derivável em a e defina $y = f(x)$.
- Denotamos $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ o incremento em y ao incrementar x por Δx com relação ao ponto $x = a$.
- Temos

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

- Para Δx próximo de 0 temos $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$.
- Denotamos $dy = f'(a)dx$, assim $dy \approx \Delta y$ para dx próximo de zero.
- A expressão acima é chamada de **diferencial de f no ponto** a.
- Além da dependência do ponto a, temos a dependência de dx.
- Dizemos que uma função é **diferenciável no ponto** a se a diferencial for uma boa aproximação, isto é, se tiver derivada no ponto a. Ou seja, **diferenciável** e **derivável** são sinônimos.

Exemplo 1.1.

Calcule a diferencial de $f(x) = x^2$ e estime, usando diferenciais, Δy para $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}001$.

Notação de Leibniz - Diferenciais

- Seja f derivável em a e defina $y = f(x)$.
- Denotamos $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ o incremento em y ao incrementar x por Δx com relação ao ponto $x = a$.
- Temos

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

- Para Δx próximo de 0 temos $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$.
- Denotamos $dy = f'(a)dx$, assim $dy \approx \Delta y$ para dx próximo de zero.
- A expressão acima é chamada de **diferencial de f no ponto** a.
- Além da dependência do ponto a, temos a dependência de dx.
- Dizemos que uma função é **diferenciável no ponto** a se a diferencial for uma boa aproximação, isto é, se tiver derivada no ponto a. Ou seja, **diferenciável** e **derivável** são sinônimos.

Exemplo 1.1.

Calcule a diferencial de $f(x) = x^2$ e estime, usando diferenciais, Δy para $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}001$.

Notação de Leibniz - Diferenciais

- Seja f derivável em a e defina $y = f(x)$.
- Denotamos $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ o incremento em y ao incrementar x por Δx com relação ao ponto $x = a$.
- Temos
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para Δx próximo de 0 temos $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$.
- Denotamos $dy = f'(a)dx$, assim $dy \approx \Delta y$ para dx próximo de zero.
- A expressão acima é chamada de **diferencial de f no ponto a**.
- Além da dependência do ponto a, temos a dependência de dx.
- Dizemos que uma função é **diferenciável no ponto a** se a diferencial for uma boa aproximação, isto é, se tiver derivada no ponto a. Ou seja, **diferenciável** e **derivável** são sinônimos.

Exemplo 1.1.

Calcule a diferencial de $f(x) = x^2$ e estime, usando diferenciais, Δy para $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}001$.

Notação de Leibniz - Diferenciais

- Seja f derivável em a e defina $y = f(x)$.
- Denotamos $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ o incremento em y ao incrementar x por Δx com relação ao ponto $x = a$.
- Temos
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para Δx próximo de 0 temos $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$.
- Denotamos $dy = f'(a)dx$, assim $dy \approx \Delta y$ para dx próximo de zero.
- A expressão acima é chamada de **diferencial de** f **no ponto** a.
- Além da dependência do ponto a, temos a dependência de dx.
- Dizemos que uma função é **diferenciável no ponto** a se a diferencial for uma boa aproximação, isto é, se tiver derivada no ponto a. Ou seja, **diferenciável** e **derivável** são sinônimos.

Exemplo 1.1.

Calcule a diferencial de $f(x) = x^2$ e estime, usando diferenciais, Δy para $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}001$.

Notação de Leibniz - Diferenciais

- Seja f derivável em a e defina $y = f(x)$.
- Denotamos $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ o incremento em y ao incrementar x por Δx com relação ao ponto $x = a$.
- Temos
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para Δx próximo de 0 temos $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$.
- Denotamos $dy = f'(a)dx$, assim $dy \approx \Delta y$ para dx próximo de zero.
- A expressão acima é chamada de **diferencial de f no ponto a**.
- Além da dependência do ponto a, temos a dependência de dx.
- Dizemos que uma função é **diferenciável no ponto** a se a diferencial for uma boa aproximação, isto é, se tiver derivada no ponto a. Ou seja, **diferenciável** e **derivável** são sinônimos.

Exemplo 1.1.

Calcule a diferencial de $f(x) = x^2$ e estime, usando diferenciais, Δy para $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}001$.

Notação de Leibniz - Diferenciais

- Seja f derivável em a e defina $y = f(x)$.
- Denotamos $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ o incremento em y ao incrementar x por Δx com relação ao ponto $x = a$.
- Temos
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para Δx próximo de 0 temos $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$.
- Denotamos $dy = f'(a)dx$, assim $dy \approx \Delta y$ para dx próximo de zero.
- A expressão acima é chamada de **diferencial de f no ponto** a.
- Além da dependência do ponto a, temos a dependência de dx.
- Dizemos que uma função é **diferenciável no ponto** a se a diferencial for uma boa aproximação, isto é, se tiver derivada no ponto a. Ou seja, **diferenciável** e **derivável** são sinônimos.

Exemplo 1.1.

Calcule a diferencial de $f(x) = x^2$ e estime, usando diferenciais, Δy para $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}001$.

Notação de Leibniz - Diferenciais

- Seja f derivável em a e defina $y = f(x)$.
- Denotamos $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ o incremento em y ao incrementar x por Δx com relação ao ponto $x = a$.
- Temos
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para Δx próximo de 0 temos $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$.
- Denotamos $dy = f'(a)dx$, assim $dy \approx \Delta y$ para dx próximo de zero.
- A expressão acima é chamada de **diferencial de f no ponto** a.
- Além da dependência do ponto a, temos a dependência de dx.
- Dizemos que uma função é **diferenciável no ponto** a se a diferencial for uma boa aproximação, isto é, se tiver derivada no ponto a. Ou seja, **diferenciável** e **derivável** são sinônimos.

Exemplo 1.1.

Calcule a diferencial de $f(x) = x^2$ e estime, usando diferenciais, Δy para $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}001$.

Notação de Leibniz - Diferenciais

- Seja f derivável em a e defina $y = f(x)$.
- Denotamos $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ o incremento em y ao incrementar x por Δx com relação ao ponto $x = a$.
- Temos
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Para Δx próximo de 0 temos $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$.
- Denotamos $dy = f'(a)dx$, assim $dy \approx \Delta y$ para dx próximo de zero.
- A expressão acima é chamada de **diferencial de f no ponto** a.
- Além da dependência do ponto a, temos a dependência de dx.
- Dizemos que uma função é **diferenciável no ponto** a se a diferencial for uma boa aproximação, isto é, se tiver derivada no ponto a. Ou seja, **diferenciável** e **derivável** são sinônimos.

Exemplo 1.1.

Calcule a diferencial de $f(x) = x^2$ e estime, usando diferenciais, Δy para $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}001$.

Regra da Cadeia e Leibniz

- Podemos usar a notação de Leibniz para escrever a regra da cadeia.
- Seja $u = f(x)$ e $y = g(u)$, com f, g deriváveis. Temos
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \iff \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- Sendo $y = h(x)$ uma função derivável com inversa $x = h^{-1}(y)$, teremos que h^{-1} é derivável? Caso seja, como podemos calcular $(h^{-1})'$?
- Se a notação de Leibniz for muito boa:
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(x)} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}.$$

Exemplo 1.2.

Calcule a derivadas das funções abaixo usando o raciocínio

a) $f(x) = \sqrt{x}$.

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Regra da Cadeia e Leibniz

- Podemos usar a notação de Leibniz para escrever a regra da cadeia.
- Seja $u = f(x)$ e $y = g(u)$, com f, g deriváveis. Temos
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \iff \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- Sendo $y = h(x)$ uma função derivável com inversa $x = h^{-1}(y)$, teremos que h^{-1} é derivável? Caso seja, como podemos calcular $(h^{-1})'$?
- Se a notação de Leibniz for muito boa:
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(x)} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}.$$

Exemplo 1.2.

Calcule a derivadas das funções abaixo usando o raciocínio

a) $f(x) = \sqrt{x}$. b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Regra da Cadeia e Leibniz

- Podemos usar a notação de Leibniz para escrever a regra da cadeia.
- Seja $u = f(x)$ e $y = g(u)$, com f, g deriváveis. Temos
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \iff \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- Sendo $y = h(x)$ uma função derivável com inversa $x = h^{-1}(y)$, teremos que h^{-1} é derivável? Caso seja, como podemos calcular $(h^{-1})'$?
- Se a notação de Leibniz for muito boa:
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(x)} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}.$$

Exemplo 1.2.

Calcule a derivadas das funções abaixo usando o raciocínio

a) $f(x) = \sqrt{x}$. b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Regra da Cadeia e Leibniz

- Podemos usar a notação de Leibniz para escrever a regra da cadeia.
- Seja $u = f(x)$ e $y = g(u)$, com f, g deriváveis. Temos
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \iff \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- Sendo $y = h(x)$ uma função derivável com inversa $x = h^{-1}(y)$, teremos que h^{-1} é derivável? Caso seja, como podemos calcular $(h^{-1})'$?
- Se a notação de Leibniz for muito boa:
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(x)} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}.$$

Exemplo 1.2.

Calcule a derivadas das funções abaixo usando o raciocínio

a) $f(x) = \sqrt{x}$.   b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Regra da Cadeia e Leibniz

- Podemos usar a notação de Leibniz para escrever a regra da cadeia.
- Seja $u = f(x)$ e $y = g(u)$, com f, g deriváveis. Temos
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \iff \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- Sendo $y = h(x)$ uma função derivável com inversa $x = h^{-1}(y)$, teremos que h^{-1} é derivável? Caso seja, como podemos calcular $(h^{-1})'$?
- Se a notação de Leibniz for muito boa:
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(x)} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}.$$

Exemplo 1.2.

Calcule a derivadas das funções abaixo usando o raciocínio

a) $f(x) = \sqrt{x}$.

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Regra da Cadeia e Leibniz

- Podemos usar a notação de Leibniz para escrever a regra da cadeia.
- Seja $u = f(x)$ e $y = g(u)$, com f, g deriváveis. Temos
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \iff \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- Sendo $y = h(x)$ uma função derivável com inversa $x = h^{-1}(y)$, teremos que h^{-1} é derivável? Caso seja, como podemos calcular $(h^{-1})'$?
- Se a notação de Leibniz for muito boa:
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(x)} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}.$$

Exemplo 1.2.

Calcule a derivadas das funções abaixo usando o raciocínio

a) $f(x) = \sqrt{x}$. b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Regra da Cadeia e Leibniz

- Podemos usar a notação de Leibniz para escrever a regra da cadeia.
- Seja $u = f(x)$ e $y = g(u)$, com f, g deriváveis. Temos
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \iff \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- Sendo $y = h(x)$ uma função derivável com inversa $x = h^{-1}(y)$, teremos que h^{-1} é derivável? Caso seja, como podemos calcular $(h^{-1})'$?
- Se a notação de Leibniz for muito boa:
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(x)} \iff (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}.$$

Exemplo 1.2.

Calcule a derivadas das funções abaixo usando o raciocínio

a) $f(x) = \sqrt{x}$.

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Proposição 1.3.

Seja $f : I \to J$ invertível, com I, J intervalos abertos. Considere $b = f(a)$. Se f é derivável em a com $f'(a) = 0$, então f^{-1} não é derivável em b.

Teorema 1.4.

Seja $f : I \to J$ contínua e invertível, com I, J intervalos abertos. Considere $b = f(a)$. Se f é derivável em a com $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é derivável com

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

- Está na hora de estudar mais uma família de funções importantes: exponenciais e logarítmicas.

Derivada da Função Inversa

Proposição 1.3.

Seja $f : I \to J$ invertível, com I, J intervalos abertos. Considere $b = f(a)$. Se f é derivável em a com $f'(a) = 0$, então f^{-1} não é derivável em b.

Teorema 1.4.

Seja $f : I \to J$ contínua e invertível, com I, J intervalos abertos. Considere $b = f(a)$. Se f é derivável em a com $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é derivável com

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

- Está na hora de estudar mais uma família de funções importantes: exponenciais e logarítmicas.

Proposição 1.3.

Seja $f : I \to J$ invertível, com I, J intervalos abertos. Considere $b = f(a)$. Se f é derivável em a com $f'(a) = 0$, então f^{-1} não é derivável em b.

Teorema 1.4.

Seja $f : I \to J$ contínua e invertível, com I, J intervalos abertos. Considere $b = f(a)$. Se f é derivável em a com $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é derivável com

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

- Está na hora de estudar mais uma família de funções importantes: exponenciais e logarítmicas.

Funções Exponencias

- Sendo $\alpha > 0$, para $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ definimos
  - $\alpha^m = \alpha.\alpha \dots \alpha$ (m fatores α).
  - $\alpha^{-m} = \dfrac{1}{\alpha^m}$.
  - $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.
  - $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$.
- Para definir α^r onde $r \in \mathbb{R}$, aproximamos r por número racionais.
- É possível mostrar que está definição é boa e vale o seguinte teorema

Teorema 1.5.

Sendo $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ a função exponencial na base α dada por $f(x) = \alpha^x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Vamos relembrar algumas propriedades de funções exponenciais

Funções Exponencias

- Sendo $\alpha > 0$, para $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ definimos
  - $\alpha^m = \alpha.\alpha \dots \alpha$ (m fatores α).
  - $\alpha^{-m} = \dfrac{1}{\alpha^m}$.
  - $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.
  - $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$.
- Para definir α^r onde $r \in \mathbb{R}$, aproximamos r por número racionais.
- É possível mostrar que está definição é boa e vale o seguinte teorema

Teorema 1.5.

Sendo $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ a função exponencial na base α dada por $f(x) = \alpha^x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Vamos relembrar algumas propriedades de funções exponenciais

Funções Exponencias

- Sendo $\alpha > 0$, para $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ definimos
  - $\alpha^m = \alpha.\alpha \ldots \alpha$ (m fatores α).
  - $\alpha^{-m} = \dfrac{1}{\alpha^m}$.
  - $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.
  - $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$.
- Para definir α^r onde $r \in \mathbb{R}$, aproximamos r por número racionais.
- É possível mostrar que está definição é boa e vale o seguinte teorema

Teorema 1.5.

Sendo $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ a função exponencial na base α dada por $f(x) = \alpha^x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Vamos relembrar algumas propriedades de funções exponenciais

Funções Exponencias

- Sendo $\alpha > 0$, para $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ definimos
  - $\alpha^m = \alpha.\alpha\ldots\alpha$ (m fatores α).
  - $\alpha^{-m} = \dfrac{1}{\alpha^m}$.
  - $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.
  - $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$.
- Para definir α^r onde $r \in \mathbb{R}$, aproximamos r por número racionais.
- É possível mostrar que está definição é boa e vale o seguinte teorema

Teorema 1.5.

Sendo $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ a função exponencial na base α dada por $f(x) = \alpha^x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Vamos relembrar algumas propriedades de funções exponenciais

Funções Exponencias

- Sendo $\alpha > 0$, para $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ definimos
  - $\alpha^m = \alpha.\alpha \ldots \alpha$ (m fatores α).
  - $\alpha^{-m} = \dfrac{1}{\alpha^m}$.
  - $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.
  - $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$.
- Para definir α^r onde $r \in \mathbb{R}$, aproximamos r por número racionais.
- É possível mostrar que está definição é boa e vale o seguinte teorema

Teorema 1.5.

Sendo $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ a função exponencial na base α dada por $f(x) = \alpha^x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Vamos relembrar algumas propriedades de funções exponenciais

Funções Exponencias

- Sendo $\alpha > 0$, para $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ definimos
  - $\alpha^m = \alpha.\alpha \ldots \alpha$ (m fatores α).
  - $\alpha^{-m} = \dfrac{1}{\alpha^m}$.
  - $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.
  - $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$.
- Para definir α^r onde $r \in \mathbb{R}$, aproximamos r por número racionais.
- É possível mostrar que está definição é boa e vale o seguinte teorema

Teorema 1.5.

Sendo $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ a função exponencial na base α dada por $f(x) = \alpha^x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Vamos relembrar algumas propriedades de funções exponenciais

Funções Exponencias

- Sendo $\alpha > 0$, para $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ definimos
  - $\alpha^m = \alpha.\alpha \ldots \alpha$ (m fatores α).
  - $\alpha^{-m} = \dfrac{1}{\alpha^m}$.
  - $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.
  - $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$.
- Para definir α^r onde $r \in \mathbb{R}$, aproximamos r por número racionais.
- É possível mostrar que está definição é boa e vale o seguinte teorema

Teorema 1.5.

Sendo $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ a função exponencial na base α dada por $f(x) = \alpha^x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Vamos relembrar algumas propriedades de funções exponenciais

Funções Exponencias

- Sendo $\alpha > 0$, para $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ definimos
  - $\alpha^m = \alpha.\alpha \ldots \alpha$ (m fatores α).
  - $\alpha^{-m} = \dfrac{1}{\alpha^m}$.
  - $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.
  - $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$.
- Para definir α^r onde $r \in \mathbb{R}$, aproximamos r por número racionais.
- É possível mostrar que está definição é boa e vale o seguinte teorema

Teorema 1.5.

Sendo $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ a função exponencial na base α dada por $f(x) = \alpha^x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Vamos relembrar algumas propriedades de funções exponenciais

Funções Exponencias

- Sendo $\alpha > 0$, para $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ definimos
  - $\alpha^m = \alpha.\alpha \ldots \alpha\,(m$ fatores $\alpha)$.
  - $\alpha^{-m} = \dfrac{1}{\alpha^m}$.
  - $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.
  - $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$.
- Para definir α^r onde $r \in \mathbb{R}$, aproximamos r por número racionais.
- É possível mostrar que está definição é boa e vale o seguinte teorema

Teorema 1.5.

Sendo $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ a função exponencial na base α dada por $f(x) = \alpha^x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Vamos relembrar algumas propriedades de funções exponenciais

Funções Exponenciais

Proposição 1.6.

Sendo $\alpha, \beta > 0$, $\alpha, \beta \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

i) $\alpha^0 = 1$.

ii) $\alpha^{x+y} = \alpha^x.\alpha^y$.

iii) $\alpha^{x.y} = (\alpha^x)^y$.

iv) $(\alpha.\beta)^x = \alpha^x.\beta^x$.

v) *Se* $\alpha > 1$ *e* $x < y$, *então* $\alpha^x < \alpha^y$.

vi) *Se* $0 < \alpha < 1$ *e* $x < y$, *então* $\alpha^x > \alpha^y$.

- Caso $\alpha > 1$ teremos que $f(x) = \alpha^x$ é crescente.
- Caso $0 < \alpha < 1$ teremos que $f(x) = \alpha^x$ é decrescente.

Funções Exponenciais

Proposição 1.6.

Sendo $\alpha, \beta > 0$, $\alpha, \beta \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

i) $\alpha^0 = 1$.

ii) $\alpha^{x+y} = \alpha^x.\alpha^y$.

iii) $\alpha^{x.y} = (\alpha^x)^y$.

iv) $(\alpha.\beta)^x = \alpha^x.\beta^x$.

v) *Se* $\alpha > 1$ *e* $x < y$, *então* $\alpha^x < \alpha^y$.

vi) *Se* $0 < \alpha < 1$ *e* $x < y$, *então* $\alpha^x > \alpha^y$.

- Caso $\alpha > 1$ teremos que $f(x) = \alpha^x$ é crescente.
- Caso $0 < \alpha < 1$ teremos que $f(x) = \alpha^x$ é decrescente.

Proposição 1.6.

Sendo $\alpha, \beta > 0$, $\alpha, \beta \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

i) $\alpha^0 = 1$.

ii) $\alpha^{x+y} = \alpha^x.\alpha^y$.

iii) $\alpha^{x.y} = (\alpha^x)^y$.

iv) $(\alpha.\beta)^x = \alpha^x.\beta^x$.

v) *Se* $\alpha > 1$ *e* $x < y$, *então* $\alpha^x < \alpha^y$.

vi) *Se* $0 < \alpha < 1$ *e* $x < y$, *então* $\alpha^x > \alpha^y$.

- Caso $\alpha > 1$ teremos que $f(x) = \alpha^x$ é crescente.
- Caso $0 < \alpha < 1$ teremos que $f(x) = \alpha^x$ é decrescente.

Funções Exponenciais

- Sendo $f(x) = \alpha^x$, estudaremos quando tais funções são deriváveis.
- Observe que $f(x+y) = f(x).f(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Sendo $a \in \mathbb{R}$ temos
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(a).f(h)-f(a)}{h} = f(a)\frac{f(h)-1}{h} = \alpha^a.\frac{\alpha^h-1}{h}.$$
- Para a derivada de f existir, temos que garantir a existência do limite
$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha^h-1}{h}.$$
- O limite acima vai **existir** para qualquer $\alpha > 0$.
- **Existe um número especial α (e apenas um)** de modo que
$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha^h-1}{h} = 1.$$
- O número α que satisfaz a condição acima chamamos de **número de Euler**, e denotamos por e.

Funções Exponenciais

- Sendo $f(x) = \alpha^x$, estudaremos quando tais funções são deriváveis.
- Observe que $f(x+y) = f(x).f(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Sendo $a \in \mathbb{R}$ temos
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a).f(h) - f(a)}{h} = f(a)\frac{f(h) - 1}{h} = \alpha^a.\frac{\alpha^h - 1}{h}.$$
- Para a derivada de f existir, temos que garantir a existência do limite
$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha^h - 1}{h}.$$
- O limite acima vai **existir** para qualquer $\alpha > 0$.
- **Existe um número especial** α **(e apenas um)** de modo que
$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha^h - 1}{h} = 1.$$
- O número α que satisfaz a condição acima chamamos de **número de Euler**, e denotamos por e.

Funções Exponenciais

- Sendo $f(x) = \alpha^x$, estudaremos quando tais funções são deriváveis.
- Observe que $f(x + y) = f(x).f(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Sendo $a \in \mathbb{R}$ temos
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a).f(h) - f(a)}{h} = f(a)\frac{f(h) - 1}{h} = \alpha^a.\frac{\alpha^h - 1}{h}.$$
- Para a derivada de f existir, temos que garantir a existência do limite
$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha^h - 1}{h}.$$
- O limite acima vai **existir** para qualquer $\alpha > 0$.
- **Existe um número especial** α **(e apenas um)** de modo que
$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha^h - 1}{h} = 1.$$
- O número α que satisfaz a condição acima chamamos de **número de Euler**, e denotamos por e.

Funções Exponenciais

- Sendo $f(x) = \alpha^x$, estudaremos quando tais funções são deriváveis.
- Observe que $f(x+y) = f(x).f(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Sendo $a \in \mathbb{R}$ temos
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(a).f(h)-f(a)}{h} = f(a)\frac{f(h)-1}{h} = \alpha^a.\frac{\alpha^h-1}{h}.$$
- Para a derivada de f existir, temos que garantir a existência do limite
$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha^h-1}{h}.$$
- O limite acima vai **existir** para qualquer $\alpha > 0$.
- **Existe um número especial** α **(e apenas um)** de modo que
$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha^h-1}{h} = 1.$$
- O número α que satisfaz a condição acima chamamos de **número de Euler**, e denotamos por e.

Funções Exponenciais

- Sendo $f(x) = \alpha^x$, estudaremos quando tais funções são deriváveis.
- Observe que $f(x+y) = f(x).f(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Sendo $a \in \mathbb{R}$ temos
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a).f(h) - f(a)}{h} = f(a)\frac{f(h) - 1}{h} = \alpha^a.\frac{\alpha^h - 1}{h}.$$
- Para a derivada de f existir, temos que garantir a existência do limite
$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha^h - 1}{h}.$$
- O limite acima vai **existir** para qualquer $\alpha > 0$.
- **Existe um número especial** α **(e apenas um)** de modo que
$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha^h - 1}{h} = 1.$$
- O número α que satisfaz a condição acima chamamos de **número de Euler**, e denotamos por e.

Funções Exponenciais

- Sendo $f(x) = \alpha^x$, estudaremos quando tais funções são deriváveis.
- Observe que $f(x+y) = f(x).f(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Sendo $a \in \mathbb{R}$ temos
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a).f(h) - f(a)}{h} = f(a)\frac{f(h) - 1}{h} = \alpha^a.\frac{\alpha^h - 1}{h}.$$
- Para a derivada de f existir, temos que garantir a existência do limite
$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha^h - 1}{h}.$$
- O limite acima vai **existir** para qualquer $\alpha > 0$.
- **Existe um número especial α (e apenas um)** de modo que
$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha^h - 1}{h} = 1.$$
- O número α que satisfaz a condição acima chamamos de **número de Euler**, e denotamos por e.

Funções Exponenciais

- Sendo $f(x) = \alpha^x$, estudaremos quando tais funções são deriváveis.
- Observe que $f(x+y) = f(x).f(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Sendo $a \in \mathbb{R}$ temos
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a).f(h) - f(a)}{h} = f(a)\frac{f(h) - 1}{h} = \alpha^a.\frac{\alpha^h - 1}{h}.$$
- Para a derivada de f existir, temos que garantir a existência do limite
$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha^h - 1}{h}.$$
- O limite acima vai **existir** para qualquer $\alpha > 0$.
- **Existe um número especial** α **(e apenas um)** de modo que
$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha^h - 1}{h} = 1.$$
- O número α que satisfaz a condição acima chamamos de **número de Euler**, e denotamos por e.

Exponencial Natural (Base e)

- Sendo $f(x) = e^x$, por definição, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} e^x . \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

- Temos então $(e^x)' = e^x$.
- Uma propriedade geométrica bonita da função exponencial é que o valor da função no ponto corresponde ao valor da inclinação da reta tangente no ponto.
- É possível mostrar fórmulas que de fato fornecem o número e

$$e = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Exemplo 1.7.

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = e^x \cos x$.

b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

c) $f(x) = x^3 e^{-3x}$.

d) $f(x) = (e^{-x} + e^{x^2})^3$.

Exponencial Natural (Base e)

- Sendo $f(x) = e^x$, por definição, temos
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} e^x . \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$
- Temos então $(e^x)' = e^x$.
- Uma propriedade geométrica bonita da função exponencial é que o valor da função no ponto corresponde ao valor da inclinação da reta tangente no ponto.
- É possível mostrar fórmulas que de fato fornecem o número e
$$e = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Exemplo 1.7.

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = e^x \cos x$.

b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

c) $f(x) = x^3 e^{-3x}$.

d) $f(x) = (e^{-x} + e^{x^2})^3$.

Exponencial Natural (Base e)

- Sendo $f(x) = e^x$, por definição, temos
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} e^x . \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$
- Temos então $(e^x)' = e^x$.
- Uma propriedade geométrica bonita da função exponencial é que o valor da função no ponto corresponde ao valor da inclinação da reta tangente no ponto.
- É possível mostrar fórmulas que de fato fornecem o número e
$$e = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Exemplo 1.7.

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = e^x \cos x$.

b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

c) $f(x) = x^3 e^{-3x}$.

d) $f(x) = (e^{-x} + e^{x^2})^3$.

Exponencial Natural (Base e)

- Sendo $f(x) = e^x$, por definição, temos
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} e^x . \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$
- Temos então $(e^x)' = e^x$.
- Uma propriedade geométrica bonita da função exponencial é que o valor da função no ponto corresponde ao valor da inclinação da reta tangente no ponto.
- É possível mostrar fórmulas que de fato fornecem o número e
$$e = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Exemplo 1.7.

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = e^x \cos x$.

b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

c) $f(x) = x^3 e^{-3x}$.

d) $f(x) = (e^{-x} + e^{x^2})^3$.

Exponencial Natural (Base e)

- Sendo $f(x) = e^x$, por definição, temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} e^x . \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

- Temos então $(e^x)' = e^x$.
- Uma propriedade geométrica bonita da função exponencial é que o valor da função no ponto corresponde ao valor da inclinação da reta tangente no ponto.
- É possível mostrar fórmulas que de fato fornecem o número e

$$e = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Exemplo 1.7.

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = e^x \cos x$.

b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

c) $f(x) = x^3 e^{-3x}$.

d) $f(x) = (e^{-x} + e^{x^2})^3$.