CM311 - Cálculo 1
Honors - 1sem2024
Prof. Diego Otero
Lista de Exercícios 6

Problemas

1 Primitivas - Integrais Indefinidas

1. Calcule as integrais indefinidas abaixo

   a) $\displaystyle\int 4x - 2\,dx.$

   b) $\displaystyle\int 3e^{8x}\,dx.$

   c) $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 2x}{x^2}\,dx.$

   d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

   e) $\displaystyle\int 3^x\,dx.$

   f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{cossec}}{\operatorname{sen} x}\,dx.$

   g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$

   h) $\displaystyle\int (1 + \cos x)^2\,dx.$

   i) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx.$

2. Considere f derivável tal que $f'(x) = kf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante. Faça o que se pede

   a) Calcule $\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$.

   b) Sabendo que $f(0) = -2$, determine $f(x)$.

3. Considere f derivável até 2a ordem tal que $f''(x) + f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Faça o que se pede

   a) Mostre que $g(x) = f'(x) \operatorname{sen} x - f(x) \cos x$ é uma função constante.

   b) Prove que existe uma constante A tal que $\left(\dfrac{f(x) - A\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = 0$, para todo $x \in (0, \pi)$.

   c) Usando o item anterior, mostre que existe uma constante B tal que $f(x) = A\cos x + B \operatorname{sen} x$ para $x \in (0, \pi)$.

4. Uma partícula se desloca sobre o eixo x com função posição $x = x(t)$, $t \geq 0$, velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$. Determine $x(t)$ nos casos abaixo.

   a) $v(t) = 3t + 4$, $x(0) = 3$.

   b) $a(t) = -t + 1$, $x(0) = 3$, $v(0) = -1$.

   c) $a(t) = \operatorname{sen}(2t)$, $x(0) = 0$, $v(0) = 1/2$.

   d) $a(t) = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $v(0) = 0$.

5. Sejam f e g funções definidas e deriváveis em $\mathbb{R}$. Suponha que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ e que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale
$$f'(x) = g(x) \quad \text{e} \quad g'(x) = -f(x).$$
   Faça o que se pede:

   a) Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $(f(x) - \operatorname{sen} x)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = 0$.

   b) Conclua do item anterior que $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$.

6. Determine a função cujo gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$ e tal que a reta tangente no ponto de abscissa x intercepta o eixo x no ponto de abscissa $x + 1$.

2 Integrais Definidas e TFC

1. Calcule as integrais definidas abaixo

a) $\displaystyle\int_{-2}^{1} x^2 - 1\, dx.$

b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1+x}{\sqrt{x}}\, dx.$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{sen} x\, dx.$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{2u}\, du.$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2}\, dt.$

f) $\displaystyle\int_{0}^{2} 2^x\, dx.$

g) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx.$

h) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\, dx.$

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} v^3 e^{v^4}\, dv.$

2. Esboce a região delimitada pelas curvas e decida se a integração deve ser feita com relação à variável x ou y. Ache a área da região.

a) $y = 0$, $y = x^3$, $x = 1$, $x = 3$.

b) $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$.

c) $y = x + 1$, $y = 9 - x^2$, $x = -1$, $x = 2$

d) $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$

e) $y = x^2$, $y = x^4$

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$

g) $x = 2y^2$, $x = 4 + y^2$

h) $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \frac{2x}{\pi}$, $x \geq 0$

i) $y = |x|$, $y = x^2 - 2$

j) $4x + y^2 = 12$, $x = y$

3. Calcule as derivadas das funções abaixo

a) $\displaystyle F(x) = \int_{1}^{x} t + \cos t\, dt.$

b) $\displaystyle F(x) = \int_{1}^{e^x} t + \cos t\, dt.$

c) $\displaystyle F(x) = \int_{-e^{x^2}}^{e^x} \cos^2 t\, dt.$

d) $\displaystyle F(x) = \int_{3}^{\int_1^x \operatorname{sen}^2 t\, dt} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^6 t + t^2}\, dt..$

4. Esboce os gráficos das funções abaixo

a) $\displaystyle f(x) = \int_{0}^{x} e^{-t^2}\, dt.$

b) $\displaystyle f(x) = \int_{0}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$

5. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt}{\int_0^x e^{-t^2}\, dt}.$

3 Método da Substituição

1. Use o método da substituição fazendo as substituições indicadas

a) $\displaystyle\int \cos(3x)\, dx$, $u = 3x$.

b) $\displaystyle\int x(4+x^2)^{10}\, dx$, $u = 4 + x^2$.

c) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\, dx$, $u = x^3 + 1$.

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$, $u = \sqrt{x}$.

e) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen}\theta} \cos\theta\, d\theta$, $u = \operatorname{sen}\theta$.

f) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\, dx$, $u = 1 + e^x$.

2. Use o método da substituição, quando necessário, para calcular as integrais abaixo

a) $\displaystyle\int (3x-2)^3\, dx.$

b) $\displaystyle\int \sqrt{3x-2}\, dx.$

c) $\displaystyle\int x^3\cos(x^4)\, dx.$

d) $\displaystyle\int \frac{5}{4x+3}\, dx.$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+4x^2)^2}\, dx.$

f) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\, dx.$

g) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \sec x\, dx.$

h) $\displaystyle\int x e^{-x^2}\, dx.$

i) $\displaystyle\int \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x\, dx.$

j) $\displaystyle\int \cos^5 x\, dx.$

k) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\sqrt{\cos x}\, dx.$

l) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\sqrt{5+\operatorname{sen}^2 x}\, dx.$

m) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\sqrt{3+\cos x}\, dx.$

n) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx.$

o) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\, dx.$

p) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx.$

q) $\int \frac{\sec^2 x}{3 + 2\operatorname{tg} x} \, dx.$

r) $\int \frac{x}{x+1} \, dx.$

s) $\int \frac{x+2}{x-1} \, dx.$

t) $\int \frac{x^2}{x+1} \, dx.$

u) $\int \frac{2x-3}{1+4x^2} \, dx.$

v) $\int \frac{x}{16+x^4} \, dx.$

w) $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx.$

x) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx.$

y) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} \, dx.$

z) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} \, dx.$

3. Use o método de integração por mudança de variável, quando necessário, para calcular as integrais abaixo

a) $\int \sqrt{1-4x^2} \, dx.$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \, dx.$

c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

d) $\int x^2\sqrt{1-x^2} \, dx.$

e) $\int \sqrt{9-4x^2} \, dx.$

f) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} \, dx.$

4. Calcule a área da elipse dada pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

4 Aplicações

1. Ache o número b tal que a reta $y = b$ divida a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões de áreas iguais.

2. Dada a figura ao lado, ache o volume do sólido gerado rotacionando a região indicada em torno da reta especificada:

a) $\mathcal{R}_1$ ao longo de OA.

b) $\mathcal{R}_1$ ao longo de AB.

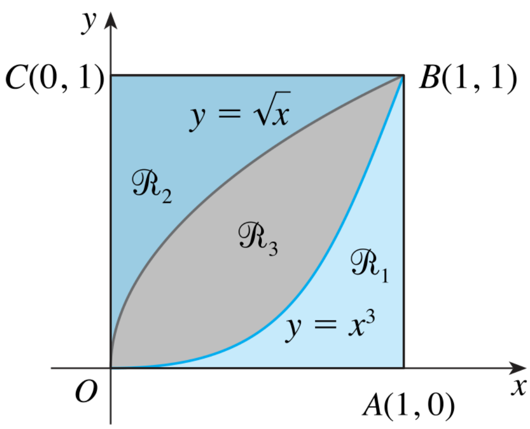
c) $\mathcal{R}_1$ ao longo de BC.

d) $\mathcal{R}_2$ ao longo de OC.

e) $\mathcal{R}_2$ ao longo de AB.

f) $\mathcal{R}_3$ ao longo de OA.

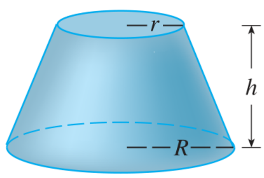
g) $\mathcal{R}_3$ ao longo de OC.



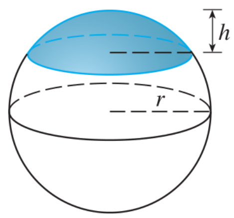
3. Determine usando integração o volume dos sólidos abaixo

a) Um cone circular reto de altura h e base r.

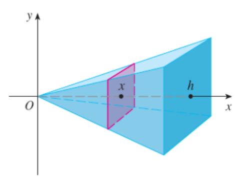
b) Um tronco de cone de base circular.



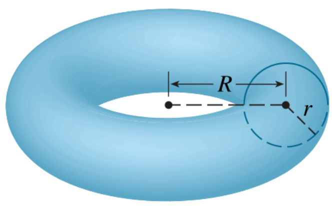
c) Uma calota esférica.



d) Uma pirâmide de altura h e base um quadrado de lado L.



e) Um toro sólido.



5 Integração por Partes

1. Use o método de integração por partes, quando necessário, para calcular as integrais abaixo

   a) $\displaystyle\int xe^x \, dx.$

   b) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \, dx.$

   c) $\displaystyle\int \ln x \, dx.$

   d) $\displaystyle\int x(\ln x)^2 \, dx.$

   e) $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx.$

   f) $\displaystyle\int x \sec^2 x \, dx.$

   g) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} \, dx.$

   h) $\displaystyle\int e^{-2x} \operatorname{sen} x \, dx.$

   i) $\displaystyle\int e^{-x} \cos(2x) \, dx.$

   j) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \, dx.$

   k) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \, dx.$

   l) $\displaystyle\int \sec^5 x \, dx.$