Disciplina: Introdução a Geometría Analítica e Álgebra Linear **Código:** CM303

Lista semana 6

1. Considere os vetores $\vec{u} = (1, -2, 3)$, $\vec{v} = (-3, 0, -2)$ e $\vec{w} = (1, 2, 1)$. Determine o que se pede.

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$. (b) $\vec{v} \cdot \vec{u}$. (c) $\vec{u} \cdot \vec{w}$.

(d) $\vec{w} \cdot \vec{u}$. (e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$. (f) $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

(g) $\vec{w} \cdot \vec{v}$. (h)$(2\vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$.

Observação. A notação $\vec{x} \cdot \vec{y}$ representa o produto escalar (ou produto interno) entre os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Em outros lugares, você também encontrará a notação $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

2. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere os vetores $\vec{u} = (4, a, -1)$ e $\vec{v} = (a, 2, 3)$ e os pontos $A = (4, -1, 2)$ e $B = (3, 2, -1)$. Determine a de modo que $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \overrightarrow{BA}) = 5$.

3. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, 1)$. Determine a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

4. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores.

(a) Usando as propriedades do produto interno, mostre que

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

(b) Usando as propriedades do produto interno, mostre que

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

(c) Utilize os itens (a) e (b) para concluir que

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{v}).$$

(d) Utilize os itens (a) e (b) para concluir que

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 4(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

5. Considere os vetores $\vec{u} = (1, -2, 3)$, $\vec{v} = (-3, 0, -2)$ e $\vec{w} = (1, 2, 1)$. Determine o que se pede.

(a) $|\vec{u}|$. (b) $|\vec{v}|$. (c) $|\vec{w}|$.

(d) $|2\vec{u} - \vec{w}|$. (e) o versor de $\vec{u}$. (f) o versor de $\vec{v}$.

(g) o versor de $\vec{w}$.

Observação. A notação $|\vec{x}|$ representa o módulo (ou a norma) do vetor $\vec{x}$. Em outros lugares, você também encontrará a notação $||\vec{x}||$.

6. Verifique se são unitários os vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

7. Seja $m \in \mathbb{R}$ e considere o vetor $\vec{v} = (m + 7, m + 2, 5)$. Determine m de modo que $|\vec{v}| = \sqrt{38}$.

8. Seja $m \in \mathbb{R}$ e considere os pontos $A = (-1, 2, 3)$ e $B = (1, -1, m)$. Sabendo que a distância entre A e B é 7 calcule m.

9. Em cada item, determine o ângulo entre os vetores.

(a) $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 0)$.

(b) $\vec{u} = (-1, 2, 1)$ e $\vec{v} = (2, -4, -2)$.

(c) $\vec{u} = (-1, 2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 1, 4)$.

10. Sabendo que os vetores $\vec{u} = (1, m, 2)$ e $\vec{v} = (1, -1, 3)$ são ortogonais, determine m.

11. Sabendo que $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{u} = (1, -1, 2)$ e que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -18$, determine $\vec{v}$.

12. Considere os vetores $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{v} = (1, 0, -2)$. Determine $\vec{w}$ sabendo que $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que forma um ângulo agudo com $\vec{j}$ e que possui módulo $3\sqrt{6}$.

13. Considere os vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (1, 4, 3)$. Determine $\vec{w}$ sabendo que $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que forma um ângulo obtuso com $\vec{i}$ e que possui módulo 14.

14. Sejam $\vec{u} = (1, 2, -3)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

(a) Determine o vetor projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

(b) Determine o vetor projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Respostas:

1. (a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -9$.

(b) $\vec{v} \cdot \vec{u} = -9$.

(c) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

(d) $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$.

(e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = -9$.

(f) $\vec{v} \cdot \vec{w} = -5$.

(g) $\vec{w} \cdot \vec{v} = -5$.

(h) $(2\vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = -10$.

2. $a = \dfrac{7}{3}$.

3. $a = 2$.

4.

5. (a) $|\vec{u}| = \sqrt{14}$.

(b) $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.

(c) $|\vec{w}| = \sqrt{6}$.

(d) $|2\vec{u} - \vec{w}| = \sqrt{62}$.

(e) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}}, -\dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$.

(f) $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}}, 0, -\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

(g) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

6. Apenas $\vec{v}$ é unitário.

7. $m = -4$ ou $m = -5$.

8. $m = 9$ ou $m = -3$.

9. (a) $\pi/4$.

(b) π.

(c) $\arccos\left(\dfrac{4}{3\sqrt{14}}\right)$.

10. $m = 7$.

11. $\vec{v} = (-3, 3, -6)$.

12. $\vec{w} = (2, 7, 1)$.

13. $\vec{w} = (-12, 6, -4)$.

14. (a) $\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{20}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{20}{9}\right)$.

(b) $\text{Proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{15}{7}\right)$.