Cálculo 1 - HONORS - CM311

Mais Aplicações

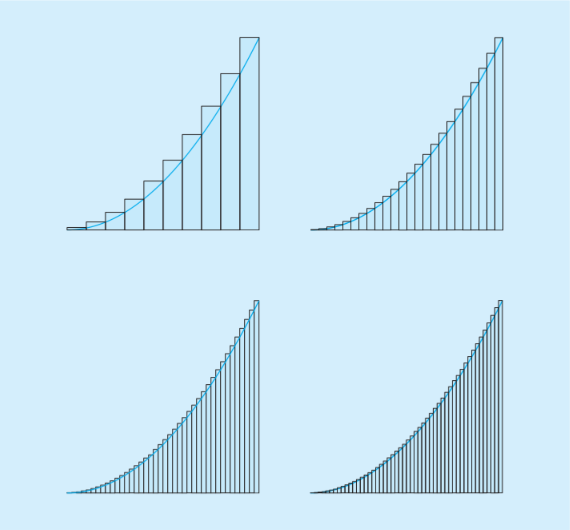
Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Cálculo de Volumes

- Para motivar a definição da fórmula do volume de sólidos, vamos lembrar da motivação da definição da fórmula de áreas

Cálculo de Volumes

- Para motivar a definição da fórmula do volume de sólidos, vamos lembrar da motivação da definição da fórmula de áreas



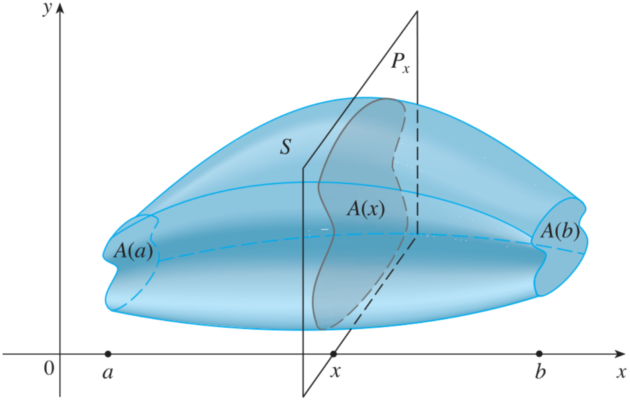
Cálculo de Volumes

- Sendo S um sólido que possui área de seção transversal $A(x)$ para $x \in [a, b]$, podemos usar a mesma ideia para definir o volume V como

$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$

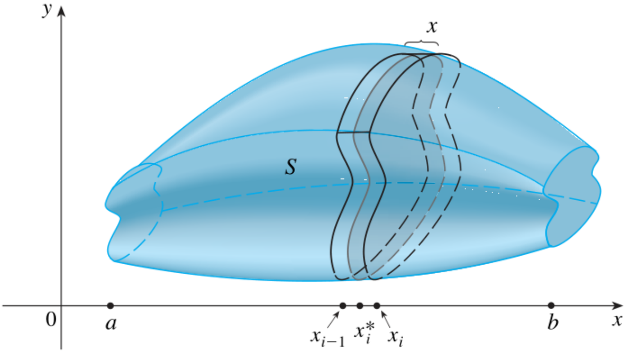
Cálculo de Volumes

- Sendo S um sólido que possui área de seção transversal $A(x)$ para $x \in [a, b]$, podemos usar a mesma ideia para definir o volume V como
$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$



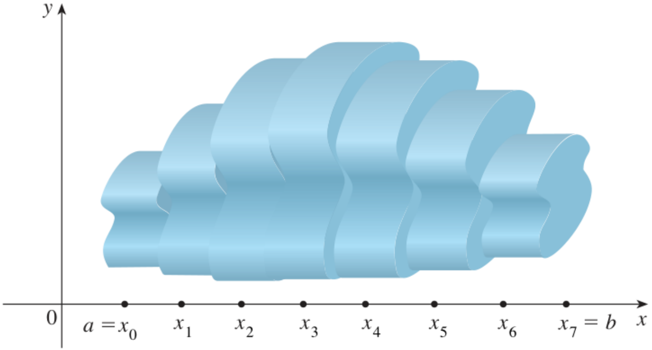
Cálculo de Volumes

- Sendo S um sólido que possui área de seção transversal $A(x)$ para $x \in [a, b]$, podemos usar a mesma ideia para definir o volume V como
$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$



Cálculo de Volumes

- Sendo S um sólido que possui área de seção transversal $A(x)$ para $x \in [a, b]$, podemos usar a mesma ideia para definir o volume V como
$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$



Cálculo de Volumes

Exemplo 1.1.

Calcule o volume de uma pirâmide reta, com base retangular, com arestas da base medindo a e b, e altura h.

- Seja $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Considere o sólido de revolução obtido rotacionando o gráfico de f ao redor do eixo x. O volume V é

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Exemplo 1.2.

Mostre que o volume de uma esfera de raio R é igual à $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Exemplo 1.3.

Exemplo área entre curvas.

Cálculo de Volumes

Exemplo 1.1.

Calcule o volume de uma pirâmide reta, com base retangular, com arestas da base medindo a e b, e altura h.

- Seja $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Considere o sólido de revolução obtido rotacionando o gráfico de f ao redor do eixo x. O volume V é
$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Exemplo 1.2.

Mostre que o volume de uma esfera de raio R é igual à $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Exemplo 1.3.

Exemplo área entre curvas.

Cálculo de Volumes

Exemplo 1.1.

Calcule o volume de uma pirâmide reta, com base retangular, com arestas da base medindo a e b, e altura h.

- Seja $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Considere o sólido de revolução obtido rotacionando o gráfico de f ao redor do eixo x. O volume V é

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Exemplo 1.2.

Mostre que o volume de uma esfera de raio R é igual à $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Exemplo 1.3.

Exemplo área entre curvas.

Cálculo de Volumes

Exemplo 1.1.

Calcule o volume de uma pirâmide reta, com base retangular, com arestas da base medindo a e b, e altura h.

- Seja $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Considere o sólido de revolução obtido rotacionando o gráfico de f ao redor do eixo x. O volume V é
$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Exemplo 1.2.

Mostre que o volume de uma esfera de raio R é igual à $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Exemplo 1.3.

Exemplo área entre curvas.

Cálculo de Volumes

Exemplo 1.1.

Calcule o volume de uma pirâmide reta, com base retangular, com arestas da base medindo a e b, e altura h.

- Seja $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Considere o sólido de revolução obtido rotacionando o gráfico de f ao redor do eixo x. O volume V é

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Exemplo 1.2.

Mostre que o volume de uma esfera de raio R é igual à $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Exemplo 1.3.

Exemplo área entre curvas.

Integração por Partes

- Seguindo a ideia do método de substituição, vamos relembrar a regra do produto, com o objetivo obter outra estratégia de integração.
- Regra do Produto: $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
- Calculando a integral e manipulando a expressão ficamos com

$$\int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'\,dx.$$

- A fórmula acima é chamada de **fórmula de integração por partes.**
- Ela pode ser útil quando queremos calcular uma integral envolvendo um produto onde um dos fatores sabemos calcular primitiva. A estratégia vai funcionar se a integral resultante for mais simples.

Exemplo 2.1.

Use o método da integração por partes para calcular as integrais

a) $\displaystyle\int xe^x\,dx.$

b) $\displaystyle\int \ln x\,dx.$

c) $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx.$

d) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx.$

Integração por Partes

- Seguindo a ideia do método de substituição, vamos relembrar a regra do produto, com o objetivo obter outra estratégia de integração.
- Regra do Produto: $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
- Calculando a integral e manipulando a expressão ficamos com
$$\int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'\,dx.$$
- A fórmula acima é chamada de **fórmula de integração por partes.**
- Ela pode ser útil quando queremos calcular uma integral envolvendo um produto onde um dos fatores sabemos calcular primitiva. A estratégia vai funcionar se a integral resultante for mais simples.

Exemplo 2.1.

Use o método da integração por partes para calcular as integrais

a) $\int xe^x\,dx$.

b) $\int \ln x\,dx$.

c) $\int e^x \cos x\,dx$.

d) $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$.

Integração por Partes

- Seguindo a ideia do método de substituição, vamos relembrar a regra do produto, com o objetivo obter outra estratégia de integração.
- Regra do Produto: $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
- Calculando a integral e manipulando a expressão ficamos com
$$\int f'.g\, dx = f.g - \int f.g'\, dx.$$
- A fórmula acima é chamada de **fórmula de integração por partes.**
- Ela pode ser útil quando queremos calcular uma integral envolvendo um produto onde um dos fatores sabemos calcular primitiva. A estratégia vai funcionar se a integral resultante for mais simples.

Exemplo 2.1.

Use o método da integração por partes para calcular as integrais

a) $\displaystyle\int xe^x\, dx$.

c) $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx$.

b) $\displaystyle\int \ln x\, dx$.

d) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\, dx$.

Integração por Partes

- Seguindo a ideia do método de substituição, vamos relembrar a regra do produto, com o objetivo obter outra estratégia de integração.
- Regra do Produto: $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
- Calculando a integral e manipulando a expressão ficamos com

$$\int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'\,dx.$$

- A fórmula acima é chamada de **fórmula de integração por partes.**
- Ela pode ser útil quando queremos calcular uma integral envolvendo um produto onde um dos fatores sabemos calcular primitiva. A estratégia vai funcionar se a integral resultante for mais simples.

Exemplo 2.1.

Use o método da integração por partes para calcular as integrais

a) $\displaystyle\int xe^x\,dx$.

b) $\displaystyle\int \ln x\,dx$.

c) $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx$.

d) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$.

Integração por Partes

- Seguindo a ideia do método de substituição, vamos relembrar a regra do produto, com o objetivo obter outra estratégia de integração.
- Regra do Produto: $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
- Calculando a integral e manipulando a expressão ficamos com

$$\int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'\,dx.$$

- A fórmula acima é chamada de **fórmula de integração por partes.**
- Ela pode ser útil quando queremos calcular uma integral envolvendo um produto onde um dos fatores sabemos calcular primitiva. A estratégia vai funcionar se a integral resultante for mais simples.

Exemplo 2.1.

Use o método da integração por partes para calcular as integrais

a) $\displaystyle\int xe^x\,dx.$

b) $\displaystyle\int \ln x\,dx.$

c) $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx.$

d) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx.$

Integração por Partes

- Seguindo a ideia do método de substituição, vamos relembrar a regra do produto, com o objetivo obter outra estratégia de integração.
- Regra do Produto: $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
- Calculando a integral e manipulando a expressão ficamos com

$$\int f'.g\,dx = f.g - \int f.g'\,dx.$$

- A fórmula acima é chamada de **fórmula de integração por partes.**
- Ela pode ser útil quando queremos calcular uma integral envolvendo um produto onde um dos fatores sabemos calcular primitiva. A estratégia vai funcionar se a integral resultante for mais simples.

Exemplo 2.1.

Use o método da integração por partes para calcular as integrais

a) $\displaystyle\int xe^x\,dx$.

b) $\displaystyle\int \ln x\,dx$.

c) $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx$.

d) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$.

Integrais Impróprias

- Podemos estender o conceito de integrais em algumas situações.
- Por exemplo, sendo $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ contínua, definimos a **integral (imprópria) de f no intervalo** $[a, +\infty]$ como sendo
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$
- Quando o limite acima existir dizemos que a integral **converge**. Caso contrário, dizemos que **diverge**.

Exemplo 3.1.

Verifique se as integrais abaixo convergem ou divergem

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3.e^{-x}\,dx.$

Exercício.

Sendo $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$, mostre que $\Gamma(x) = (x-1)!$, $x \in \mathbb{N}$.

Integrais Impróprias

- Podemos estender o conceito de integrais em algumas situações.
- Por exemplo, sendo $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ contínua, definimos a **integral (imprópria) de f no intervalo** $[a, +\infty]$ como sendo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

- Quando o limite acima existir dizemos que a integral **converge**. Caso contrário, dizemos que **diverge**.

Exemplo 3.1.

Verifique se as integrais abaixo convergem ou divergem

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$ c) $\int_0^{+\infty} x^3.e^{-x}\,dx.$

Exercício.

Sendo $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$, mostre que $\Gamma(x) = (x-1)!$, $x \in \mathbb{N}$.

Integrais Impróprias

- Podemos estender o conceito de integrais em algumas situações.
- Por exemplo, sendo $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ contínua, definimos a **integral (imprópria) de f no intervalo** $[a, +\infty]$ como sendo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

- Quando o limite acima existir dizemos que a integral **converge**. Caso contrário, dizemos que **diverge**.

Exemplo 3.1.

Verifique se as integrais abaixo convergem ou divergem

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3.e^{-x}\,dx.$

Exercício.

Sendo $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$, mostre que $\Gamma(x) = (x-1)!$, $x \in \mathbb{N}$.

Integrais Impróprias

- Podemos estender o conceito de integrais em algumas situações.
- Por exemplo, sendo $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ contínua, definimos a **integral (imprópria) de f no intervalo** $[a, +\infty]$ como sendo
$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt.$$
- Quando o limite acima existir dizemos que a integral **converge**. Caso contrário, dizemos que **diverge**.

Exemplo 3.1.

Verifique se as integrais abaixo convergem ou divergem

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx.$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3.e^{-x}\, dx.$

Exercício.

Sendo $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$, mostre que $\Gamma(x) = (x-1)!$, $x \in \mathbb{N}$.

Integrais Impróprias

- Podemos estender o conceito de integrais em algumas situações.
- Por exemplo, sendo $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ contínua, definimos a **integral (imprópria) de f no intervalo** $[a, +\infty]$ como sendo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

- Quando o limite acima existir dizemos que a integral **converge**. Caso contrário, dizemos que **diverge**.

Exemplo 3.1.

Verifique se as integrais abaixo convergem ou divergem

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3.e^{-x}\,dx.$

Exercício.

Sendo $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$, mostre que $\Gamma(x) = (x-1)!$, $x \in \mathbb{N}$.