Cálculo 1 - HONORS - CM311

Derivadas e Propriedades

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Projeto Honors

Aula Passada

- Funções exponenciais: $f(x) = a^x$.
- Número de Euler e é o único que satisfaz $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.
- A partir disso temos que $(e^x)' = e^x$.
- Algumas propriedades do número de Euler
  - $2 < e < 3$
  - $e \approx 2,71828$.
  - $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
  - e não é algébrico (transcendental).
  - Existem fórmulas que determinam e:

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

- A função $f(x) = e^x$ é crescente, em particular injetora. É possível mostrar que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.
- Assim f admite inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
- Denotamos $f^{-1}(x) = \ln x = \log_e x$ e chamamos esta função de **logaritmo natural**.

Aula Passada

- Funções exponenciais: $f(x) = a^x$.
- Número de Euler e é o único que satisfaz $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.
- A partir disso temos que $(e^x)' = e^x$.
- Algumas propriedades do número de Euler
  - $2 < e < 3$
  - $e \approx 2,71828$.
  - $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
  - e não é algébrico (transcendental).
  - Existem fórmulas que determinam e:
$$e = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$
- A função $f(x) = e^x$ é crescente, em particular injetora. É possível mostrar que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.
- Assim f admite inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
- Denotamos $f^{-1}(x) = \ln x = \log_e x$ e chamamos esta função de **logaritmo natural**.

Aula Passada

- Funções exponenciais: $f(x) = a^x$.
- Número de Euler e é o único que satisfaz $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.
- A partir disso temos que $(e^x)' = e^x$.
- Algumas propriedades do número de Euler
  - $2 < e < 3$
  - $e \approx 2,71828$.
  - $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
  - e não é algébrico (transcendental).
  - Existem fórmulas que determinam e:

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

- A função $f(x) = e^x$ é crescente, em particular injetora. É possível mostrar que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.
- Assim f admite inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
- Denotamos $f^{-1}(x) = \ln x = \log_e x$ e chamamos esta função de **logaritmo natural**.

Aula Passada

- Funções exponenciais: $f(x) = a^x$.
- Número de Euler e é o único que satisfaz $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.
- A partir disso temos que $(e^x)' = e^x$.
- Algumas propriedades do número de Euler
  - $2 < e < 3$
  - $e \approx 2,71828$.
  - $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
  - e não é algébrico (transcendental).
  - Existem fórmulas que determinam e:

$$e = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

- A função $f(x) = e^x$ é crescente, em particular injetora. É possível mostrar que $\text{Im}\, f = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.
- Assim f admite inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
- Denotamos $f^{-1}(x) = \ln x = \log_e x$ e chamamos esta função de **logaritmo natural**.

Aula Passada

- Funções exponenciais: $f(x) = a^x$.
- Número de Euler e é o único que satisfaz $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.
- A partir disso temos que $(e^x)' = e^x$.
- Algumas propriedades do número de Euler
  - $2 < e < 3$
  - $e \approx 2,71828$.
  - $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
  - e não é algébrico (transcendental).
  - Existem fórmulas que determinam e:

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

- A função $f(x) = e^x$ é crescente, em particular injetora. É possível mostrar que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.
- Assim f admite inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
- Denotamos $f^{-1}(x) = \ln x = \log_e x$ e chamamos esta função de **logaritmo natural**.

Aula Passada

- Funções exponenciais: $f(x) = a^x$.
- Número de Euler e é o único que satisfaz $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.
- A partir disso temos que $(e^x)' = e^x$.
- Algumas propriedades do número de Euler
  - $2 < e < 3$
  - $e \approx 2,71828$.
  - $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
  - e não é algébrico (transcendental).
  - Existem fórmulas que determinam e:

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

- A função $f(x) = e^x$ é crescente, em particular injetora. É possível mostrar que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.
- Assim f admite inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
- Denotamos $f^{-1}(x) = \ln x = \log_e x$ e chamamos esta função de **logaritmo natural**.

Aula Passada

- Funções exponenciais: $f(x) = a^x$.
- Número de Euler e é o único que satisfaz $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.
- A partir disso temos que $(e^x)' = e^x$.
- Algumas propriedades do número de Euler
  - $2 < e < 3$
  - $e \approx 2,71828$.
  - $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
  - e não é algébrico (transcendental).
  - Existem fórmulas que determinam e:

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

- A função $f(x) = e^x$ é crescente, em particular injetora. É possível mostrar que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.
- Assim f admite inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
- Denotamos $f^{-1}(x) = \ln x = \log_e x$ e chamamos esta função de **logaritmo natural**.

Funções Logarítmicas

- Temos as seguintes propriedades:
  i) $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$.
  ii) $\ln e = 1$.
  iii) $\ln(e^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  iv) $e^{\ln x} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$.
  v) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$.
  vi) $\ln a^r = r. \ln a$.
  vii) $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- Analogamente para $g(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, temos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ admite inversa $g^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
- Denotamos $g^{-1}(x) = \log_a x$ e chamamos esta função de **logaritmo na base** a.
- As mesmas propriedades acima valem trocando e por a e $\ln$ por $\log_a$.
- Temos uma propriedade extra (mudança de base):

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Funções Logarítmicas

- Temos as seguintes propriedades:
  - i) $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$.
  - ii) $\ln e = 1$.
  - iii) $\ln(e^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  - iv) $e^{\ln x} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$.
  - v) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$.
  - vi) $\ln a^r = r. \ln a$.
  - vii) $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- Analogamente para $g(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, temos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ admite inversa $g^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
- Denotamos $g^{-1}(x) = \log_a x$ e chamamos esta função de **logaritmo na base** a.
- As mesmas propriedades acima valem trocando e por a e $\ln$ por $\log_a$.
- Temos uma propriedade extra (mudança de base):

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Funções Logarítmicas

- Temos as seguintes propriedades:
  - i) $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$.
  - ii) $\ln e = 1$.
  - iii) $\ln(e^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  - iv) $e^{\ln x} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$.
  - v) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$.
  - vi) $\ln a^r = r. \ln a$.
  - vii) $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- Analogamente para $g(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, temos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ admite inversa $g^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
- Denotamos $g^{-1}(x) = \log_a x$ e chamamos esta função de **logaritmo na base** a.
- As mesmas propriedades acima valem trocando e por a e $\ln$ por $\log_a$.
- Temos uma propriedade extra (mudança de base):

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Funções Logarítmicas

- Temos as seguintes propriedades:
  - i) $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$.
  - ii) $\ln e = 1$.
  - iii) $\ln(e^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  - iv) $e^{\ln x} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$.
  - v) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$.
  - vi) $\ln a^r = r. \ln a$.
  - vii) $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- Analogamente para $g(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, temos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ admite inversa $g^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
- Denotamos $g^{-1}(x) = \log_a x$ e chamamos esta função de **logaritmo na base** a.
- As mesmas propriedades acima valem trocando e por a e $\ln$ por $\log_a$.
- Temos uma propriedade extra (mudança de base):

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Funções Logarítmicas

- Temos as seguintes propriedades:
  i) $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$.
  ii) $\ln e = 1$.
  iii) $\ln(e^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  iv) $e^{\ln x} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$.
  v) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$.
  vi) $\ln a^r = r. \ln a$.
  vii) $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- Analogamente para $g(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, temos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ admite inversa $g^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
- Denotamos $g^{-1}(x) = \log_a x$ e chamamos esta função de **logaritmo na base** a.
- As mesmas propriedades acima valem trocando e por a e $\ln$ por $\log_a$.
- Temos uma propriedade extra (mudança de base):

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Funções Logarítmicas

- Como $f(x) = e^x$ é derivável e $f'(x) = f(x) \neq 0$ teremos que f^{-1} será derivável em todo ponto de seu domínio e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

- Assim temos que

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}.$$

- Tomando $x = 1$, temos que $e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$!
- A expressão acima fornece uma fórmula do número e em termos de um limite, e agora podemos tomar isso como definição e fazer a dedução desde o início.
- Com essa definição é possível provar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Funções Logarítmicas

- Como $f(x) = e^x$ é derivável e $f'(x) = f(x) \neq 0$ teremos que f^{-1} será derivável em todo ponto de seu domínio e
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$
- Assim temos que
$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}.$$
- Tomando $x = 1$, temos que $e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$!
- A expressão acima fornece uma fórmula do número e em termos de um limite, e agora podemos tomar isso como definição e fazer a dedução desde o início.
- Com essa definição é possível provar que
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Funções Logarítmicas

- Como $f(x) = e^x$ é derivável e $f'(x) = f(x) \neq 0$ teremos que f^{-1} será derivável em todo ponto de seu domínio e
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$
- Assim temos que
$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}.$$
- Tomando $x = 1$, temos que $e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$!
- A expressão acima fornece uma fórmula do número e em termos de um limite, e agora podemos tomar isso como definição e fazer a dedução desde o início.
- Com essa definição é possível provar que
$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Funções Logarítmicas

- Como $f(x) = e^x$ é derivável e $f'(x) = f(x) \neq 0$ teremos que f^{-1} será derivável em todo ponto de seu domínio e
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$
- Assim temos que
$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}.$$
- Tomando $x = 1$, temos que $e = \lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$!
- A expressão acima fornece uma fórmula do número e em termos de um limite, e agora podemos tomar isso como definição e fazer a dedução desde o início.
- Com essa definição é possível provar que
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Funções Logarítmicas

Exemplo 1.1.

Calcule

a) $(\ln x + \sqrt{x^2+1})'$.

b) $(x \ln(2x + \cos^2 x))'$.

Exemplo 1.2.

Mostre que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = \ln a$.

- Usando o exemplo acima, podemo calcular a derivada de a^x:

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x . \ln a.$$

- Assim teremos também que

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} . \frac{1}{\ln a} = \frac{\ln a^{-1}}{x}.$$

Exemplo 1.1.

Calcule

a) $(\ln x + \sqrt{x^2+1})'$. b) $(x \ln(2x + \cos^2 x))'$.

Exemplo 1.2.

Mostre que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = \ln a$.

- Usando o exemplo acima, podemo calcular a derivada de a^x:

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x . \ln a.$$

- Assim teremos também que

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} . \frac{1}{\ln a} = \frac{\ln a^{-1}}{x}.$$

Funções Logarítmicas

Exemplo 1.1.

Calcule

a) $(\ln x + \sqrt{x^2+1})'$. b) $(x \ln(2x + \cos^2 x))'$.

Exemplo 1.2.

Mostre que $\lim_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = \ln a$.

- Usando o exemplo acima, podemo calcular a derivada de a^x:

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x . \ln a.$$

- Assim teremos também que

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} . \frac{1}{\ln a} = \frac{\ln a^{-1}}{x}.$$

Exemplo 1.1.

Calcule

a) $(\ln x + \sqrt{x^2+1})'$. b) $(x\ln(2x+\cos^2 x))'$.

Exemplo 1.2.

Mostre que $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$.

- Usando o exemplo acima, podemo calcular a derivada de a^x:

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x . \ln a.$$

- Assim teremos também que

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} . \frac{1}{\ln a} = \frac{\ln a^{-1}}{x}.$$

Funções Logarítmicas

- Sendo $h(x) = f(x)^{g(x)}$, um truque interessante para derivar tais funções, se forem deriváveis, é reescrever h e usar a regra da cadeia:

$$h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x).\ln f(x)}.$$

Exemplo 1.3.

Sendo $a \in \mathbb{R}$, mostra que $(x^a)' = a.x^{a-1}$.

- Da mesma forma, se $h(x) = \log_{f(x)} g(x)$, podemos reescrever h da forma abaixo para derivar, caso seja derivável:

$$h(x) = \log_{f(x)} g(x) = \frac{\ln g(x)}{\ln f(x)}.$$

Exemplo 1.4.

Calcule

a) $(x^\pi + \pi^x)'$.

b) $(x^x)'$.

c) $(\log_{2x+1} x^2 + 1)'$.

d) $(\log_{e^x} \operatorname{sen} x)'$.

Funções Logarítmicas

- Sendo $h(x) = f(x)^{g(x)}$, um truque interessante para derivar tais funções, se forem deriváveis, é reescrever h e usar a regra da cadeia:

$$h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x).\ln f(x)}.$$

Exemplo 1.3.

Sendo $a \in \mathbb{R}$, mostra que $(x^a)' = a.x^{a-1}$.

- Da mesma forma, se $h(x) = \log_{f(x)} g(x)$, podemos reescrever h da forma abaixo para derivar, caso seja derivável:

$$h(x) = \log_{f(x)} g(x) = \frac{\ln g(x)}{\ln f(x)}.$$

Exemplo 1.4.

Calcule

a) $(x^\pi + \pi^x)'$.

b) $(x^x)'$.

c) $(\log_{2x+1} x^2 + 1)'$.

d) $(\log_{e^x} \operatorname{sen} x)'$.

Funções Logarítmicas

- Sendo $h(x) = f(x)^{g(x)}$, um truque interessante para derivar tais funções, se forem deriváveis, é reescrever h e usar a regra da cadeia:

$$h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x).\ln f(x)}.$$

Exemplo 1.3.

Sendo $a \in \mathbb{R}$, mostra que $(x^a)' = a.x^{a-1}$.

- Da mesma forma, se $h(x) = \log_{f(x)} g(x)$, podemos reescrever h da forma abaixo para derivar, caso seja derivável:

$$h(x) = \log_{f(x)} g(x) = \frac{\ln g(x)}{\ln f(x)}.$$

Exemplo 1.4.

Calcule

a) $(x^\pi + \pi^x)'$.

b) $(x^x)'$.

c) $(\log_{2x+1} x^2 + 1)'$.

d) $(\log_{e^x} \operatorname{sen} x)'$.

Funções Logarítmicas

- Sendo $h(x) = f(x)^{g(x)}$, um truque interessante para derivar tais funções, se forem deriváveis, é reescrever h e usar a regra da cadeia:
$$h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x).\ln f(x)}.$$

Exemplo 1.3.

Sendo $a \in \mathbb{R}$, mostra que $(x^a)' = a.x^{a-1}$.

- Da mesma forma, se $h(x) = \log_{f(x)} g(x)$, podemos reescrever h da forma abaixo para derivar, caso seja derivável:
$$h(x) = \log_{f(x)} g(x) = \frac{\ln g(x)}{\ln f(x)}.$$

Exemplo 1.4.

Calcule

a) $(x^\pi + \pi^x)'$.

b) $(x^x)'$.

c) $(\log_{2x+1} x^2 + 1)'$.

d) $(\log_{e^x} \operatorname{sen} x)'$.