Prova 3

1. (4 pontos) Em um estudo sobre a influência do tipo de treinamento em aprendizado de máquina no tempo de processamento de modelos, pesquisadores analisaram dois grupos de experimentos: o primeiro grupo (Grupo I) consistia em modelos treinados em GPUs com otimização padrão; o segundo grupo (Grupo II), em GPUs com otimizações avançadas, como fusão de kernels e uso de memória compartilhada. A hipótese dos pesquisadores é que o tempo médio de processamento dos modelos difere entre os dois grupos. A partir desses dados amostrais foram realizados dois testes de hipóteses: um para a igualdade de variâncias (p-valor = 0,912) e outro para igualdade de médias (p-valor = 0,0119). Considerando um nível de significância de $\alpha = 5\%$, marque as afirmações como verdadeiras ou falsas, **justificando as falsas**.

   (a) (1 ponto) As hipóteses nula e alternativa neste problema são: H_0 : o tempo médio de processamento dos modelos com otimização padrão é diferente do tempo médio com otimização avançada; H_a : o tempo médio de processamento dos modelos com otimização padrão é igual ao tempo médio com otimização avançada;

   FALSA. As hipóteses estão invertidas. A forma correta é: H_0 : os tempos médios são **iguais** e H_a : os tempos médios são **diferentes**.

   (b) (1 ponto) No contexto deste problema o erro do Tipo II é: concluir que os tempos médios de processamento são diferentes quando na verdade eles são iguais;

   FALSA. Esse é o erro do Tipo I. O erro do Tipo II ocorre quando concluímos que os tempos são iguais, quando na verdade eles são diferentes.

   (c) (1 ponto) Os testes estatísticos usados nesta questão foram: teste para a razão de variâncias de duas populações e teste para diferença de médias de duas populações com σ^2 desconhecido e diferente entre as populações.

   FALSA. O teste de variâncias indicou que as variâncias podem ser consideradas iguais (p-valor = 0,912). Portanto, o teste correto de comparação de médias entre duas populações com variâncias desconhecidas, mas consideradas **iguais**, é o teste t com variâncias agrupadas.

(d) (1 ponto) Com base nos resultados obtidos, a conclusão sobre a hipótese dos pesquisadores é de que temos evidências suficientes para rejeitar a igualdade dos tempos médios de processamento dos modelos nos dois grupos, ao nível de significância de 3%.

VERDADEIRA. O p-valor do teste de médias é 0,0119, que é menor que 3%. Portanto, rejeitamos a hipótese nula de igualdade de médias nesse nível de significância.

2. (2 pontos) Um engenheiro de redes está avaliando a estabilidade da latência (em milissegundos) em uma rede local corporativa. Ele coleta os tempos de resposta de 14 pacotes ICMP (ping) enviados a um servidor e obtém um desvio padrão amostral de 4,5 ms. Admitindo que os tempos de resposta seguem uma distribuição normal, construa um intervalo de confiança de 90% para a variância da latência da rede.

   - Sabendo que o grau de liberdade é $n - 1 = 13$, temos que os valores críticos da qui-quadrado são:
     - $\chi^2_{0,95} \approx 22{,}362$
     - $\chi^2_{0,05} \approx 5{,}892$
   - Fórmula do intervalo de confiança para a variância:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \right)$$

   - Substituindo:

$$\left(\frac{13 \cdot 20{,}25}{22{,}362}, \frac{13 \cdot 20{,}25}{5{,}892} \right) \Rightarrow IC_{90\%} = (11{,}77,\ 44{,}68)\ \text{ms}^2$$

3. (2 pontos) Uma empresa de software deseja avaliar se pelo menos 70% dos usuários estão satisfeitos com a nova interface do seu sistema. Para isso, realizou-se uma pesquisa com uma amostra aleatória de 200 usuários, dos quais 128 afirmaram estar satisfeitos com a nova interface. Teste a hipótese apropriada para responder à pergunta da empresa, adotando um nível de significância de 5%. Apresente as etapas do teste, incluindo a formulação das hipóteses, o cálculo da estatística de teste, a determinação da região crítica e a conclusão com base nos resultados.

- **Etapa 1 - Hipóteses:**

$$H_0 : p \geq 0{,}70 \quad vs \quad H_a : p < 0{,}70$$

- **Etapa 2 - Região crítica:**

  Para $\alpha = 0{,}05$ (teste unilateral à esquerda), temos:

$$z_\alpha = -1{,}645$$

  Rejeitamos H_0 se $z < -1{,}645$.

- **Etapa 3 - Estatística de teste:**

  Seja $\hat{p} = \frac{128}{200} = 0{,}64$

  O teste será unilateral à esquerda. A estatística de teste é:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}64 - 0{,}70}{\sqrt{\frac{0{,}70 \cdot 0{,}30}{200}}} = \frac{-0{,}06}{\sqrt{0{,}00105}} = \frac{-0{,}06}{0{,}0324} \approx -1{,}852$$

- **Etapa 4 - Conclusão:**

  Como $z = -1{,}852 < -1{,}645$, rejeitamos a hipótese nula H_0. Portanto, há evidências estatísticas, ao nível de 5% de significância, de que menos de 70% dos usuários estão satisfeitos com a nova interface.

4. (2 pontos) Uma empresa de *cibersegurança* está testando um novo sistema de detecção de intrusos (IDS - *Intrusion Detection System*) que identifica tentativas de ataques em redes corporativas. Os engenheiros mediram o tempo de resposta do sistema (em milissegundos) em uma amostra com $n = 16$ ataques simulados. Os resultados da amostra indicaram um tempo médio de resposta de 205 ms e desvio padrão de 20 ms. Construa um intervalo de confiança de 95% para o tempo médio de resposta do sistema.

- **Distribuição:**

  Como o desvio padrão populacional é desconhecido e a amostra é pequena ($n < 30$), usamos a distribuição t de Student com $n - 1 = 15$ graus de liberdade.

- **Valor crítico:**

  Para 95% de confiança e 15 graus de liberdade:

  $t_{0{,}025;15} \approx 2,131$

- **Erro padrão da média:**

$$\text{EP} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{16}} = \frac{20}{4} = 5$$

- **Intervalo de confiança:**

$$\bar{x} \pm t \cdot \text{EP} = 205 \pm 2,131 \cdot 5 = 205 \pm 10,655$$

$$IC_{95\%} = (194{,}345 \text{ ms}, \; 215{,}655 \text{ ms})$$

- **Conclusão:**

  Com 95% de confiança, o tempo médio de resposta do sistema está entre 194,345 ms e 215,655 ms.

Uma população

$$\text{P}(\; c_1 \; < \mu \; < c_2 \;) = 1 - \alpha.$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \qquad \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

$$\text{P}(\; c_1 \; < \sigma^2 \; < c_2 \;) = 1 - \alpha.$$

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Duas populações

$$\frac{(\; \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \;) - (\; \mu_1 - \mu_2 \;)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \;\downarrow\; N(0,1)$$

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\hat{s}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \;\downarrow\; t_{\,n_1 + n_2 - 2}$$

$$\hat{s}^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

$$\frac{(\; \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \;) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \;\downarrow\; N(0,1)$$