Cálculo 1 - HONORS - CM311

Substituição

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Método da Substituição

- Integração é o processo inverso da derivação.
- É interessante revisar as regras de derivação.
- Regra da Cadeia: $[F(g(x))]' = F'(g(x)).g'(x)$.
- Há alguma regra que corresponde ao inverso da regra da cadeia?

Teorema 1.1 (Fórmula da Substituição).

Sendo f e g' funções contínuas, vale

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(x)).g'(x)\,dx.$$

Método da Substituição

- Integração é o processo inverso da derivação.
- É interessante revisar as regras de derivação.
- Regra da Cadeia: $[F(g(x))]' = F'(g(x)).g'(x)$.
- Há alguma regra que corresponde ao inverso da regra da cadeia?

Teorema 1.1 (Fórmula da Substituição).

Sendo f e g' funções contínuas, vale

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(x)).g'(x)\,dx.$$

Método da Substituição

- Integração é o processo inverso da derivação.
- É interessante revisar as regras de derivação.
- Regra da Cadeia: $[F(g(x))]' = F'(g(x)).g'(x)$.
- Há alguma regra que corresponde ao inverso da regra da cadeia?

Teorema 1.1 (Fórmula da Substituição).

Sendo f e g' funções contínuas, vale

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(x)).g'(x)\,dx.$$

Método da Substituição

- Integração é o processo inverso da derivação.
- É interessante revisar as regras de derivação.
- Regra da Cadeia: $[F(g(x))]' = F'(g(x)).g'(x)$.
- Há alguma regra que corresponde ao inverso da regra da cadeia?

Teorema 1.1 (Fórmula da Substituição).

Sendo f e g' funções contínuas, vale

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(x)).g'(x)\,dx.$$

Método da Substituição

- Integração é o processo inverso da derivação.
- É interessante revisar as regras de derivação.
- Regra da Cadeia: $[F(g(x))]' = F'(g(x)).g'(x)$.
- Há alguma regra que corresponde ao inverso da regra da cadeia?

Teorema 1.1 (Fórmula da Substituição).

Sendo f e g' funções contínuas, vale

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(x)).g'(x)\,dx.$$

Exemplo 1.2.

Calcule as integrais abaixo

a) $\displaystyle\int_a^b x\cos x^2\,dx.$

b) $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{1+x^2}\,dx.$

c) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx.$

d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\cos^3 x\,dx.$

e) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x-1}\,dx.$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx.$

Propriedade 1.3.

Seja $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ contínua. Vale

a) *Se f é par, então* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

b) *Se f é ímpar, então* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$

Método da Substituição

Exemplo 1.2.

Calcule as integrais abaixo

a) $\displaystyle\int_a^b x\cos x^2\,dx.$

b) $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{1+x^2}\,dx.$

c) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx.$

d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\cos^3 x\,dx.$

e) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x-1}\,dx.$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx.$

Propriedade 1.3.

Seja $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ contínua. Vale

a) *Se f é par, então* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

b) *Se f é ímpar, então* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Método da Substituição

- Uma forma de verificar se o método vai funcionar é localizar $g(x)$ na integral e trocar por $u = g(x)$.
- Vai ser bem sucedido se tiver na expressão $g'(x)$ para trocar $g'(x)\,dx$ por du.
- Caso contrário: tentar outra estratégia...
- Derivação (Mecânico) vs. Integração (Arte).
- Uma outra possibilidade, caso o termo $g'(x)$ não apareça na integral, é fazer a substituição $u = g(x)$ tomando g como sendo bijetora no problema considerado.
- Sendo a integral abaixo, podemos substituir $x = g^{-1}(u)$

$$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\,(g^{-1})'(u)\,du.$$

Método da Substituição

- Uma forma de verificar se o método vai funcionar é localizar $g(x)$ na integral e trocar por $u = g(x)$.
- Vai ser bem sucedido se tiver na expressão $g'(x)$ para trocar $g'(x)\,dx$ por du.
- Caso contrário: tentar outra estratégia...
- Derivação (Mecânico) vs. Integração (Arte).
- Uma outra possibilidade, caso o termo $g'(x)$ não apareça na integral, é fazer a substituição $u = g(x)$ tomando g como sendo bijetora no problema considerado.
- Sendo a integral abaixo, podemos substituir $x = g^{-1}(u)$
$$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\,(g^{-1})'(u)\,du.$$

Método da Substituição

- Uma forma de verificar se o método vai funcionar é localizar $g(x)$ na integral e trocar por $u = g(x)$.
- Vai ser bem sucedido se tiver na expressão $g'(x)$ para trocar $g'(x)\,dx$ por du.
- Caso contrário: tentar outra estratégia...
- Derivação (Mecânico) vs. Integração (Arte).
- Uma outra possibilidade, caso o termo $g'(x)$ não apareça na integral, é fazer a substituição $u = g(x)$ tomando g como sendo bijetora no problema considerado.
- Sendo a integral abaixo, podemos substituir $x = g^{-1}(u)$
$$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\,(g^{-1})'(u)\,du.$$

Método da Substituição

- Uma forma de verificar se o método vai funcionar é localizar $g(x)$ na integral e trocar por $u = g(x)$.
- Vai ser bem sucedido se tiver na expressão $g'(x)$ para trocar $g'(x)\,dx$ por du.
- Caso contrário: tentar outra estratégia...
- Derivação (Mecânico) vs. Integração (Arte).
- Uma outra possibilidade, caso o termo $g'(x)$ não apareça na integral, é fazer a substituição $u = g(x)$ tomando g como sendo bijetora no problema considerado.
- Sendo a integral abaixo, podemos substituir $x = g^{-1}(u)$

$$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\,(g^{-1})'(u)\,du.$$

Método da Substituição

- Uma forma de verificar se o método vai funcionar é localizar $g(x)$ na integral e trocar por $u = g(x)$.
- Vai ser bem sucedido se tiver na expressão $g'(x)$ para trocar $g'(x)\,dx$ por du.
- Caso contrário: tentar outra estratégia...
- Derivação (Mecânico) vs. Integração (Arte).
- Uma outra possibilidade, caso o termo $g'(x)$ não apareça na integral, é fazer a substituição $u = g(x)$ tomando g como sendo bijetora no problema considerado.
- Sendo a integral abaixo, podemos substituir $x = g^{-1}(u)$
$$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\,(g^{-1})'(u)\,du.$$

Método da Substituição

- Uma forma de verificar se o método vai funcionar é localizar $g(x)$ na integral e trocar por $u = g(x)$.
- Vai ser bem sucedido se tiver na expressão $g'(x)$ para trocar $g'(x)\,dx$ por du.
- Caso contrário: tentar outra estratégia...
- Derivação (Mecânico) vs. Integração (Arte).
- Uma outra possibilidade, caso o termo $g'(x)$ não apareça na integral, é fazer a substituição $u = g(x)$ tomando g como sendo bijetora no problema considerado.
- Sendo a integral abaixo, podemos substituir $x = g^{-1}(u)$
$$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\,(g^{-1})'(u)\,du.$$

Exemplo 1.4.

Calcule as integrais abaixo

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx.$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ c) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Corolário 1.5.

A área da circunferência $x^2+y^2=r^2$ *é igual à* πr^2.

Exercício.

Calcula a área da elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

Método da Substituição

Exemplo 1.4.

Calcule as integrais abaixo

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx.$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ c) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Corolário 1.5.

A área da circunferência $x^2+y^2=r^2$ é igual à πr^2.

Exercício.

Calcula a área da elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

Método da Substituição

Exemplo 1.4.

Calcule as integrais abaixo

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx.$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ c) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Corolário 1.5.

A área da circunferência $x^2+y^2=r^2$ é igual à πr^2.

Exercício.

Calcula a área da elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$