Cálculo 1 - HONORS - CM311

Limites e Propriedades

Diego Otero
otero.ufpr@gmail.com / otero@ufpr.br

Limites - Definição Formal

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in I$, onde I é um intervalo aberto. Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
se
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta, x \in I$$
então
$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$
- A função não precisa estar definida em a, basta estar definida em um intervalo aberto ao redor de a.
- Se estiver definida em a, o limite não liga para o valor $f(a)$. Por isso na definição aparece $0 < |x - a|$.
- O comportamento do limite é local.

Limites - Definição Formal

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in I$, onde I é um intervalo aberto. Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
se
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta, x \in I$$
então
$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$
- A função não precisa estar definida em a, basta estar definida em um intervalo aberto ao redor de a.
- Se estiver definida em a, o limite não liga para o valor $f(a)$. Por isso na definição aparece $0 < |x - a|$.
- O comportamento do limite é local.

Limites - Definição Formal

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in I$, onde I é um intervalo aberto. Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
se
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta, x \in I$$
então
$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$
- A função não precisa estar definida em a, basta estar definida em um intervalo aberto ao redor de a.
- Se estiver definida em a, o limite não liga para o valor $f(a)$. Por isso na definição aparece $0 < |x - a|$.
- O comportamento do limite é local.

Limites - Definição Formal

- Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in I$, onde I é um intervalo aberto. Sendo $L \in \mathbb{R}$, dizemos que
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
se
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta, x \in I$$
então
$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$
- A função não precisa estar definida em a, basta estar definida em um intervalo aberto ao redor de a.
- Se estiver definida em a, o limite não liga para o valor $f(a)$. Por isso na definição aparece $0 < |x - a|$.
- O comportamento do limite é local.

Exemplo 1.1.

Verifique que os limites abaixo são válidos usando a definição por ε, δ (definição formal):

a) $\lim\limits_{x \to 3} 2x - 5 = 1.$ b) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4.$

- Quando o limite existe, ele é único?

Proposição 1.2.

O limite de uma função f quando x se aproxima de a, quando existe, está bem definido. Isto é, se f se aproxima de L_1 quando x se aproxima de a, e se f se aproxima de L_2 quando x se aproxima de a, então $L_1 = L_2$.

- É simples/fácil usar a definição formal para determinação de limites?
- R: Em geral não!

Limites - Definição Formal

Exemplo 1.1.

Verifique que os limites abaixo são válidos usando a definição por ε, δ (definição formal):

a) $\lim_{x \to 3} 2x - 5 = 1$. b) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

- Quando o limite existe, ele é único?

Proposição 1.2.

O limite de uma função f quando x se aproxima de a, quando existe, está bem definido. Isto é, se f se aproxima de L_1 quando x se aproxima de a, e se f se aproxima de L_2 quando x se aproxima de a, então $L_1 = L_2$.

- É simples/fácil usar a definição formal para determinação de limites?
- R: Em geral não!

Limites - Definição Formal

Exemplo 1.1.

Verifique que os limites abaixo são válidos usando a definição por ε, δ (definição formal):

a) $\lim_{x \to 3} 2x - 5 = 1.$ b) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$

- Quando o limite existe, ele é único?

Proposição 1.2.

O limite de uma função f quando x se aproxima de a, quando existe, está bem definido. Isto é, se f se aproxima de L_1 quando x se aproxima de a, e se f se aproxima de L_2 quando x se aproxima de a, então $L_1 = L_2$.

- É simples/fácil usar a definição formal para determinação de limites?
- R: Em geral não!

Limites - Definição Formal

Exemplo 1.1.

Verifique que os limites abaixo são válidos usando a definição por ε, δ (definição formal):

a) $\lim_{x \to 3} 2x - 5 = 1.$ b) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$

- Quando o limite existe, ele é único?

Proposição 1.2.

O limite de uma função f quando x se aproxima de a, quando existe, está bem definido. Isto é, se f se aproxima de L_1 quando x se aproxima de a, e se f se aproxima de L_2 quando x se aproxima de a, então $L_1 = L_2$.

- É simples/fácil usar a definição formal para determinação de limites?
- R: Em geral não!

Limites - Definição Formal

Exemplo 1.1.

Verifique que os limites abaixo são válidos usando a definição por ε, δ (definição formal):

a) $\lim_{x \to 3} 2x - 5 = 1.$ b) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$

- Quando o limite existe, ele é único?

Proposição 1.2.

O limite de uma função f quando x se aproxima de a, quando existe, está bem definido. Isto é, se f se aproxima de L_1 quando x se aproxima de a, e se f se aproxima de L_2 quando x se aproxima de a, então $L_1 = L_2$.

- É simples/fácil usar a definição formal para determinação de limites?
- R: Em geral não!

Limites - Definição Formal

Exemplo 1.3.

Vamos estudar $\lim_{x \to a} x^3$. Temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{(1+|a|)^2 + |a|(1+|a|) + |a|^2}\right),$$

tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $|x^3 - a^3| < \varepsilon$.

- Precisamos de uma maneira mais prática/estratégica para simplificar as contas.
- Por exemplo, como calcular $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5$?
- Propriedades de limites: os limites se comportam bem com relação à soma, diferença, produto e quociente.
- Assim podemos quebrar a expressão em casos mais fáceis para determinar os limites.

Limites - Definição Formal

Exemplo 1.3.

Vamos estudar $\lim_{x \to a} x^3$. Temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{(1+|a|)^2 + |a|(1+|a|) + |a|^2}\right),$$

tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $|x^3 - a^3| < \varepsilon$.

- Precisamos de uma maneira mais prática/estratégica para simplificar as contas.
- Por exemplo, como calcular $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5$?
- Propriedades de limites: os limites se comportam bem com relação à soma, diferença, produto e quociente.
- Assim podemos quebrar a expressão em casos mais fáceis para determinar os limites.

Limites - Definição Formal

Exemplo 1.3.

Vamos estudar $\lim_{x \to a} x^3$. Temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{(1+|a|)^2 + |a|(1+|a|) + |a|^2}\right),$$

tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|x^3 - a^3| < \varepsilon$.

- Precisamos de uma maneira mais prática/estratégica para simplificar as contas.
- Por exemplo, como calcular $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5$?
- Propriedades de limites: os limites se comportam bem com relação à soma, diferença, produto e quociente.
- Assim podemos quebrar a expressão em casos mais fáceis para determinar os limites.

Limites - Definição Formal

Exemplo 1.3.

Vamos estudar $\lim_{x \to a} x^3$. Temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{(1+|a|)^2 + |a|(1+|a|) + |a|^2}\right),$$

tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|x^3 - a^3| < \varepsilon$.

- Precisamos de uma maneira mais prática/estratégica para simplificar as contas.
- Por exemplo, como calcular $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5$?
- Propriedades de limites: os limites se comportam bem com relação à soma, diferença, produto e quociente.
- Assim podemos quebrar a expressão em casos mais fáceis para determinar os limites.

Limites - Definição Formal

Exemplo 1.3.

Vamos estudar $\lim_{x \to a} x^3$. Temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{(1+|a|)^2 + |a|(1+|a|) + |a|^2}\right),$$

tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|x^3 - a^3| < \varepsilon$.

- Precisamos de uma maneira mais prática/estratégica para simplificar as contas.
- Por exemplo, como calcular $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5$?
- Propriedades de limites: os limites se comportam bem com relação à soma, diferença, produto e quociente.
- Assim podemos quebrar a expressão em casos mais fáceis para determinar os limites.

Limites - Propriedades

Propriedade 1.4.

Sejam f e g duas funções definidas em intervalos abertos que contenham um ponto $a \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Sendo $c \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\lim_{x \to a} c = c.$

b) $\lim_{x \to a} x = a.$

c) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$

d) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M.$

e) $\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = L.M.$

f) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0.$

g) $\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}.$

- Assim, é fácil mostrar que $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = a^3 - 3a^2 - 2a - 5.$

Propriedade 1.4.

Sejam f e g duas funções definidas em intervalos abertos que contenham um ponto $a \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Sendo $c \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\lim_{x \to a} c = c$.

b) $\lim_{x \to a} x = a$.

c) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$.

d) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M$.

e) $\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = L.M$.

f) $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

g) $\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}$.

- Assim, é fácil mostrar que $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = a^3 - 3a^2 - 2a - 5$.

Limites - Propriedades

Propriedade 1.4.

Sejam f e g duas funções definidas em intervalos abertos que contenham um ponto $a \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Sendo $c \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\lim_{x \to a} c = c.$

b) $\lim_{x \to a} x = a.$

c) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$

d) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M.$

e) $\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = L.M.$

f) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0.$

g) $\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}.$

- Assim, é fácil mostrar que $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = a^3 - 3a^2 - 2a - 5.$

Limites - Propriedades

Propriedade 1.4.

Sejam f e g duas funções definidas em intervalos abertos que contenham um ponto $a \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Sendo $c \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\lim_{x \to a} c = c.$

b) $\lim_{x \to a} x = a.$

c) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$

d) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M.$

e) $\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = L.M.$

f) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0.$

g) $\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}.$

- Assim, é fácil mostrar que $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = a^3 - 3a^2 - 2a - 5.$

Limites - Propriedades

Propriedade 1.4.

Sejam f e g duas funções definidas em intervalos abertos que contenham um ponto $a \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = M.$$

Sendo $c \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\lim\limits_{x\to a} c = c.$

b) $\lim\limits_{x\to a} x = a.$

c) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$

d) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x)) = L - M.$

e) $\lim\limits_{x\to a} (f(x).g(x)) = L.M.$

f) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L}{M}$, *se* $M \neq 0.$

g) $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^n = L^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}.$

- Assim, é fácil mostrar que $\lim\limits_{x\to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = a^3 - 3a^2 - 2a - 5.$

Limites - Propriedades

Propriedade 1.4.

Sejam f e g duas funções definidas em intervalos abertos que contenham um ponto $a \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = M.$$

Sendo $c \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\lim_{x\to a} c = c.$

b) $\lim_{x\to a} x = a.$

c) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$

d) $\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = L - M.$

e) $\lim_{x\to a} (f(x).g(x)) = L.M.$

f) $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

g) $\lim_{x\to a} (f(x))^n = L^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}$.

- Assim, é fácil mostrar que $\lim_{x\to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = a^3 - 3a^2 - 2a - 5.$

Limites - Propriedades

Propriedade 1.4.

Sejam f e g duas funções definidas em intervalos abertos que contenham um ponto $a \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Sendo $c \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\lim_{x \to a} c = c.$

b) $\lim_{x \to a} x = a.$

c) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$

d) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M.$

e) $\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = L.M.$

f) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

g) $\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}$.

- Assim, é fácil mostrar que $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = a^3 - 3a^2 - 2a - 5.$

Limites - Propriedades

Propriedade 1.4.

Sejam f e g duas funções definidas em intervalos abertos que contenham um ponto $a \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = M.$$

Sendo $c \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\lim_{x\to a} c = c.$

b) $\lim_{x\to a} x = a.$

c) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$

d) $\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = L - M.$

e) $\lim_{x\to a} (f(x).g(x)) = L.M.$

f) $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0.$

g) $\lim_{x\to a} (f(x))^n = L^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}.$

- Assim, é fácil mostrar que $\lim_{x\to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = a^3 - 3a^2 - 2a - 5.$

Limites - Propriedades

Propriedade 1.4.

Sejam f e g duas funções definidas em intervalos abertos que contenham um ponto $a \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Sendo $c \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\lim_{x \to a} c = c.$

b) $\lim_{x \to a} x = a.$

c) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$

d) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M.$

e) $\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = L.M.$

f) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

g) $\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}$.

- Assim, é fácil mostrar que $\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = a^3 - 3a^2 - 2a - 5.$