

Cálculo 1

CM311-HONORS

Exame Final - 15/08/2024

Duração: 1 hora e 40 minutos

Professor: Diego Otero

Nome: _____

GRR: _____

Assinatura: _____

Instruções:

- A prova é individual, sem consulta, e não é permitido se ausentar no período da prova.
- Leia com atenção as questões. Capriche na redação, nos esboços de figuras, justifique todas suas respostas, e simplifique o máximo possível as respostas finais. **Respostas sem justificativas, cálculos e raciocínios necessários não serão consideradas.**
- Não faça marcações na tabela abaixo.

Problema:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Valor:	15	15	15	10	15	15	15	100
Pontuação:								

BOA PROVA!

1. Calcule os limites abaixo, caso existam. Caso não existam, justifique.

(a) (7 Pts.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(6x) - \operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(4x)}.$

(b) (8 Pts.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - (\ln x)^2.$

Dicas/Respostas:

(a) 1.

(b) $+\infty$.

-
2. (15 Pts.) Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até segunda ordem, tal que $g(3) = 0$, $g'(3) = 1$ e $g''(3) = -2$. Sendo $f(x) = e^{2x}g(5x + 3)$, calcule $f''(0)$.

Dicas/Respostas:

-30.

3. (15 Pts.) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f'(3) = -2$. Calcule $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + \operatorname{tg}(5h)) - f(3 + 4h)}{h}$.

Dicas/Respostas:

-2.

4. (10 Pts.) Sendo $f(x) = xe^{x-2}$, calcule o polinômio de Taylor de f de ordem 4 centrado em $a = 2$.

Dicas/Respostas:

$$p(x) = 2 + 3(x - 2) + 2(x - 2)^2 + \frac{5}{6}(x - 2)^3 + \frac{1}{4}(x - 2)^4.$$

5. (15 Pts.) Determine os intervalos de concavidade de $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

Dicas/Respostas:

Côncava para cima: $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$; côncava para baixo $(-1, 1)$.

6. Calcule as integrais abaixo

(a) (7 Pts.) $\int 2^{3x+1} dx.$

(b) (8 Pts.) $\int \frac{x+x^3}{1+x^4} dx.$

Dicas/Respostas:

(a) $\frac{2}{3 \ln 2} 2^{3x} + C.$

(b) $\frac{\arctg x^2}{2} + \frac{\ln(1+x^4)}{4} + C.$

7. (15 Pts.) Calcule a área da região R limitada pelas curvas $y = 2|x|$ e $y = -x^2 + 3$.

Dicas/Respostas:

$A = 10/3.$

FORMULÁRIO/NOTAÇÕES

- $|A+B| \leq |A| + |B|.$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$
- $(x-y)^n = (x-y) \cdot (\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i).$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$
- $(f \pm g)' = f' \pm g'.$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$
- $(\sin x)' = \cos x.$
- $(\cos x)' = -\sin x.$
- $(e^x)' = e^x.$
- $a^b = e^{b \ln a}.$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
- $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x.$
- $(\cotg x)' = -\operatorname{cosec}^2 x.$
- $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x.$
- $(\operatorname{cosec} x)' = -\cotg x \cdot \operatorname{cosec} x.$
- $(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}.$
- $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$
- $T_k(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(a) \cdot (x-a)^i}{i!}.$
- $f(x) - T_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c) \cdot (x-a)^{k+1}}{(k+1)!}.$
- $\int f(g(x))g'(x) dx \stackrel{u=g(x)}{=} \int f(u) du$
- $\int f'g = fg - \int fg'.$
- $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$