



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Una Guía Didáctica para la Comprensión y Aplicación del
Modelo de Hull y White: Desde Fundamentos Teóricos hasta
Implementación Computacional en Python

Niño Pedraza Eduardo

Reyes Ramírez Raquel

Salas Cortés Emiliano



Índice

1	Introducción	2
2	Movimiento Browniano	2
2.1	Definición	2
2.2	Simulación de una trayectoria	3
3	Modelo de Hull y White	4
3.1	Definición y aplicaciones	4
4	Existencia, unicidad y solución de Hull y White	4
4.1	Existencia y unicidad de la solución	4
4.2	Solución del modelo de Hull-White	6
5	Resultados de la solución de la EDE de Hull y White	8
5.1	Análisis de momentos	8
5.2	Distribución estacionaria	9
5.3	Probabilidades de transición	9
6	Simulación del Modelo Hull-White	10
6.1	Sensibilidad de los parámetros	11
7	Simulación del Modelo Hull-White con θ como función en el tiempo	14
7.1	Sensibilidad de parámetros	16
7.1.1	Sensibilidad al parámetro a	16
7.1.2	Sensibilidad al parámetro σ	17
7.1.3	Sensibilidad a θ_0	18
7.1.4	Sensibilidad a θ_1	18
7.1.5	Sensibilidad a ω	19
8	Inferencia Estadística asumiendo θ constante	19
8.1	Máxima Verosimilitud	19
8.2	Insesgados y consistentes	20
9	Inferencia Estadística con θ como función del tiempo	24
9.1	Ejemplo práctico	24
9.1.1	Análisis de resultados	26
10	Valuación de instrumentos financieros	27
10.1	Bonos Cupón Cero	27
10.2	Curva cupón cero	28
11	Implementación práctica del modelo de Hull-White con datos de CETES	29
11.1	Obtención de tasas <i>forward</i> a partir de precios de CETES	29
11.2	Cálculo de la función $\theta(t)$	29
11.3	Simulación de trayectorias del modelo Hull-White	30
11.4	Análisis de resultados	30
11.5	Valuación de un CETE con tasa simulada	31
11.6	Pruebas de bondad de ajuste	32
12	Bibliografía	33
13	Códigos	34

1. Introducción

En el presente trabajo se desarrolla un análisis del modelo de Hull y White, un modelo estocástico de tasas de interés. Este modelo se emplea en el sector financiero para la valoración de bonos, swaps, swaptions y otros derivados de tasa, dada su capacidad para ajustarse a la estructura temporal de tasas observadas en el mercado.

En este trabajo se aborda un análisis completo, comenzando con los fundamentos teóricos del modelo tanto como por sus propiedades analíticas. Se demuestra la existencia y unicidad de la solución bajo condiciones de Lipschitz y la de crecimiento lineal y posteriormente se obtiene una solución explícita para el caso general y bajo supuestos particulares. A partir de esta solución se obtienen los momentos del proceso, su distribución y las condiciones bajo las cuales existe la distribución estacionaria siempre y cuando exista.

Posteriormente, se realizará una simulación de trayectorias usando el método de Euler, donde además este análisis se complementa con un análisis de sensibilidad de los parámetros α, σ, θ para ver su impacto en el comportamiento dinámico del modelo.

En adición se implementa la estimación de los parámetros por el método de máxima verosimilitud, considerando observaciones discretas del proceso, para posteriormente derivar estimadores explícitos de los parámetros y demostrar su consistencia e insesgamiento.

Finalmente, se realiza un ajuste del modelo con datos reales, a decir, la tasa de rendimientos de los CETES obtenidos del portal de BANXICO, donde se realiza un ajuste del modelo comparando entre las trayectorias simuladas y las tasas observadas, lo que permite evaluar el poder predictivo y el grado de certeza del modelo Hull y White en la práctica.

Ahora bien, para entender el modelo de Hull-White es necesario que primero analicemos los tipos de movimientos que conforman el modelo en cuestión, por ello es necesario que estudiemos el *movimiento browniano*

2. Movimiento Browniano

2.1. Definición

El *movimiento browniano*, conocido también como proceso de Wiener, es uno de los fundamentos en la teoría de procesos estocásticos y en la modelación matemática de fenómenos aleatorios, se emplea para describir la evolución incierta de precios de activos y tasas de interés, siendo la base para modelos como el de Hull y White.

El movimiento Browniano es un proceso de Markov a tiempo continuo y con un espacio de estados continuo, $\{B_t\}_{t \geq 0}$, definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ es un movimiento browniano estándar si cumple con las siguientes propiedades:

- $B_0 = 0$
- Es un proceso estocástico de incrementos independientes y estacionarios (p.e.i.i.e), i.e, si $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ los incrementos $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ son independientes.
- $B_t \sim N(0, t)$, así $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ con $s < t$
- Tiene trayectorias continuas casi seguramente.
- B_t es un martingala respecto a su filtración natural.

Estas propiedades implican que el movimiento browniano es un proceso con media cero y varianza creciente linealmente con el tiempo: $\mathbb{E}[B_t] = 0$ y $Var(B_t) = t$

Además el proceso es autosimilar: pues para cualquier constante $c > 0$, el proceso $\{B_{ct}\}$ tiene la misma distribución que $\{\sqrt{c}B_t\}$ lo que es conveniente para modelar fenómenos como la volatilidad.

Entre las aplicaciones financieras tenemos que el movimiento browniano sirve para una variedad de modelos financieros: en el modelo de Hull y White se representan las fluctuaciones impredecibles en la tasa de interés a corto plazo.

2.2. Simulación de una trayectoria

Se procederá con una pequeña simulación computacional, para ello es conveniente describir la forma a proceder: tomando el intervalo $[0, T]$ discretizamos el tiempo en N pasos de tamaño $\Delta t = T/N$ y procedemos generando una secuencia de incrementos normales independientes $\Delta B_i \sim N(0, \Delta t)$. Entonces nuestra trayectoria se construye como:

$$B_{t_i} = B_{t_{i-1}} + \Delta B_i, i = 1, 2, \dots, N.$$

Con base en esta descripción, a continuación se presenta una simulación de trayectorias usando Python, que nos permite observar de manera gráfica las propiedades antes descritas:

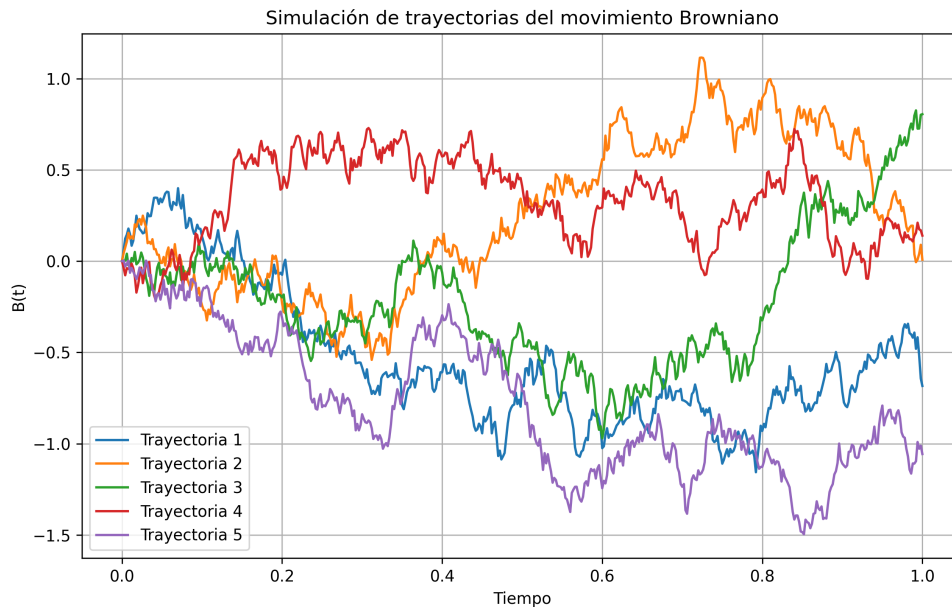


Figura 1: Simulación del movimiento Browniano

A continuación procedemos a hacer una introducción al modelo de Hull y White y analizar sus características teóricas y propiedades de difusión:

3. Modelo de Hull y White

3.1. Definición y aplicaciones

El modelo de Hull y White es un modelo utilizado para determinar el precio de los derivados de interés y pertenece a la clase de modelos de tasa de interés de una sola variable con reversión a la media. El modelo asume que las tasas a corto plazo tienen una distribución normal y que están sujetas a reversión a la media, i.e., es probable que la volatilidad sea baja cuando las tasas a corto plazo se acercan a cero, lo que se refleja en una mayor reversión a la media en el modelo, en otras palabras, tenemos que la tasa de interés tiende a volver a un nivel promedio con el tiempo, por ejemplo; si la tasa de interés está por encima de su nivel promedio, el modelo asume que probablemente bajará en un futuro, mientras que si está por debajo se espera que suba, pues cuanto más lejos esté de ese nivel promedio, más fuerte será la tendencia a regresar. Este comportamiento se basa en la idea de que las tasas de interés no crecen ni caen sin control para siempre, sino que fluctúan alrededor de un valor razonable determinado por las condiciones de mercado.

Este modelo es ampliamente utilizado en los mercados financieros para valorar bonos, derivados de tasa de interés y para construir la curva de rendimiento de forma consistente con las observaciones del mercado. A diferencia de otros modelos, el modelo de Hull y White introducen una flexibilidad importante al permitir que la tasa media a la que la tasa de interés tiende a revertirse sea una función determinista del tiempo, siendo esta característica la que permita calibrar el modelo exactamente a la estructura de tasas observadas en el mercado, lo cual es sumamente fundamental para la valoración de instrumentos financieros.

El modelo de Hull y White matemáticamente está descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)] dt + \sigma dW(t)$$

donde tenemos:

- $r(t)$ es la tasa corta instantánea en el tiempo t en este caso es la variable principal del modelo, es la que estamos tratando de describir y predecir.
- a es la velocidad de reversión a la media (constante positiva), pues cuanto más grande sea a , más rápidamente tiende la tasa $r(t)$ a acercarse a su valor promedio. Si a es muy pequeño, la tasa se mueve más libremente sin intentar volver tan rápido a la media.
- σ es la volatilidad de la tasa corta (constante positiva), qué tan impredecible o variable puede ser el movimiento de la tasa de interés.
- $\theta(t)$ es una función de t que se escoge según la estructura de tipos de interés en el mercado y actúa como el valor promedio hacia el cual se espera que la tasa se dirija.
- W_t es un movimiento browniano estándar que representa el componente aleatorio del modelo.

4. Existencia, unicidad y solución de Hull y White

4.1. Existencia y unicidad de la solución

El modelo de Hull y White es:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t) \tag{1}$$

De la EDE notamos que tenemos las siguientes funciones:

- $X(t) = r(t)$
- $b(t, x) = \theta(t) - ax$
- $\sigma(t, x) = \sigma$ con $\sigma = cte$.

Recordemos el siguiente teorema:

Teorema 4.3.1 Si los coeficientes $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ de la ecuación

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

satisfacen la condición de Lipschitz para todas $x, y \in \mathbb{R}$, es decir,

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K|x - y|^2$$

y además satisfacen la condición de crecimiento en x ,

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

con $K > 0$ una constante, entonces existe un proceso de difusión $\{X_t\}_{t \geq 0}$, solución de la ecuación, que es adaptado, continuo, uniformemente acotado en L^2 y es único en el sentido de indistinguibilidad.

A continuación probaremos que el modelo de Hull-White satisface la condición de Lipschitz, así tenemos:

Sea $b(t, x) = \theta(t) - ax$ y $\sigma(t, x) = \sigma$ constante. Consideramos:

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 = |(\theta(t) - ax) - (\theta(t) - ay)|^2 = |-a(x - y)|^2 = a^2|x - y|^2$$

y

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 = |\sigma - \sigma|^2 = |0|^2 = 0$$

Por lo tanto,

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 = a^2|x - y|^2 \leq K|x - y|^2$$

con $K \geq a^2$. Por tanto, la condición de Lipschitz se satisface. Además, debemos probar que satisface la condición de crecimiento en x , entonces:

$$|b(t, x)|^2 = |\theta(t) - ax|^2 \leq 2\theta(t)^2 + 2a^2x^2 \quad (\text{por desigualdad cuadrática})$$

y

$$|\sigma(t, x)|^2 = \sigma^2$$

Por lo tanto,

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq 2\theta(t)^2 + 2a^2x^2 + \sigma^2 = 2a^2x^2 + (2\theta(t)^2 + \sigma^2)$$

Si $\theta(t)$ está acotada, es decir, $|\theta(t)| \leq M$, entonces

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq 2a^2x^2 + (2M^2 + \sigma^2)$$

y así,

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + x^2), \quad \text{con} \quad K = \max\{2a^2, 2M^2 + \sigma^2\}$$

Por tanto, se cumple la condición de crecimiento lineal. Por lo demostrado en los parrafos anteriores, entonces existe un proceso de difusión $\{X_t\}_{t \geq 0}$, solución de la ecuación de Hull-White y además es única.

4.2. Solución del modelo de Hull-White

Ahora procedemos a encontrar la solución de la Ecuación Diferencial Estocástica, entonces:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \theta(t)dt - ar(t)dt + \sigma dW(t) \\ dr(t) - ar(t)dt &= \theta(t)dt + \sigma dW(t) \end{aligned}$$

Dada la estructura de la ecuación procedemos a hacer uso de un factor integrante que es de la forma:

$$\lambda(t) = e^{\int_0^t a ds} = e^{at}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por este factor obtenemos

$$\begin{aligned} dr(t) &= \theta(t)dt - ar(t)dt + \sigma dW(t) \\ \underbrace{e^{at}dr(t) + e^{at}ar(t)dt}_{\frac{d(e^{at}r(t))}{dt}} &= e^{at}\theta(t)dt + e^{at}\sigma dW(t) \\ d(e^{at}r(t)) &= e^{at}\theta(t)dt + e^{at}\sigma dW(t) \end{aligned}$$

Integramos de ambos lados, del intervalo de 0 a t :

$$e^{at}r(t) - r(0) = \int_0^t e^{as}\theta(s) ds + \sigma \int_0^t e^{as} dW(s)$$

Finalmente obtenemos

$$r(t) = r(0)e^{-at} + e^{-at} \int_0^t e^{as}\theta(s) ds + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW(s). \quad (2)$$

Dado que ya tenemos la solución de la ecuación procedemos a hacer el análisis de momentos de la ecuación. Primero sabemos que la esperanza del modelo debe ser igual a la tasa forward observada, esto ya que se debe cumplir el supuesto de no arbitraje, por lo que

$$\mathbb{E}[r_t] = F(0, t)$$

Usando la solución obtenida anteriormente y recordando que la esperanza de una integral estocástica con respecto a un movimiento Browniano es 0, entonces llegamos a que

$$\mathbb{E}[r_t] = r(0)e^{-at} + \underbrace{e^{-at} \int_0^t e^{as} \theta(s) ds}_*$$

Por lo anterior obtenemos que la tasa forward puede ser expresada de la manera

$$F(0, t) = r(0)e^{-at} + e^{-at} \int_0^t e^{as} \theta(s) ds \quad (3)$$

Continuamos a derivar ambos lados de la ecuación, esto con la intención de llegar a la manera de encontrar el parámetro θ

$$\frac{\partial}{\partial t} F(0, t) = -ar_0e^{-at} + \theta_t - ae^{-at} \int_0^t e^{as} \theta_s ds.$$

Usando la expresión anterior para $F(0, t)$, sustituimos:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(0, t) = -ar_0e^{-at} + \theta_t - a(F(0, t) - r_0e^{-at}).$$

Simplificando:

$$\theta_t = \frac{\partial}{\partial t} F(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}). \quad (4)$$

Ahora sustituimos θ en *

$$\int_0^t \theta(s) e^{as} ds = \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s} F(0, s) + aF(0, s) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2as}) \right) e^{as} ds.$$

Resolviendo término a término:

1. Primer término:

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} F(0, s) e^{as} ds = F(0, t) e^{at} - F(0, 0) - a \int_0^t F(0, s) e^{as} ds$$

2. Segundo término:

$$a \int_0^t F(0, s) e^{as} ds.$$

(Se cancela con el término anterior).

3. Tercer término:

$$\frac{\sigma^2}{2a} \int_0^t (e^{as} - e^{-as}) ds = \frac{\sigma^2}{a^2} (\cosh(at) - 1).$$

Combinando todo:

$$\int_0^t \theta_s e^{as} ds = F(0, t) e^{at} - r_0 + \frac{\sigma^2}{a^2} (\cosh(at) - 1). \quad (5)$$

Ahora sustituyendo en la ecuación de $r(t)$

$$r_t = r_0 e^{-at} + e^{-at} \left(F(0, t) e^{at} - r_0 + \frac{\sigma^2}{a^2} (\cosh(at) - 1) \right) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s.$$

Simplificando:

$$r_t = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s. \quad (6)$$

5. Resultados de la solución de la EDE de Hull y White

5.1. Análisis de momentos

Procedemos a calcular la esperanza, dada la solución del modelo de Hull-White:

$$r_t = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

aquí usamos la propiedad de que la esperanza de la integral estocástica es cero:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t e^{as} dW_s \right] = 0$$

Entonces, la esperanza del proceso r_t es:

$$\mathbb{E}[r_t] = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2$$

Por otro lado, procedemos a calcular la varianza, por lo que notamos que la única parte aleatoria de r_t es el término:

$$\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

La varianza de un integral estocástico de Itô es:

$$\text{Var} \left(\int_0^t f(s) dW_s \right) = \int_0^t f(s)^2 ds$$

Aplicamos esta fórmula con $f(s) = \sigma e^{-at} e^{as} = \sigma e^{-a(t-s)}$:

$$\text{Var}(r_t) = \sigma^2 e^{-2at} \int_0^t e^{2as} ds = \sigma^2 e^{-2at} \cdot \frac{e^{2at} - 1}{2a} = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

5.2. Distribución estacionaria

Una distribución estacionaria existe si la distribución de r_t converge en distribución a una constante o en algo que no depende del tiempo. Por lo que tenemos que analizar la esperanza y la varianza obtenidos en la sección anterior:

- $\mathbb{E}[r_t] = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$
- $\text{Var}(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$

De la esperanza, notamos que para que no dependa del tiempo y sea una constante, se debería de tener que $F(0, t)$ tienda a una constante cuando t tiende a infinito, pues $\frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 \rightarrow \frac{\sigma^2}{2a^2}$ cuando t tiende a infinito.

Por otro lado, la varianza, sí tiende a una constante por lo expuesto en el párrafo anterior, el cálculo es prácticamente el mismo, pues $\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2a}$ cuando t tiende a infinito.

Así que tenemos que si la tasa forward $F(0, t)$ tiende a una constante en el infinito, F_∞ tendríamos que:

$$r_t \xrightarrow{d} N\left(F_\infty + \frac{\sigma^2}{2a^2}, \frac{\sigma^2}{2a}\right)$$

la cual sería la distribución estacionaria de la solución de la EDE de Hull-White. Mientras que si por otro lado $F(0, t)$ no converge, entonces la solución no tiene una distribución estacionaria.

5.3. Probabilidades de transición

En este modelo, la probabilidad de transición se refiere a la distribución condicional de $r(t)$ dado $r(s)$ con $s < t$. Dado que como vimos antes el modelo es gaussiano, la probabilidad de transición es una distribución normal con media y varianzas explícitas.

La solución estocástica de la EDE de Hull y White implica que para $s < t$, la tasa $r(t)$ condicionada a $r(s)$ se ve de la siguiente manera:

$$r(t)|r(s) \sim N(\mu(s, t), \nu^2(s, t))$$

donde:

- Media condicional: $\mu(s, t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)}\theta(u)du$
- Varianza condicional: $\nu^2(s, t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})$

Por lo que las probabilidades de transición del modelo de Hull y White son normales y se ven de la siguiente manera:

$$r(t)|r(s) \sim N\left(r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)}\theta(u)du, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})\right)$$

6. Simulación del Modelo Hull-White

El modelo se define como:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t)$$

Para facilitar el análisis, asumiremos que $\theta(t) = \theta_0$ es constante, lo cual nos permite obtener fórmulas analíticas para la media y la varianza de $r(t)$

Soluciones Analíticas

Con $\theta(t) = \theta_0$, el modelo tiene solución para la media y la varianza:

Media:

$$\mathbb{E}[r(t)] = r_0 e^{-at} + \theta_0(1 - e^{-at})$$

Varianza:

$$\text{Var}(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Además, cuando $t \rightarrow \infty$, la distribución estacionaria de $r(t)$ es:

$$r(t) \sim \mathcal{N}(\theta_0, \frac{\sigma^2}{2a})$$

Simulación del Modelo

Se simularon múltiples trayectorias del proceso $r(t)$ utilizando el método de Euler-Maruyama. Para cada trayectoria, se partió de una tasa inicial r_0 , y se generaron pasos aleatorios con incrementos normales.

En la siguiente figura se muestran 20 trayectorias simuladas, junto con la media empírica (negro) y la media teórica (línea discontinua roja):

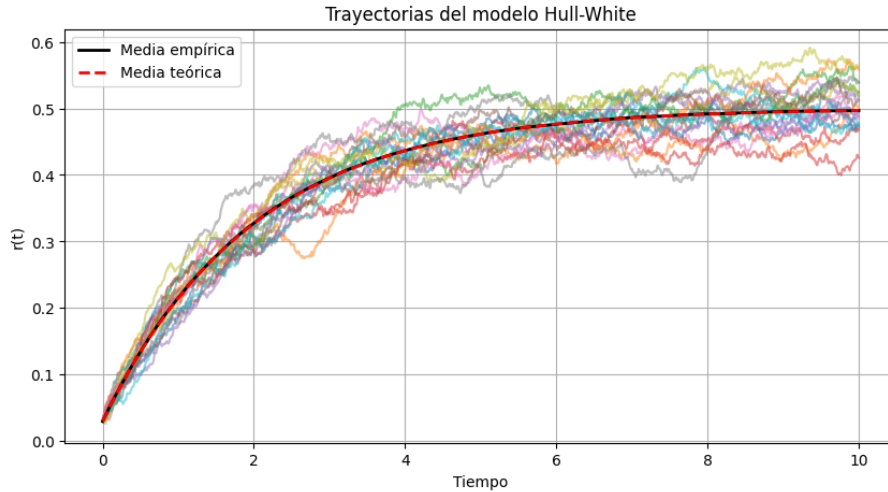


Figura 2: Trayectorias simuladas del modelo Hull-White

De las simulaciones que se pueden ver en la gráfica anterior vemos que se muestra una tendencia creciente y convergente hacia un punto promedio, lo cual confirma la propiedad de reversión de la media del modelo, donde además la dispersión entre las trayectorias refleja la volatilidad σ del modelo. En cuanto a la media empírica, vemos que se ajusta razonablemente bien a la media teórica, lo cual valida la implementación computacional del modelo. Finalmente la dispersión parece coherente con una varianza creciente que al largo se estabiliza, lo que sugiere que se aproxima a una

distribución estacionaria que es justamente lo que habíamos decidido para facilitar las simulaciones, al fijar θ_0 .

Adicionalmente se comparan la media y la varianza empíricas de las simulaciones con las expresiones teóricas:

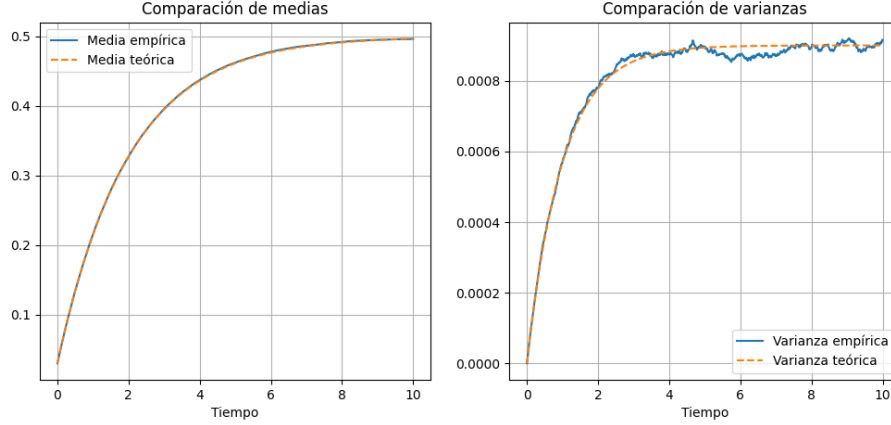


Figura 3: Comparación de medias y varianzas

Ambas gráficas muestran que las curvas empíricas y teóricas están muy alineadas. Esto sugiere que: la simulación de trayectorias está correctamente implementada, lo que nos quiere decir que el comportamiento del modelo Hull-White en términos de media y varianza sigue muy de cerca lo esperado teóricamente.

La media crece rápidamente al inicio y tiende a estabilizarse, lo cual es coherente con el carácter de reversión a la media del modelo Hull-White, mientras que la varianza también crece rápidamente y se estabiliza, reflejando que la incertidumbre del modelo se limita con el tiempo debido a la reversión a la media.

6.1. Sensibilidad de los parámetros

Ahora, para comprender cómo influyen los parámetros del modelo de Hull y White en la dinámica de la tasa de interés $r(t)$ realizamos un análisis de sensibilidad variando sistemáticamente cada parámetro mientras los demás permanecen costantes. Esto nos permitirá visualizar cómo afectan a la media, varianza y comportamiento general de las trayectorias simuladas. Los parámetros que analizaremos son: α velocidad de reversión a la media, σ volatilidad del proceso y θ nivel promedio hacia el cual tiende el proceso.

A continuación usamos los siguientes valores como iniciales y aquellos en los que el modelo tiende a estabilizarse:

- $r_0 = 0.03$
- $\theta = 0.04$
- $\alpha = 0.5$
- $\sigma = 0.01$
- $T = 10$ años
- $N = 500$ pasos

Comenzamos analizando la gráfica en la que se analiza la sensibilidad respecto al parámetro α con diferentes valores de 0.1, 0.5 y 1:

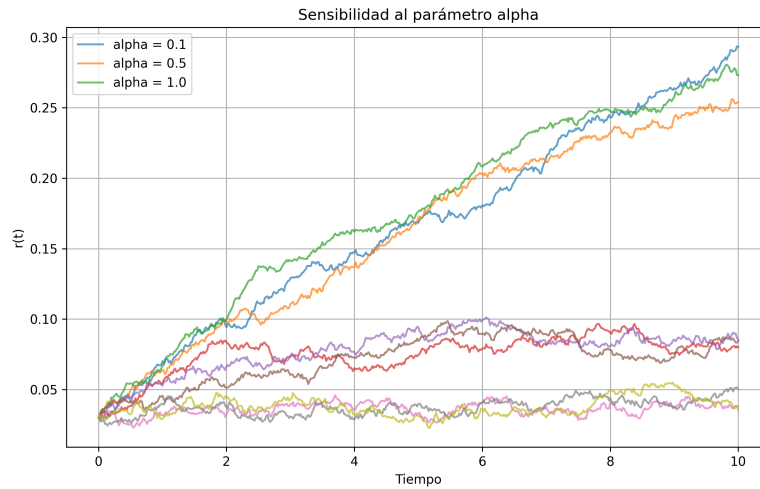


Figura 4: Sensibilidad de alpha

Cuanto mayor es el valor de α más rápidamente la tasa de interés vuelve al nivel medio predeterminado pues: si α es bajo la tasa de interés es más persistente en sus desviaciones reflejando más volatilidad y menor control, mientras que si α es alto hay un regreso muy rápido a la media, lo que puede eliminar la variabilidad; por otro lado en $\alpha = 0.5$ tenemos un equilibrio entre estabilidad y sensibilidad al ruido de mercado, lo que refleja una buena calibración del modelo.

Como segunda gráfica, se analiza la sensibilidad respecto al parámetro σ con diferentes valores de 0.005, 0.01 y 0.02:

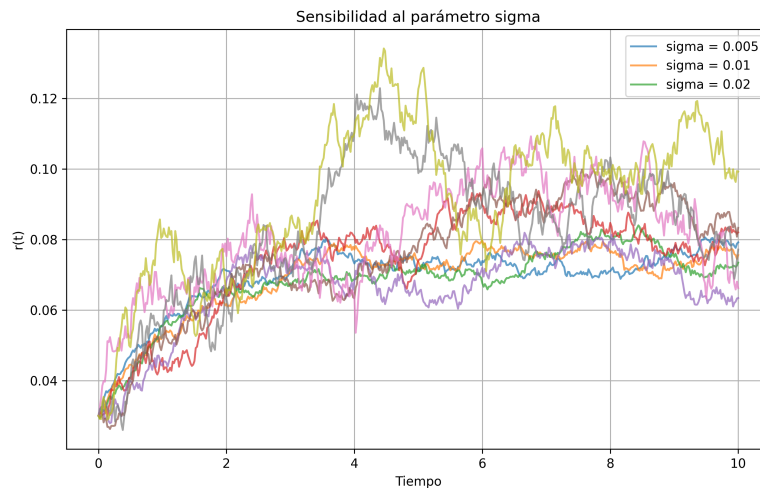


Figura 5: Sensibilidad de sigma

De las simulaciones obtenemos que a mayor σ tenemos mayor sensibilidad al ruido, más aleatoriedad y valores extremos, por otro lado, a menor σ el modelo sigue una trayectoria más estable y predecible. En general obtenemos que σ afecta la amplitud de las fluctuaciones de la tasa de interés por lo que si buscamos un modelo más estable se podría usar el valor de $\sigma = 0.01$ el cual nos ofrece un equilibrio razonable, dando algo de variabilidad sin perder estabilidad.

Finalmente, procedemos con el análisis de sensibilidad del parámetro θ con diferentes valores de 0.03, 0.04 y 0.05:

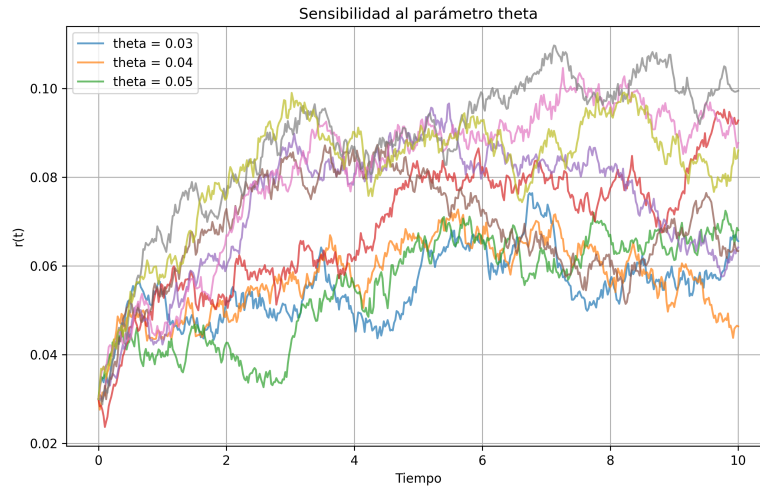


Figura 6: Sensibilidad de θ

El gráfico nos ofrece un panorama en el cual vemos que el nivel promedio de las trayectorias se eleva conforme aumenta θ , pues con $\theta = 0.03$ las tasas fluctúan en torno a niveles más bajos, mientras que con $\theta = 0.05$ las trayectorias se desplazan más hacia arriba, mostrando tasas promedio más altas, esto sucede pues θ fija el nivel hacia el cual convergen las tasas de interés.

Una calibración adecuada de los parámetros es esencial para que el modelo de Hull y White representen con precisión la realidad del mercado. Los valores óptimos dependerán del contexto económico, del horizonte temporal y del tipo de instrumento financiero que se desee valorar.

Distribución Estacionaria

Finalmente, se analizó si la distribución de $r(t)$ al final del horizonte de simulación se asemeja a la distribución estacionaria teórica. El histograma de $r(t)$ se compara con una densidad normal teórica:

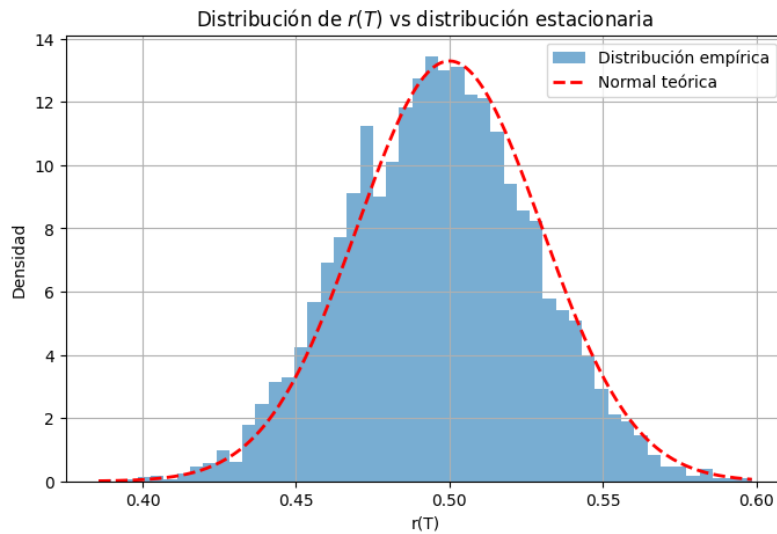


Figura 7: Distribución empírica de $r(T)$ vs. distribución estacionaria teórica

7. Simulación del Modelo Hull-White con θ como función en el tiempo

El modelo se define como:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t)$$

En este caso, se utiliza una función oscilatoria para $\theta(t)$ con la forma:

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_1 \sin(\omega t)$$

Esta resulta ser una buena función de θ pues las tasas de interés pueden mostrar comportamientos periódicos (por políticas monetarias, ciclos económicos, estacionalidad fiscal, etc.). El término seno permite modelar esa variación rítmica en el tiempo (ej. los ciclos económicos se creen que pueden ir de 8 a 10 años). Hull y White requiere derivar $\theta(t)$ en algunas fórmulas (como la solución exacta o el ajuste a la curva forward). Además la función seno es suave, continua y diferenciable, lo cual facilita cálculos analíticos y numéricos. A diferencia de funciones con cambios abruptos (escalones o piezas lineales), el seno garantiza que las trayectorias simuladas de $r(t)$ no tengan saltos artificiales. Al final la función seno puede usarse como componente en una serie de Fourier para aproximar cualquier función periódica.

La esperanza y varianza del proceso Hull-White se obtiene resolviendo la ecuación estocástica, lo cual resulta en:

$$\mathbb{E}[r(t)] = r_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} \theta(s) ds \quad \text{Var}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

Simulación del Modelo

Se simulan $M = 5000$ trayectorias del proceso con pasos de tiempo pequeños ($dt = T/N$ con $T = 10$ años y $N = 1000$). Se evalúan:

- La media empírica de las trayectorias.
- La media teórica a través de integración numérica.
- La varianza empírica y su comparación con la varianza teórica.

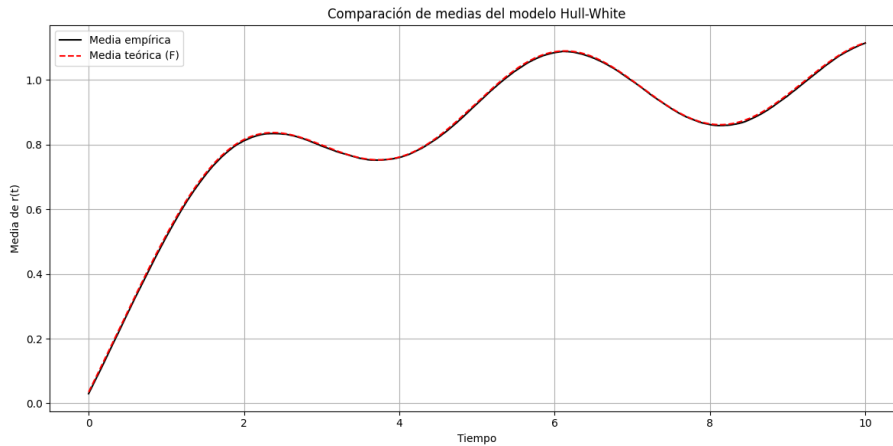


Figura 8: Comparación entre la media empírica, la media teórica.

La gráfica anterior muestra una excelente concordancia entre los métodos analíticos y las simulaciones. El error máximo entre ambas formas teóricas fue menor a 10^{-16} .

En la siguiente figura se muestran 20 trayectorias simuladas, junto con la media empírica (negro) y la media teórica (línea discontinua roja):

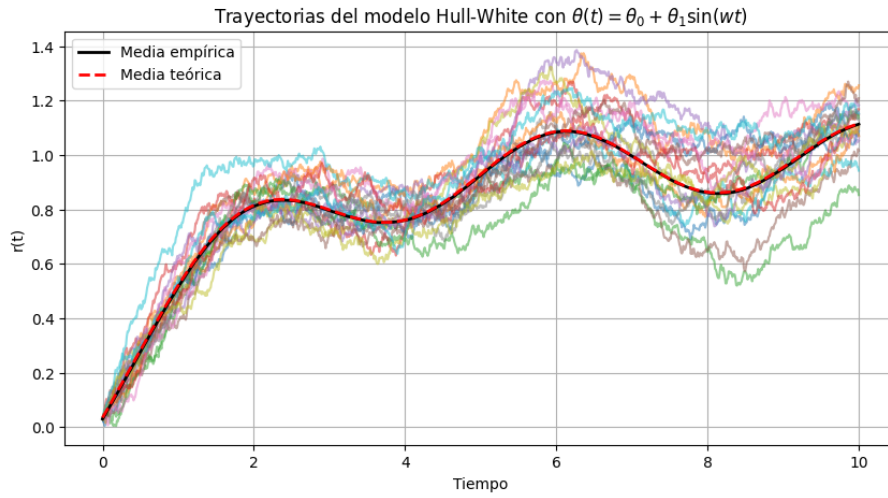


Figura 9: Trayectorias simuladas del modelo Hull-White

De las simulaciones que se pueden ver en la gráfica anterior vemos que se muestra una tendencia creciente y convergente hacia un punto promedio, lo cual confirma la propiedad de reversión de la media del modelo, donde además la dispersión entre las trayectorias refleja la volatilidad σ del modelo. En cuanto a la media empírica, vemos que se ajusta bien a la media teórica. Finalmente la dispersión parece coherente con una varianza creciente que al largo se estabiliza, lo que sugiere que se aproxima a una distribución estacionaria que es justamente lo que habíamos decidido para facilitar las simulaciones, al fijar θ_0 .

Adicionalmente se comparan la media y la varianza empíricas de las simulaciones con las expresiones teóricas:

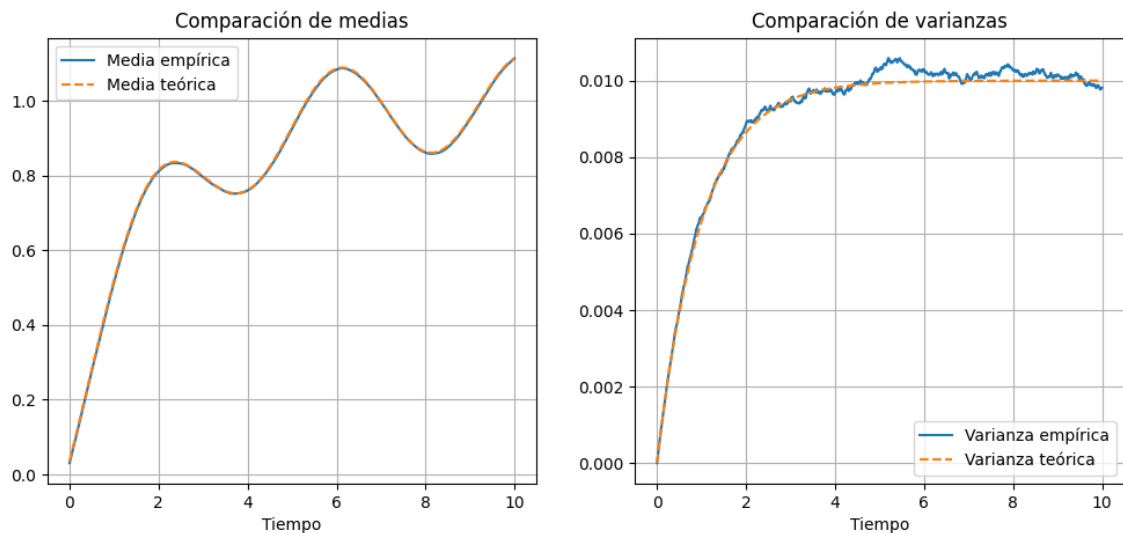


Figura 10: Comparación de medias y varianzas

Ambas gráficas muestran que las curvas empíricas y teóricas están muy alineadas. Esto sugiere que el comportamiento del modelo Hull-White en términos de media y varianza sigue muy de cerca lo esperado teóricamente.

La media crece rápidamente al inicio y tiende a estabilizarse, lo cual es coherente con el carácter de reversión a la media del modelo Hull-White, mientras que la varianza también crece rápidamente y se estabiliza, reflejando que la incertidumbre del modelo se limita con el tiempo debido a la reversión a la media.

El modelo predice que $r(T)$ sigue una distribución normal. Se compara el histograma empírico con la distribución teórica:

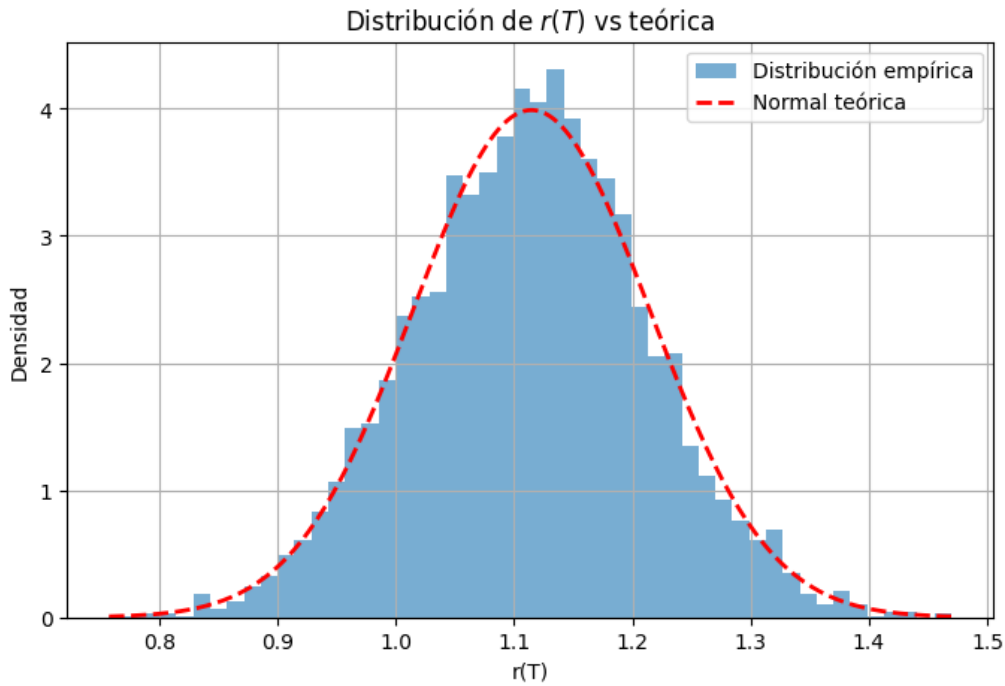


Figura 11: Distribución de $r(T)$ al final del periodo.

Finalmente, se explora cómo cambia la media de $r(t)$ al modificar distintos parámetros del modelo:

7.1. Sensibilidad de parámetros

7.1.1. Sensibilidad al parámetro a

Notemos que para valores más grandes de α , la curva $r(t)$ se estabiliza más rápido. Y para valores menores, $r(t)$ crece más libremente y no se ajusta tan rápido al nivel objetivo. Entonces el parámetro α controla cuán fuerte es la tendencia de la tasa a regresar a su nivel de equilibrio.

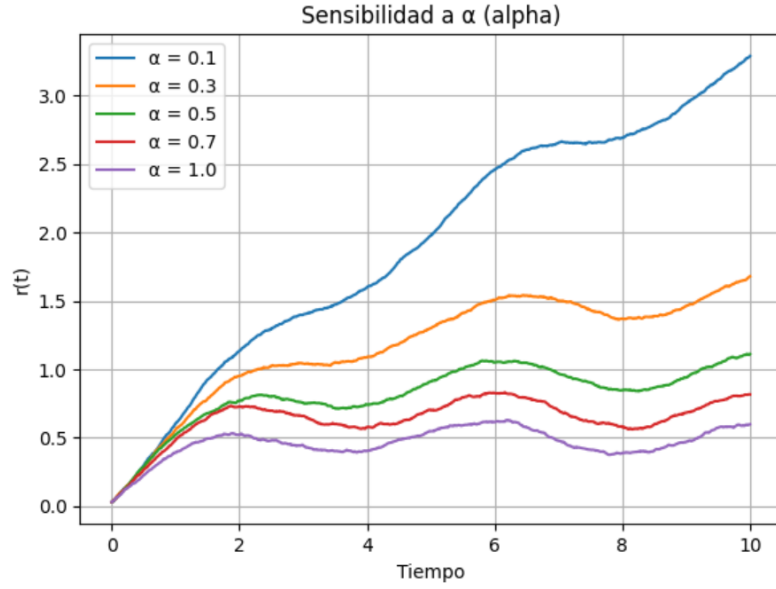


Figura 12: Valores mayores de α provocan una reversión más rápida hacia $\theta(t)$.

7.1.2. Sensibilidad al parámetro σ

Notemos que todas las trayectorias siguen la misma forma en general, en algunas se presenta más ruido”.

Para valores de σ más bajos, las curvas son más suaves, para valores más grandes se observan variaciones aleatorias más pronunciadas. Entonces σ añade ruido al proceso.

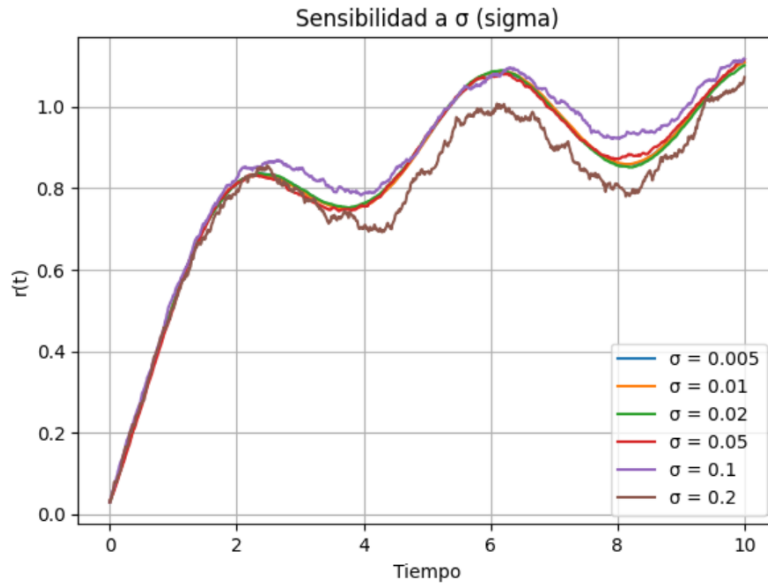


Figura 13: El parámetro σ afecta principalmente la dispersión de las trayectorias.

7.1.3. Sensibilidad a θ_0

Notemos que al aumentar θ_0 , la trayectoria se eleva verticalmente, conservando la misma forma. Entonces θ_0 define el promedio de $r(t)$

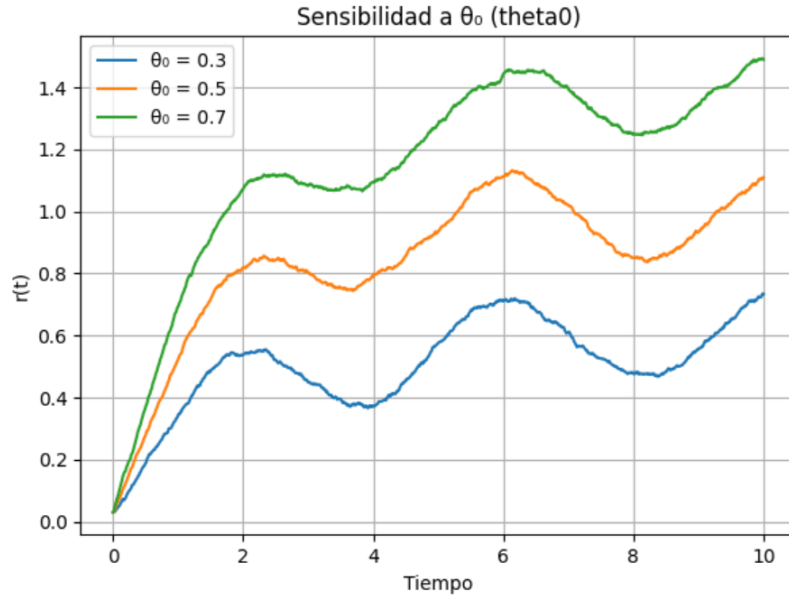


Figura 14: Efectos sobre la media de $r(t)$ al modificar θ_0 .

7.1.4. Sensibilidad a θ_1

Notemos que curvas con mayor θ_1 , muestran mayores oscilaciones en $r(t)$, mientras que las curvas con θ_1 más bajo son más estables.

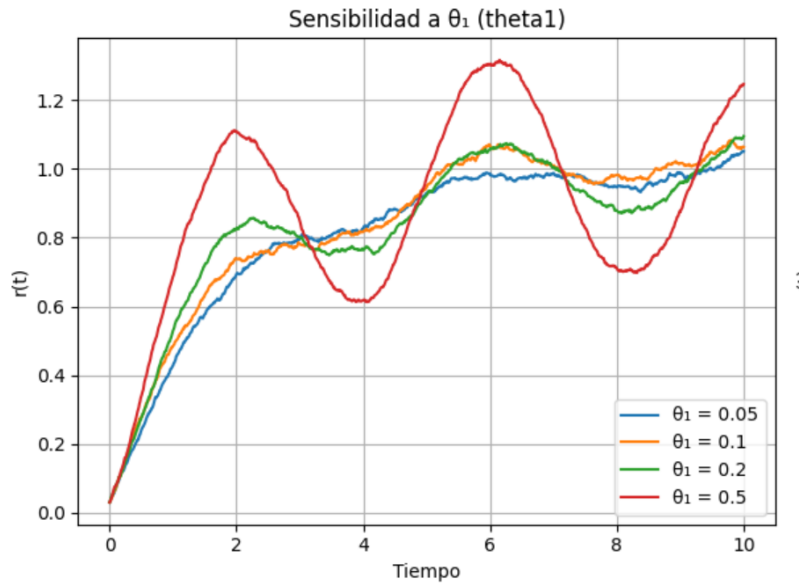


Figura 15: Efectos sobre la media de $r(t)$ al modificar θ_1 .

7.1.5. Sensibilidad a ω

Notemos que a medida que ω aumenta, también aumenta la frecuencia de las oscilaciones de $r(t)$

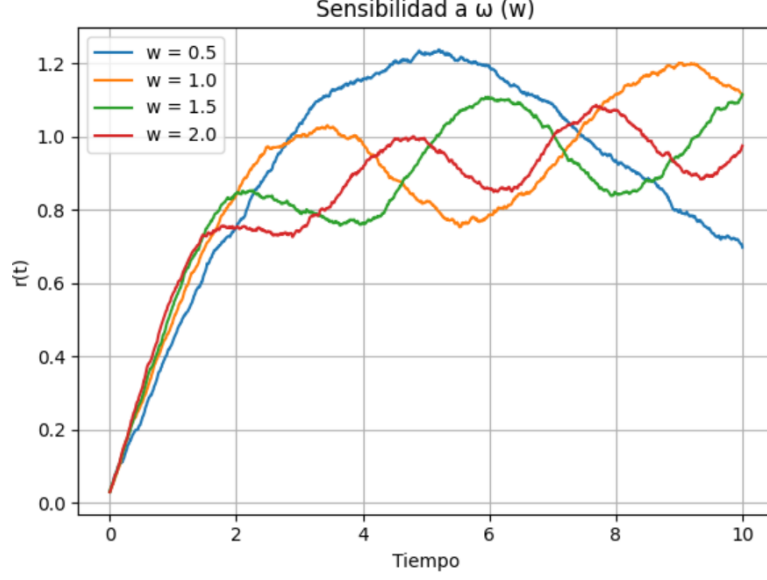


Figura 16: Efectos sobre la media de $r(t)$ al modificar ω .

8. Inferencia Estadística asumiendo θ constante

8.1. Máxima Verosimilitud

Continuando con el análisis de nuestro modelo, es hora de enfocarnos en como aproxima los valores de a y σ , recordando que a es la velocidad de reversión, es decir que tan estable es el proceso, por lo que si tenemos un valor alto y una tasa se aleja mucho del nivel normal, esta vuelve rápidamente a su valor medio en el tiempo. Por otra parte, σ es la volatilidad del proceso, por lo tanto se entiende como la incertidumbre de r_t .

Debido a la naturaleza de los datos, que en este caso son tasas, se considera como información incompleta, ya que los cambios de la mismas pueden ser diarias, mensuales, trimestrales, semestrales o anuales, por lo que no es una trayectoria continua en un intervalo de tiempo, entonces:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t)$$

Asumimos que θ es una constante que conocemos y aplicamos una discretización con el método de Euler, obteniendo lo siguiente:

$$r_{i+1} = r_i + (\theta - ar_i)\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}Z_i$$

Donde $Z_i \sim N(0, \sigma^2\Delta)$, por lo que $r_{i+1} | r_i \sim N(r_i + (\theta - ar_i)\Delta, \sigma^2\Delta)$, consecuente de esto la función de verosimilitud para los parámetros a y σ (asumiendo $\theta(t) = \theta$ constante) es:

$$L(a, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta}} \exp\left(-\frac{(r_i - r_{i-1} - (\theta - ar_{i-1})\Delta)^2}{2\sigma^2\Delta}\right).$$

La log-verosimilitud correspondiente es:

$$\log L(a, \sigma) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2\Delta) - \frac{1}{2\sigma^2\Delta} \sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1} - (\theta - ar_{i-1})\Delta)^2.$$

Para encontrar los estimadores \hat{a} y $\hat{\sigma}$, maximizamos $\log L(a, \sigma)$:

Estimación de a

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1} - (\theta - ar_{i-1})\Delta) r_{i-1} = 0.$$

$$\hat{a} = - \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1} - \theta\Delta) r_{i-1}}{\Delta \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2}.$$

Estimación de σ

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3 \Delta} \sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1} - (\theta - ar_{i-1})\Delta)^2 = 0.$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1} - (\theta - \hat{a}r_{i-1})\Delta)^2.$$

Estimación de θ

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = -\frac{2}{2\sigma^2 \Delta} \cdot \sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1} - (\theta - ar_{i-1})\Delta) (-\Delta) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1} - (\theta - ar_{i-1})\Delta)$$

Igualando a cero:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1}) - \theta \Delta n + a \Delta \sum_{i=1}^n r_{i-1} = 0$$

Despejando θ :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1}) + \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n r_{i-1}$$

8.2. Insesgados y consistentes

Es de nuestro interés desarrollar si los estimadores encontrados son insesgados, ya que esto nos permite que al repetir el experimento muchas veces, el promedios de las estimaciones converja al valor real como hemos revisado anteriormente, pero tenemos el problema de que al estar calculando estos parámetros basándonos en Euler-Maruyama, que no representa exactamente el proceso verdadero, esto hace que por la discretización se introduzca un sesgo al tener muestra finitas por lo que es generalmente sesgado, esto se puede compensar cuando hacemos que el intervalo Δ sea cada vez mas pequeño, tendiendo a 0, lo cual requeriría mas capacidad de computo, en caso de tener con estas condiciones, creemos apropiado abordar el posible insesgamiento que hay en la estimación de los parámetros de \hat{a} y $\hat{\sigma}$

Insesgamiento de a

El estimador de máxima verosimilitud de a , con θ conocido, es:

$$\hat{a} = \frac{-\sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1} - \theta\Delta)r_{i-1}}{\Delta \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2}.$$

Fijándonos en el numerador y sustituyendo r_i obtenemos la siguiente igualdad:

$$r_i - r_{i-1} - \theta\Delta = -ar_{i-1}\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}Z_i,$$

entonces:

$$(r_i - r_{i-1} - \theta\Delta)r_{i-1} = -a\Delta r_{i-1}^2 + \sigma\sqrt{\Delta}Z_i r_{i-1}.$$

Sustituyendo en \hat{a} :

$$\hat{a} = \frac{a\Delta \sum r_{i-1}^2 - \sigma\sqrt{\Delta} \sum \varepsilon_i r_{i-1}}{\Delta \sum r_{i-1}^2} = a - \frac{\sigma\sqrt{\Delta} \sum Z_i r_{i-1}}{\Delta \sum r_{i-1}^2}.$$

Como Z_i es independiente de r_{i-1} y $\mathbb{E}[Z_i] = 0$, entonces:

$$\mathbb{E}[Z_i r_{i-1}] = \mathbb{E}[Z_i] \mathbb{E}[r_{i-1}] = 0.$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}[\hat{a}] = a,$$

y el estimador \hat{a} es insesgado bajo estos supuestos ideales.

Insesgamiento de σ^2

El estimador de máxima verosimilitud de σ^2 (asumiendo a conocido) y si $\varepsilon_i = r_i - r_{i-1} - (\theta - ar_{i-1})\Delta$ es:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1} - (\theta - ar_{i-1})\Delta)^2.$$

Sustituimos el modelo:

$$r_i - r_{i-1} - (\theta - ar_{i-1})\Delta = \sigma\sqrt{\Delta}Z_i,$$

entonces:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=1}^n (\sigma\sqrt{\Delta}\varepsilon_i)^2 = \frac{\sigma^2\Delta}{n\Delta} \sum_{i=1}^n Z_i^2 = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2.$$

Dado que $\mathbb{E}[\varepsilon_i^2] = 1$, entonces:

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2,$$

por lo que el estimador es insesgado (si a es conocido), y por lo que se comentó anterior mente hay un sesgo en la estimación de a , por lo que esta segunda estimación sería *contaminada* en consecuencia.

Insesgamiento de θ

Para el estimador de máxima verosimilitud de θ recordemos que:

- $Z_{i-1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- $\mathbb{E}[Z_{i-1}] = 0$

Entonces, a partir del desarrollo anterior:

$$\hat{\theta} = \theta + \frac{\sigma}{n\sqrt{\Delta}} \sum_{i=1}^n Z_{i-1}$$

Tomamos la esperanza:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\theta}] &= \mathbb{E} \left[\theta + \frac{\sigma}{n\sqrt{\Delta}} \sum_{i=1}^n Z_{i-1} \right] = \theta + \frac{\sigma}{n\sqrt{\Delta}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Z_{i-1}] = \theta \\ &\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ es **insesgado**.

Sin embargo, el insesgamiento no es suficiente para garantizar que un estimador sea confiable. por lo que ahora comentaremos la *consistencia*. Un estimador es consistente si, al aumentar el tamaño de la muestra (es decir, al observar el proceso durante más tiempo), sus valores convergen al verdadero valor del parámetro. En otras palabras, un estimador consistente puede no ser exacto con pocos datos, pero se vuelve preciso a medida que se recopilan más observaciones.

Consistencia de \hat{a} y $\hat{\sigma}$

En el caso del modelo Hull-White, tanto \hat{a} como $\hat{\sigma}^2$ son **consistentes** bajo condiciones razonables. Esto se debe a que los residuos del modelo (es decir, las diferencias entre lo observado y lo predicho por el modelo) son independientes e idénticamente distribuidos. Así, aunque los estimadores puedan estar afectados por el error de discretización o mostrar sesgo en muestras pequeñas, con suficiente cantidad de datos (ya sea aumentando el número de observaciones o disminuyendo el paso temporal Δ), estos errores disminuyen y los estimadores convergen al valor verdadero.

Consistencia de $\hat{\theta}$

Recordamos que el estimador de máxima verosimilitud de θ es:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=1}^n (r_i - r_{i-1}) + \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n r_{i-1}$$

Bajo el modelo discretizado:

$$r_i - r_{i-1} = (\theta - ar_{i-1})\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}Z_{i-1}, \quad Z_{i-1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Sustituyendo en el estimador:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=1}^n [(\theta - ar_{i-1})\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}Z_{i-1}] + \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n r_{i-1}$$

Simplificando:

$$\hat{\theta} = \theta - \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n r_{i-1} + \frac{\sigma}{n\sqrt{\Delta}} \sum_{i=1}^n Z_{i-1} + \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n r_{i-1}$$

Los términos con r_{i-1} se cancelan, y queda:

$$\hat{\theta} = \theta + \frac{\sigma}{n\sqrt{\Delta}} \sum_{i=1}^n Z_{i-1}$$

Como $Z_{i-1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y son independientes, tenemos:

$$\mathbb{E} \left[\frac{\sigma}{n\sqrt{\Delta}} \sum_{i=1}^n Z_{i-1} \right] = 0$$

y la varianza del término aleatorio es:

$$\text{Var} \left(\frac{\sigma}{n\sqrt{\Delta}} \sum_{i=1}^n Z_{i-1} \right) = \frac{\sigma^2}{n^2\Delta} \cdot n = \frac{\sigma^2}{n\Delta}$$

Por lo tanto, si mantenemos $\Delta > 0$ fijo y $n \rightarrow \infty$, se cumple:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$$

Esto implica que el estimador es **consistente**.

Hasta esta parte los resultados que hemos obtenido solo son para un caso específico de θ , el poder de este modelo radica en que θ es una función que va cambiando en el tiempo, por lo que a continuación revisaremos este caso más general y la estimación que se puede aplicar a los estimadores.

9. Inferencia Estadística con θ como función del tiempo

Sabemos que el proceso r_t bajo el modelo de Hull-White tiene distribución:

$$r_t \sim \mathcal{N}\left(F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right)$$

Esto se debe a que, en resultados previos, se obtuvo que:

$$\mathbb{E}[r_t] = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$$

$$\text{Var}(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Para facilitar la lectura, definimos $\mathbb{E}[r_t] = \mu(t)$ y $\text{Var}(r_t) = \nu^2(t)$, y procedemos nuevamente a obtener la función de verosimilitud:

$$L(a, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2(t_i)}} \exp\left(-\frac{(r_{t_i} - \mu(t_i))^2}{2\nu^2(t_i)}\right)$$

La función log-verosimilitud es:

$$\log L(a, \sigma) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\log \nu^2(t_i) + \frac{(r_{t_i} - \mu(t_i))^2}{\nu^2(t_i)} \right] \quad (7)$$

La función a maximizar no tiene una forma cerrada simple. Es decir, la expresión explícita al derivar e igualar a cero respecto a los parámetros a y σ no conduce a una ecuación lineal ni cuadrática, por lo que la solución debe obtenerse de manera numérica. Así, el problema se convierte en uno de optimización numérica. En particular, utilizaremos el método L-BFGS-B para aproximar los parámetros. Cabe mencionar que, por esta misma razón, no es posible demostrar analíticamente que los estimadores obtenidos son insesgados y consistentes, aunque sabemos que para un θ constante en el tiempo, el procedimiento funciona correctamente.

9.1. Ejemplo práctico

Para ilustrar el proceso de estimación de parámetros, utilizaremos un ejemplo práctico sobre cómo se ajustaría el modelo y se aproximarían los parámetros $\hat{\theta}_t$, \hat{a} y $\hat{\sigma}$.

Primero, definimos una función $F(0, t)$ que representa la curva de tasas observada, sobre la cual se hará el ajuste. En este caso, se propone:

$$F(0, t) = 0.02 + 0.005 \cdot \sin(0.5t) + 0.002t$$

A continuación, definimos valores iniciales para a y σ , elegidos según el escenario que se desea analizar. Por ejemplo:

- $a = 0.01, \sigma = 0.008$: Reversión muy lenta y baja volatilidad. Genera tasas casi planas y muy persistentes. (Azul)
- $a = 0.01, \sigma = 0.03$: Reversión muy lenta y alta volatilidad. Produce tasas muy ruidosas y con poca estabilidad. (Naranja)
- $a = 0.5, \sigma = 0.05$: Reversión moderada y alta volatilidad. Resultan tasas que fluctúan pero regresan a la media. (Verde)
- $a = 1, \sigma = 0.1$: Reversión muy rápida y alta volatilidad. Tasas altamente reactivas y volátiles. (Rojo)
- $a = 2, \sigma = 0.03$: Reversión extrema con baja volatilidad. Genera tasas muy cercanas al promedio. (Morado)

Es importante mencionar que no se consideran escenarios de crisis extrema, donde σ es demasiado alta y la reversión casi inexistente, ya que en estos casos el modelo puede volverse inestable. Tampoco se consideran combinaciones con valores excesivamente altos para ambos parámetros, pues no son de nuestro interés. Solo se observa que, mientras mayor es a y menor es σ , el escenario resulta más estable.

Definidos estos valores y conocida la función de la curva de tasas, podemos realizar la primera estimación de la función θ_t , tal como se definió anteriormente:

$$\theta_t = \frac{\partial}{\partial t} F(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}).$$

Una vez obtenida esta función, se aplica la discretización del modelo de Hull-White de la siguiente forma:

$$r_i = r_{i-1} + (\theta(t_{i-1}) - ar_{i-1}) \cdot \Delta + \sigma \cdot \sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon_i,$$

donde $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Este proceso se simula 1,000 veces, y se calcula el promedio de las trayectorias generadas. Esta trayectoria promedio es la que se utiliza para estimar los parámetros, maximizando la función de verosimilitud definida en la ecuación (7).

En cuanto a la parte de optimización numérica, se busca maximizar la función de verosimilitud mediante el método L-BFGS-B. Dada la presencia de ruido aleatorio en el modelo, esta optimización se repite 100 veces para reducir la variabilidad en la estimación. Cada 10 iteraciones, se cambia el punto de inicio de la búsqueda de los estimadores, por razones que se detallan a continuación.

Durante el desarrollo del método de estimación, se observó que los parámetros obtenidos eran altamente sensibles tanto a las tasas utilizadas en la optimización como al punto inicial de búsqueda. Para mitigar este problema, y considerando que los valores esperados para los parámetros son cercanos a cero, se realizó un barrido sistemático de puntos iniciales, incluyendo valores altos. Estos valores, aunque potencialmente válidos, conducían a soluciones poco realistas. El objetivo era alejarse de estos extremos para obtener estimaciones más coherentes y cercanas al comportamiento esperado del modelo.

Este proceso de selección se basó en el siguiente criterio: si los parámetros estimados, al simular nuevamente la función θ_t , producían una trayectoria más cercana a la función $F(0, t)$ observada, entonces se aceptaban como válidos. En caso contrario, se descartaban y se volvía a optimizar, ya sea desde el mismo punto o desde otro, dependiendo de la iteración.

Como comentario adicional, es importante mencionar que los parámetros estimados dependen en gran medida del tipo de escenario que se busca modelar. Por ejemplo, si se desea representar un

entorno con reversión exagerada y baja volatilidad, el procedimiento tenderá a devolver valores de a muy altos. Esto refleja la intención subyacente del modelado: una reversión extremadamente rápida.

Este comportamiento se revisará de forma visual en la figura siguiente.

El procedimiento descrito permitió desarrollar una metodología replicable sin necesidad de fijar una semilla en el código, lo cual refuerza la validez y estabilidad del enfoque propuesto.

9.1.1. Análisis de resultados

A continuación se analizan los resultados obtenidos. Recordemos que los parámetros estimados \hat{a} y $\hat{\sigma}$ corresponden a aquellos que permiten que la estimación de la función θ_t se ajuste de mejor manera a la curva observada de tasas $F(0, t)$, al tiempo que replican la intención del escenario propuesto.

Parámetros iniciales (a, σ)	Parámetros estimados ($\hat{a}, \hat{\sigma}$)	Intención del escenario
(1.000, 0.008)	(0.498, 0.000)	Reversión moderada, baja volatilidad
(0.010, 0.030)	(0.000, 0.007)	Reversión muy lenta, alta volatilidad
(0.500, 0.050)	(0.000, 0.002)	Reversión rápida, volatilidad moderada
(1.000, 0.100)	(0.033, 0.003)	Reversión muy rápida, alta volatilidad
(2.000, 0.030)	(253.869, 0.000)	Reversión extrema, baja volatilidad

Tabla 1: Comparación entre parámetros iniciales y estimados en distintos escenarios del modelo Hull-White

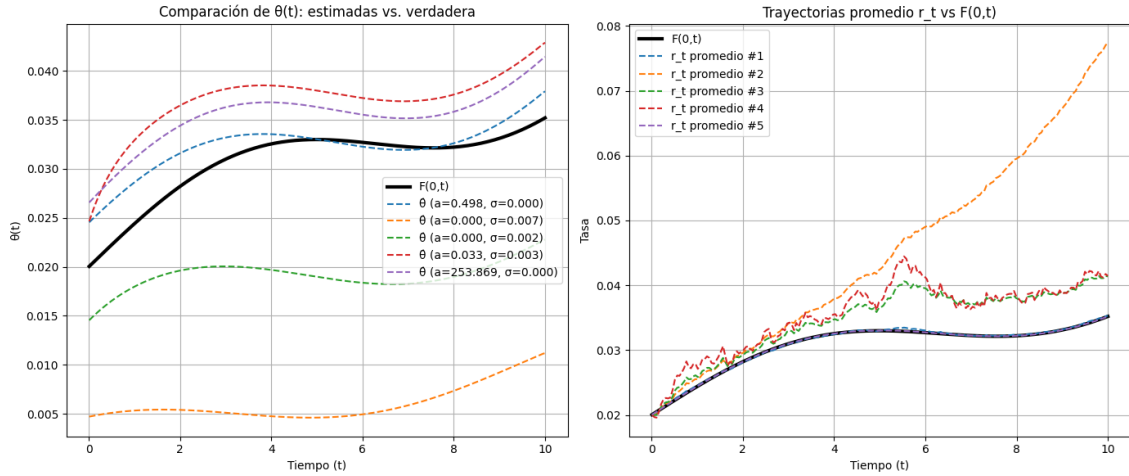


Figura 17: Estimación de parámetros y tasas simuladas

A partir de la Tabla 1 se observa que, en general, el procedimiento de estimación tiende a exagerar la intención implícita en los parámetros iniciales. En los escenarios donde la volatilidad era baja, la optimización condujo a valores de $\hat{\sigma}$ cercanos a cero, trasladando el ajuste a través del parámetro de reversión \hat{a} . Por otro lado, en los casos en los que se buscaba una reversión alta, la estimación llevó a valores muy elevados de \hat{a} , alineándose con la intención del escenario.

En escenarios más equilibrados, sin énfasis en un parámetro inicial particular, el modelo favoreció el ajuste mediante el parámetro de volatilidad, dejando la reversión en niveles mínimos.

En la gráfica de comparación de θ_t se aprecia que las estimaciones correspondientes a valores

iniciales altos de a presentan trayectorias más cercanas a la curva $F(0, t)$. En cambio, conforme aumentan los valores iniciales de σ , las trayectorias de θ_t se alejan de dicha curva. Por ejemplo, la estimación de color azul —que parte de un valor alto de a y bajo de σ se encuentra más próxima a la curva observada, mientras que la estimación de color naranja con baja reversión y alta volatilidad es la que más se desvía.

En la última imagen, correspondiente a las tasas simuladas, se confirma que el comportamiento de las trayectorias se ajusta a la intención de cada escenario. En particular, los escenarios primero y último presentan tasas muy cercanas a la curva $F(0, t)$, debido a la baja volatilidad o alta reversión. En contraste, los demás escenarios, con mayor volatilidad y menor reversión, generan trayectorias más dispersas, propias de un entorno de inestabilidad o crisis, siendo el segundo escenario el más extremo en este sentido.

10. Valuación de instrumentos financieros

En el marco de este proyecto, aunque la valuación de instrumentos financieros no es el objetivo principal, es fundamental comprender su funcionamiento y los principios básicos de los instrumentos para poder contextualizar adecuadamente el modelo de Hull y White. En esta sección, se abordará de manera concisa la valuación de algunos instrumentos clave, como los bonos cupón cero, los swaps y los swaptions. Estos instrumentos son esenciales en el mundo de las finanzas, ya que permiten gestionar riesgos, especular sobre tasas de interés y diseñar estrategias de inversión.

10.1. Bonos Cupón Cero

En México el instrumento financiero equivalente a un bono cupón cero es conocido comúnmente como CETE, que son las siglas de Certificados de la Federación.

El CETE es un instrumento de deuda gubernamental, por lo que es el instrumento financiero más seguro, ya que se encuentra respaldado por el Gobierno. Se emiten en plazos de 28, 91, 182 y 360 días. Al ser un cupón cero, esto quiere decir que el instrumento no devenga intereses, es decir, no afecta el precio su fecha de compra, y como su nombre lo dice no paga cupones a los largo del periodo, únicamente al vencimiento del CETE.

Para la valuación de este instrumento es necesario el valor nominal, que para todos los CETEs a cualquier plazo es de \$10 MXN, la tasa de rendimiento y el plazo del CETE (28, 91, 182, 360)

$$P = \frac{VN}{1 + \frac{r \cdot t}{360}} \quad (8)$$

donde:

P : Precio del CETE (redondeado a 7 decimales).

VN : Valor nominal del título en pesos.

r : Tasa de rendimiento.

t : Plazo en días del CETE.

Por ejemplo, sea un CETE a 28 días con una tasa de rendimiento del 9.8%, sabiendo que el valor

nominal es de \$10 MXN, aplicando la fórmula de valuación obtenemos que:

$$P = \frac{10}{1 + \frac{0.098 \cdot 28}{360}} \quad (9)$$

$$P = \frac{10}{1.17578} \quad (10)$$

$$P = 8.5049924 \quad (11)$$

Por lo que el precio del CETE es de \$8.5049924, esto quiere decir que el inversionista pagará este precio por el instrumento y cuando sea el vencimiento, el emisor, en este caso el gobierno le devolverá \$10 MXN.

La colocación de estos instrumento en el mercado es fundamental, ya que algunos otros instrumentos toman en referencia su tasa de rendimiento, modificando el precio de muchos más instrumentos.

10.2. Curva cupón cero

La curva cupón cero es una representación gráfica y matemática de las tasas de interés de instrumentos financieros que no pagan cupones, es decir, bonos cupón cero, en función de su vencimiento. Esta curva se construye a partir de los rendimientos de bonos libres de riesgo, como los bonos del gobierno, y proporciona las tasas de descuento adecuadas para flujos de efectivo en diferentes horizontes de tiempo.

Tomando como ejemplo la siguiente tabla de información

Instrumento	Vencimiento	Precio Sucio
CETES A 28 DÍAS	16/04/2025	9.932081
CETES A 91 DÍAS	19/06/2025	9.777824
CETES A 182 DÍAS	18/09/2025	9.569892
CETES A 364 DÍAS	05/03/2026	9.20272
CETES A 2 AÑOS	21/01/2027	8.553793

Tabla 2: Información obtenida de BANXICO, sobre CETES en circulación de la última subasta

Dada la valuación realizada en una sección anterior podemos obtener el rendimiento del CETE dado su precio de la siguiente manera:

$$r = \left(\frac{VN}{P} - 1 \right) \cdot \frac{360}{t} \quad (12)$$

Aplicando de esta manera, obtenemos que

Description	Rendimiento
CETES A 28 DÍAS	8.79
CETES A 91 DÍAS	8.99
CETES A 182 DÍAS	8.89
CETES A 364 DÍAS	8.57
CETES A 2 AÑOS	8.36

Tabla 3: Tabla de rendimientos obtenida a partir del precio

11. Implementación práctica del modelo de Hull-White con datos de CETES

En esta sección se describe la implementación computacional del modelo de Hull-White utilizando datos reales del mercado de deuda mexicano, específicamente precios de CETES. Se detallan las etapas de calibración, simulación, estimación de parámetros y aplicación del modelo en la valuación de instrumentos financieros.

11.1. Obtención de tasas *forward* a partir de precios de CETES

A partir de los precios de distintos CETES con vencimientos conocidos, se calcularon las tasas implícitas utilizando la fórmula de descuento de un bono cupón cero:

$$r = \left(\frac{VN}{P} - 1 \right) \cdot \frac{360}{t} \quad (13)$$

donde VN es el valor nominal (\$10), P es el precio del CETE y t es el plazo en días. Estas tasas se interpolaron linealmente para obtener una curva *forward* $F(0, t)$.

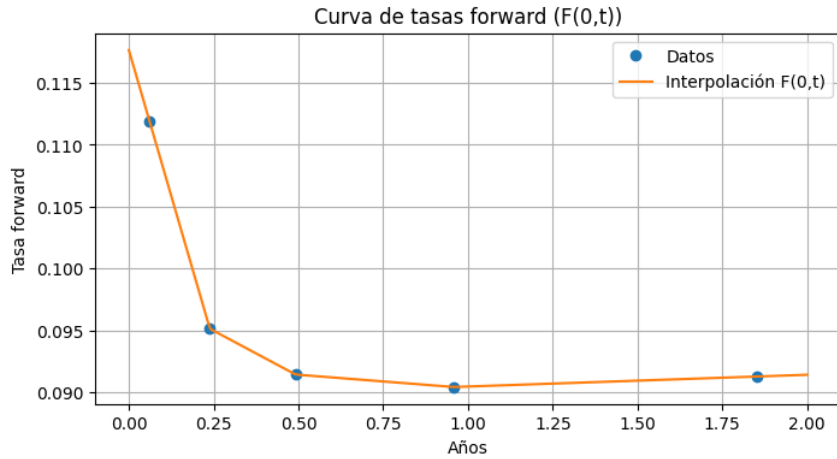


Figura 18: Curva *forward* $F(0, t)$ obtenida de los precios de CETES

11.2. Cálculo de la función $\theta(t)$

La función $\theta(t)$ se construye a partir de la derivada de la curva $F(0, t)$, junto con los parámetros del modelo Hull-White a y σ , de acuerdo con:

$$\theta(t) = \frac{dF(0, t)}{dt} + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (14)$$

Como se revisó en la sección de estimación, esta función se construye para cada uno de los escenarios considerados, y se utiliza el mismo algoritmo para encontrar todos sus parámetros $(\theta_t, \hat{a}, \hat{\sigma})$.

11.3. Simulación de trayectorias del modelo Hull-White

Antes de analizar los resultados, es importante señalar una diferencia respecto a la sección de estimación: en este caso, la función $F(0, t)$ se construye a partir de pocos datos, y su ajuste se realiza mediante interpolación lineal. Por tanto, su derivada es una función por tramos, lo cual limita la suavidad y complejidad del modelo. Como consecuencia, los resultados simulados no presentan comportamientos tan interesantes como los obtenidos en la sección anterior.

A continuación, se presentan las trayectorias simuladas bajo los diferentes escenarios considerados:

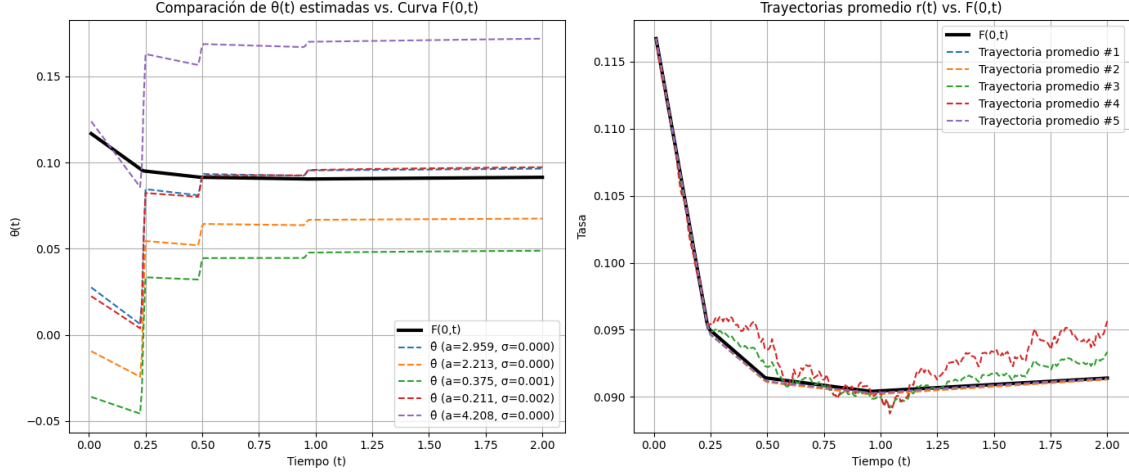


Figura 19: Ajuste de la función θ_t y trayectorias de tasas simuladas

El ajuste de la función θ_t resulta escalonado debido al método de interpolación aplicado, lo cual impide capturar la forma de la curva con mayor suavidad. Esta característica se refleja también en las trayectorias simuladas, que presentan variaciones abruptas. Además, dado que la curva observada es relativamente estable, se requieren parámetros más extremos para generar escenarios más críticos.

11.4. Análisis de resultados

La siguiente tabla resume los valores de las tasas en distintos momentos del tiempo. Aunque los escenarios no representan situaciones de crisis, los resultados son útiles para comprender el funcionamiento del modelo. La estabilidad de la curva observada sugiere que, para generar escenarios extremos, es necesario utilizar parámetros iniciales más agresivos. Asimismo, la suavidad del ajuste de la curva observada influye directamente en la estimación de θ_t , y por ende, en la diversidad de trayectorias simuladas.

Tabla 4: Comparación entre tasas simuladas $\bar{r}(t)$ y tasas observadas $F(0, t)$ en cinco tiempos

\hat{a}	$\hat{\sigma}$	$t=0.01$	$t=0.4096$	$t=0.8092$	$t=1.2088$	$t=1.6084$
$F(0, t)$		11.6725 %	9.2614 %	9.0725 %	9.0640 %	9.1021 %
2.9593	0.0004	11.6725 %	9.2354 %	9.0504 %	9.0488 %	9.0919 %
2.2133	0.0005	11.6725 %	9.2342 %	9.0464 %	9.0438 %	9.0867 %
0.3749	0.0010	11.6725 %	9.3686 %	8.9977 %	9.0851 %	9.1627 %
0.2110	0.0022	11.6725 %	9.5212 %	8.9870 %	9.2025 %	9.3020 %
4.2076	0.0004	11.6725 %	9.2395 %	9.0570 %	9.0564 %	9.0982 %

11.5. Valuación de un CETE con tasa simulada

Como ejercicio de cierre, se presenta la valuación de un CETE en distintos escenarios definidos por parámetros de reversión a y volatilidad σ , utilizando tasas simuladas promedio $\bar{r}(t)$. Se compara el precio simulado del instrumento con su precio teórico calculado a partir de la curva $F(0, t)$, y se cuantifica la ganancia o pérdida relativa.

Tabla 5: Valuación de CETES - Escenario 1: $a = 1$, $\sigma = 0.008$

Tiempo (años)	Precio real	Precio simulado	Ganancia/Pérdida
0.0100	9.9883	9.9883	+0.0000
0.4096	9.6345	9.6355	+0.0010
0.8092	9.3161	9.3176	+0.0015
1.2088	9.0125	9.0140	+0.0015
1.6084	8.7230	8.7242	+0.0012

Tabla 6: Valuación de CETES - Escenario 2: $a = 0.01$, $\sigma = 0.03$

Tiempo (años)	Precio real	Precio simulado	Ganancia/Pérdida
0.0100	9.9883	9.9883	+0.0000
0.4096	9.6345	9.6356	+0.0010
0.8092	9.3161	9.3179	+0.0018
1.2088	9.0125	9.0145	+0.0020
1.6084	8.7230	8.7249	+0.0019

Tabla 7: Valuación de CETES - Escenario 3: $a = 0.5$, $\sigma = 0.05$

Tiempo (años)	Precio real	Precio simulado	Ganancia/Pérdida
0.0100	9.9883	9.9883	+0.0000
0.4096	9.6345	9.6304	-0.0041
0.8092	9.3161	9.3213	+0.0053
1.2088	9.0125	9.0105	-0.0021
1.6084	8.7230	8.7156	-0.0074

Tabla 8: Valuación de CETES - Escenario 4: $a = 1.0$, $\sigma = 0.1$

Tiempo (años)	Precio real	Precio simulado	Ganancia/Pérdida
0.0100	9.9883	9.9883	+0.0000
0.4096	9.6345	9.6246	-0.0099
0.8092	9.3161	9.3221	+0.0060
1.2088	9.0125	8.9990	-0.0136
1.6084	8.7230	8.6986	-0.0244

Tabla 9: Valuación de CETES - Escenario 5: $a = 2.0$, $\sigma = 0.03$

Tiempo (años)	Precio real	Precio simulado	Ganancia/Pérdida
0.0100	9.9883	9.9883	+0.0000
0.4096	9.6345	9.6354	+0.0008
0.8092	9.3161	9.3172	+0.0011
1.2088	9.0125	9.0133	+0.0008
1.6084	8.7230	8.7235	+0.0005

11.6. Pruebas de bondad de ajuste

Con base en los datos anteriores obtenemos la siguiente comparación entre las tasas reales vs las modeladas:

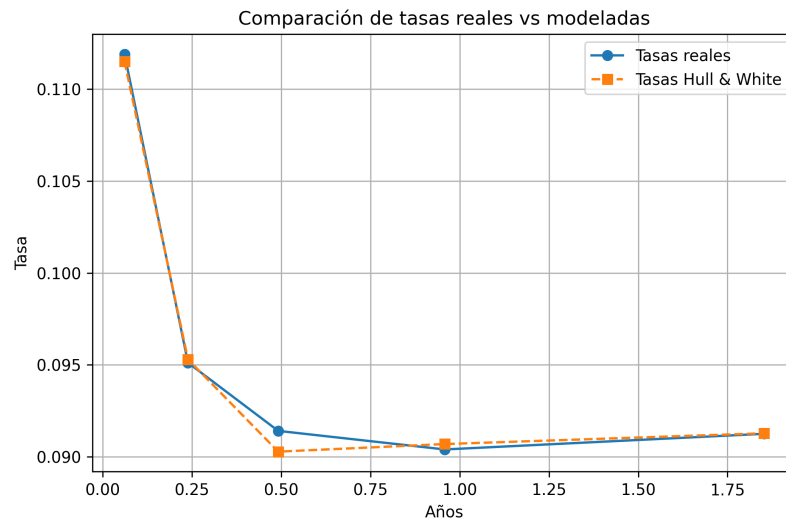


Figura 20: Comparación de tasas reales contra las modeladas

Visualmente vemos que el ajuste es bastante bueno, sin embargo añadimos ciertas métricas, tales como MSE y MAE para evaluar el desempeño del modelo:

- MSE: 0.000557
- MAE: 0.000406

Observamos que son bastante bajos lo que nos sugiere que las tasas modeladas son bastante buenas. Finalmente complementamos estas pruebas con la de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk:

- Kolmogorov-Smirnov

Prueba de Kolmogorov-Smirnov:
Estadístico: 0.3602, p-valor: 0.0000

Figura 21: Prueba Kolmogorov-Smirnov

Con la combinación $(a, \sigma) = (1, 0.03)$ tenemos un ajuste malo, un p -value menor a 0.05 por lo que se necesita la recalibración de los parámetros.

- Shapiro-Wilk

Prueba de normalidad (Shapiro-Wilk) sobre residuos:
Estadístico: 0.8528, p-valor: 0.2035

Figura 22: Prueba Shapiro-Wilk

Por otro lado, los residuos pueden considerarse aproximadamente normales, lo que es buena señal para la validez estadística del modelo.

Con base en las pruebas de bondad de ajuste anteriores podemos ver que sería necesario hacer una recalibración de los parámetros, en este caso sólo se probó el Escenario 1, se puede realizar el mismo análisis con los otros escenarios y ver cual da un mejor ajuste final y potencialmente logre pasar ambas pruebas.

12. Bibliografía

- Baltazar-Larios, F. (2025) [PDF] *Inferencia estadística para ecuaciones diferenciales estocásticas*. Manuscrito inédito. Recuperado el 5 de junio de 2025.
- FasterCapital. (2024). *Comparación de los modelos Hull White y Vasicek: revelando las diferencias*. Recuperado el 5 de junio de 2025 de <https://fastercapital.com/es/contenido/Comparacion-de-los-modelos-Hull-White-y-Vasicek--revelando-las-diferencias.html>
- Peris Cano, J. (2019) [PDF] *Modelo Hull & White de derivados sobre tipos de interés: Solución numérica y análisis [Trabajo de investigación, Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas]*. Universitat de València. Recuperado el 5 de junio de 2025.
- Badía, C., Galisteo, M., & Preixens, T. (s.f.) [PDF] *Valoración de credit default swaps: Una aplicación del modelo de Hull-White al mercado español [Documento de trabajo, Universitat de Barcelona]*. Recuperado el 5 de junio de 2025.
- Métodos computacionales. (s.f.) [PDF] *Curso MAFS525 – Computational Methods for Pricing Structured Products*. Recuperado el 5 de junio de 2025
- Honorio, J. (s.f.) [PDF] *The BFGS method. Anotado por Jean Honorio. MS4327 Optimisation*. Recuperado de <http://jkcray.maths.ul.ie/ms4327/Slides.pdf>
- BBVA. (s.f.) [URL] *¿Qué es un swap?* Recuperado el 5 de junio de 2025 de <https://www.bbva.com/es/economia-y-finanzas/que-es-un-swap/>

- Investopedia. (s.f.) [URL] *Swaption*. Recuperaado el 5 de junio de <https://www.investopedia.com/terms/s/swaption.asp>
- AudinforSystem. (s.f.) [URL] *¿Qué es un swap y tipos?* Recuperado el 5 de junio de <https://www.audinforsystem.es/todo-energia/que-es-un-swap-y-tipos/>
- Oracle. (s.f.) [HTML] *Swaptions (Documentación técnica)*. Recuperado el 5 de junio de 2025 de <https://docs.oracle.com/en/industries/financial-services/banking-treasury-management/14.7.0.0.0/trotc/swaptions.html>

13. Códigos

A continuación se proporciona un link de Google Drive, el cual contiene los códigos usados para el análisis realizado en el documento presente: <https://drive.google.com/drive/folders/1wC9e3x0M7TxXpR4Yn2shb2SRm0ZfglSo?usp=sharing>