



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Estimación Bayesiana para el modelo de Hull & White con
información incompleta

Niño Pedraza Eduardo

Reyes Ramírez Raquel

Salas Cortés Emiliano



Índice

1 Preliminares	2
2 Datos aumentados y corrección	3
3 Función de verosimilitud aumentada	3
4 Función de verosimilitud en forma exponencial	4
5 Actualización posteriori de la función de distribución	7

1. Preliminares

Consideramos el proceso $\{r_t\}_{t \geq 0}$ solución de la EDE de Hull & White, notamos que tomamos el modelo con la variable θ constante.

$$dr_t = (\theta - ar_t)dt + \sigma dW_t$$

con $a > 0, \sigma > 0$. De la ecuación definimos los siguientes componentes:

- $b_\alpha(x) = \theta - ax$
- $\sigma_\beta(x) = \sigma$

En este caso, notamos que nuestros datos son observaciones discretas, pero nuestro objetivo es llevarlo a un análisis en el continuo, por lo que aplicando la transformación de Lamperti, definimos el nuevo proceso, tomando como punto arbitrario $x^* = 0$, así definimos h_β (con $\beta = \sigma$)

$$h_\beta(x) = \int_{x^*}^x \frac{1}{\sigma} = \int_0^x \frac{1}{\sigma} = \frac{x}{\sigma} \Rightarrow h_\beta^{-1}(y) = \sigma y$$

Ahora, tenemos un proceso cuya forma preferimos para hacer su estudio a tiempo continuo, así aplicando a nuestro proceso $Y_t = h(r_t) = \frac{r_t}{\sigma}$ la fórmula de Itô sabemos que $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ es solución de la EDE

$$dY_t = \mu_{\alpha,\beta}(Y_t)dt + dW_t$$

donde

$$\mu_{\alpha,\beta}(y) = \frac{b_\alpha(h_\beta^{-1}(y))}{\sigma_\beta(h_\beta^{-1}(y))} = \frac{\theta - ah_\beta^{-1}(y)}{\sigma} = \frac{\theta - a\sigma y}{\sigma} = \frac{\theta}{\sigma} - ay$$

Entonces el proceso es solución de la EDE

$$dY_t = \left[\frac{\theta}{\sigma} - aY_t \right] dt + dW_t$$

A continuación, procedemos a calcular las funciones $H_{\alpha,\beta}(x)$ y $s_{\alpha,\beta}(x)$

$$H_{\alpha,\beta}(x) = \int_{h_\beta^{-1}(x)}^x \mu_{\alpha,\beta}(y) dy = s_{\alpha,\beta}(x) - \frac{1}{2} \log(\sigma_\beta(x))$$

donde

$$s_{\alpha,\beta}(x) = \int_{x^*}^x \frac{b_\alpha(y)}{\sigma_\beta^2(y)} dy$$

Entonces, tomando nuevamente $x^* = 0$

$$s_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^x \frac{\theta - ay}{\sigma^2} dy = \frac{\theta}{\sigma^2}(x) - \frac{a}{2\sigma^2}(x^2),$$

y

$$H_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\theta}{\sigma^2}(x) - \frac{a}{2\sigma^2}(x^2) - \frac{1}{2} \log(\sigma).$$

2. Datos aumentados y corrección

En general, los datos aumentados se escriben como

$$Y_t^{*i}(\beta, \beta_0) = Z_t^i(\alpha_0, \beta_0) + l_t^i(\beta, \beta_0)$$

donde

$$l_t^i(\beta, \beta_0) = \frac{(t_i - t)[h_\beta(x_{i-1}) - h_{\beta_0}(x_{i-1})] + (t - t_{i-1})[h_\beta(x_i) - h_{\beta_0}(x_i)]}{t_i - t_{i-1}}$$

Sustituimos en nuestro caso:

$$h_\beta(x) = \frac{x}{\sigma}, \quad h_{\beta_0}(x) = \frac{x}{\sigma_0}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} l_t^i(\beta, \beta_0) &= \frac{(t_i - t) \left(\frac{x_{i-1}}{\sigma} - \frac{x_{i-1}}{\sigma_0} \right) + (t - t_{i-1}) \left(\frac{x_i}{\sigma} - \frac{x_i}{\sigma_0} \right)}{t_i - t_{i-1}} \\ &= \frac{-(t_i - t)(x_{i-1})}{\sigma_0 \Delta} - \frac{(t - t_{i-1})(x_i)}{\sigma_0 \Delta} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{(t_i - t)(x_{i-1}) + (t - t_{i-1})(x_i)}{\Delta} \right) \end{aligned}$$

con $\Delta = t_i - t_{i-1}$. Definamos:

$$\begin{aligned} C_1^i &:= \frac{-(t_i - t)(x_{i-1})}{\sigma_0 \Delta} - \frac{(t - t_{i-1})(x_i)}{\sigma_0 \Delta} \\ C_2^i &:= \frac{(t_i - t)(x_{i-1}) + (t - t_{i-1})(x_i)}{\Delta} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$l_t^i(\beta, \beta_0) = C_1^i + \frac{1}{\sigma} C_2^i$$

3. Función de verosimilitud aumentada

En general podemos escribir la función de verosimilitud de la información completa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L(\theta; Y_{\text{obs}}, Y_{\text{miss}}) &= \exp \left\{ H_{\alpha,\beta}(x_n) - H_{\alpha,\beta}(x_1) - \sum_{i=1}^n \frac{(h_\beta(x_{i-1}) - h_\beta(x_i))^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right\} \\ &\times \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\log(\sigma_\beta(x_i)) + \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_{\alpha,\beta}(Y_s^{*i}(\beta, \beta_0)) ds \right] \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\Phi_{\alpha,\beta}(y) = \mu'_{\alpha,\beta}(y) + (\mu_{\alpha,\beta}(y))^2.$$

Sustituyendo con la expresión obtenida de $\mu_{\alpha,\beta}(y)$ para nuestra ecuación tenemos que

$$\mu_{\alpha,\beta}(y) = \frac{\theta}{\beta} - \alpha y, \quad \mu'_{\alpha,\beta}(y) = -\alpha,$$

y por lo tanto

$$\Phi_{\alpha,\beta}(y) = -\alpha + \left(\frac{\theta}{\beta} - \alpha y \right)^2.$$

Finalmente, nuestra función de verosimilitud para la información completa se ve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L(\theta; Y_{\text{obs}}, Y_{\text{miss}}) &= \exp \left\{ \frac{\theta}{\sigma^2} (x_n) - \frac{a}{2\sigma^2} (x_n^2) - \frac{1}{2} \log(\sigma) - \frac{\theta}{\sigma^2} (x_1) - \frac{a}{2\sigma^2} (x_1^2) - \frac{1}{2} \log(\sigma) - \sum_{i=1}^n \frac{(\frac{x_{i-1}}{\sigma} - \frac{x_i}{\sigma})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right\} \\ &\times \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\log(\sigma) + \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[-\alpha + \left(\frac{\theta}{\beta} - \alpha Y_s^{*i}(\beta, \beta_0) \right)^2 \right] ds \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\theta}{\sigma^2} (x_n - x_1) - \frac{a}{2\sigma^2} (x_n^2 + x_1^2) - \log(\sigma) - \sum_{i=1}^n \frac{(\frac{x_{i-1}-x_i}{\sigma})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right\} \\ &\times \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\log(\sigma) + \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[-\alpha + \left(\frac{\theta}{\beta} - \alpha Y_s^{*i}(\beta, \beta_0) \right)^2 \right] ds \right] \right\} \end{aligned}$$

4. Función de verosimilitud en forma exponencial

Para poder escribir nuestra función de verosimilitud de manera más sencilla podemos ver que nuestro modelo pertenece a los modelos de la familia exponencial, es decir, que el coeficiente de difusión depende de manera lineal de parámetros α

$$b_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{q_1} \alpha_i w_i(x) = \theta - ax = \alpha_1 w_1(x) + \alpha_2 w_2(x)$$

donde

- $\alpha_1 = \theta$
- $\alpha_2 = -\alpha$
- $w_1(x) = 1$
- $w_2(x) = x$

con σ constante, de esta forma nuestro modelo encaja en el caso de la familia exponencial. De modo que la forma general de la log-verosimilitud en familia exponencial es

$$L(\theta; Y_{\text{obs}}, Y_{\text{miss}}) = \exp \left(\alpha \nu_\beta - \frac{1}{2} \alpha^2 \Lambda_\beta \right),$$

donde

$$\nu_\beta = \int_{x_1}^{x_n} \frac{w(y)}{\sigma_\beta^2(y)} dy - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa^1(Z_s^i + l_\beta^i(s)) ds$$

y

$$\Lambda_\beta = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa^2(Z_s^i + l_\beta^i(s)) ds.$$

Donde la k-ésima coordenada de κ^1 y κ^2 están dadas por:

$$\kappa_k^1(y) = \frac{1}{2} \left[w'_k(h_\beta^{-1}(y)) - 2 w_k(h_\beta^{-1}(y)) [\log(\sigma_\beta(h_\beta^{-1}(y)))]' \right]$$

y

$$\kappa_k^2(y) = \left(\frac{w_k(h_\beta^{-1}(y))}{\sigma_\beta(h_\beta^{-1}(y))} \right)^2$$

Sustituyendo en nuestro caso con los componentes $\alpha = (\theta, -\alpha)$, $\sigma_\beta = \sigma$ constante

- $h_\beta^{-1}(y) = \sigma y$
- $w_1(x) = 1 \Rightarrow w'_1(x) = 0$
- $w_2(x) = x \Rightarrow w'_2(x) = 1$
- $(\log(\sigma))' = 0$

las κ' s quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \kappa_1^1(y) &= \frac{1}{2} [0 - 2(1)(0)] = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\ \kappa_2^1(y) &= \frac{1}{2} [1 - 2(\sigma y)(0)] = \frac{1}{2} \cdot (1) = \frac{1}{2} \\ \kappa_1^2(y) &= \left(\frac{1}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \\ \kappa_2^2(y) &= \left(\frac{\sigma y}{\sigma} \right)^2 = y^2 \end{aligned}$$

A continuación calculamos el vector ν_β y la matriz Λ_β

Vector ν_β (integral en x y corrección por κ_1): Calculamos los sumandos del vector:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_n} \frac{w(x)}{\sigma_\beta^2} dx &= \left(\int_{x_1}^{x_n} \frac{1}{\sigma^2} dx \right) = \left(\frac{x_n - x_1}{\sigma^2} \right) \\ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa_1(Y_s^{*i}) ds &= \left(\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} 0 ds \right) = \left(\frac{t_n - t_0}{2} \right). \end{aligned}$$

Por tanto, en el modelo de Hull & White tenemos:

$$\nu_\beta = \left(\frac{\frac{x_n - x_1}{\beta^2}}{\frac{x_n^2 - x_1^2}{2\beta^2} - \frac{t_n - t_0}{2}} \right) = \left(\frac{\frac{D_1}{\beta^2}}{\frac{D_2}{\beta^2} - \frac{D_3}{2}} \right)$$

además notemos que definimos lo siguiente:

- $D_1 := x_n - x_1$
- $D_2 := \frac{x_n^2 - x_1^2}{2}$
- $D_3 := t_n - t_0$

Matriz Λ_β (diagonal por κ^2): Vemos que la matriz Λ_β se ve de la siguiente manera:

$$\Lambda_\beta = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa^2(Z_s^i + l_\beta^i(s)) ds.$$

lo que quiere decir que es la suma de dos términos: uno que proviene del término integral sobre x para la familia exponencial y otro proveniente de las correcciones por los caminos latentes Y^* , por lo que la matriz se puede ver compuesta por las entradas de la forma:

$$\int_{x_1}^{x_n} \frac{w(x)w(x)^T}{\sigma_\beta(x)^2} - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa^2(Y_{i,s}^*) ds$$

Por lo tanto la matriz se ve de la forma:

$$\Lambda_\beta = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \begin{pmatrix} \kappa_1^2(Z_s^i + l_\beta^i(s)) & 0 \\ 0 & \kappa_2^2(Z_s^i + l_\beta^i(s)) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{(t_n - t_0)}{\beta^2} & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (Z_s^i + l_\beta^i(s))^2 ds \end{pmatrix}.$$

Vamos ahora a desarrollar, la entrada $(2,2)$, $\Lambda_{\beta(2,2)}$ de la matriz

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (Z_s^i + l_\beta^i(s))^2 ds &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (Z_s^i)^2 ds + 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (Z_s^i \cdot l_\beta^i(s)) ds + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (l_\beta^i(s))^2 ds \\ &= D_4 + 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} [Z_s^i \cdot (C_1^i(s) + \frac{1}{\beta} C_2^i)] ds + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (C_1^i(s) + \frac{1}{\beta} C_2^i)^2 ds \\ &= D_4 + 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} Z_s^i C_1^i(s) ds + \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} Z_s^i C_2^i(s) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (C_1^i(s))^2 ds + \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} C_1^i(s) C_2^i(s) ds + \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (C_2^i(s))^2 ds \\ &= D_4 + D_5 + \frac{1}{\beta} D_6 + D_7 + \frac{1}{\beta} D_8 + \frac{1}{\beta^2} D_9 \\ &= D_4 + D_5 + D_7 + \frac{1}{\beta}(D_6 + D_8) + \frac{1}{\beta^2} D_9 \\ &= A + \frac{1}{\beta} B + \frac{1}{\beta^2} C \end{aligned}$$

Donde definimos

$$\begin{array}{lll} D_1 = x_n - x_1 & D_2 = \frac{x_n^2 - x_1^2}{2} & D_3 = (t_n - t_0) \\ D_4 = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (Z_s^i)^2 ds & D_5 = 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} Z_s^i \cdot C_1^i(s) ds & D_6 = 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} Z_s^i C_2^i(s) ds \\ D_7 = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (C_1^i(s))^2 ds & D_8 = 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} C_1^i(s) \cdot C_2^i(s) ds & D_9 = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (C_2^i(s))^2 ds \end{array}$$

Renombremos $A = D_4 + D_5 + D_7$, $B = D_6 + D_8$, $C = D_9$

Así, nuestra matriz se ve de la forma

$$\Lambda_\beta = \begin{pmatrix} \frac{(t_n - t_0)}{\beta^2} & 0 \\ 0 & A + \frac{1}{\beta}B + \frac{1}{\beta^2}C \end{pmatrix}.$$

Finalmente, retomando la función de verosimilitud para la familia exponencial tenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} L(\theta; Y_{\text{obs}}, Y_{\text{miss}}) &= \exp \left(\alpha \nu_\beta - \frac{1}{2} \alpha^2 \Lambda_\beta \right) \\ &= \exp \left\{ \theta \left(\frac{D_1}{\beta^2} \right) - a \left(\frac{D_2}{\beta^2} - \frac{D_3}{2} \right) - \frac{1}{2} \left[\theta^2 \left(\frac{t_n - t_0}{\beta^2} \right) + (-a)^2 \left(A + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\beta^2} \right) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \theta \left(\frac{D_1}{\beta^2} \right) - a \left(\frac{D_2}{\beta^2} - \frac{D_3}{2} \right) - \frac{1}{2} \left[\theta^2 \left(\frac{t_n - t_0}{\beta^2} \right) + a^2 \left(A + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\beta^2} \right) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{2} \theta^2 (t_n - t_0) - \theta D_1 + a D_2 + \frac{1}{2} a^2 C \right) - \frac{a^2 B}{2\beta} + \frac{a D_3}{2} - \frac{a^2 A}{2} \right\} \\ &= \exp \left\{ \sigma^2 E_1 + \sigma E_2 + E_3 \right\} \end{aligned}$$

Definimos

- $\sigma = \frac{1}{\beta}$
- $E_1 = -\theta D_1 + a D_2 + \frac{1}{2} \theta^2 (t_n - t_0) + \frac{1}{2} a^2 C$
- $E_2 = -\frac{1}{2} a^2 B$
- $E_3 = \frac{a D_3}{2} - \frac{1}{2} a^2 A$
- $E_4 = E_2 - \beta_0$.

5. Actualización posterior de la función de distribución

Finalmente, con esto podemos escribir nuestra función de verosimilitud de forma exponencial de la forma

$$L(\theta; Y) = \exp(-\sigma^2 E_1 + \sigma E_2 + E_3) = \exp(E_3) \exp(-\sigma^2 E_1 + \sigma E_2)$$

En nuestro caso buscamos ponerlo en la forma $\exp(-(\sigma - \mu)^2)$, por lo que elegimos apriori $\sigma = \frac{1}{\beta} \sim \exp(\beta_0)$, entonces $f_{\sigma(x)} = \beta_0 e^{-\beta_0 \sigma}$

Así la aposteriori se ve de la forma:

$$\begin{aligned} g(\sigma) &= f_\sigma(\sigma) L(\theta; Y) = \beta_0 e^{-\beta_0 \sigma} e^{E_3} e^{-\sigma^2 E_1 + \sigma E_2} = \beta_0 e^{E_3} e^{-\sigma^2 E_1} e^{\sigma E_2 - \beta_0 \sigma} \\ &= \beta_0 e^{E_3} e^{-\sigma^2 E_1} e^{\sigma(E_2 - \beta_0)} = \beta_0 e^{E_3} e^{-\sigma^2 E_1} e^{\sigma E_4} \\ &= \beta_0 e^{E_3} e^{-\sigma^2 E_1 + \sigma E_4} \end{aligned}$$

En este caso nos fijamos en el exponente de la segunda exponencial pues queremos completar cuadrados en este caso, para poder identificar de manera más eficaz la forma aposterior, de aquí

$$-E_1\sigma^2 + E_4\sigma = -E_1\left(\sigma - \frac{E_4}{2E_1}\right)^2 + \frac{E_4^2}{4E_1}$$

Así la distribución posteriori toma la forma proporcional

$$g(\sigma) \propto \beta_0 \exp\left(E_3 + \frac{E_4^2}{4E_1}\right) \exp\left(-E_1(\sigma - \frac{E_4}{2E_1})^2\right)$$

con $\sigma > 0$. De aquí podemos identificar la parametrización gaussiana donde

- $\mu = \frac{E_4}{2E_1}$
- $w^2 = \frac{1}{2E_1}$

porque $-E_1(\sigma - \mu)^2 = -\frac{(\sigma - \mu)^2}{2w^2}$