Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Estimación Bayesiana para el modelo de Hull & White con información incompleta

Niño Pedraza Eduardo

Reyes Ramírez Raquel

Salas Cortés Emiliano

Índice

1. Cambio de variable del proceso de difusión r_t

Consideramos el proceso $\{r_t\}_{t\geq 0}$ solución de la EDE de Hull & White, notamos que tomamos el modelo con la variable θ constante.

$$dr_t = (\theta - ar_t)dt + \sigma dW_t$$

con $a > 0, \sigma > 0$. De la ecuación definimos los siguientes componentes:

- $b_\alpha(x) = \theta - ax$
- $\sigma_\beta(x) = \sigma$

En este caso, notamos que nuestros datos son observaciones discretas, pero nuestro objetivo es llevarlo a un análisis en el continuo, por lo que aplicando la tranformación de Lamperti, definimos el nuevo proceso, tomando como punto arbitrario $x^* = 0$, así definimos h_β (con $\beta = \sigma$)

$$h_\beta(x) = \int_{x^*}^{x} \frac{1}{\sigma} = \int_0^x \frac{1}{\sigma} = \frac{x}{\sigma} \Rightarrow h_\beta^{-1}(y) = \sigma y$$

Ahora, tenemos un proceso cuya forma preferimos para hacer su estudio a tiempo continuo, así aplicando a nuestro proceso $Y_t = h(r_t) = \frac{r_t}{\sigma}$ la fórmula de Itô sabemos que $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ es solución de la EDE

$$dY_t = \mu_{\alpha,\beta}(Y_t)dt + dW_t$$

donde

$$\mu_{\alpha,\beta}(y) = \frac{b_\alpha(h_\beta^{-1}(y))}{\sigma_\beta(h_\beta^{-1}(y))} = \frac{\theta - ah_\beta^{-1}(y)}{\sigma} = \frac{\theta - a\sigma y}{\sigma} = \frac{\theta}{\sigma} - ay$$

Entonces el proceso es solución de la EDE

$$dY_t = \left[\frac{\theta}{\sigma} - aY_t\right] dt + dW_t$$

A continuación, procedemos a calcular las funciones $H_{\alpha,\beta}(x)$ y $s_{\alpha.\beta}(x)$l

$$H_{\alpha,\beta}(x) = \int_{h_\beta^{-1}(x)} \mu_{\alpha,\beta}(y)\, dy = s_{\alpha,\beta}(x) - \frac{1}{2}\log(\sigma_\beta(x))$$

donde

$$s_{\alpha,\beta}(x) = \int_{x^*}^{x} \frac{b_\alpha(y)}{\sigma_\beta^2(y)}\, dy$$

Entonces, tomando nuevamente $x^* = 0$

$$s_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^x \frac{\theta - ay}{\sigma^2}\, dy = \frac{\theta}{\sigma^2}(x) - \frac{a}{2\sigma^2}(x^2),$$

y

$$H_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\theta}{\sigma^2}(x) - \frac{a}{2\sigma^2}(x^2) - \frac{1}{2}\log(\sigma).$$

2. Datos aumentados y corrección

En general, los datos aumentados se escriben como

$$Y_t^{*i}(\beta, \beta_0) = Z_t^i(\alpha_0, \beta_0) + l_t^i(\beta, \beta_0)$$

donde

$$l_t^i(\beta, \beta_0) = \frac{(t_i - t)[h_\beta(x_{i-1}) - h_{\beta_0}(x_{i-1})] + (t - t_{i-1})[h_\beta(x_i) - h_{\beta_0}(x_i)]}{t_i - t_{i-1}}$$

Sustituimos en nuestro caso:

$$h_\beta(x) = \frac{x}{\sigma}, \quad h_{\beta_0}(x) = \frac{x}{\sigma_0}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} l_t^i(\beta, \beta_0) &= \frac{(t_i - t)\left(\frac{x_{i-1}}{\sigma} - \frac{x_{i-1}}{\sigma_0}\right) + (t - t_{i-1})\left(\frac{x_i}{\sigma} - \frac{x_i}{\sigma_0}\right)}{t_i - t_{i-1}} \\ &= \frac{-(t_i - t)(x_{i-1})}{\sigma_0 \Delta} - \frac{(t - t_{i-1})(x_i)}{\sigma_0 \Delta} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{(t_i - t)(x_{i-1}) + (t - t_{i-1})(x_i)}{\Delta}\right) \end{aligned}$$

con $\Delta = t_i - t_{i-1}$. Definamos:

$$C_1^i := \frac{-(t_i - t)(x_{i-1})}{\sigma_0 \Delta} - \frac{(t - t_{i-1})(x_i)}{\sigma_0 \Delta}$$

$$C_2^i := \frac{(t_i - t)(x_{i-1}) + (t - t_{i-1})(x_i)}{\Delta}$$

Por lo tanto:

$$l_t^i(\beta, \beta_0) = C_1^i + \frac{1}{\sigma} C_2^i$$

3. Función de verosimilitud aumentada

En general podemos escribir la función de verosimilitud de la información completa de la siguiente forma:

$$L(\theta; Y_{\text{obs}}, Y_{\text{miss}}) = \exp\left\{H_{\alpha,\beta}(x_n) - H_{\alpha,\beta}(x_1) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(h_\beta(x_{i-1}) - h_\beta(x_i))^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right\}$$

$$\times \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\log(\sigma_\beta(x_i)) + \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_{\alpha,\beta}(Y_s^{*i}(\beta, \beta_0))\, ds\right]\right\},$$

donde

$$\Phi_{\alpha,\beta}(y) = \mu'_{\alpha,\beta}(y) + (\mu_{\alpha,\beta}(y))^2.$$

Sustituyendo con la expresión obtenida de $\mu_{\alpha,\beta}(y)$ para nuestra ecuación tenemos que

$$\mu_{\alpha,\beta}(y) = \frac{\theta}{\beta} - \alpha y, \quad \mu'_{\alpha,\beta}(y) = -\alpha,$$

y por lo tanto

$$\Phi_{\alpha,\beta}(y) = -\alpha + \left(\frac{\theta}{\beta} - \alpha y\right)^2.$$

Finalmente, nuestra función de verosimilitud para la información completa se ve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
L(\theta; Y_{\text{obs}}, Y_{\text{miss}}) &= \exp\Big\{\frac{\theta}{\sigma^2}(x_n) - \frac{a}{2\sigma^2}(x_n^2) - \frac{1}{2}\log(\sigma) - \frac{\theta}{\sigma^2}(x_1) - \frac{a}{2\sigma^2}(x_1^2) - \frac{1}{2}\log(\sigma) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(\frac{x_{i-1}}{\sigma} - \frac{x_i}{\sigma})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\Big\} \\
&\times \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big[\log(\sigma) + \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Big[-\alpha + \Big(\frac{\theta}{\beta} - \alpha Y_s^{*i}(\beta, \beta_0)\Big)^2\Big]\, ds\Big]\Big\} \\
&= \exp\Big\{\frac{\theta}{\sigma^2}(x_n - x_1) - \frac{a}{2\sigma^2}(x_n^2 + x_1^2) - \log(\sigma) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(\frac{x_{i-1} - x_i}{\sigma})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\Big\} \\
&\times \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big[\log(\sigma) + \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Big[-\alpha + \Big(\frac{\theta}{\beta} - \alpha Y_s^{*i}(\beta, \beta_0)\Big)^2\Big]\, ds\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

4. Función de verosimilitud en forma exponencial

Para poder escribir nuestra función de verosimilitud de manera más sencilla podemos ver que nuestro modelo pertenece a los modelos de la familia exponencial, es decir, que el coeficiente de difusión depende de manera lineal de parámetros α

$$b_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{q_1} \alpha_i w_i(x) = \theta - ax = \alpha_1 w_1(x) + \alpha_2 w_2(x)$$

donde

- $\alpha_1 = \theta$
- $\alpha_2 = -\alpha$
- $w_1(x) = 1$
- $w_2(x) = x$

con σ constante, de esta forma nuestro modelo encaja en el caso de la familia exponencial. De modo que la forma general de la log-verosimilitud en familia exponencial es

$$L(\theta; Y_{\text{obs}}, Y_{\text{miss}}) = \exp\Big(\alpha\nu_\beta - \frac{1}{2}\alpha^2\Lambda_\beta\Big),$$

donde

$$\nu_\beta = \int_{x_1}^{x_n} \frac{w(y)}{\sigma_\beta^2(y)}\, dy - \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa^1(Z_s^i + l_\beta^i(s))\, ds$$

y

$$\Lambda_\beta = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa^2(Z_s^i + l_\beta^i(s))\, ds.$$

Donde la k-ésima coordenada de κ^1 y κ^2 están dadas por:

$$\kappa_k^1(y) = \frac{1}{2}\Big[w_k'(h_\beta^{-1}(y)) - 2\, w_k(h_\beta^{-1}(y))\, [\log(\sigma_\beta(h_\beta^{-1}(y)))]'\Big]$$

y

$$\kappa_k^2(y) = \left(\frac{w_k(h_\beta^{-1}(y))}{\sigma_\beta(h_\beta^{-1}(y)))}\right)^2$$

Sustituyendo en nuestro caso con los componentes $\alpha = (\theta, -\alpha)$, $\sigma_\beta = \sigma$ constante

- $h_\beta^{-1}(y) = \sigma y$
- $w_1(x) = 1 \Rightarrow w_1'(x) = 0$
- $w_2(x) = x \Rightarrow w_2'(x) = 1$
- $(\log(\sigma))' = 0$

las $\kappa' s$ quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\kappa_1^1(y) &= \frac{1}{2}\Big[0 - 2(1)(0)\Big] = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\
\kappa_2^1(y) &= \frac{1}{2}\Big[1 - 2(\sigma y)(0)\Big] = \frac{1}{2} \cdot (1) = \frac{1}{2} \\
\kappa_1^2(y) &= \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \\
\kappa_2^2(y) &= \left(\frac{\sigma y}{\sigma}\right)^2 = y^2
\end{aligned}$$

A continuación calculamos el vector ν_β y la matriz Λ_β

Vector ν_β (integral en x y corrección por κ_1): Calculamos los sumandos del vector:

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_n} \frac{w(x)}{\sigma_\beta^2} dx &= \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_n} \frac{1}{\sigma^2} dx \\ \int_{x_1}^{x_n} \frac{x}{\sigma^2} dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_n - x_1}{\sigma^2} \\ \frac{x_n^2 - x_1^2}{2\sigma^2} \end{pmatrix} \\
\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa_1(Y_s^{*i}) ds &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} 0 ds \\ \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t_n - t_0}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por tanto, en el modelo de Hull & White tenemos:

$$\nu_\beta = \begin{pmatrix} \frac{x_n - x_1}{\beta^2} \\ \frac{x_n^2 - x_1^2}{2\beta^2} - \frac{t_n - t_0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{\beta^2} \\ \frac{D_2}{\beta^2} - \frac{D_3}{2} \end{pmatrix}$$

además notemos que definimos lo siguiente:

- $D_1 := x_n - x_1$
- $D_2 := \frac{x_n^2 - x_1^2}{2}$
- $D_3 := t_n - t_0$

Matriz Λ_β (diagonal por κ^2): Vemos que la matriz Λ_β se ve de la siguiente manera:

$$\Lambda_\beta = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa^2 (Z_s^i + l_\beta^i(s))\, ds.$$

lo que quiere decir que es la suma de dos términos: uno que proviene del término integral sobre x para la familia exponencial y otro proveniente de las correcciones por los caminos latentes Y^*, por lo que la matriz se puede ver compuesta por las entradas de la forma:

$$\int_{x_1}^{x_n} \frac{w(x)w(x)^T}{\sigma_\beta(x)^2} - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa^2(Y_{i,s}^*) ds$$

Por lo tanto la matriz se ve de la forma:

$$\Lambda_\beta = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \begin{pmatrix} \kappa_1^2(Z_s^i + l_\beta^i(s)) & 0 \\ 0 & \kappa_2^2(Z_s^i + l_\beta^i(s)) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{(t_n - t_0)}{\beta^2} & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (Z_s^i + l_\beta^i(s))^2 ds \end{pmatrix}.$$

Vamos ahora a desarrollar, la entrada (2,2), $\Lambda_{\beta(2,2)}$ de la matriz

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (Z_s^i + l_\beta^i(s))^2 ds &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (Z_s^i)^2 ds + 2\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (Z_s^i \cdot l_\beta^i(s)) ds + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (l_\beta^i(s))^2 ds \\
&= D_4 + 2\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [Z_s^i \cdot (C_1^i(s) + \frac{1}{\beta} C_2^i)] ds + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (C_1^i(s) + \frac{1}{\beta} C_2^i)^2 ds \\
&= D_4 + 2\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Z_s^i\, C_1^i(s)\, ds + \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Z_s^i\, C_2^i(s)\, ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (C_1^i(s))^2\, ds + \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} C_1^i(s) C_2^i(s)\, ds + \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (C_2^i(s))^2\, ds \\
&= D_4 + D_5 + \frac{1}{\beta} D_6 + D_7 + \frac{1}{\beta} D_8 + \frac{1}{\beta^2} D_9 \\
&= D_4 + D_5 + D_7 + \frac{1}{\beta}(D_6 + D_8) + \frac{1}{\beta^2} D_9 \\
&= A + \frac{1}{\beta} B + \frac{1}{\beta^2} C
\end{aligned}$$

Donde definimos

$$D_1 = x_n - x_1 \qquad D_2 = \frac{x_n^2 - x_1^2}{2} \qquad D_3 = (t_n - t_0)$$

$$D_4 = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (Z_s^i)^2 ds \qquad D_5 = 2\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Z_s^i \cdot C_1^i(s) ds \qquad D_6 = 2\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Z_s^i C_2^i(s) ds$$

$$D_7 = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (C_1^i(s))^2 ds \qquad D_8 = 2\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} C_1^i(s) \cdot C_2^i(s) ds \qquad D_9 = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (C_2^i(s))^2 ds$$

Renombremos $A = D_4 + D_5 + D_7$, $B = D_6 + D_8$, $C = D_9$

Así, nuestra matriz se ve de la forma

$$\Lambda_\beta = \begin{pmatrix} \frac{(t_n - t_0)}{\beta^2} & 0 \\ 0 & A + \frac{1}{\beta}B + \frac{1}{\beta^2}C \end{pmatrix}.$$

Finalmente, retomando la función de verosimilitud para la familia exponencial tenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
L(\theta; Y_{\text{obs}}, Y_{\text{miss}}) &= \exp\Big(\alpha\nu_\beta - \frac{1}{2}\alpha^2\Lambda_\beta\Big) \\
&= \exp\left\{\theta\Big(\frac{D_1}{\beta^2}\Big) - a\Big(\frac{D_2}{\beta^2} - \frac{D_3}{2}\Big) - \frac{1}{2}\Big[\theta^2\Big(\frac{t_n - t_0}{\beta^2}\Big) + (-a)^2\Big(A + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\beta^2}\Big)\Big]\right\} \\
&= \exp\left\{\theta\Big(\frac{D_1}{\beta^2}\Big) - a\Big(\frac{D_2}{\beta^2} - \frac{D_3}{2}\Big) - \frac{1}{2}\Big[\theta^2\Big(\frac{t_n - t_0}{\beta^2}\Big) + a^2\Big(A + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\beta^2}\Big)\Big]\right\} \\
&= \exp\left\{ - \frac{1}{\beta^2}\Big(\frac{1}{2}\theta^2(t_n - t_0) - \theta D_1 + aD_2 + \frac{1}{2}a^2C\Big) - \frac{a^2B}{2\beta} + \frac{aD_3}{2} - \frac{a^2A}{2}\right\} \\
&= \exp\left\{\sigma^2E_1 + \sigma E_2 + E_3\right\}
\end{aligned}$$

Definimos

- $\sigma = \frac{1}{\beta}$
- $E_1 = -\theta D_1 + aD_2 + \frac{1}{2}\theta^2(t_n - t_0) + \frac{1}{2}a^2C$
- $E_2 = -\frac{1}{2}a^2B$
- $E_3 = \frac{aD_3}{2} - \frac{1}{2}a^2A$
- $E_4 = E_2 - \beta_0$.

5. Actualización posteriori de la función de distribución

Finalmente, con esto podemos escribir nuestra función de verosimilitud de forma exponencial de la forma

$$L(\theta; Y) = \exp\big(-\sigma^2E_1 + \sigma E_2 + E_3\big) = \exp(E_3)\exp(-\sigma^2E_1 + \sigma E_2)$$

En nuestro caso buscamos ponerlo en la forma $\exp(-(\sigma - \mu)^2)$, por lo que elegimos apriori $\sigma = \frac{1}{\beta} \sim \exp(\beta_0)$, entonces $f_{\sigma(x)} = \beta_0 e^{-\beta_0\sigma}$

Así la aposteriori se ve de la forma:

$$\begin{aligned}
g(\sigma) = f_\sigma(\sigma)L(\theta; Y) &= \beta_0 e^{-\beta_0\sigma}e^{E_3}e^{-\sigma^2E_1 + \sigma E_2} = \beta_0 e^{E_3}e^{-\sigma^2E_1}e^{\sigma E_2 - \beta_0\sigma} \\
&= \beta_0 e^{E_3}e^{-\sigma^2E_1}e^{\sigma(E_2 - \beta_0)} = \beta_0 e^{E_3}e^{-\sigma^2E_1}e^{\sigma E_4} \\
&= \beta_0 e^{E_3}e^{-\sigma^2E_1 + \sigma E_4}
\end{aligned}$$

En este caso nos fijamos en el exponente de la segunda exponencial pues queremos completar cuadrados en este caso, para poder identificar de manera más eficaz la forma aposterior, de aquí

$$-E_1\sigma^2 + E_4\sigma = -E_1\Big(\sigma - \frac{E_4}{2E_1}\Big)^2 + \frac{E_4^2}{4E_1}$$

Así la distribución posteriori toma la forma proporcional

$$g(\sigma) \propto \beta_0 \exp\Big(E_3 + \frac{E_4^2}{4E_1}\Big) \exp\Big(- E_1(\sigma - \frac{E_4}{2E_1})^2\Big)$$

con $\sigma > 0$. De aquí podemos identificar la parametrización gaussiana donde

- $\mu = \frac{E_4}{2E_1}$
- $w^2 = \frac{1}{2E_1}$

porque $-E_!(\sigma - \mu)^2 = -\frac{(\sigma-\mu)^2}{2w^2}$