Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Solució Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

TAREA 1

Alumno:
Niño Pedraza Eduardo
Profesora:
Alicia de la Mora Cebada

1. Considere el siguiente PVI:

$$\frac{dy}{dx} = y^2; \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

a) De la expresión de la n-ésima iterada de Picard.

b) Calcule las primeras 3 iteradas de Picard.

c) Simule la solución en python en $[1/2, 3]$ (tenga cuidado con el dominio de la solución).

d) Grafique el error global de truncamiento. **Nota.** Comente las gráficas.

Solución:

a) Recordamos que las iteradas de Picard se ven de la forma:

$$\phi_{n+1}(x) = \phi_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_n(t))\, dt$$

Con esto presente, definimos la n-ésima iterada de Picard, con $\phi_0 = \frac{1}{2}$

$$\phi_{n+1}(t) = \frac{1}{2} + \int_0^x \phi_n^2$$

en este caso

$$y_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x y_n^2$$

b) Calculamos las primeras tres iteradas

Tenemos que

- $\phi_0(x) = \frac{1}{2}$

- $\phi_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left(\frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_0^x dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$

- $\phi_2(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left[\frac{1}{2} + \frac{t}{4}\right]^2 dt = \frac{1}{2} + \int_0^x \left[\frac{1}{4} + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{16}\right] dt$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot t\Big|_0^x + \frac{1}{4}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \frac{1}{16}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48}$$

- $\phi_3(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left[\frac{1}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{48}\right]^2 dt$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x \left[\frac{1}{4} + \frac{t}{4} + \frac{3t^2}{16} + \frac{t^3}{12} + \frac{5t^4}{192} + \frac{t^5}{192} + \frac{t^6}{2304}\right] dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{48} + \frac{x^5}{192} + \frac{x^6}{1152} + \frac{x^7}{16128}$$

* Los calculos del integrando están en la siguiente página

Cálculo del integrando:

$$\left[\frac{1}{2}+\frac{t}{4}+\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{48}\right]^2 = \left[\frac{1}{2}+\frac{t}{4}+\frac{t^2}{8}\right]^2 + 2\left[\frac{1}{2}+\frac{t}{4}+\frac{t^2}{8}\right]\left[\frac{t^3}{48}\right] + \left[\frac{t^3}{48}\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}+\frac{t}{4}\right]^2 + 2\left[\frac{1}{2}+\frac{t}{4}\right]\left[\frac{t^2}{8}\right] + \left[\frac{t^2}{8}\right]^2 + 2\left[\frac{1}{2}+\frac{t}{4}+\frac{t^2}{8}\right]\left[\frac{t^3}{48}\right] + \left[\frac{t^3}{48}\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}\right]^2 + \cancel{2}\left[\frac{1}{\cancel{2}}\right]\left[\frac{t}{4}\right] + \left[\frac{t}{4}\right]^2 + 2\left[\frac{1}{2}+\frac{t}{4}\right]\left[\frac{t^2}{8}\right] + \left[\frac{t^2}{8}\right]^2 + 2\left[\frac{1}{2}+\frac{t}{4}+\frac{t^2}{8}\right]\left[\frac{t^3}{48}\right] + \left[\frac{t^3}{48}\right]^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{16} + 2\left[\frac{t^2}{16}+\frac{t^3}{32}\right] + \frac{t^4}{64} + 2\left[\frac{t^3}{96}+\frac{t^4}{192}+\frac{t^5}{384}\right] + \frac{t^6}{1304}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{16} + \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + \frac{t^4}{64} + \frac{t^3}{48} + \frac{t^4}{96} + \frac{t^5}{192} + \frac{t^6}{2304}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{t}{4} + \frac{3t^2}{16} + \frac{t^3}{12} + \frac{5t^4}{192} + \frac{t^5}{192} + \frac{t^6}{2304}$$

c) Para simular en Python necesitamos la solución real, por lo que resolvemos analíticamente

$$y' = y^2 \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

Sol: Usamos separación de variables

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c$$

Usando la condición inicial

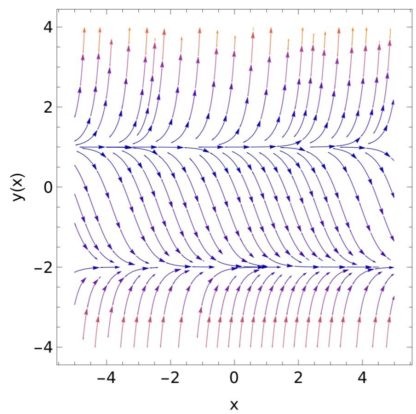
$$-\frac{1}{y} = t + c \Rightarrow y = -\frac{1}{t+c} \Rightarrow \frac{1}{2} = y(0) = -\frac{1}{0+c} \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -2$$

Así tenemos que la solución exacta es:

$$y(t) = -\frac{1}{t-2} = \frac{1}{2-t}$$

Veamos que $y(t)$ no explota siempre y cuando $2-t \neq 0 \Rightarrow t \neq 2$ conforme $t \to 2$, $y(t) \to -\infty$. El posterior análisis se hace en el notebook de Python "Tarea 1_ Ejercicio 1"

2. Encuentre una ecuación $y' = f(x, y)$ tal que sus soluciones sean cualitativamente consistentes con:



Sol: Veamos que en $y=1$ y $y=-2$ tenemos en el campo de direcciones una pendiente $y'=0$, esto significa que usando un polinomio de segundo grado tenemos:

$$y' = (y-1)(y+2) = y^2+2y-y-2 = y^2+y-2$$

Ahora por construcción en $y=1,-2$ tenemos $y'=0$. Por otro lado:

Si:

- $y>1$ las flechas van hacia arriba y $y>1>-2$

$$\Rightarrow (y-1)>0 \quad y \quad (y+2)>0 \Rightarrow (y-1)(y+2)>0 \Rightarrow y'>0$$

- $-2<y<1$ las flechas van hacia abajo y

$$\Rightarrow (y-1)<0 \quad y \quad (y+2)>0 \Rightarrow (y-1)(y+2)<0 \Rightarrow y'<0$$

- $y<-2$ las flechas van hacia arriba y $y<-2<1$

$$\Rightarrow (y+2)<0 \quad y \quad (y-1)<0 \Rightarrow (y-1)(y+2)>0 \Rightarrow y'>0$$

Revisando estabilidad tenemos

$$f(x,y) = (y-1)(y+2) = y^2+y-2 \Rightarrow f'(x,y) = 2y+1$$

- En $y=1$, $f'(x,1) = 2(1)+1 = 3 > 0 \Rightarrow y=1$ es inestable
- En $y=-2$, $f'(x,-2) = 2(-2)+1 = -3 < 0 \Rightarrow y=-2$ es estable

Finalmente veamos cuál es la solución de la EDO

$$y' = (y-1)(y+2)$$

Procedemos por separación de variables

$$\frac{dy}{dt} = (y-1)(y+2) \Rightarrow \frac{dy}{(y-1)(y+2)} = dt$$

Así tenemos *

$$\frac{dy}{(y-1)(y+2)} = dt \Rightarrow \left(\frac{1}{3(y-1)} - \frac{1}{3(y+2)}\right) dy = dt$$

* El cálculo de fracciones parciales está en la siguiente página

$$\frac{1}{(y-1)(y+2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+2} = \frac{A(y+2)+B(y-1)}{(y-1)(y+2)} = \frac{Ay+2A+By-B}{(y-1)(y+2)}$$

$$= \frac{y(A+B)+(2A-B)}{(y-1)(y+2)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = y(A+B)+(2A-B) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow A=-B \\ \Rightarrow 2A+A=1 \Rightarrow 3A=1 \Rightarrow A = 1/3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = 1/3 \quad y \quad B = -\frac{1}{3}$$

Integrando:

$$\int \left(\frac{1}{3(y-1)} - \frac{1}{3(y+2)} \right) dy = \int dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{1}{y-1}\, dy - \frac{1}{3}\int \frac{1}{y+2}\, dy = t+C \Rightarrow \frac{1}{3}\ln(y-1) - \frac{1}{3}\ln(y+2) = t+C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left[\ln(y-1) - \ln(y+2)\right] = t+C \quad \Rightarrow \frac{1}{3}\ln\left(\frac{y-1}{y+2}\right) = t+C$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y-1}{y-2}\right) = 3x + C_1 \quad \Rightarrow \frac{y-1}{y+2} = ke^{3t}$$

$$\Rightarrow y-1 = (y+2)(ke^{3t}) = y\ e^{3t} + 2ke^{3t}$$

$$\Rightarrow y - ye^{3t} = 1 + 2ke^{3t} \quad \Rightarrow y(1-e^{3t}) = 1+2e^{3t}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1+2ke^{3t}}{1-e^{3t}}$$

Entonces $y(t) = \dfrac{1+2ke^{3t}}{1-e^{3t}}$

3. Demuestra que el **error de truncamiento local** para el método de Euler clasico es de $O(h^2)$.

Dem: Sea $y(t)$ la solución exacta del PVI

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad y(t_0) = y_0$$

en este caso supongamos que $y \in C^2(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, algo muy importante más adelante, en este caso recordemos el método de Euler con h el tamaño de paso, h.

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

En este caso, el error de truncamiento local en el paso n es

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| = |y(t_{n+1}) - (y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))|$$

Ahora, hagamos la expansión de Taylor de y alrededor de t_n hasta el segundo orden con lo que tenemos:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

p.a $\xi_n \in (t_n, t_{n+1})$, de aquí

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

Gracias a esto, el error de truncamiento local se vera de la forma:

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| = |y(t_{n+1}) - (y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))|$$

$$= |y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) - (y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))|$$

$$= |\frac{h^2}{2} y''(\xi_n)|$$

Queremos ver que $|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq Ch^2$, $C = cte$. Del hecho de que $y \in C^2 \Rightarrow y''$ es continua en el intervalo $[t_0, T]$, por $y' = f(t, y)$

$$y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))\, y'(t)$$

$$= f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))\, f(t, y(t))$$

lo que implica que y'' existe y además es continua, y sabemos que en $\mathbb{R}$, una función continua en un intervalo cerrado alcanza un máximo es decir, $\exists M > 0$ tal que:

$$|y''(t)| \leq M \qquad \forall t \in [t_0, T]$$

Entonces con el error de truncamiento tenemos:

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| = |\frac{h^2}{2} y''(\xi_n)| \leq \frac{M}{2} h^2$$

Esto significa que el método de Euler tiene error local 2.

4. Demuestra que el **error de truncamiento global**, también conocido simplemente como **error global** para el método de Euler clasico es de $O(h)$.
Hint. Para acotar la expresión requerirá recordar el **teorema de valor medio** y la **serie geométrica finita** además de la cota de e^x, $\forall x > 0$.

Dem: Sea $y(t)$ solución del PVI $y'(t) = f(t, y(t))$ y $y(t_0) = y_0$

Supongamos que $f \in C^2([t_0, T])$ y Lipschitz (existencia y unicidad) entonces para $y_1, y_2 \in [t_0, T]$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \qquad \forall t \in [t_0, T]$$

además como $f \in C^2([t_0, T])$ por el ejercicio 3 sabemos que y'' existe y es acotado, es decir: $|y''(t)| \leq M$

Recordemos que $h > 0$ y $t_n = t_0 + nh$ y el método de Euler es

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

Ahora, por el ejercicio anterior tenemos que el error local es:

$$e_{loc(n+1)} = y(t_{n+1}) - (y(t_n) + h f(t_n, y(t_n))) = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \leq \frac{M}{2} h^2$$

Definimos el error global como:

$$e_n = y(t_n) - y_n \qquad \text{con} \qquad y_n = y_{n-1} + h f(t_{n-1}, y_{n-1})$$

Así:

Expansión de Taylor

$$\begin{aligned} e_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1} &= (y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + e_{loc(n+1)}) - (y_n + hf(t_n, y_n)) \\ &= (y(t_n) - y_n) + h(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)) + e_{loc(n+1)} \\ &= e_n + h(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)) + e_{loc(n+1)} \end{aligned}$$

Tomando el valor absoluto

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq |e_n| + h|f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)| + |e_{loc(n+1)}| \\ &\leq |e_n| + hK|y(t_n) - y_n| + |e_{loc(n+1)}| \\ &\leq (1 + hK)|e_n| + |e_{loc(n+1)}| \end{aligned}$$

Iterando la desigualdad desde e_1 y definiendo $e_0 = 0$

- $|e_1| \leq (1+hL)|e_0| + |e_{loc(1)}| = |e_{loc(1)}|$
- $|e_2| \leq (1+hL)|e_1| + |e_{loc(2)}| \leq (1+hL)|e_{loc(1)}| + |e_{loc(2)}|$
- $|e_3| \leq (1+hL)|e_2| + |e_{loc(3)}| \leq (1+hL)[(1+hL)|e_{loc(1)}| + |e_{loc(2)}|] + |e_{loc(3)}|$

$$= (1+hL)^2|e_{loc(1)}| + (1+hL)|e_{loc(2)}| + |e_{loc(3)}|$$

$$= \sum_{j=0}^{3-1}(1+hL)^{3-1-j}|e_{loc(j+1)}| = \sum_{j=0}^{2}(1+hL)^{2-j}|e_{loc(j+1)}|$$

Recordamos que $|e_{loc(j)}| \leq \frac{M}{2}h^2$

$$|e_n| \leq \frac{M}{2}h^2\sum_{j=0}^{n-1}(1+hL)^{n-1-j} = \frac{M}{2}h^2\sum_{m=0}^{n-1}(1+hL)^m$$

Recordando la suma geométrica

$$\sum_{m=0}^{n-1}(1+hL)^m = \frac{(1+hL)^n - 1}{(1+hL)-1} = \frac{(1+hL)^n - 1}{hL}$$

$$\Rightarrow |e_n| \leq \frac{M}{2}h^2\sum_{m=0}^{n-1}(1+hL)^m \leq \frac{M}{2}h^2\frac{[(1+hL)^n - 1]}{\cancel{h}L} = \frac{M}{2L}h[(1+hL)^n - 1]$$

Veamos que:

$$(1+hL)^n \leq e^{hLn} = e^{L(t_n - t_0)}$$

$$\Rightarrow |e_n| \leq \frac{M}{2L}h\left(e^{L(t_n-t_0)} - 1\right) = \left[\frac{M}{2L}\left(e^{L(t_n-t_0)} - 1\right)\right]h$$

Siendo $C = \frac{M}{2L}\left(e^{L(t_n-t_0)} - 1\right) \Rightarrow |e_n| \leq Ch$

Entonces el error global de Euler es de orden 1

5. **Runge–Kutta de orden 2**. Considere un esquema de Runge–Kutta de 2 etapas de la forma

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\big(t_n + \alpha h,\ y_n + \beta h\, k_1\big), \\ y_{n+1} &= y_n + h\big(a\, k_1 + b\, k_2\big), \end{aligned}$$

con constantes $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Imponga las condiciones de orden 2 comparando con la expansión de Taylor de la solución y deduzca una familia de métodos de orden 2.

(b) Escriba las tablas de Butcher correspondientes a dos casos particulares: el método del *punto medio* y el método de *Heun* (trapezoidal explícito).

(c) Verifique en ambos casos las condiciones de orden: $\sum b_i = 1$ y $\sum b_i c_i = \frac{1}{2}$.

(d) Justifique que el error local es $O(h^3)$ y, en consecuencia, el error global es $O(h^2)$.

(e) Comente el costo computacional (número de evaluaciones de f) y cuándo conviene elegir Heun frente al punto medio.

a) Sea $y(t)$ la solución exacta en t_n. Haciendo la expansión de Taylor hasta $O(h^3)$ (orden 2)

$$y(t_n+h) = y(t_n) + hy' + \frac{h^2}{2} y'' + O(h^3)$$

$$= y(t_n) + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f) + O(h^3)$$

El Runge-Kutta de orden 2 es

$k_1 = f(t_n, y_n)$
$k_2 = f(t_n + ch, y_n + ahk_1)$

$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2)$

De aquí $k_1 = f(t_n, y_n)$ y aplicando la expansión de k_2 y entonces

$$k_2 = f(t_n + ch, y + ahf)$$

Así

$$f(t+\Delta t, y+\Delta y) \approx f(t,y) + f_t(t,y)\Delta t + f_y(t,y)\Delta y + O(h^2)$$

$$\approx f(t,y) + chf_t(t,y) + ahf_y(t,y)f(t,y) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \quad k_2 = f(t,y) + h(cf_t(t,y) + af_y(t,y)f(t,y)) + O(h^2)$$

Sustituyendo las expansiones en y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 K_1 + b_2 K_2)$$

$$= y_n + h\left(b_1 f + b_2 \left(f + h(c f_t + a f_y f) + O(h^2)\right)\right)$$

$$= y_n + h(b_1 + b_2) f + h^2 b_2 (c f_t + a f_y f) + O(h^3)$$

Comparando con la solución exacta:

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f) + O(h^3)$$

tenemos

- $b_1 + b_2 = \sum_{i=1}^{2} b_i = 1$
- $b_2 c = \frac{1}{2}$
- $b_2 a = \frac{1}{2}$

De aquí:

$$b_2 c = b_2 a = \frac{1}{2} \Rightarrow b_2(c - a) = 0 \Rightarrow c = a$$

$$\Rightarrow b_2 c = \frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = 1/2c$$

y de $b_1 + b_2 = 1 \Rightarrow b_1 = 1 - b_2 = 1 - \frac{1}{2c}$

Teniendo

- $c = a$, $b_2 = \frac{1}{2c}$ y $b_1 = 1 - \frac{1}{2c}$

b) Escribimos las tablas de Butcher para mid-point y Heun.

- Mid-point

Si $c = a = \frac{1}{2}$, entonces $b_2 = 1/2(1/2) = 1$ y $b_1 = 1 - b_2 = 0$

El método es

$$K_1 = f(t_n, y_n)$$
$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_1\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h K_2$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

- Heun

Si $c = a = \frac{1}{2}$

$b_2 = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$, $b_1 = 1 - b_2 = 1/2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

El método es

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

c) Verificamos para mid-point

- $\sum_i b_i = 0 + 1 = 1$
- $\sum_i b_i c_i = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Para Heun

- $\sum_i b_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- $\sum_i b_i c_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

d) Vamos a demostrar que el error local es de orden 3

$$e_{loc(n)} = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

Tenemos que la expansión de Taylor de la solución exacta es:

$$y(t_n+h) = y(t_n) + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{3!}y''' + O(h^4) = y(t_n) + hf + \frac{h^2}{2!}(f_t + f_y f) + \frac{h^3}{3!}y''' + O(h^4)$$

y la expansión de la aproximación del método es

$$y_{n+1} = y(t_n) + hf + \frac{h^2}{2!}(f_t + f_y f) + Ch^3 + O(h^4)$$

De aquí vemos que

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| = \left|\frac{h^3}{3!}D^2 f + O(h^4) - Ch^3 - O(h^4)\right|$$
$$= \left|\frac{h^3}{3!}D^2 f - Ch^3\right|$$

que es un error de orden 3, $O(h^3)$

Ahora, el error global es de orden 2, se hace uso de un caso análogo al desarrollado al ejercicio 4.

e) En el caso de orden 1 caemos en Euler, en este caso tenemos sólo una evaluación de f por paso, mientras que en el RK2 tenemos dos evaluaciones de f por paso

Entre Heun o mid-point ambos tienen error global $O(h^2)$ y requieren 2 evaluaciones por paso, mid-point evalua en el punto medio y Heun usa un punto diferente y evalua en k_2

Heun ayuda a tener una mezcla de Euler y un pequeño "corrector" que ayuda a un mejor ajuste

6. **Runge–Kutta de orden 4.**

(a) Escriba la tabla de Butcher del método clásico de Runge–Kutta de orden 4 (RK4).

(b) Verifique que cumple las condiciones de orden hasta $p = 4$, es decir:

$$\sum b_i = 1, \quad \sum b_i c_i = \tfrac{1}{2}, \quad \sum b_i c_i^2 = \tfrac{1}{3}, \quad \sum b_i c_i^3 = \tfrac{1}{4}, \quad \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \tfrac{1}{6}.$$

(c) Explique por qué estas condiciones garantizan que el método tiene orden de convergencia 4.

(d) Comente brevemente ventajas y desventajas de RK4 frente a Euler hacia adelante en términos de exactitud, estabilidad y costo computacional.

Dem:

a) El método de Runge-Kutta clásico

- $k_1 = f(t_n, y_n)$
- $k_2 = f(t_n + h/2, y_n + h/2\, k_1)$
- $k_3 = f(t_n + h/2, y_n + h/2\, k_2)$
- $k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3)$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\tfrac{1}{6} k_1 + \tfrac{1}{3} k_2 + \tfrac{1}{3} k_3 + \tfrac{1}{6} k_4\right)$$

La tabla de Butcher es:

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
c_i \backslash b_i & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}$$

$\Rightarrow c = (0, 1/2, 1/2, 1)$
$b = (1/6, 1/3, 1/3, 1/6)$

$A = (a_{ij})$ t.q $a_{21} = 1/2$
$a_{32} = 1/2$
$a_{43} = 1$

b) Verificamos que:

1. $\sum_i b_i = 1$

$$\sum_{i=1}^{4} b_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

2. $\sum_i b_i c_i = \frac{1}{2}$

$$\sum_{i=1}^{4} b_i c_i = \frac{1}{6}(0) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}(1/2) + \frac{1}{6}(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. $\sum_i b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$

$$\sum_{i=1}^{4} b_i c_i^2 = \frac{1}{6}(0)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}(1)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

4. $\sum_i b_i c_i^3 = \frac{1}{4}$

$$\sum_{i=1}^{4} b_i c_i^3 = \frac{1}{6}(0)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{6}(1)^3 = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

5. $\sum_i b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$

Veamos que:

- $i = 1 \Rightarrow a_{1j} = 0 \Rightarrow b_1 a_{1j} c_j = 0$
- $i = 2 \Rightarrow b_2 a_{21} c_1 = (1/3)(1/2)(0) = 0$
- $i = 3 \Rightarrow b_3 a_{32} c_2 = (1/3)(1/2)(1/2) = 1/12$
- $i = 4 \Rightarrow b_4 a_{43} c_3 = (1/6)(1)(1/2) = 1/12$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} b_i a_{ij} c_j = 0 + 0 + 1/12 + 1/12 = 1/6$$

c) Queremos que en este caso la expansión en potencias de h del método de Runge-Kutta coincida con la expansión en potencias de h de la solución exacta hasta el orden 4

En este caso recordamos que $y'(t) = f(t, y(t))$

Definiendo

$$D(\cdot) = \partial_t(\cdot) + f\,\partial_y(\cdot)$$

Vemos que la solución exacta alrededor de t_n usando Taylor es

$$y(t_n+h) = y(t_n) + h\,y' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{3!}y''' + \frac{h^4}{4!}y^{(4)} + O(h^5)$$

$$= y(t_n) + hf + \frac{h^2}{2}Df + \frac{h^3}{3!}D^2f + \frac{h^4}{4!}D^3f + O(h^5)$$

y el método de Runge kutta da

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{1}^{s} b_i k_i$$

lo que produce una expansión en potencias de h, las igualdades algebraicas entre los coeficientes a_{ij}, b_i, c_i son las condiciones de orden que hacen que los coeficientes que acompañan a cada $D^{(i)}f$ hasta cierto orden coincida con la expansión exacta.

d) En cuanto a error local RK4 tiene $O(h^5)$ y el error global de $O(h^4)$, en su costo computacional vemos que debemos de tener 4 evaluaciones por paso, mientras que Euler requiere 1 evaluación por paso y tiene error local de $O(h^2)$ y error global de $O(h)$

$\Rightarrow$ RK4 es 4 veces más costoso por paso que Euler

Por otro lado, RK4 es mucho más preciso que Euler para pasos pequeños; ambos modelos son explícitos pero RK4 tiene una región de estabilidad mucho mayor que Euler.

7. **(Extra)** Considere el PVI

$$y' = (2+t^2)\,y + \cos t, \qquad y(0) = 1,$$

y el rectángulo $R = [0,1]\times[-1,1]$.

(a) Verifique que $f(t,y) = (2+t^2)y + \cos t$ es Lipschitz en y sobre R.

(b) Determine una constante de Lipschitz L (explícita) en y válida en R.

Dem:

a) P.d $f(t,y) = (2+t^2)y + \cos t$ es Lipschitz en y sobre $[0,1]\times[-1,1]$

Sea $t\in[0,1]$ y $y_1, y_2 \in [-1,1]$, entonces

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |(2+t^2)y_1 + \cos t - ((2+t^2)y_2 + \cos t)|$$

$$= |(2+t^2)y_1 - (2+t^2)y_2|$$

$$= |(2+t^2)(y_1 - y_2)|$$

$$= |2+t^2|\,|y_1 - y_2| \quad *$$

Como $t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq t^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq t^2 \leq 3 \quad \Rightarrow \quad |2+t^2| \leq 3$$

Así

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |2+t^2|\,|y_1 - y_2| \leq 3\,|y_1 - y_2|$$

$\Rightarrow$ f es Lipschitz en y sobre $\mathbb{R}$

b) La constante explicita de Lipschitz es $K = 3$