Análise de Circuitos Elétricos

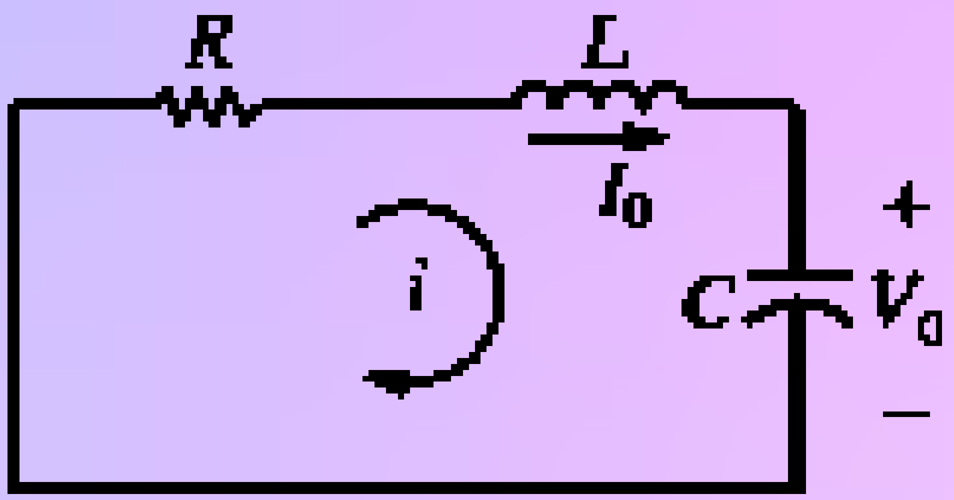
Respostas natural e a um degrau de circuitos RLC em série

Grupo: Eduardo Grillo, Eduardo Rabelo, João Marcelo e Kemily Rezende
CEFET-MG DIGDDV - Divinópolis, 2023.

RESPOSTA NATURAL DE UM CIRCUITO RLC EM SÉRIE

- A resposta natural de um circuito RLC em série consite em determinar a corrente gerada nos elementos em série pela descarga do indutor, do capacitor,ou de ambos..

- A figura ao lado mostra a representação da resposta natural do circuito RLC em série . Pela lei de Kirchoff das tensões nas malhas temos que:



$$Vr(t) + Vl(t) + Vc(t) + Vo = 0$$

$$\therefore$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt + Vo = 0$$

RESPOSTA NATURAL DE UM CIRCUITO RLC EM SÉRIE

- Derivando duas vezes a equação anterior, tem-se :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

- Uma solução possível para a EDO seria a seguinte:

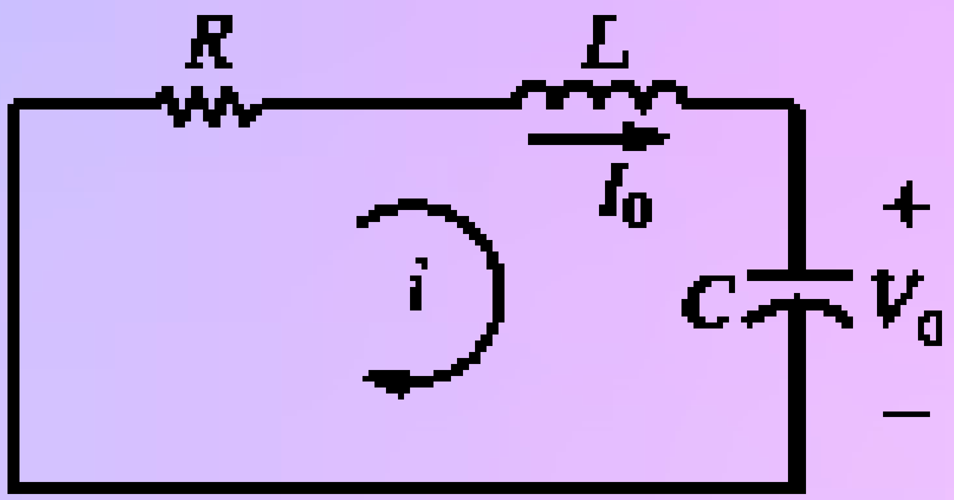
$$i = Ae^{st}$$

- Substituindo na equação anterior temos:

$$As^2e^{st} + \frac{R}{L}Ase^{st} + \frac{Ae^{st}}{LC} = 0$$

- Ou seja:

$$Ae^{st}\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right) = 0$$



RESPOSTA NATURAL DE UM CIRCUITO RLC EM SÉRIE

- Como uma função exponencial nunca é zero e a constante A não pode ser zero, pois isso implicaria que a corrente é sempre nula, somente a parte da equação entre parêntesis pode ser igualada a zero, portanto, a equação característica do circuito RLC em série é:

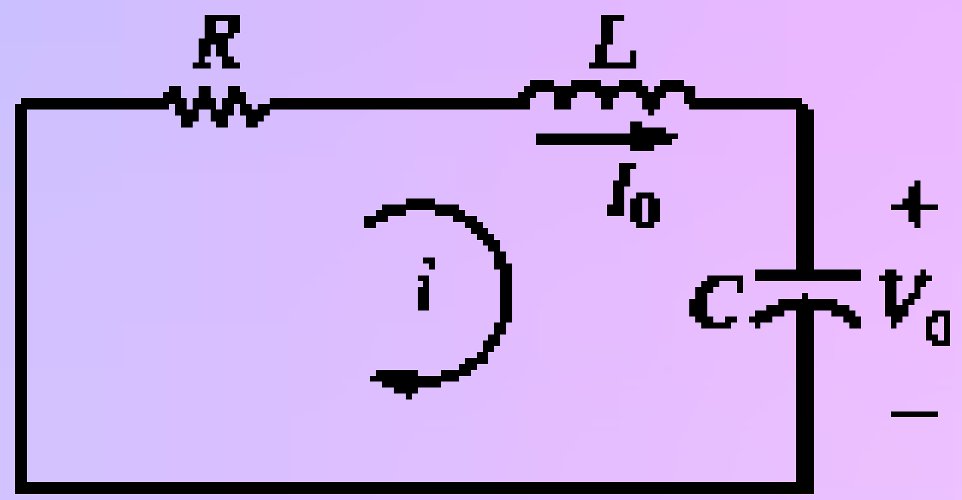
$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

- As raízes desta equação podem ser representadas do seguinte modo, sendo a a frequencia de Neper e w a frequência angular de ressonância:

$$s = -a \pm \sqrt{a^2 - w^2}$$

- Resolvendo a equação característica e colocando o resultado na forma da equação anterior temos o seguinte:

$$s = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$



RESPOSTA SUPERAMORTECIDA

- Uma resposta superamortecida tem um amortecimento maior do que o necessário para não oscilar. Como resultado, ela é mais lenta que a resposta criticamente amortecida.
- Na resposta superamortecida, as duas raízes da equação característica devem ser reais e distintas, portanto, o quadrado da frequencia de Neper tem que ser maior que o quadrado da frequência angular de ressonância, como mostra a equação a seguir:

$$a^2 > w^2$$

- Como as raízes são reais e distintas, a solução para a EDO da corrente, na resposta superamortecida natural é a seguinte

$$i\left(t\right) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

RESPOSTA SUPERAMORTECIDA

- Considerando o estado inicial do circuito em t=0, temos as seguintes equações, que formam um PVI(Problema do Valor Inicial):

$$i\left(0\right)^{+} = A_1 + A_2$$

$$\frac{di\left(0\right)^{+}}{dt} = s_1 A_{1+} s_2 A_2$$

- Depois de se obter a resposta natural de corrente, pode-se determinar a resposta natural de tensão em qualquer elemento do circuito.

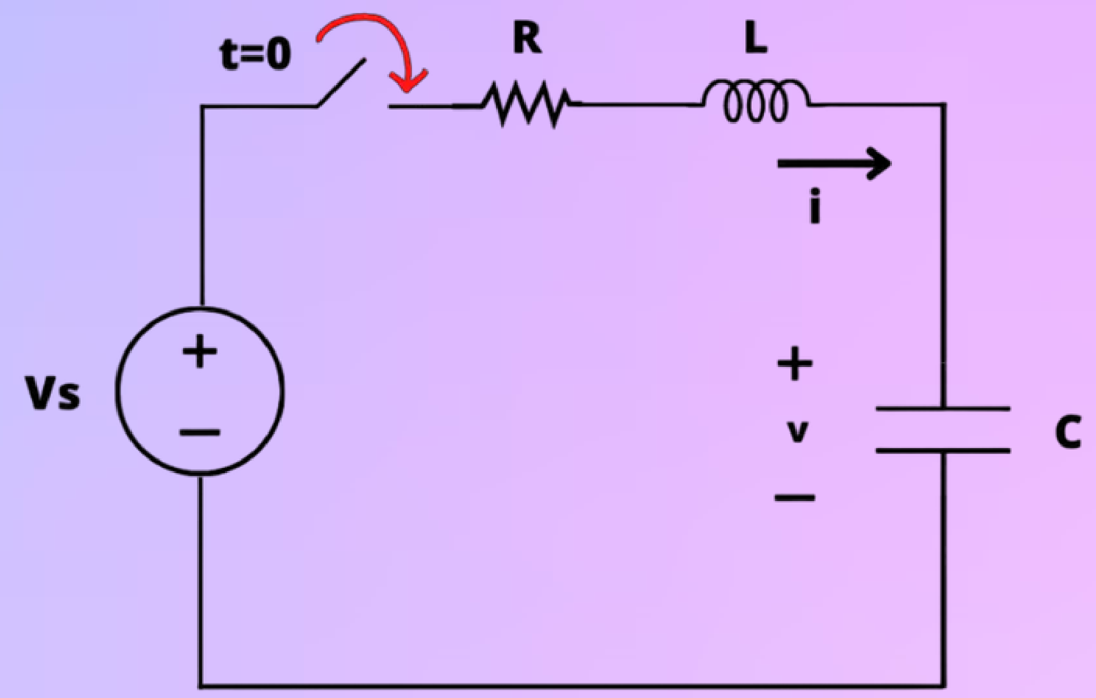
RESPOSTA SUPERAMORTECIDA RESUMO DE SOLUÇÃO

1. Determinar as raízes da equação característica, usando os valores de R,L e C
2. Determinar a corrente e a derivada da corrente em t=0 usando análise de circuitos.
3. Determinar A1 e A2 resolvendo as equaçoes do PVI.
4. Substituir os valores de A1,A2,s1, e s2 na solução da EDO para a resposta superamortecida:

$$i\left(t\right) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

RESPOSTA DEGRAU DE UM CIRCUITO RLC EM SÉRIE

- Para fazer a verificação do procedimento que determina a resposta a um degrau de um circuito RLC em série, é o mesmo que um circuito RLC em paralelo, mostramos que a equação diferencial que descreve a tensão no capacitor com a figura ao lado, tem a mesma forma da equação diferencial que descreve a corrente no indutor do circuito RLC em paralelo. Com isso, admitimos que a energia armazenada no circuito no instante em que a chave é fechada seja zero.



- Aplicando a lei das tensões de Kirchhoff ao circuito mostrado na figura, obtemos:

$$V = Ri + L \times \frac{di}{dt} + vc$$

- A corrente (i) está relacionada com a tensão no capacitor (vc) pela expressão:

$$i = C\frac{dvc}{dt} \qquad \text{(I)}$$

- da qual, é obtido:

$$\frac{di}{dt} = C \times \frac{d^2vc}{dt^2} \qquad \text{(II)}$$

- Assim, substituindo as esquações (I) e (II), obtemos a expressão resultante

$$\frac{d^2vc}{dt^2} + \frac{R}{L} \times \frac{dvc}{dt} + \frac{vc}{LC} = \frac{V}{LC}$$

RESPOSTA DEGRAU DE UM CIRCUITO RLC EM SÉRIE

- Amortecimento supercrítico ($\alpha > \omega0$)

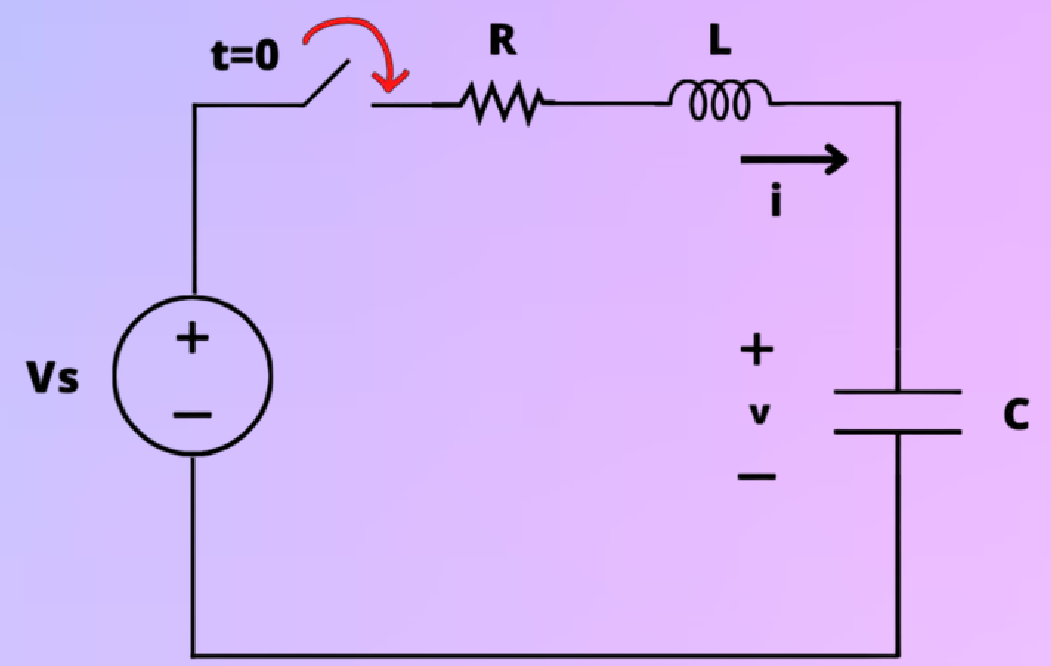
$$V\left(t\right)=Vs+\left(A1+A2\right)e^{-\alpha t}$$

- Amortecimento crítico ($\alpha = \omega0$)

$$V\left(t\right)=Vs+A1e^{S1t}+A2e^{S1t}$$

- Subamortecimento ($\alpha < \omega0$)

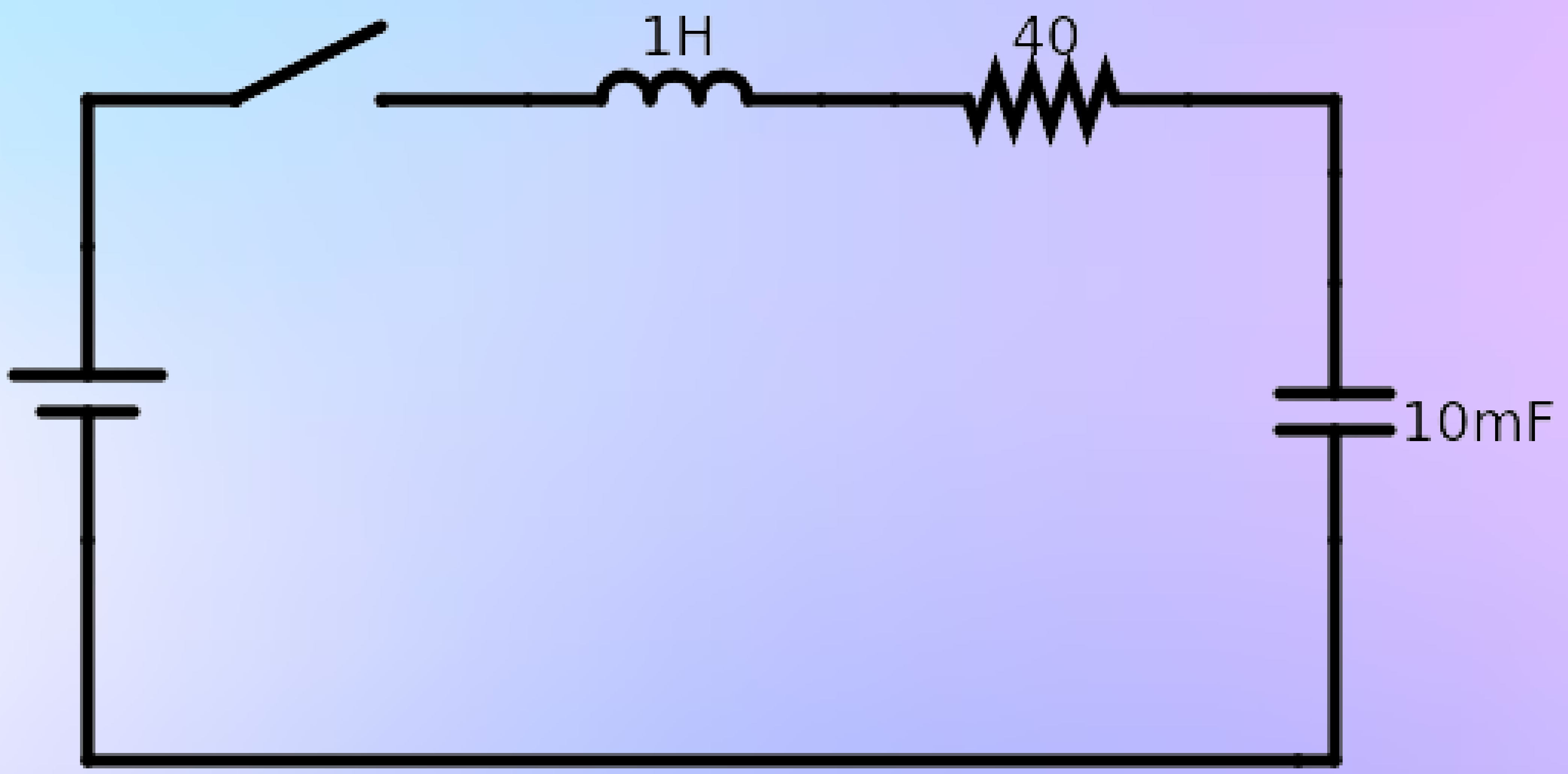
$$V\left(t\right)=Vs+\left(A1cos\left(\omega dt\right)+A2sen\left(\omega dt\right)\right)e^{-\alpha t}$$



EXEMPLO - RESPOSTA AO DEGRAU

Em $t=0$, a chave que conecta a fonte (12V) é fechada.

Encontre Vc para $t \geq 0$.



EXEMPLO - RESPOSTA AO DEGRAU

$$R = 40\Omega$$
$$L = 1H$$
$$C = 0.01F$$

$$a = \frac{R}{2L} \qquad a = \frac{40}{2} \qquad a = 20$$

$$w_0^2 = \frac{1}{CL} \qquad w_0^2 = \frac{1}{0.01} \qquad w_0^2 = 100$$

$$s_1 = -a + \sqrt{(a^2 + {w_0}^2)} \qquad s_1 = -2.68$$

$$s_2 = -a - \sqrt{(a^2 + {w_0}^2)} \qquad s_2 = -37.32$$

EXEMPLO - RESPOSTA AO DEGRAU

$$s_1 = -2.68$$
$$s_2 = -37.32$$
$$V_F = 12V$$

$$Vc(t) = V_F + A_1 e^{s1t} + A_2 e^{s2t}$$
$$Vc(t) = 12 + A_1 e^{-2.68t} + A_2 e^{-37.32t}$$

$$Vc(0) = 0 = 12 + A_1 + A_2$$

$$Vc'(0) = 0 = -2.68A_1 - 37.32A_2$$

EXEMPLO - RESPOSTA AO DEGRAU

$$Vc(0) = 0 = 12 + A_1 + A_2$$

$$Vc'(0) = 0 = -2.68A_1 - 37.32A_2$$

$$2.68A_1 + 2.68A_2 = -32.16$$

$$-2.68A_1 - 37.32A_2 = 0$$

$$-34.64A_2 = -32.16$$

$$A_2 = 0.93$$

$$A_1 = -12.93$$

EXEMPLO - RESPOSTA AO DEGRAU

$$Vc(t) = -12.93e^{-2.68t} + 0.93e^{-37.32t} + 12$$