Programación Funcional

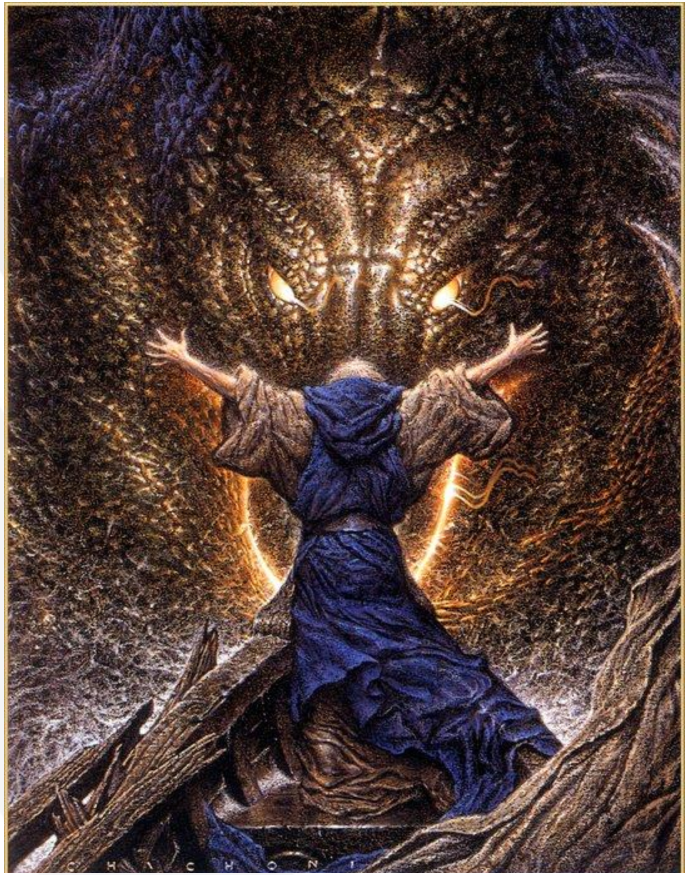
Clases teóricas

por Pablo E. "Fidel" Martínez López

6. Propiedades y demostraciones

“En verdad el mago le había dicho eso una vez, pero Ged no le había hecho mucho caso; aunque ahora sabía que Ogión nunca le diría nada sin alguna buena razón.”

Un mago de Terramar
Úrsula K. Le Guin



Motivación

Motivación

- Se presentaron visiones denotacional y operacional
- Se presentó la equivalencia (=) entre expresiones
  - Equivalentes significa que tienen el mismo significado
- ¿Cómo podemos estar seguros de que una afirmación de equivalencia es cierta?
  - Es necesario alguna forma de convencerse

Propiedades y demostraciones

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué es una ***propiedad*** en este contexto?

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué es una ***propiedad*** en este contexto?
  - *Afirmación* sobre un elemento o conjunto que puede ser verdadera o falsa

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué es una ***propiedad*** en este contexto?
  - *Afirmación* sobre un elemento o conjunto que puede ser verdadera o falsa
  - Ejemplos:
    - 2 es un número primo
    - `cuadruple 2 = doble (doble 2)`
    - $(\exists x \in \mathbb{N}.\ (\forall y \in \mathbb{N}.\ x > y))$

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué es una ***propiedad*** en este contexto?
  - *Afirmación* sobre un elemento o conjunto que puede ser verdadera o falsa
  - Ejemplos:
    - ¿2 es un número primo?
    - ¿`cuadruple 2 = doble (doble 2)`?
    - ¿$(\exists x \in \mathbb{N}. (\forall y \in \mathbb{N}. x > y))$?
  - Para saber si una propiedad es verdadera o falsa, se la puede plantear como una **pregunta** para responder por sí o no

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué es una ***demostración*** de una propiedad?

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué es una ***demostración*** de una propiedad?
  - *Argumentación* que hace evidente que es verdadera
    - Puede ser algo sencillo, o muy complejo

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué es una ***demostración*** de una propiedad?
  - *Argumentación* que hace evidente que es verdadera
    - Puede ser algo sencillo, o muy complejo
  - Ejemplo:
    - ¿2 es un número primo?

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué es una ***demostración*** de una propiedad?
  - *Argumentación* que hace evidente que es verdadera
    - Puede ser algo sencillo, o muy complejo
  - Ejemplo:
    - ¿2 es un número primo?
      - *los únicos divisores de 2 son -2, -1, 1 y 2*
      - *por definición de primo, 2 es primo*
      - *La propiedad es verdadera*

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué es una ***demostración*** de una propiedad?
  - *Argumentación* que hace evidente que es verdadera
    - Puede ser algo sencillo, o muy complejo
  - Ejemplo:
    - ¿2 es un número primo?
      - *los únicos divisores de 2 son -2, -1, 1 y 2*
      - *por definición de primo, 2 es primo*
      - *La propiedad es verdadera*
  - Si la propiedad es falsa, NO se puede demostrar

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué es una ***demostración*** de una propiedad?
  - *Argumentación* que hace evidente que es verdadera
    - Puede ser algo sencillo, o muy complejo
  - Ejemplo:
    - ¿2 es un número primo?
      - *los únicos divisores de 2 son -2, -1, 1 y 2*
      - *por definición de primo, 2 es primo*
      - *La propiedad es verdadera*
  - Si la propiedad es falsa, NO se puede demostrar

- La justificación de la respuesta (Tobías Calvento)
- La evidencia que sustenta la respuesta (Guillermina Bond)
- La serie de pasos que explican la respuesta (Lautaro Blanco)

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué maneras hay de hacer demostraciones?

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué maneras hay de hacer demostraciones?
  - De forma manual
    - de manera informal (e.g. argumento relatado)
    - de manera formal (e.g. reglas estrictas de formación)

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué maneras hay de hacer demostraciones?
  - De forma manual
    - de manera informal (e.g. argumento relatado)
    - de manera formal (e.g. reglas estrictas de formación)
  - De forma automática (solo para ciertas propiedades)
    - un programa verifica la propiedad (e.g. sistema de tipos, verificadores de modelos, SAT-solvers)

Propiedades y demostraciones

- ¿Qué maneras hay de hacer demostraciones?
  - De forma manual
    - de manera informal (e.g. argumento relatado)
    - de manera formal (e.g. reglas estrictas de formación)
  - De forma automática (solo para ciertas propiedades)
    - un programa verifica la propiedad (e.g. sistema de tipos, verificadores de modelos, SAT-solvers)
  - Por construcción
    - se siguen reglas para encontrar los elementos (e.g. resolución de ecuaciones, derivación de programas)

Propiedades y demostraciones

- Nos concentraremos en demostraciones manuales de propiedades de equivalencia de manera (semi) formal

Propiedades y demostraciones

- Nos concentraremos en demostraciones manuales de propiedades de equivalencia de manera (semi) formal
  - Se comienza con una expresión

Propiedades y demostraciones

- Nos concentraremos en demostraciones manuales de propiedades de equivalencia de manera (semi) formal
  - Se comienza con una expresión
  - Se la transforma paso a paso a través de reglas conocidas (definiciones, otras propiedades)

Propiedades y demostraciones

- Nos concentraremos en demostraciones manuales de propiedades de equivalencia de manera (semi) formal
  - Se comienza con una expresión
  - Se la transforma paso a paso a través de reglas conocidas (definiciones, otras propiedades)
  - Para presentar, escribir de a una expresión por línea, intercaladas por la relación entre líneas, justificada
    - Usualmente el símbolo es equivalencia

Propiedades y demostraciones

- Nos concentraremos en demostraciones manuales de propiedades de equivalencia de manera (semi) formal
  - Se comienza con una expresión
  - Se la transforma paso a paso a través de reglas conocidas (definiciones, otras propiedades)
  - Para presentar, escribir de a una expresión por línea, intercaladas por la relación entre líneas, justificada
    - Usualmente el símbolo es equivalencia
  - Al terminar, puede (o no) cerrarse con un símbolo o frase

Propiedades y demostraciones

- Prop.: ¿`cuadruple 2 = doble (doble 2)`?
- Dem: `cuadruple 2`

```
doble (doble 2)
```

Propiedades y demostraciones

- Prop.: ¿`cuadruple 2` = `doble (doble 2)`?
- Dem:

```
    cuadruple 2
=                   (def. de cuadruple, con x <- 2)
    4*2
        =
        4+4
    doble 4
    =
    doble
=
    doble (doble 2)
```

Propiedades y demostraciones

- Prop.: ¿`cuadruple 2` = `doble (doble 2)`?
- Dem:

```
      cuadruple 2
  =                 (def. de cuadruple, con x <- 2)
      4*2
  =                 (aritmética)
      4+4

      doble 4
      =
      doble
  =

      doble (doble 2)
```

Propiedades y demostraciones

- **Prop.:** ¿`cuadruple 2` = `doble (doble 2)`?
- **Dem:**

```
    cuadruple 2
=                 (def. de cuadruple, con x <- 2)
    4*2
=                 (aritmética)
    4+4

    doble 4
    =

    doble (2+2)
=                 (def. de doble, con x <- 2)
    doble (doble 2)
```

Propiedades y demostraciones

- Prop.: ¿`cuadruple 2` = `doble (doble 2)`?
- Dem:

```
        cuadruple 2
=                       (def. de cuadruple, con x <- 2)
        4*2
=                       (aritmética)
        4+4

        doble 4
=                       (aritmética)
        doble (2+2)
=                       (def. de doble, con x <- 2)
        doble (doble 2)
```

Propiedades y demostraciones

- Prop.: ¿`cuadruple 2 = doble (doble 2)`?
- Dem:

```
cuadruple 2
=                    (def. de cuadruple, con x <- 2)
4*2
=                    (aritmética)
4+4
=                    (def. de doble, con x <- 4)
doble 4
=                    (aritmética)
doble (2+2)
=                    (def. de doble, con x <- 2)
doble (doble 2)
```

Propiedades y demostraciones

- Prop.: ¿`cuadruple 2` = `doble (doble 2)`?
- Dem:

```
   cuadruple 2
=                (def. de cuadruple, con x <- 2)
   4*2
=                (aritmética)
   4+4
=                (def. de doble, con x <- 4)
   doble 4
=                (aritmética)
   doble (2+2)
=                (def. de doble, con x <- 2)
   doble (doble 2)
```

- Observar las equivalencias justificadas
- Recordar que la equivalencia es simétrica y transitiva

Propiedades y demostraciones

- Prop.: ¿`succ (cuadruple 2) = succ (doble (doble 2))`?
- Dem:

Propiedades y demostraciones

- **Prop.:** ¿`succ (cuadruple 2)` = `succ (doble (doble 2))`?
- **Dem:**

```
   succ (cuadruple 2)
=                       (prop. anteriormente demostrada -- LEMA)
   succ (doble (doble 2))
```

Propiedades y demostraciones

- **Prop.:** ¿`succ (cuadruple 2)` = `succ (doble (doble 2))`?
- **Dem:**

```
   succ (cuadruple 2)
=                    (prop. anteriormente demostrada -- LEMA)
   succ (doble (doble 2))
```

- Observar
  - no es necesario volver a analizar los pasos anteriores
  - no hace falta saber la definición de **`succ`**

Propiedades y demostraciones

- **Prop.:** ¿`succ (cuadruple 2)` = `succ (doble (doble 2))`?
- **Dem:** `succ (cuadruple 2)`

  = (prop. anteriormente demostrada -- LEMA)

  `succ (doble (doble 2))`

  - Observar
    - no es necesario volver a analizar los pasos anteriores
    - no hace falta saber la definición de **`succ`**
  - Se puede usar la demostración ya hecha
    - ¡Como si fuese una subtarea (procedimiento o función auxiliar)!

Propiedades y demostraciones

- **Prop.:** ¿`succ (cuadruple 2)` = `succ (doble (doble 2))`?
- **Dem:**

```
   succ (cuadruple 2)
=                    (prop. anteriormente demostrada -- LEMA)
   succ (doble (doble 2))
```

- Observar
  - no es necesario volver a analizar los pasos anteriores
  - no hace falta saber la definición de `succ`
- Se puede usar la demostración ya hecha
  - ¡Como si fuese una subtarea (procedimiento o función auxiliar)!
  - Un ***lema*** es una propiedad que funciona como subtarea

Propiedades y demostraciones

- Ventajas de las demostraciones formales

Propiedades y demostraciones

- Ventajas de las demostraciones formales
  - La *estrategia* de demostración es explícita
    - Los ***lemas*** funcionan como *subtareas*

Propiedades y demostraciones

- Ventajas de las demostraciones formales
  - La *estrategia* de demostración es explícita
    - Los ***lemas*** funcionan como *subtareas*
  - La solución es fácil de leer y verificar

Propiedades y demostraciones

- Ventajas de las demostraciones formales
  - La *estrategia* de demostración es explícita
    - Los ***lemas*** funcionan como *subtareas*
  - La solución es fácil de leer y verificar
  - Puede refinarse agregando detalles

Propiedades y demostraciones

- Ventajas de las demostraciones formales
  - La *estrategia* de demostración es explícita
    - Los ***lemas*** funcionan como *subtareas*
  - La solución es fácil de leer y verificar
  - Puede refinarse agregando detalles
  - Pueden desarrollarse programas que ayuden a construir, chequear y revisar pruebas de este tipo

Propiedades y demostraciones

- Ventajas de las demostraciones formales
  - La *estrategia* de demostración es explícita
    - Los ***lemas*** funcionan como *subtareas*
  - La solución es fácil de leer y verificar
  - Puede refinarse agregando detalles
  - Pueden desarrollarse programas que ayuden a construir, chequear y revisar pruebas de este tipo (p.ej. COQ, Agda, LMF, etc.)

Equivalencia de funciones

Equivalencia de funciones

- ¿Cómo demostramos equivalencia de funciones?

Equivalencia de funciones

- ¿Cómo demostramos equivalencia de funciones?
  - Por ejemplo
    - `¿twice doble = cuadruple?`
    - `¿twice twice = \f x -> f (f (f (f x)))?`
    - `¿curry suma' = suma?`

Equivalencia de funciones

- ¿Cómo demostramos equivalencia de funciones?
  - Por ejemplo
    - `¿twice doble = cuadruple?`
    - `¿twice twice = \f x -> f (f (f (f x)))?`
    - `¿curry suma' = suma?`
  - Usualmente las definiciones tienen parámetros

Equivalencia de funciones

- ¿Cómo demostramos equivalencia de funciones?
  - Por ejemplo
    - ¿`twice doble = cuadruple`?
    - ¿`twice twice = \f x -> f (f (f (f x)))`?
    - ¿`curry suma' = suma`?
  - Usualmente las definiciones tienen parámetros
  - ¡Falta algo para demostrar equivalencias de funciones!

Equivalencia de funciones

- ¿Cómo saber cuándo dos funciones son la misma?

f = g

A -> B A -> B

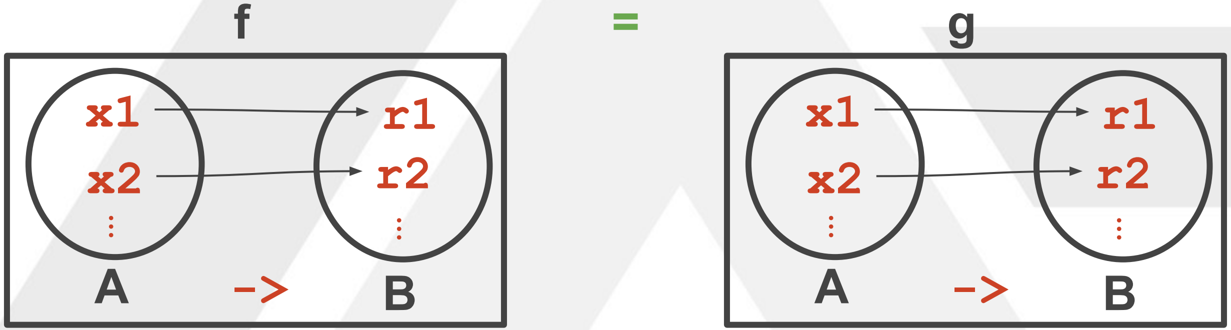
Equivalencia de funciones

- ¿Cómo saber cuándo dos funciones son la misma?
  - Dado que son transformaciones, deberían transformar cada elemento exactamente de la misma manera…

f	=	g
A -> B		A -> B

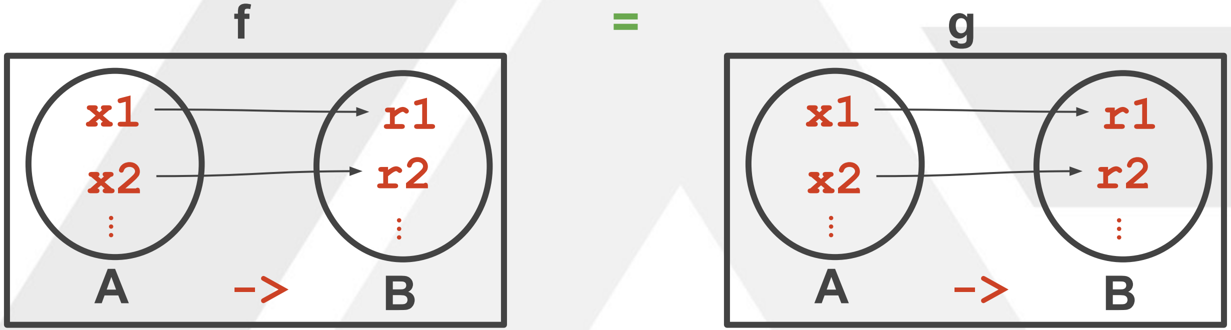
Equivalencia de funciones

- ¿Cómo saber cuándo dos funciones son la misma?
  - Dado que son transformaciones, deberían transformar cada elemento exactamente de la misma manera...



Equivalencia de funciones

- ¿Cómo saber cuándo dos funciones son la misma?
  - Dado que son transformaciones, deberían transformar cada elemento exactamente de la misma manera…



  - ¿Cómo expresamos esto con una propiedad?

Equivalencia de funciones

- f = g

f

A -> B

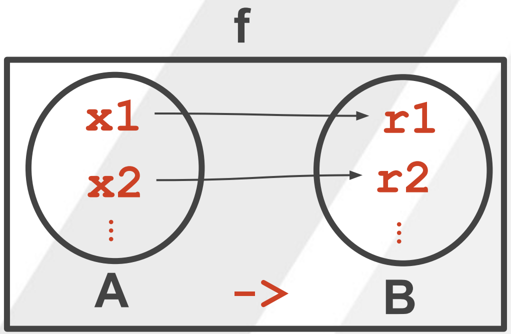
=

g

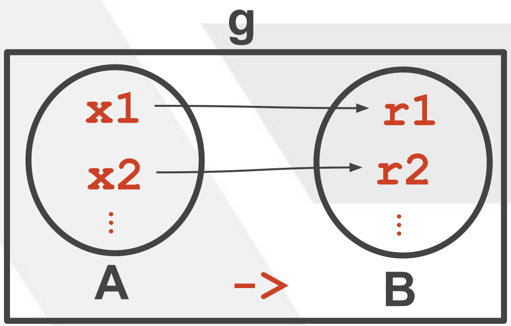
A -> B

Equivalencia de funciones

- f = g es equivalente a para todo x. f x = g x



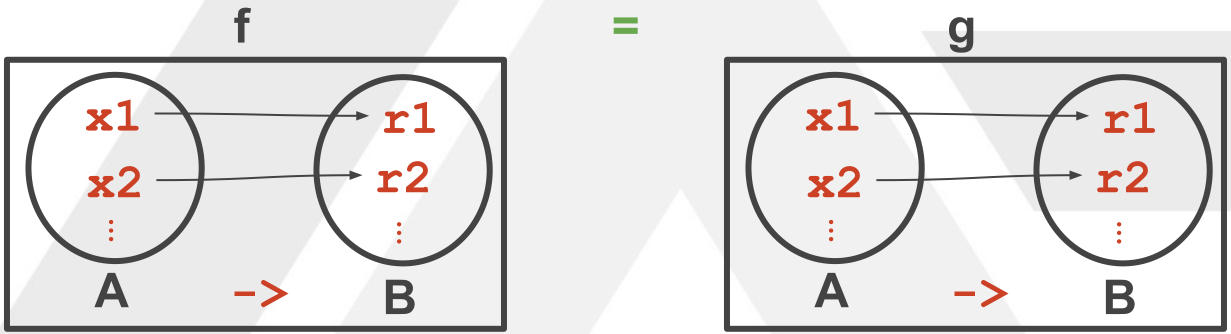
=



Principio de extensionalidad

- ***Principio de extensionalidad***

  ¿f = g? es equivalente a ¿para todo **x**. **f x** = **g x**?

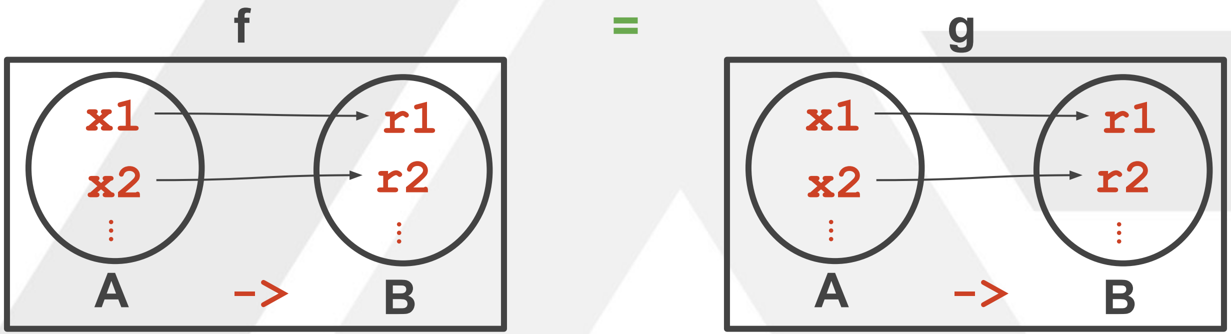


- ¡Ambas preguntas se responden igual!

Principio de extensionalidad

- ***Principio de extensionalidad***

  ¿f = g? es equivalente a ¿para todo **x**. **f x** = **g x**?



- ¡Ambas preguntas se responden igual!

Principio de extensionalidad

Principio de extensionalidad		
¿**f = g**?	es equivalente a	¿para todo **x. f x = g x**?

Principio de extensionalidad

- ¿Cómo utilizar el principio de extensionalidad?
  - Prop.: ¿`twice doble` = `cuadruple`?

    Dem.:

Principio de extensionalidad

- ¿Cómo utilizar el principio de extensionalidad?
  - **Prop.:** ¿`twice doble = cuadruple`?

    Dem.: Por el principio de extensionalidad,
    es equivalente demostrar que
    ¿para todo **`x`**. `twice doble x = cuadruple x`?

Principio de extensionalidad

Principio de extensionalidad
¿**f** = **g**?
es equivalente a
¿para todo **x**. **f x** = **g x**?

- ¿Cómo utilizar el principio de extensionalidad?
  - **Prop.:** ¿$\overset{f}{\boxed{\texttt{twice doble}}} = \overset{g}{\boxed{\texttt{cuadruple}}}$?

    Dem.: Por el principio de extensionalidad,

    es equivalente demostrar que

    ¿para todo **x**. $\overset{f}{\boxed{\texttt{twice doble}}}$ **x** = $\overset{g}{\boxed{\texttt{cuadruple}}}$ **x**?

Principio de extensionalidad

> ***Principio de extensionalidad***
>
> ¿**f** = **g**?
>
> es equivalente a
>
> ¿para todo **x**. **f x** = **g x**?

- ¿Cómo utilizar el principio de extensionalidad?
  - **Prop.:** ¿`twice doble` = `cuadruple`?

    Dem.: Por el principio de extensionalidad,
    es equivalente demostrar que
    ¿para todo `x`. `twice doble x` = `cuadruple x`?
- ¿Cómo demostramos un para todo?
  - Una forma es elegir un elemento *arbitrario* del conjunto, y demostrarlo para ese elemento

Principio de extensionalidad

> ***Principio de extensionalidad***
>
> ¿**f** = **g**?
>
> es equivalente a
>
> ¿para todo **x**. **f x** = **g x**?

- **Prop.:** ¿`twice doble` = `cuadruple`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `twice doble x` = `cuadruple x`?

Principio de extensionalidad

> ***Principio de extensionalidad***
>
> ¿f = g?
>
> es equivalente a
>
> ¿para todo **x**. **f x** = **g x**?

- **Prop.:** ¿`twice doble` = `cuadruple`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `twice doble x` = `cuadruple x`?

  Sea **n** un número cualquiera. Se verá que `twice doble n` = `cuadruple n`

Principio de extensionalidad

> ***Principio de extensionalidad***
>
> ¿**f** = **g**?
>
> es equivalente a
>
> ¿para todo **x**. **f x** = **g x**?

- **Prop.:** ¿`twice doble = cuadruple`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `twice doble x = cuadruple x`?

  Sea **n** un número cualquiera. Se verá que `twice doble n = cuadruple n`

```
   twice doble n
=                       (twice)
   doble (doble n)
=                       (doble)
   doble (n+n)
=                       (doble)
   (n+n) + (n+n)
```

Principio de extensionalidad

> ***Principio de extensionalidad***
>
> ¿**f = g**?
>
> es equivalente a
>
> ¿para todo **x**. **f x = g x**?

- **Prop.:** ¿`twice doble` = `cuadruple`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `twice doble x` = `cuadruple x`?

  Sea **n** un número cualquiera. Se verá que `twice doble n` = `cuadruple n`

```
   twice doble n                          cuadruple n
=                 (twice)              =               (cuadruple)
   doble (doble n)                        4*n
=                 (doble)              =               (aritm.)
   doble (n+n)                            (n+n)+(n+n)
=                 (doble)
   (n+n)+(n+n)
```

Principio de extensionalidad

> ***Principio de extensionalidad***
>
> ¿`f = g`?
>
> es equivalente a
>
> ¿para todo `x`. `f x = g x`?

- **Prop.:** ¿`twice doble = cuadruple`?

Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

¿para todo `x`. `twice doble x = cuadruple x`?

Sea **n** un número cualquiera. Se verá que `twice doble n = cuadruple n`

```
  twice doble n
=                    (twice)
  doble (doble n)
=                    (doble)
  doble (n+n)
=                    (doble)
  (n+n)+(n+n)
```

```
  cuadruple n
=                    (cuadruple)
  4*n
=                    (aritm.)
  (n+n)+(n+n)
```

Ambos lados llegan a lo mismo.
Vale la propiedad

Principio de extensionalidad

- Prop.: ¿`twice twice = \f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.:

Principio de extensionalidad

> *Principio de extensionalidad*
>
> ¿f = g?
>
> es equivalente a
>
> ¿para todo x. f x = g x?

- **Prop.:** ¿`twice twice = \f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **f** .

  `twice twice f = (\f x -> f (f (f (f x)))) f`?

Principio de extensionalidad

> *Principio de extensionalidad*
>
> ¿f = g?
>
> es equivalente a
>
> ¿para todo x. f x = g x?

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo f.

  `twice twice` `f` = `(\f x -> f (f (f (f x))))` `f`?

Principio de extensionalidad

> ***Principio de extensionalidad***
>
> ¿f = g?
>
> es equivalente a
>
> ¿para todo **x**. **f x** = **g x**?

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **f** .

  `twice twice` f = `(\f x -> f (f (f (f x))))` f?

  Como aún son funciones, se aplica nuevamente el ppio. de ext.

Principio de extensionalidad

Principio de extensionalidad

¿**f** = **g**?

es equivalente a

¿para todo **x**. **f x** = **g x**?

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **f** .

  $\underbrace{\boxed{\texttt{twice twice f}}}_{f'}$ = $\underbrace{\boxed{\texttt{(\textbackslash f x -> f (f (f (f x)))) f}}}_{g}$?

  Como aún son funciones, se aplica nuevamente el ppio. de ext.

  ¿para todo **f** . para todo **x** .

  $\underbrace{\boxed{\texttt{twice twice f}}}_{f'}$ x = $\underbrace{\boxed{\texttt{(\textbackslash f x -> f (f (f (f x)))) f}}}_{g}$ x ?

Principio de extensionalidad

Principio de extensionalidad
¿**f** = **g**?
es equivalente a
¿para todo **x**. **f x** = **g x**?

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **f** .

  `twice twice f` = `(\f x -> f (f (f (f x)))) f`?

  Como aún son funciones, se aplica nuevamente el ppio. de ext.

  ¿para todo **f** . para todo **x** .

  `twice twice f x` = `(\f x -> f (f (f (f x)))) f x`?

  Sea **h** una función y **e** una expresión.

  Se verá que `twice twice h e` = `(\f x -> f (f (f (f x)))) h e`

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: (...) Se verá que `twice twice h e` = `(\f x -> f (f (f (f x)))) h e`

```
twice :: (a->a)->(a->a)
twice f x = f (f x)
```

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: (...) Se verá que `twice twice h e` = `(\f x -> f (f (f (f x)))) h e`

  `twice twice h e`

  = (`twice` -- `f`<-`twice`, `x`<-h)

```
twice :: (a->a)->(a->a)
twice f x = f (f x)
```

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: (...) Se verá que `twice twice h e` = `(\f x -> f (f (f (f x)))) h e`

  $\underline{\texttt{twice}\ \overset{f}{\boxed{\texttt{twice}}}\ \boxed{\texttt{h}}}^{x}\ \texttt{e}$

  = (twice -- f<-twice, x<-h)

  $\overset{f}{\boxed{\texttt{twice}}}\ \overset{f}{(}\boxed{\texttt{twice}}\ \boxed{\texttt{h}})^{x}\ \texttt{e}$

  =

```
twice :: (a->a)->(a->a)
twice f x = f (f x)
```

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: (...) Se verá que `twice twice h e` = `(\f x -> f (f (f (f x)))) h e`

```
  twice twice h e
=                (twice -- f<-twice, x<-h)
  twice (twice h) e
=
```

```
twice :: (a->a)->(a->a)
twice f x = f (f x)
```

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

Dem.: Se verá que `twice twice h e` = `(\f x -> f (f (f (f x)))) h e`

$\texttt{twice twice h e}$

= (twice -- f<-twice, x<-h)

$\texttt{twice}\ \overset{f}{\boxed{\texttt{(twice h)}}}\ \overset{x}{\boxed{\texttt{e}}}$

= (twice -- f<-twice h, x<-e)

$\overset{f}{\boxed{\texttt{twice h}}}\ \texttt{(}\overset{f}{\boxed{\texttt{twice h}}}\ \overset{x}{\boxed{\texttt{e}}}\texttt{)}$

```haskell
twice :: (a->a)->(a->a)
twice f x = f (f x)
```

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: Se verá que `twice twice h e` = `(\f x -> f (f (f (f x)))) h e`

  `twice twice h e`

  = (`twice` -- `f<-twice`, `x<-h`)

  `twice (twice h) e`

  = (`twice` -- `f<-twice h`, `x<-e`)

  `twice h (twice h e)`

  =

```
twice :: (a->a)->(a->a)
twice f x = f (f x)
```

Principio de extensionalidad

- Prop.: ¿`twice twice = \f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: Se verá que `twice twice h e = (\f x -> f (f (f (f x)))) h e`

```
  twice twice h e
=             (twice -- f<-twice, x<-h)
  twice (twice h) e
=             (twice -- f<-twice h, x<-e)
  twice h (twice h e)
=             (twice -- f<-h, x<-twice h e)
  h (h (twice h e))
=             (twice -- f<-h, x<-e)
  h (h (h (h e)))
```

```
twice :: (a->a)->(a->a)
twice f x = f (f x)
```

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

  Dem.: Se verá que `twice twice h e` = `(\f x -> f (f (f (f x)))) h e`

```
  twice twice h e
=                 (twice -- f<-twice, x<-h)
  twice (twice h) e
=                 (twice -- f<-twice h, x<-e)
  twice h (twice h e)
=                 (twice -- f<-h, x<-twice h e)
  h (h (twice h e))
=                 (twice -- f<-h, x<-e)
  h (h (h (h e)))
```

```
  (\f x -> f (f (f (f x)))) h e
=                 (regla beta, f<-h)
  (\x -> h (h (h (h x)))) e
=                 (regla beta. x<-e)
  h (h (h (h e)))
```

```
twice :: (a->a)->(a->a)
twice f x = f (f x)
```

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`twice twice` = `\f x -> f (f (f (f x)))`?

Dem.: Se verá que `twice twice h e` = `(\f x -> f (f (f (f x)))) h e`

```
twice twice h e
=                 (twice -- f<-twice, x<-h)
twice (twice h) e
=                 (twice -- f<-twice h, x<-e)
twice h (twice h e)
=                 (twice -- f<-h, x<-twice h e)
h (h (twice h e))
=                 (twice -- f<-h, x<-e)
h (h (h (h e)))
```

```
(\f x -> f (f (f (f x)))) h e
=                 (regla beta, f<-h)
(\x -> h (h (h (h x)))) e
=                 (regla beta. x<-e)
h (h (h (h e)))
```

Ambos lados llegan a lo mismo.

Vale la propiedad

Principio de extensionalidad

Principio de extensionalidad
¿**f** = **g**?
es equivalente a
¿para todo **x**. **f x** = **g x**?

- Prop.: ¿`curry suma'` = `suma`?
  Dem.:

Principio de extensionalidad

> ***Principio de extensionalidad***
>
> ¿**f** = **g**?
>
> es equivalente a
>
> ¿para todo **x**. **f x** = **g x**?

- **Prop.:** ¿`curry suma'` = `suma`?

  Dem.: Por el ppio. de ext. (dos veces), es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `curry suma' x` = `suma x`?

  ¿para todo **x**. para todo **y**. `curry suma' x y` = `suma x y`?

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`curry suma' = suma`?

  Dem.: Por el ppio. de ext. (dos veces), es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `curry suma' x = suma x`?

  ¿para todo **x**. para todo **y**. `curry suma' x y = suma x y`?

  Sean **n** y **m** dos números. Se verá que `curry suma' n m = suma n m`

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`curry suma' = suma`?

  Dem.: Por el ppio. de ext. (dos veces), es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `curry suma' x = suma x`?

  ¿para todo **x**. para todo **y**. `curry suma' x y = suma x y`?

  Sean **n** y **m** dos números. Se verá que `curry suma' n m = suma n m`

  ```
    curry suma' n m
  =            (curry -- f<-suma', x<-n, y<-m)
    suma' (n,m)
  =            (suma', x<-n, y<-m)
    n+m
  ```

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`curry suma' = suma`?

  Dem.: Por el ppio. de ext. (dos veces), es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `curry suma' x = suma x`?

  ¿para todo **x**. para todo **y**. `curry suma' x y = suma x y`?

  Sean **n** y **m** dos números. Se verá que `curry suma' n m = suma n m`

`curry suma' n m`	`suma n m`
= (`curry` -- `f`<-`suma'`, `x`<-n, `y`<-m)	= (`suma`, `x`<-n, `y`<-m)
`suma' (n,m)`	`n+m`
= (`suma'`, `x`<-n, `y`<-m)	
`n+m`	

Principio de extensionalidad

- **Prop.:** ¿`curry suma'` = `suma`?

  Dem.: Por el ppio. de ext. (dos veces), es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `curry suma' x` = `suma x`?

  ¿para todo **x**. para todo **y**. `curry suma' x y` = `suma x y`?

  Sean **n** y **m** dos números. Se verá que `curry suma' n m` = `suma n m`

```
  curry suma' n m
=                    (curry -- f<-suma', x<-n, y<-m)
  suma' (n,m)
=                    (suma', x<-n, y<-m)
  n+m
```

```
  suma n m
=                    (suma, x<-n, y<-m)
  n+m
```

Ambos lados llegan a lo mismo.
Vale la propiedad

Motivación del principio de inducción

Problemas con ciertas ecuaciones

- Consideremos las siguientes definiciones

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)

factL :: Int -> Int
factL 0 = 1
factL n = factL (n-1) * n
```

  - ¿Cuál es la relación entre ambas funciones?
    - ¿Podemos demostrar que `fact` = `factL`? ¿Cómo?

Problemas con ciertas ecuaciones

- Prop.: ¿`fact = factL`?
  Dem.:

Problemas con ciertas ecuaciones

- **Prop.:** ¿`fact = factL`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `fact x = factL x`?

Problemas con ciertas ecuaciones

- **Prop.:** ¿`fact = factL`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `fact x = factL x`?

  Sea **n** un número. Se verá que `fact n = factL n`

Problemas con ciertas ecuacione

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)

factL :: Int -> Int
factL 0 = 1
factL n = factL (n-1) * n
```

- Prop.: ¿`fact` = `factL`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `fact x` = `factL x`?

  Sea **n** un número. Se verá que `fact n` = `factL n`

  - La definición de `fact` está separada en casos
  - Deben considerarse diferentes posibilidades para **n**

Problemas con ciertas ecuaciones

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)

factL :: Int -> Int
factL 0 = 1
factL n = factL (n-1) * n
```

- Prop.: ¿`fact` = `factL`?

  Dem.: Por el ppio. de ext., es equivalente demostrar que

  ¿para todo **x**. `fact x` = `factL x`?

  Sea **n** un número. Se verá que `fact n` = `factL n`

  - La definición de `fact` está separada en casos
  - Deben considerarse diferentes posibilidades para **n**
  - *Análisis de casos*
    - Caso **n** = 0
    - Caso **n** ≠ 0

Problemas con ciertas ecuacione

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)

factL :: Int -> Int
factL 0 = 1
factL n = factL (n-1) * n
```

- **Prop.:** ¿`fact` = `factL`?

  Dem.: (...) Se verá que `fact n` = `factL n` por análisis de casos

  Caso **n** = 0)

  Caso **n** ≠ 0)

Problemas con ciertas ecuacione

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)

factL :: Int -> Int
factL 0 = 1
factL n = factL (n-1) * n
```

- **Prop.:** ¿`fact` = `factL`?

  Dem.: (...) Se verá que `fact n` = `factL n` por análisis de casos

  Caso n = 0)

  ¿`fact 0` = `factL 0`?

  Caso n ≠ 0)

  ¿`fact n` = `factL n`?

Problemas con ciertas ecuaciones

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)

factL :: Int -> Int
factL 0 = 1
factL n = factL (n-1) * n
```

- **Prop.:** ¿`fact` = `factL`?

  Dem.: (...) Se verá que `fact n` = `factL n` por análisis de casos

  Caso n = 0)

  ¿`fact 0` = `factL 0`?

  `fact 0`

  = (fact.1)

  `1`

  Caso n ≠ 0)

  ¿`fact n` = `factL n`?

Problemas con ciertas ecuaciones

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)

factL :: Int -> Int
factL 0 = 1
factL n = factL (n-1) * n
```

- **Prop.:** ¿`fact` = `factL`?

  Dem.: (...) Se verá que `fact n` = `factL n` por análisis de casos

  Caso **n** = 0)
  ¿`fact 0` = `factL 0`?

<u>`fact 0`</u>	<u>`factL 0`</u>
= (`fact.1`)	= (`factL.1`)
`1`	`1`

  Vale este caso

  Caso **n** ≠ 0)
  ¿`fact n` = `factL n`?

Problemas con ciertas ecuaciones

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)

factL :: Int -> Int
factL 0 = 1
factL n = factL (n-1) * n
```

- **Prop.:** ¿`fact` = `factL`?

  Dem.: (...) Se verá que `fact n` = `factL n` por análisis de casos

Caso n = 0)

¿`fact 0` = `factL 0`?

`fact 0`		`factL 0`
= (`fact.1`)		= (`factL.1`)
`1`		`1`

Vale este caso

Caso n ≠ 0)

¿`fact n` = `factL n`?

`fact n`

= (`fact.2` -- n<-n)

`n * fact (n-1)`

= (aritm.)

`fact (n-1) * n`

Problemas con ciertas ecuaciones

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)

factL :: Int -> Int
factL 0 = 1
factL n = factL (n-1) * n
```

- **Prop.:** ¿`fact` = `factL`?

  Dem.: (...) Se verá que `fact n` = `factL n` por análisis de casos

Caso n = 0)

¿`fact 0` = `factL 0`?

`fact 0`	`factL 0`
= (`fact.1`)	= (`factL.1`)
`1`	`1`

Vale este caso

Caso n ≠ 0)

¿`fact n` = `factL n`?

`fact n`	`factL n`
= (`fact.2` -- n<-n)	= (`factL.2`, n<-n)
`n * fact (n-1)`	`factL (n-1) * n`
= (aritm.)	
`fact (n-1) * n`	

Problemas con ciertas ecuaciones

- **Prop.:** ¿`fact` = `factL`?

Dem.: (...) Se verá que `fact n` = `factL n` por análisis de casos

Caso n = 0)

¿`fact 0` = `factL 0`?

```
   fact 0
=                       (fact.1)
   1
```

```
   factL 0
=                       (factL.1)
   1
```

Vale este caso

Caso n ≠ 0)

¿`fact n` = `factL n`?

```
   fact n
=                       (fact.2 -- n<-n)
   n * fact (n-1)
=                       (aritm.)
   fact (n-1) * n
```

```
   factL n
=                       (factL.2, n<-n)
   factL (n-1) * n
```

¿Qué se requiere para que sean iguales?

Problemas con ciertas ecuaciones

- Prop.: ¿`fact` = `factL`?

Dem.: (...) Se verá que `fact n` = `factL n` por análisis de casos

Caso n = 0)

¿`fact 0` = `factL 0`?

```
  fact 0                      |     factL 0
=                  (fact.1)   |  =              (factL.1)
  1                           |     1
```

Vale este caso

Caso n ≠ 0)

¿`fact n` = `factL n`?

```
  fact n                      |     factL n
=          (fact.2 -- n<-n)   |  =              (factL.2, n<-n)
  n * fact (n-1)              |     factL (n-1) * n
=                  (aritm.)   |
  fact (n-1) * n              |
```

¿Qué se requiere para que sean iguales?

¡Lo mismo que queremos demostrar!

Problemas con ciertas ecuaciones

- Prop.: ¿`fact` = `factL`?

  Dem.: (...) Se verá que `fact n` = `factL n` por análisis de casos

Caso n = 0)

¿`fact 0` = `factL 0`?

```
   fact 0
=                    (fact.1)
   1
```

```
   factL 0
=                    (factL.1)
   1
```

Vale este caso

Caso n ≠ 0)

¿`fact n` = `factL n`?

```
   fact n
=                    (fact.2 -- n<-n)
   n * fact (n-1)
=                    (aritm.)
   fact (n-1) * n
```

```
   factL n
=                    (factL.2, n<-n)
   factL (n-1) * n
```

¿Qué se requiere para que sean iguales?
¡Lo mismo que queremos demostrar!

- Es necesaria alguna herramienta más...

Problemas con ciertas ecuaciones

- Volvamos a la definición de **`fact`**

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)
```

  - ¿Cuánto vale **`fact (-1)`**?

Problemas con ciertas ecuaciones

- Volvamos a la definición de **`fact`**

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)
```

  - ¿Cuánto vale **`fact (-1)`**?
    - **`fact (-1)`** = ⊥

Problemas con ciertas ecuaciones

- Volvamos a la definición de **`fact`**

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)
```

  - ¿Cuánto vale **`fact (-1)`**?
    - **`fact (-1)`** = ⊥

- ¿Son ecuaciones orientadas?

Es similar a
`f n = f n`

Problemas con ciertas ecuaciones

- Volvamos a la definición de **`fact`**

```
fact :: Int -> Int
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)
```

  - ¿Cuánto vale **`fact (-1)`**?
    - **`fact (-1)`** $= \perp$
  - ¿Son ecuaciones orientadas?
    - Lo sorprendente es que funcione para **n**>0…

Es similar a
`f n = f n`

Motivación para nueva herramienta

- Problemas con ciertas ecuaciones
  - ¿Cómo saber si son ecuaciones orientadas?
    - E.g.: `fact`
  - ¿Qué falta para poder demostrar en estos casos?
    - E.g.: ¿`fact` = `factL`?
- Expresividad de los tipos algebraicos
  - ¿Cómo definir tipos algebraicos con infinitos elementos?

Motivación para nueva herramienta

- Las 3 se solucionan con la misma herramienta
  - ¿Cómo saber si son ecuaciones orientadas?
  - ¿Qué falta para poder demostrar en estos casos?
  - ¿Cómo definir tipos algebraicos con infinitos elementos?

Motivación para nueva herramienta

- Las 3 se solucionan con la misma herramienta
  - ¿Cómo saber si son ecuaciones orientadas?
  - ¿Qué falta para poder demostrar en estos casos?
  - ¿Cómo definir tipos algebraicos con infinitos elementos?
- Parece ser necesaria ***inducción*** o ***recursión***
  - ¿Realmente entendemos la inducción matemática?
  - ¿Qué es la inducción? ¿Qué es la recursión?

Resumen

Resumen

- Propiedades y demostraciones
  - Demostraciones manuales (semi) formales
    - Directas
    - Con “para todo”
    - Con análisis de casos
    - Consideración por la no terminación
  - Equivalencia de funciones
    - Principio de extensionalidad
    - Principio de inducción…