Ecuación de Poisson para el Potencial Gravitatorio de la Luna

Eduardo Avendaño

23 de mayo de 2023

1. Introducción

La ecuación de Poisson es una herramienta fundamental en la teoría de la gravedad para estudiar el campo gravitatorio en un sistema dado. En este informe, nos centraremos en la aplicación de la ecuación de Poisson al estudio del potencial gravitatorio de la Luna.

2. La Ecuación de Poisson para el Potencial Gravitatorio

La ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio establece la relación entre la distribución de masa y el campo gravitatorio en un sistema. Para el caso de la Luna, esta ecuación se expresa como:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$$

Donde ∇^2 representa el operador laplaciano, Φ es el potencial gravitatorio, G es la constante gravitatoria universal y ρ es la densidad de masa de la Luna.

3. Características e importancia del Potencial Gravitatorio de la Luna

El estudio del potencial gravitatorio de la Luna tiene gran importancia en diversas áreas, como la astronomía, la geodesia y las misiones espaciales. Algunas de las características clave del potencial gravitatorio de la Luna son [1]:

- La forma del campo gravitatorio lunar es influenciada por la distribución de masa en su interior, lo que a su vez afecta la órbita de la Luna alrededor de la Tierra.
- La presencia de masas irregulares, como cráteres y montañas, en la superficie lunar conduce a variaciones locales en el potencial gravitatorio.
- El potencial gravitatorio lunar se utiliza en la determinación de la altitud, el estudio de la topografía y el diseño de misiones espaciales a la Luna.

4. Implementación del modelo

En esta sección, describiremos la implementación del modelo utilizando la biblioteca FEniCS . Para llevar a cabo la implementación del modelo, es necesario establecer los siguientes elementos clave:

4.1. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera juegan un papel fundamental en la solución de la ecuación de Poisson. Estas condiciones establecen el comportamiento del potencial gravitatorio en los límites del dominio de la Luna. Para determinar la condición de frontera de nuestro problema, utilizaremos la solución analítica del potencial gravitatorio para una esfera con densidad constante y radio lunar.
Esta formula del potencial gravitatorio es la siguiente:
$\phi = -GM/R$
$\phi_{lunar} = -(6{,}67430 * 10^{-}11) * (7{,}348 * 10^{2}2)/(1{,}737 * 10^{6}) = -2{,}82 * 10^{6}$, nuestra condición de frontera de Dirichlet

4.2. Espacios de funciones solución y prueba

Utilizaremos espacios de funciones de elementos finitos para aproximar el potencial gravitatorio de la Luna. Estos espacios se definen en función del tipo de elementos finitos utilizados y su grado de precisión. Es importante elegir un espacio adecuado para obtener resultados precisos y eficientes.
Como nuestro objetivo es modelar el potencial gravitatorio en la Luna, simplificaremos el problema considerando que la Luna se comporta como una esfera uniforme con un radio característico, una representación sería la siguiente:

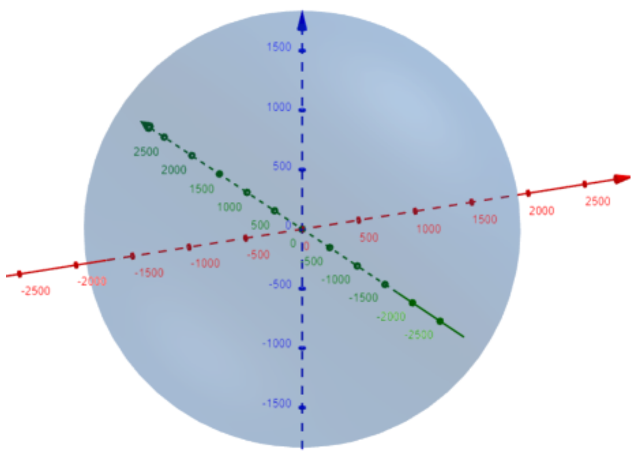

Figura 1: Espacio Ω que se trabajará.

Definiendo los espacios que se trabajarán en el ejercicio:
$\Omega = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1737\}$
$V_0 = \{v \in H^1(\Omega) \mid \|v\|_2 < \infty, \|\nabla v\|_{2)} < \infty, v|_{\partial\Omega} = 0\}$, Espacio de funciones test.

$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \|v\|_2 < \infty, \|\nabla v\|_2 < \infty, v|_{\partial\Omega} = -2{,}82 * 10^6\}$, Espacio solución.

4.3. Formulación variacional

Para resolver la ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio de la Luna, utilizaremos el método de elementos finitos. La formulación variacional del problema consiste en buscar el potencial gravitatorio Φ que satisface la siguiente ecuación:

$$\int_\Omega \nabla\Phi \cdot \nabla v \, dx = -4\pi G \int_\Omega \rho v \, dx$$

para todo v en V_0, donde Ω es el dominio de la Luna y ρ es la densidad de masa de la Luna. La integral de frontera derivada del teorema de Green dasaparece ya que tenemos una condición de Dirichlet.

4.4. Modelos de densidad de la Luna

Antes de proceder con la implementación, es de suma importancia determinar un valor apropiado para la densidad (ρ) en nuestro modelo. La densidad de la Luna ha sido objeto de estudio mediante diversos métodos y enfoques científicos, como se ha investigado en estudios anteriores [1].
Dado que estamos considerando un modelo simplificado con una densidad uniforme, resulta adecuado utilizar este enfoque inicialmente. Aunque sabemos que la Luna no tiene una densidad completamente uniforme en la realidad, este modelo nos brinda una base sólida para comenzar nuestro análisis del potencial gravitatorio lunar.

4.4.1. Modelo con densidad uniforme

En el primer modelo, se asume que la Luna tiene una distribución de densidad uniforme, con un valor de densidad de 3340 kg/m^3. Esta suposición implica que la densidad en todos los puntos del cuerpo lunar es constante y no varía en función de la ubicación.
El código necesario para implementar este método se incluirá en la carpeta del archivo adjunto.
En esta simulación, se considera que el potencial gravitatorio en la Luna no experimenta cambios significativos en ningún punto, manteniéndose constante. Este valor constante corresponde al potencial de frontera calculado para una esfera uniforme con el radio de la Luna.

4.4.2. Modelo con densidad polinómica

Se ha propuesto otro enfoque para modelar la densidad de la Luna, el cual considera los datos de densidad en sus distintas capas. A continuación, se presenta una tabla que muestra las densidades en las principales capas de la Luna:
Utilizando los datos presentados en la tabla, se llevó a cabo un proceso de interpolación para obtener una función de densidad coherente para nuestro ejercicio. La interpolación nos permite estimar los valores de

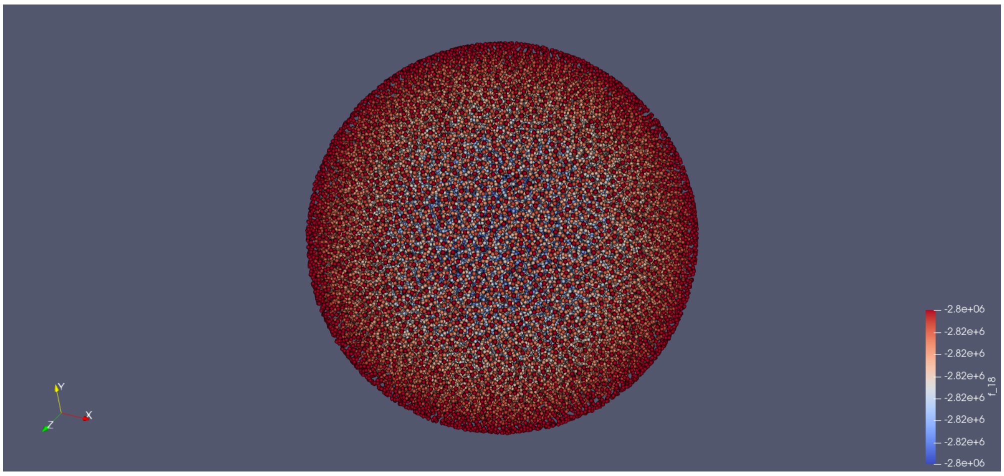

Figura 2: Simulación para densidad de la luna uniforme

Capa Lunar	Densidad (kg/m^3)	Radio (km)
Núcleo interno	8000	0
Núcleo externo	5000	350
Capa de fusión parcial	3500	587
Manto	3100	1205
Corteza	3000	1737

Tabla 1: Propiedades de las capas de la Luna.

densidad para los radios que no están explícitamente incluidos en los datos proporcionados. Se utilizó la función polyfit de numpy para encontrar los coeficientes para el polinomio de interpolación:

$$a_0 = -2{,}57845617 \times 10^{-6}$$

$$a_1 = 9{,}93412226 \times 10^{-3}$$

$$a_2 = -1{,}23714334 \times 10^{1}$$

$$a_3 = 8{,}04163111 \times 10^{3}$$

Estos coeficientes nos permiten aproximar la función de densidad en función de los radios de las capas de la Luna. Ahora podemos proceder con la implementación del modelo y realizar cálculos relacionados con el potencial gravitatorio lunar.

Podemos observar que el polinomio de interpolación obtenido anteriormente depende explícitamente del radio. Sin embargo, podemos utilizar la fórmula de la distancia euclidiana para relacionarlo con las dimensiones en los ejes x, y, z, considerando que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Al sustituir las variables x, y, z en el polinomio de interpolación con sus respectivos valores, podemos obtener una expresión que relaciona la densidad con las coordenadas espaciales en un sistema tridimensional. Esto nos permitirá calcular la densidad en cualquier punto del espacio, considerando la distancia euclidiana desde el origen.

A continuación se presenta la expresión del polinomio de densidad obtenido mediante el ajuste de datos:

$$\rho = a_0 + a_1\sqrt{x^2+y^2+z^2} + a_2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 + a_3\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3$$

La Figura 3 muestra el ajuste realizado utilizando la función polyfit de NumPy.

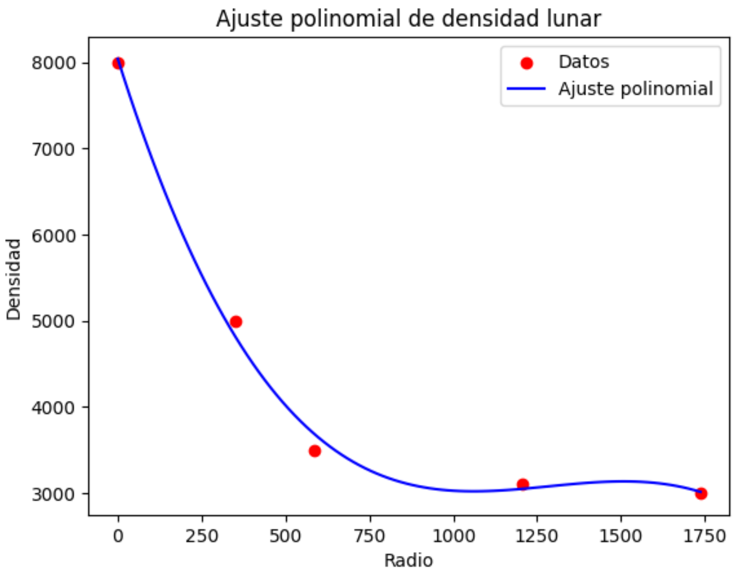

Figura 3: Ajuste realizado con la función polyfit de NumPy.

La simulación para este modelo se presenta en la Figura 4.

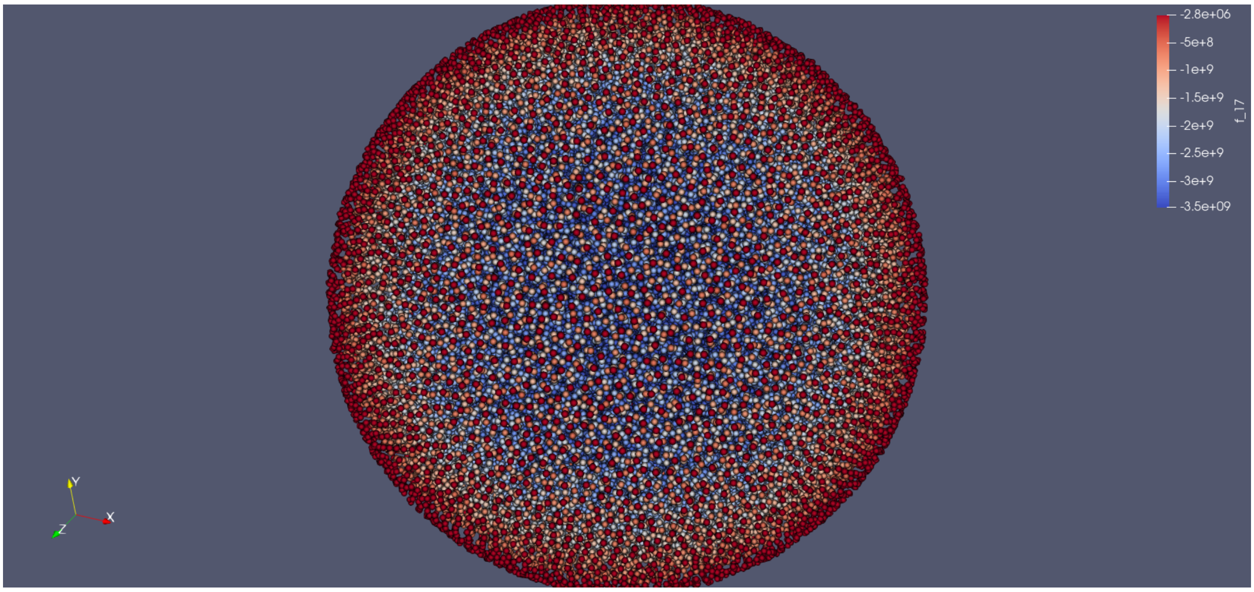

Figura 4: Simulación del modelo utilizando el polinomio de densidad.

En este caso, los valores del potencial gravitatorio varían entre $-2{,}8\times10^6$ y $-3{,}5\times10^9$. En el núcleo lunar, los valores son cercanos a $-3{,}5\times10^9$, mientras que en la superficie se establece el valor de frontera en $-2{,}8\times10^6$. Este resultado es coherente con la teoría, ya que el potencial gravitatorio es mayor en valor absoluto en el núcleo debido a su mayor densidad.

5. Conclusiones

- El primer modelo asume una densidad constante para la Luna, lo cual no refleja la variación real de densidad en diferentes ubicaciones. Al considerar este modelo, observamos que el potencial gravitatorio muestra los mismos valores en una esfera uniforme.

  Esta conclusión resalta la simplificación del modelo y su limitación al no capturar la variación real de la densidad lunar. Aunque proporciona una aproximación inicial, es importante tener en cuenta que la densidad real varía en diferentes partes de la Luna, lo que puede afectar el potencial gravitatorio de manera significativa.

- Las condiciones de frontera se encuentran a partir del modelo de esfera sólida con densidad y radio lunar, sin embargo, sabemos que esta densidad no es constante.

- Se ha considerado el modelo únicamente para coordenadas dentro de la luna, no se toman en cuenta casos donde el objeto pueda estar más allá de la superficie lunar.

- El modelo con densidad polinómica ofrece una aproximación más precisa y detallada del comportamiento del potencial gravitatorio de la Luna. Mediante la interpolación de datos y la obtención de coeficientes polinómicos, hemos obtenido una función de densidad que se ajusta de manera adecuada a los valores observados.

  Este enfoque nos permite capturar la variación de densidad en distintas capas de la Luna y considerar cómo esto influye en el potencial gravitatorio en diferentes ubicaciones. Al utilizar un polinomio de interpolación, hemos logrado una representación más realista y teóricamente fundamentada de la densidad lunar.

  Es importante mencionar que aunque hemos obtenido un modelo que se ajusta bien a los datos disponibles, aún no hemos tenido acceso a mediciones precisas del potencial gravitatorio de la Luna para comparar directamente con nuestros resultados. Por lo tanto, es necesario tener en cuenta esta limitación y buscar futuras investigaciones y mediciones que puedan respaldar y validar nuestro modelo.

- A pesar de los extensos estudios y la atención que ha recibido la Luna, todavía existen incertidumbres en relación a sus características fundamentales. La determinación precisa de la densidad de las diferentes capas de la Luna, así como su masa, ha sido un desafío debido a la falta de mediciones directas y a la variabilidad de los datos disponibles.

  La obtención de valores confiables para el potencial gravitatorio de la Luna también ha presentado dificultades. La suposición de una esfera sólida con radio lunar ha sido utilizada como punto de referencia, ya que proporciona una aproximación razonable para calcular el potencial gravitatorio. Sin embargo, no se han encontrado mediciones específicas y detalladas que permitan validar y contrastar este enfoque.

Referencias

[1] Sean C. Solomon and M.Nafi Toksöz. On the density distribution in the moon. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 1(7):475–484, 1968.