Data Science Academy eduardo.ads1814@gmail.com 63a47926274fe5d3f2060075

Machine Learning

Data Science Academy eduardo.ads1814@gmail.com 63a47926274fe5d3f2060075

Data Science Academy

Seja muito bem-vindo(a)!

Data Science Academy eduardo.ads1814@gmail.com 63a47926274fe5d3f2060075

Data Science Academy

Machine Learning - Regressão

Regressão

- Modelos de Aprendizagem
- Fundamentos Teóricos
- Avaliação, Otimização, Regularização, Customizações
- Outros Conceitos Relacionados à Criação do Modelo
- Prática

Data Science Academy eduardo.ads1814@gmail.com 63a47926274fe5d3f2060075

O que é Regressão?

Aprovação de Crédito de um Indivíduo

Atributo	Valor
Sexo	Masculino
Idade	34
Salário Mensal	R$ 18.000,00
Anos no Emprego Atual	3
Anos de Residência	7
Saldo Bancário	R$ 32.671,94

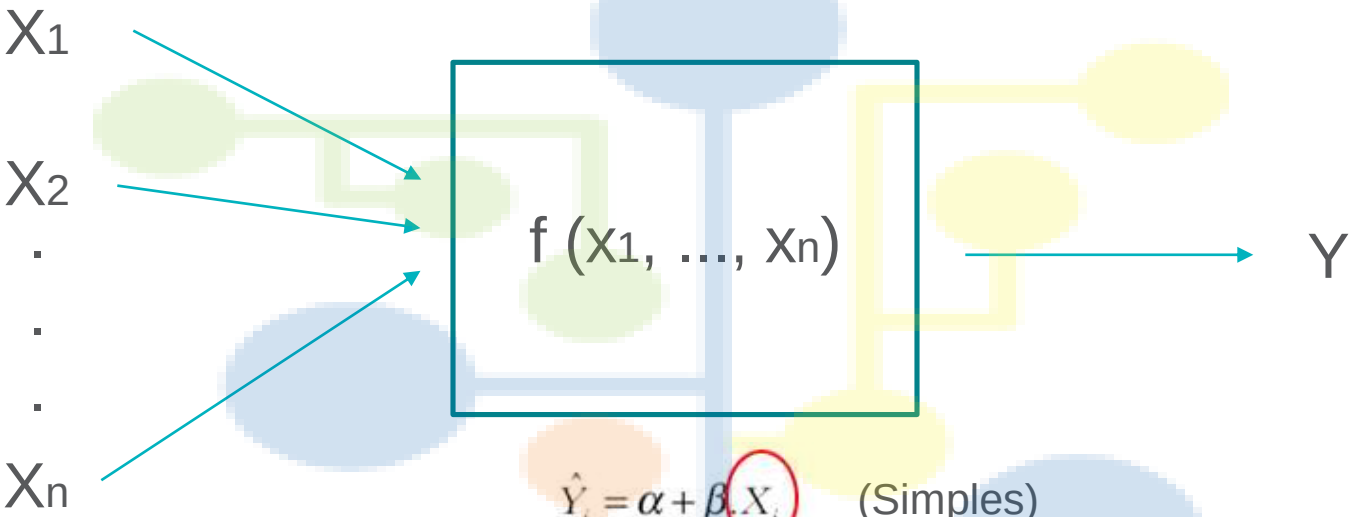
Classificação

- Decisão de crédito (Sim/Não)

Regressão

- Quantidade de crédito (dinheiro)

Modelos de Regressão



$$\hat{Y}_i = \alpha + \beta . X_i$$ (Simples)

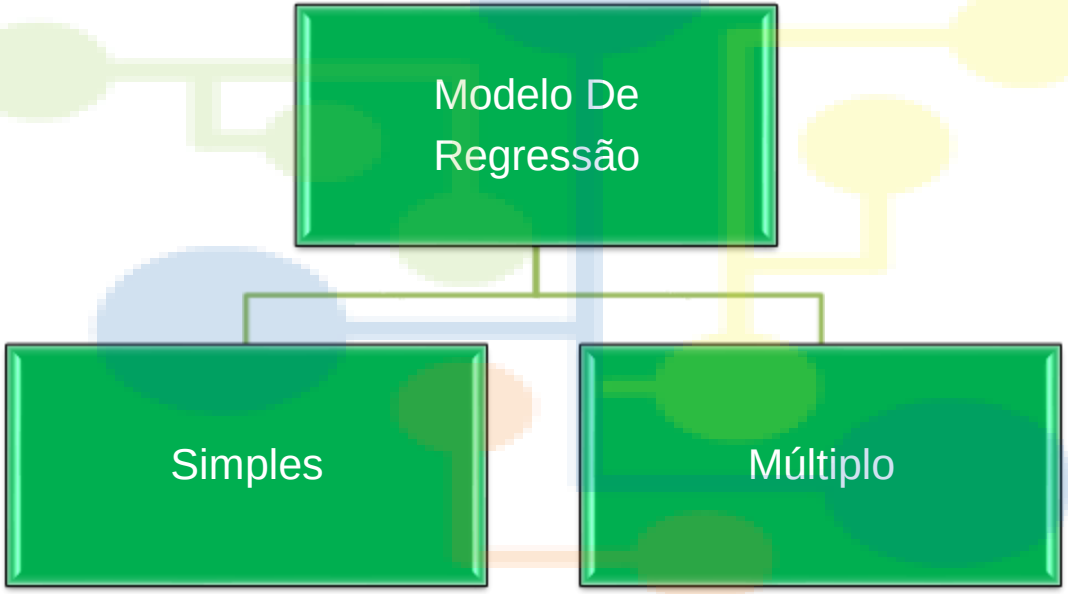
$$Y_i = a + b_1 . X_{1i} + b_2 . X_{2i} + \ldots + b_k . X_{ki} + u_i$$ (Múltiplo)

Uma **variável independente x**, explica a variação em outra variável, que é chamada **variável dependente y**. Este relacionamento existe em apenas uma direção:

variável independente (x) → variável dependente (y)

Análise de regressão é uma metodologia **estatística** que utiliza a relação entre duas ou mais variáveis quantitativas de tal forma que uma variável possa ser predita a partir de outra.

Tipos de Modelos de Regressão Linear



1 Variável Dependente Y
1 Variável Independente X

1 Variável Dependente Y
2 ou + Variáveis Independentes X, X_i

A análise de regressão compreende quatro tipos básicos de modelos:

- Linear Simples
- Linear Múltiplo
- Não Linear Simples
- Não Linear Múltiplo

Regressão Linear Simples

Regressão Linear Múltipla

Regressão Logística

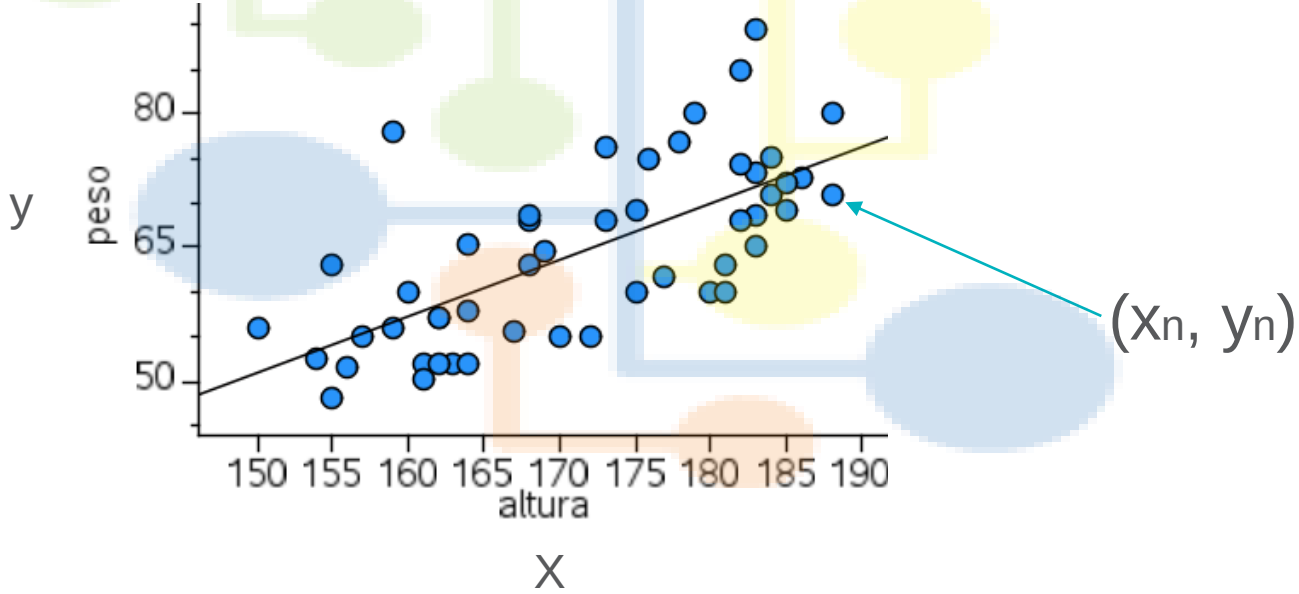
Qual o objetivo em se determinar a relação entre duas variáveis?

Prever a população futura de uma cidade simulando a tendência de crescimento da população no passado

Qual o objetivo em se determinar a relação entre duas variáveis?

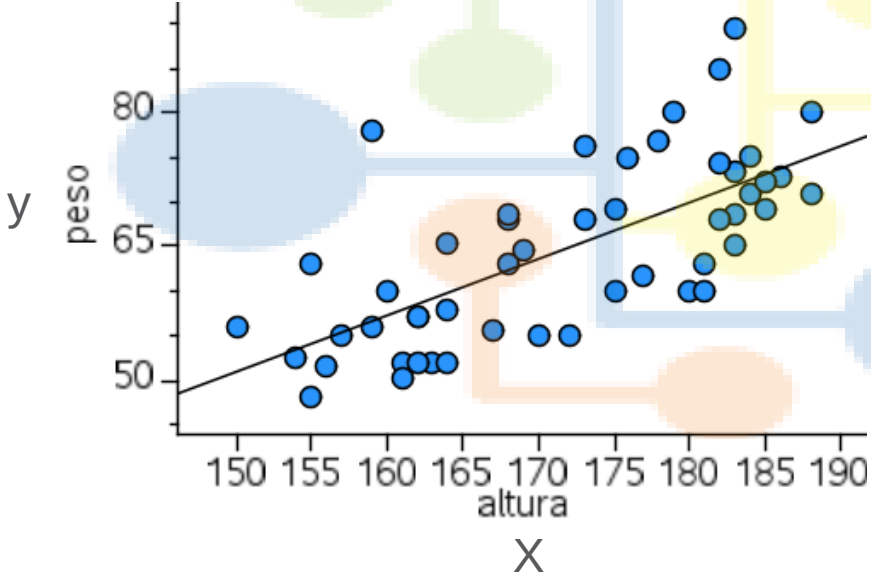
Produtividade (Y) de uma área agrícola é alterada quando se aplica certa quantidade (X) de fertilizante sobre a terra

Diagrama de Dispersão (Scatter Plot)



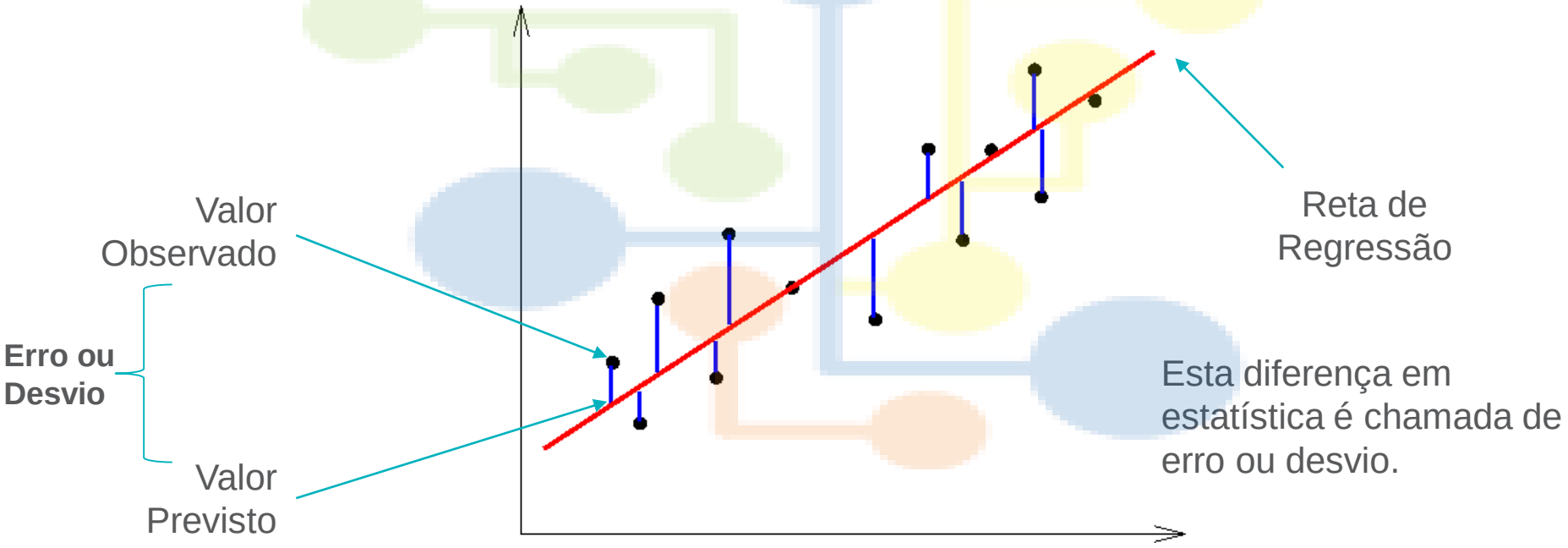
Modelo de Regressão

$$\hat{y} = a + bx$$

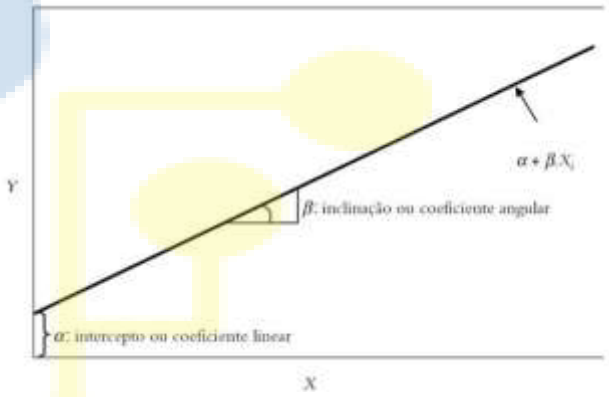


Reta de Regressão

Modelo de Regressão



$$\hat{y} = a + bx$$



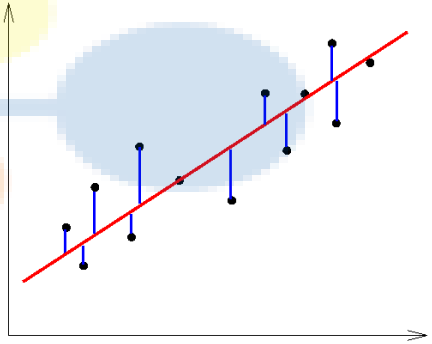
Onde:

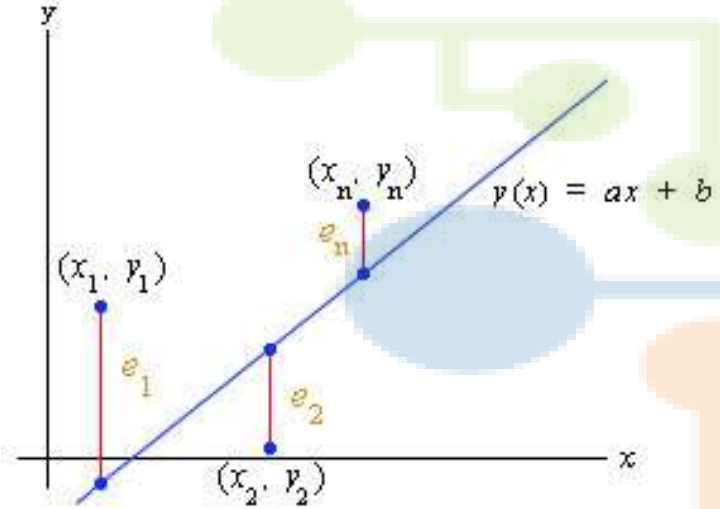
$\hat{y}$ = valor previsto de *y* dado um valor para *x*

x = variável independente

a = ponto onde a linha intercepta o eixo y

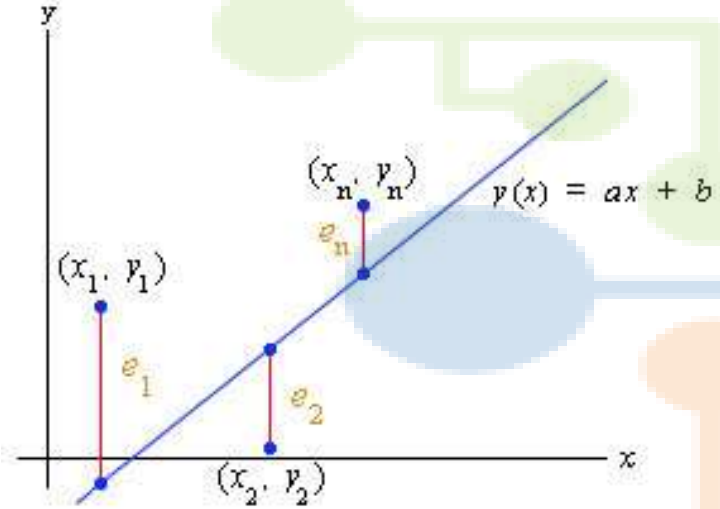
b = inclinação da linha reta





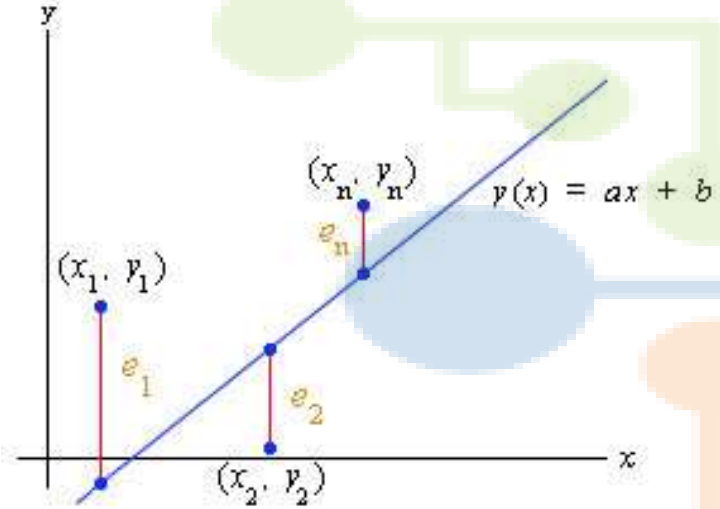
Método dos Mínimos Quadrados

Esse método definirá uma reta que minimizará a soma das distâncias ao quadrado entre os pontos plotados (X, Y) e a reta (que são os valores previstos de X’,Y’).



Método dos Mínimos Quadrados

- Erro de Estimativa
- Coeficiente de Determinação



Método dos Mínimos Quadrados

- Erro de Estimativa
- Coeficiente de Determinação

Coeficiente de Correlação

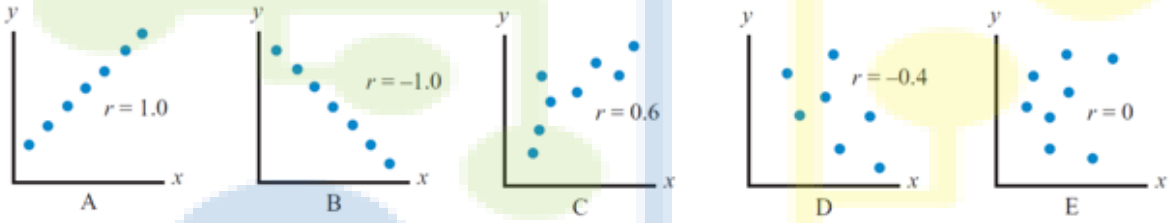


Gráfico A (*r* = 1.0): correlação positiva perfeita entre *x* e *y*

Gráfico B (*r* = -1.0): correlação negativa perfeita entre *x* e *y*

Gráfico C (*r* = 0.6): relação positiva moderada: y tende a aumentar se x aumenta, mas não necessariamente na mesma taxa observada no Gráfico A

Gráfico D (*r* = -0.4): relação negativa fraca: o coeficiente de correlação é próximo de zero ou negativo: y tende a diminuir se x aumenta

Gráfico E (*r* = 0): Sem relação entre x e y

Os valores de **r** variam entre **-1.0** (uma forte relação negativa) até **+1.0**, uma forte relação positiva.

Coeficiente de Correlação

O coeficiente de determinação indica o quanto a reta de regressão explica o ajuste da reta, enquanto que o coeficiente de correlação deve ser usado como uma medida de força da relação entre as variáveis

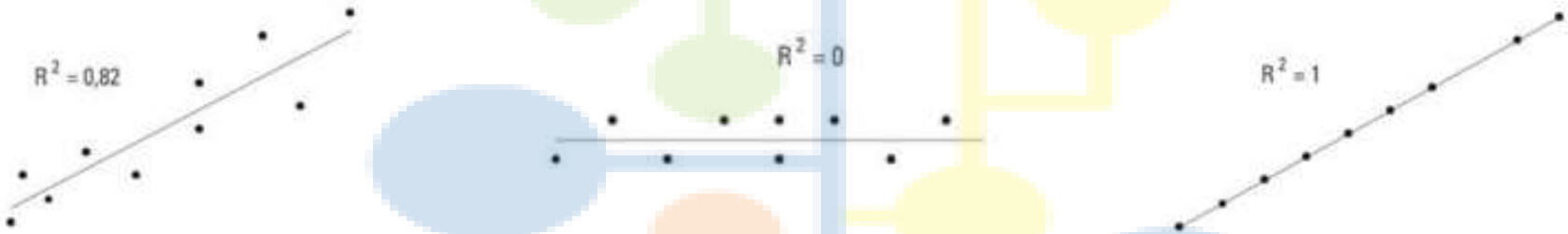
- Soma Total dos Quadrados (STQ) – Mostra a variação em Y em torno da própria média.
- Soma dos Quadrados de Regressão (SQR) – Oferece a variação de Y considerando as variáveis X utilizadas no modelo.
- Soma dos Quadrados dos Resíduos (SQU) – Variação de Y que não é explicada pelo modelo elaborado.

$$STQ = SQR + SQU$$

Nossa próxima etapa é compreender o poder explicativo do modelo de regressão

Coeficiente de Ajuste R^2

$$R^2 = \frac{SQR}{SQR + SQU} = \frac{SQR}{SQT}$$


$R^2 = 0,82$
$R^2 = 0$
$R^2 = 1$

O coeficiente de ajuste R2 não diz aos analistas se uma determinada variável explicativa é estatisticamente significante e se esta variável é a causa verdadeira da alteração de comportamento da variável dependente.

Data Science Academy eduardo.ads1814@gmail.com 63a47926274fe5d3f2060075

Data Science Academy

Avaliando o Modelo de Regressão

Típicos problemas que podem ser resolvidos com Regressão

- Quantos computadores serão vendidos no próximo mês?
- Quantas pessoas vão acessar nosso web site na próxima semana?
- Qual o salário de uma pessoa de acordo com a performance escolar?
- Qual o total de vendas relacionado ao número de seguidores em redes sociais?

Número de Funcionários Por Turno	Número de Seguidores nas Redes Sociais	Preço da Matéria-Prima (R$)	Cotação do Dólar		Total de Vendas (R$)
1400	54000	5000	3.44		1245900
1359	55000	5400	3.12		1302763
1402	55430	5300	3.50		1345119

Atributos ou Features
(X)

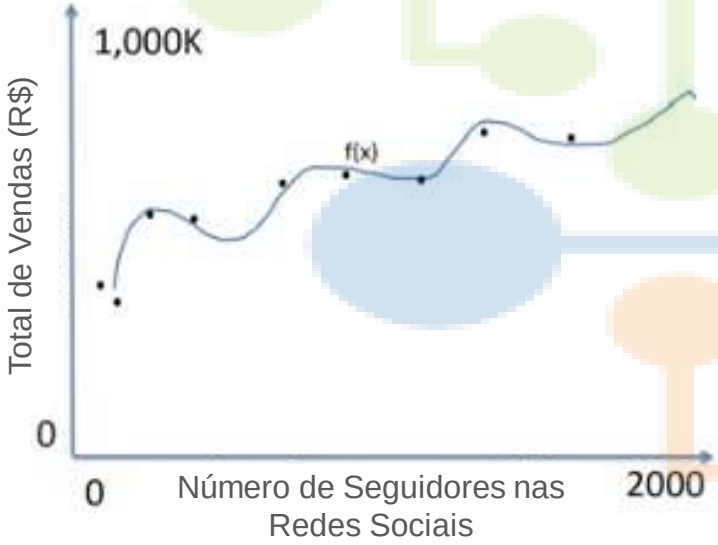
Variável Resposta
(y)

Data Science Academy eduardo.ads1814@gmail.com 63a47926274fe5d3f2060075

	Número de Seguidores nas Redes Sociais				Total de Vendas (R$)
	54000				1245900
	55000				1302763
	55430				1345119

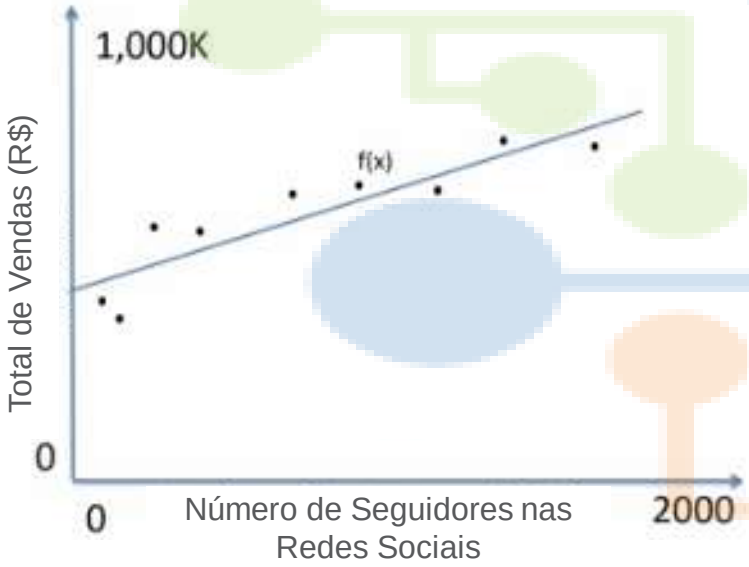
Atributo (X)

Variável Resposta (y)



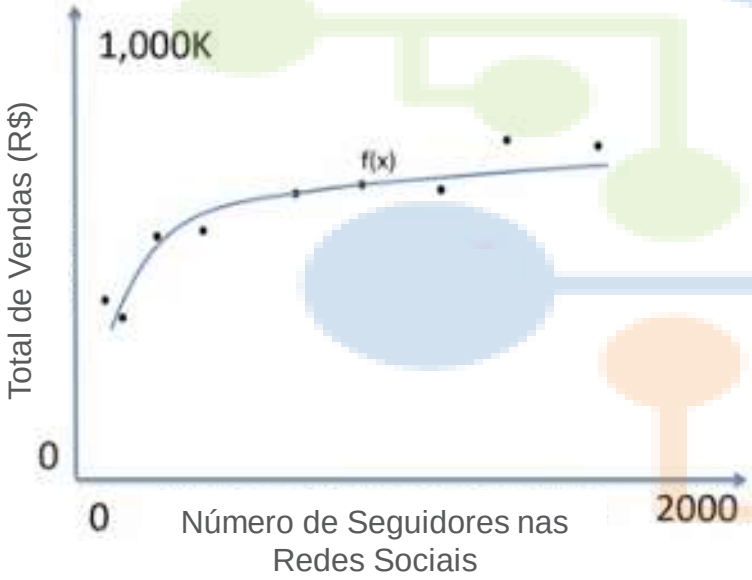
f(x) = function(Número de Seguidores)

Overfitting



f(x) = function(Número de Seguidores)

Underfitting



f(x) = function(Número de Seguidores)

Good Fit

	Número de Seguidores nas Redes Sociais			Total de Vendas (R$)	Total de Vendas Previsto (R$)
	54000			1245900	1278450
	55000			1302763	1302763
	55430			1345119	1320876

Atributos ou Features (X)

Variável Resposta (y)

Previsão f(x)

$y_i - f(x_i)$

$f(x_i) - y_i$

$| f(x_i) - y_i |$

$(y_i - f(x_i))^2$

$$\text{Mean absolute error (MAE)} = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - y_i|$$

$$\text{SSE/MSE} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2}$$

Método dos Mínimos Quadrados (Least Square Error)

Total de Vendas (R$)	Total de Vendas Previsto (R$)
1245900	1278450
1302763	1334789
1345119	1320876

Variável Resposta (y)

Previsão f(x)

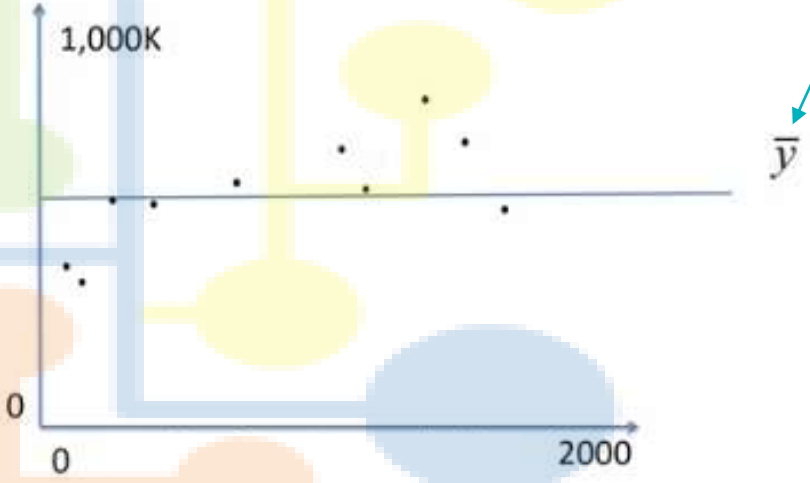
- (**SST – Sum Square Total**) Soma Total dos Quadrados (STQ) – Mostra a variação em Y em torno da própria média.

- (**SSR – Sum Square Regression**) Soma dos Quadrados de Regressão (SQR) – Oferece a variação de Y considerando as variáveis X utilizadas no modelo.

- (**SSE – Sum Square Error**) Soma dos Quadrados dos Resíduos (SQU) – Variação de Y que não é explicada pelo modelo elaborado.

$$SST = SSE + SSR$$

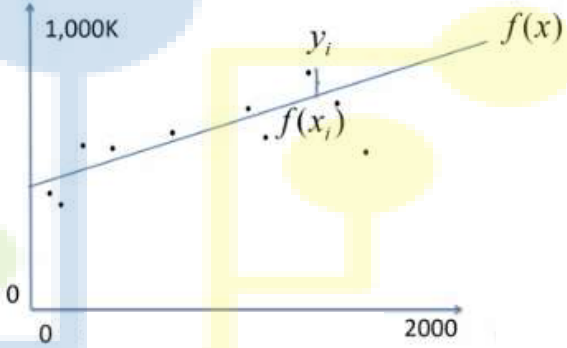
Média de y



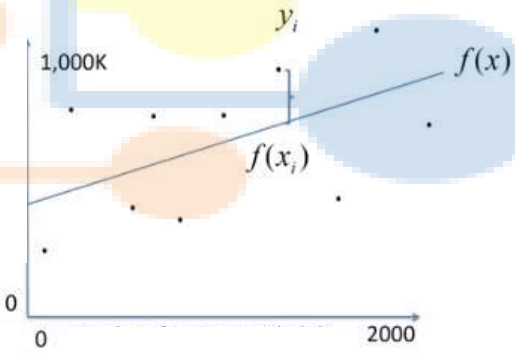
$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \bar{y})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$



$$SST = SSE + SSR$$



$$\frac{SSE}{SST}$$

Próximo de 0

Próximo de 1

$$1-\frac{SSE}{SST}$$

Próximo de 1

Próximo de 0

$$R^2 = 1-\frac{SSE}{SST}$$

Próximo de 1

Próximo de 0

$$SST = SSE + SSR$$

Se o SSR é alto e o SSE é baixo, o Modelo de Regressão explica bem a variação nas previsões

Se o SSR é baixo e o SSE é alto, o Modelo de Regressão não explica bem a variação nas previsões

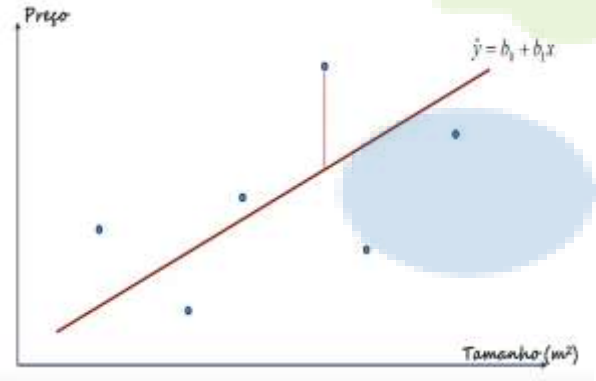
- **SSR = medida da variação que pode ser explicada**
- **SSE = medida da variação que não pode ser explicada**
- **SST = medida da variação total**

Data Science Academy eduardo.ads1814@gmail.com 63a47926274fe5d3f2060075

Data Science Academy

Regressão Linear Simples
x
Regressão Linear Múltipla

Regressão Linear Simples



Tamanho (m2)				Preço (R$)
105				89.000
120				145.000
115				123.000

Regressão Linear Múltipla

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Tamanho (m2)	Idade do Prédio (Anos)	Número Vagas na Garagem	Número de Quartos	Preço (R$)
105	15	2	2	89.000
120	4	3	3	145.000
115	8	2	3	123.000

Regressão Linear Múltipla

coeficientes

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Preço previsto

tamanho

Idade do imóvel

Interpretando Modelos de Regressão Linear Simples e Múltipla

- Teste F de Significância Global
- Testes de Significância Individuais
- Coeficientes R2 e R2 Ajustado
- Coeficientes

Teste F de Significância Global

O modelo é útil para prever o preço?

Estatística de regressão	
R múltiplo	0,66
R-Quadrado	0,44
R-quadrado ajustado	0,41
Erro padrão	132352,0
Observações	40

F de significação: teste F de significância global do modelo.
"Há evidências de que pelo menos uma variável no modelo está relacionada com o preço?"
Como **valor-p do teste F < 0,05**, há evidências estatísticas.

ANOVA

	gl	*SQ*	*MQ*	*F*	***F de significação***
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	**0,000**
Resíduo	37	6,481E+11	1,752E+10		
Total	39	1,162E+12			

Valor-p do teste F

	Coeficientes	*Erro padrão*	*Stat t*	*valor-P*	*95% inferiores*	*95% superiores*
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5

Testes de Significância Individuais

Quais variáveis estão realcionadas com o preço?

Estatística de regressão	
R múltiplo	0,66
R-Quadrado	0,44
R-quadrado ajustado	0,41
Erro padrão	132352,0
Observações	40

ANOVA

	gl	*SQ*	*MQ*	*F*	*F de significação*
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000
Resíduo	37	6,481E+11	1,752E+10		
Total	39	1,162E+12			

	Coeficientes	*Erro padrão*	*Stat t*	***valor-P***	*95% inferiores*	*95% superiores*
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	**0,000**	3620,0	9924,2
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	**0,028**	-36094,8	-2164,5

Há evidências estatísticas de relação de tamanho e idade com preço, pois **valores-p<0,05**.

Coeficientes R2 e R2 Ajustado

Qual percentual de variabilidade é explicado pelas variáveis usadas no modelo?

Estatística de regressão	
R múltiplo	0,66
R-Quadrado	**0,44**
R-quadrado ajustado	0,41
Erro padrão	132352,0
Observações	40

R^2: 44% da variabilidade do preço é explicada pelo modelo com tamanho e idade.

R^2 ajustado: sempre é um pouco menor que o R^2; deve ser utilizado para comparar modelos com diferentes quantidades de variáveis.

ANOVA

	gl	*SQ*	*MQ*	*F*	*F de significação*
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000
Resíduo	37	6,481E+11	1,752E+10		
Total	39	1,162E+12			

	Coeficientes	*Erro padrão*	*Stat t*	*valor-P*	*95% inferiores*	*95% superiores*
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5

Coeficientes

Valores que compõe a equação.

Estatística de regressão	
R múltiplo	0,66
R-Quadrado	0,44
R-quadrado ajustado	0,41
Erro padrão	132352,0
Observações	40

ANOVA

	gl	*SQ*	*MQ*	*F*	*F de significação*
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000
Resíduo	37	6,481E+11	1,752E+10		
Total	39	1,162E+12			

	Coeficientes	*Erro padrão*	*Stat t*	*valor-P*	*95% inferiores*	*95% superiores*
Interseção	**440107,0**	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	**6772,1**	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2
idade do prédio	**-19129,7**	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5

$$\hat{y} = 440107 + 6772{,}1 \cdot tamanho - 19129{,}7 \cdot idade$$

Regras Gerais

Modelo é útil para prever o preço, se o valor-p do teste F é menor que 0,05.

O R2 indica quanto da variabilidade de y é explicado pelas variáveis preditoras. Pode ser necessário incluir mais variáveis no modelo para aumentar este coeficiente.

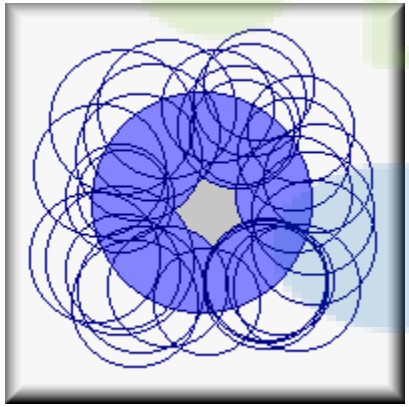
Há evidências de que uma variável está relacionada com o valor previsto, se o valor-p for menor que 0,05.

O objetivo da regressão é encontrar os coeficientes que permitem construir a equação de regressão e fazer as previsões.

Data Science Academy eduardo.ads1814@gmail.com 63a47926274fe5d3f2060075

Data Science Academy

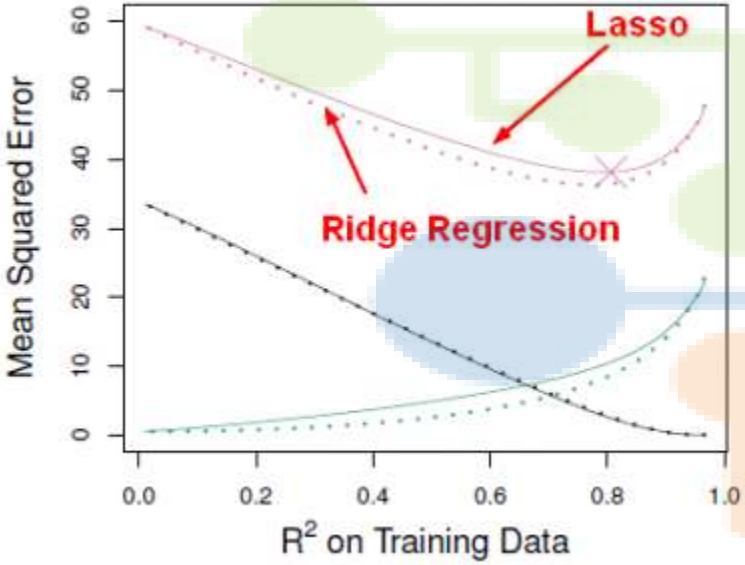
Regularização



Isso significa que muitas variáveis seriam ajustadas e o modelo ficaria super estimado, com uma variância infinita , sendo inviável o método dos mínimos quadrados

Temos basicamente 3 métodos que nos auxiliam quando o número de variáveis é maior que o número de observações:

- Seleção de um subconjunto de coeficientes
- Reduzir a dimensão
- Reduzir o valor dos coeficientes (Regularização)



Uma regressão com diversos coeficientes regressores torna o modelo como um todo muito mais complexo e pode tirar características de interpretabilidade

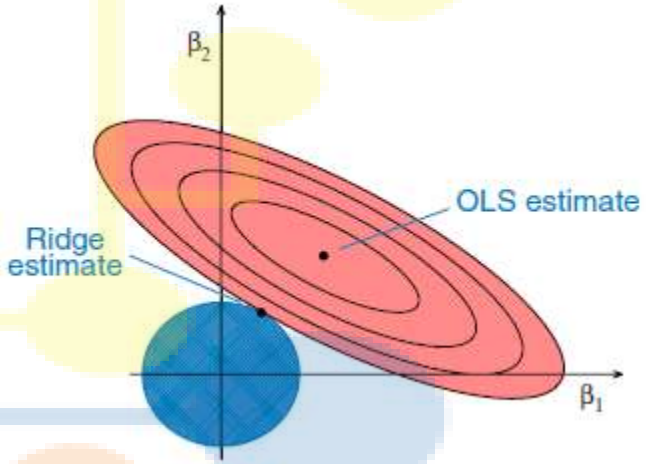
Shirinkage Methods
(Métodos de Encolhimento)

Ridge Regression

LASSO Regression
(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)

Ridge Regression

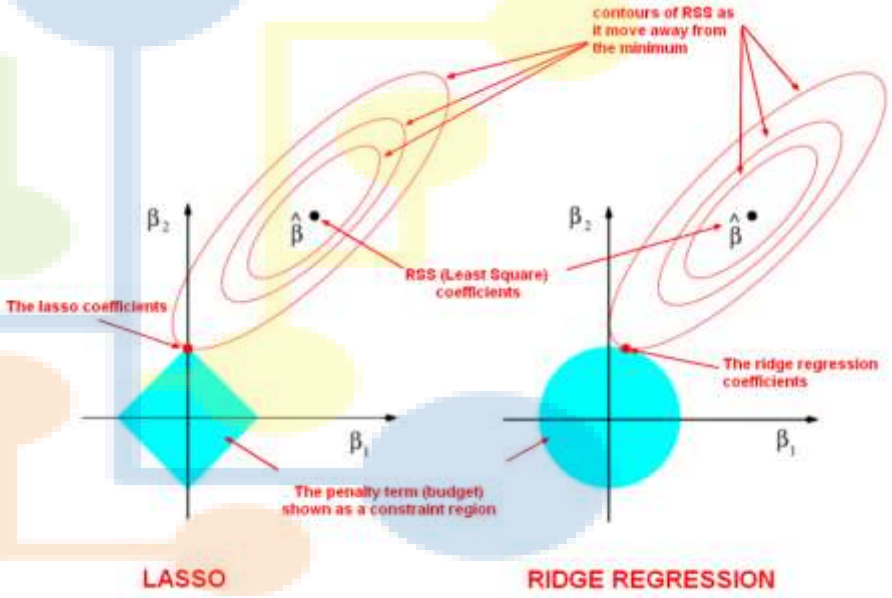
A Ridge Regression é um método de regularização do modelo que tem como principal objetivo suavizar atributos que sejam relacionados uns aos outros e que aumentam o ruído no modelo (multicolinearidade).

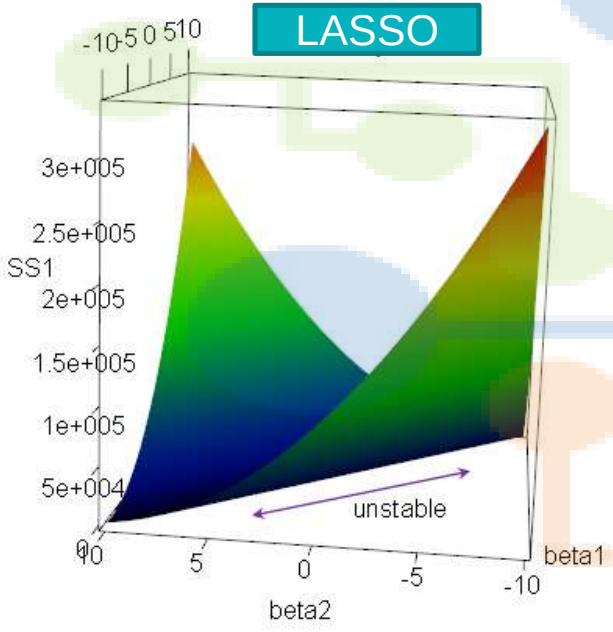


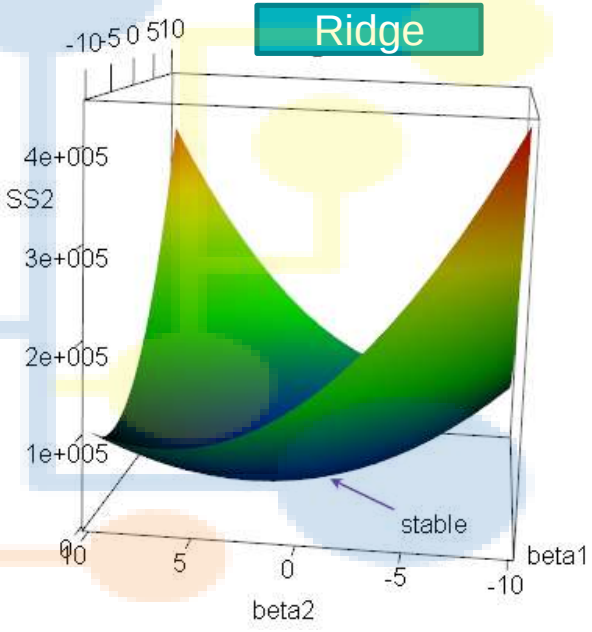
LASSO Regression

(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)

O LASSO tem o mesmo mecanismo de penalização dos coeficientes com um alto grau de correlação entre si, mas que usa o mecanismo de penalizar os coeficientes de acordo com o seu valor absoluto.



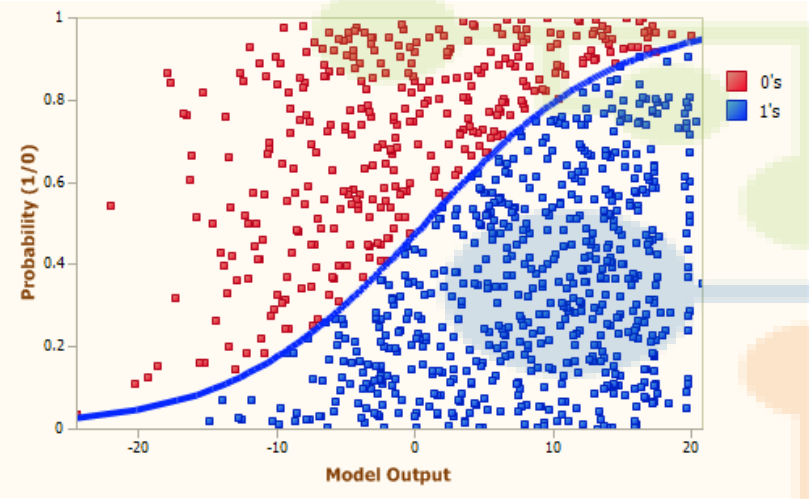

LASSO
-10 -5 0 5 10
3e+005
2.5e+005
SS1
2e+005
1.5e+005
1e+005
5e+004
0
unstable
10
5
0
-5
-10
beta1
beta2


Ridge
-10 -5 0 5 10
4e+005
SS2
3e+005
2e+005
1e+005
0
stable
10
5
0
-5
-10
beta1
beta2

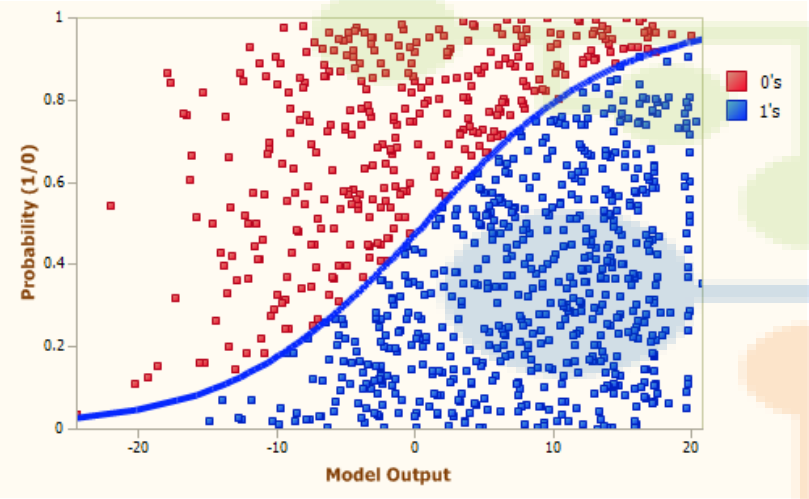
Data Science Academy eduardo.ads1814@gmail.com 63a47926274fe5d3f2060075

Data Science Academy

Regressão Logística



A regressão logística é uma técnica estatística que tem como objetivo modelar, a partir de um conjunto de observações, a relação “logística” entre uma variável resposta e uma série de variáveis explicativas numéricas (contínuas, discretas) e/ou categóricas.



A regressão logística é amplamente usada em ciências médicas e sociais, e tem outras denominações, como **modelo logístico**, **modelo logit**, e **classificador de máxima entropia.**

Na Regressão Logística, a variável resposta é binária

1 → acontecimento de interesse (sucesso)
0 → acontecimento complementar (insucesso)

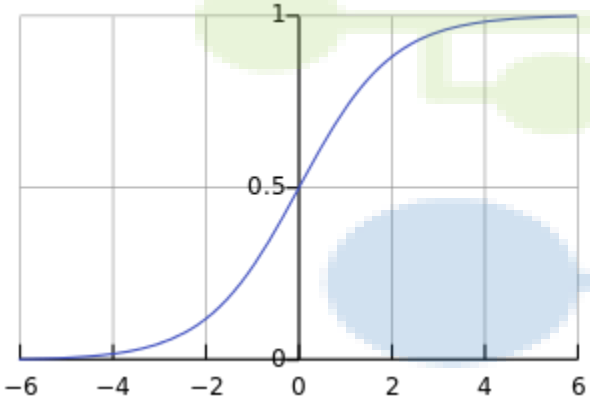
$$g(x) = \ln\left(\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right)$$

$$g(x) = ln\left(\frac{\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}{1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}\right) = ln\left(\frac{\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}{\frac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}\right)$$

Transformação logit

$$g(x) = ln\left(e^{\beta_0+\beta_1 x}\right) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Logaritmo



Regressão Logística é útil para modelar a probabilidade de um evento ocorrer como função de outros fatores. É um modelo linear generalizado que usa como função de ligação a função logit.

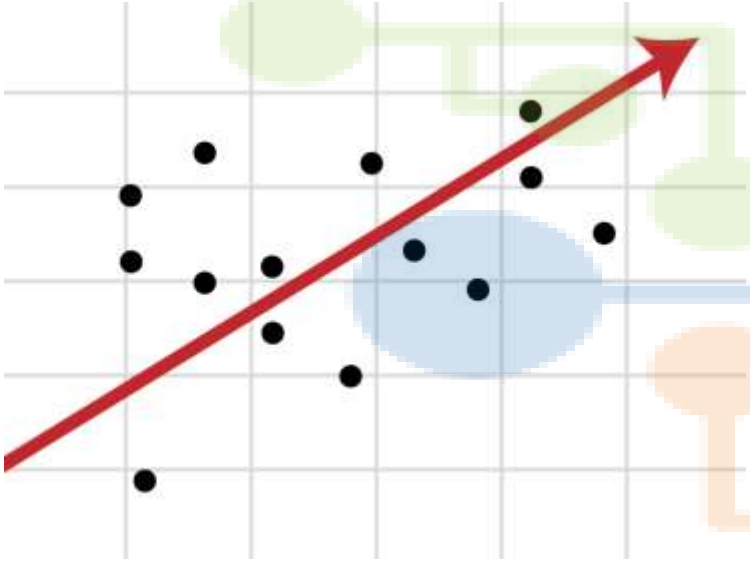
A regressão logística é utilizada em áreas tais como:

- Em medicina, permite por exemplo determinar os fatores que caracterizam um grupo de indivíduos doentes em relação a indivíduos saudáveis.
- Na área de seguros, permite encontrar frações de clientes que sejam sensíveis a determinada política securitária em relação a um dado risco particular.
- Em instituições financeiras, pode detectar os grupos de risco para a subscrição de um crédito.
- Em econometria, permite explicar uma variável discreta, como por exemplo as intenções de voto em atos eleitorais.

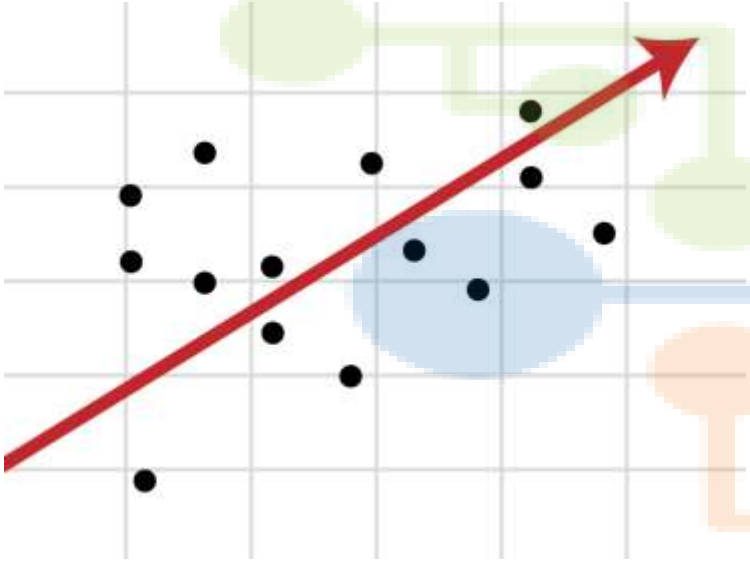
Data Science Academy eduardo.ads1814@gmail.com 63a47926274fe5d3f2060075

Data Science Academy

Regressão
Vantagens e Desvantagens



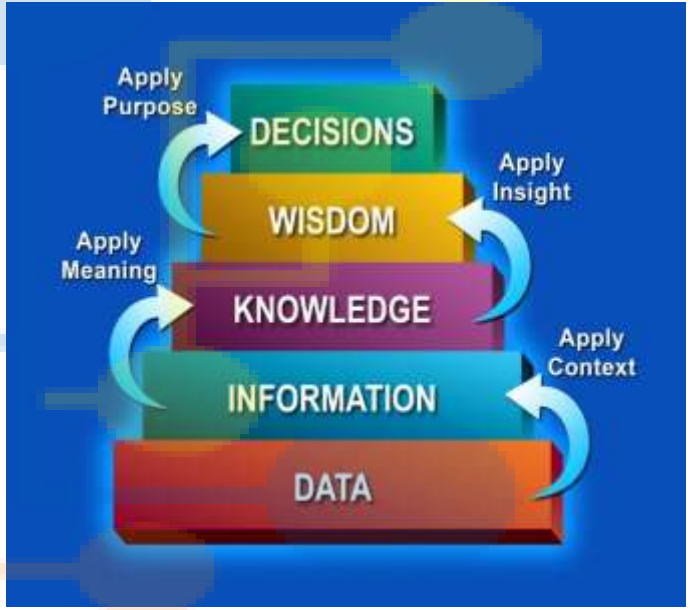
- **Simple Linear Regression**
- **Multiple Linear Regression**
- **Ridge Regression**
- **Lasso Regression**
- **Logistic Regression**
- Polynomial Regression
- Stepwise Regression
- Elastic Net Regression



Não coloque a culpa no modelo, se você não entregar o que ele está esperando

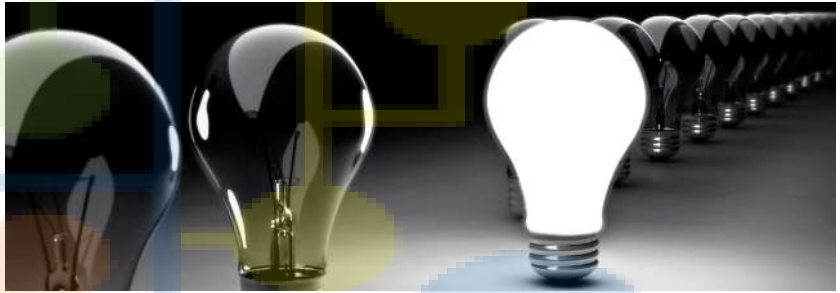
Previsão do Futuro

Apoio à Tomada de Decisão



Correção de Erros

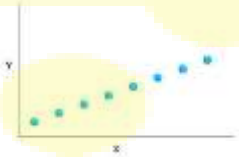
Novos Insights



Importantes Desvantagens:

Importantes Desvantagens:

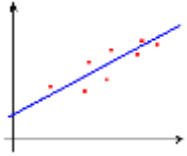
- Apenas consideram relacionamento linear



- Toma como base a média da variável dependente

- Sensível a Outliers

- Regressão Linear assume que os dados são independentes



Data Science Academy eduardo.ads1814@gmail.com 63a47926274fe5d3f2060075