Samedi, mars 27, 21

- Lista de ejercicios

2.2 En una habitación 10 personas tienen insignias numeradas del 1 al 10. Se eligen 3 personas al azar y se les pide que dejen la habitación simultáneamente y se anotan los números de las insignias.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número menor de las insignias sea 5?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número mayor de las insignias sea 5?

Solución:

El experimento aleatorio es elegir 3 personas aleatoriamente de la habitación y se anotan los números de las insignias. Esto es lo mismo que elegir 3 números de los 10 que hay en la habitación. Por lo tanto, el espacio muestral tiene:

$$N(S) = C_{10}^{3} = \frac{10!}{(10!-3!)\cdot(3!)} = \frac{10!}{7!\cdot 3!}$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}\cdot 3!} = \frac{720}{6} = \underline{120}$$

a) Definimos el suceso A como sigue:

A = { el número menor de las insignias anotadas sea 5 }

Los elementos del evento A son conjuntos de 3 números, uno de los cuales es el número 5 y los restantes son elementos del conjunto (6 , 7 , 8 , 9 , 10); Luego:

$$N(A) = 1 \times C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

b) El suceso B se define por:

B = { el número mayor de las insignias anotadas sea 5 }

Los elementos del ~~conjunto~~ suceso B son conjuntos de 3 números, una de los cuales es el número 5 y los restantes son elementos del conjunto { 1, 2, 3 , 4 }, Es decir:

$$N(B) = 1 \times C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{12}{2!} = 6$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

2.4) Un cargamento de 1500 lavadoras contiene 400 defectuosas y 1100 no defectuosas. Se ~~elige~~ eligen al azar 200 lavadoras (sin sustitución y se clasificara

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren exactamente 90 artículos defectuosos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren al menos 2 artículos defectuosos?

Solución:

El experimento aleatorio es escoger 200 lavadoras (sin sustitución) de las 1500 lavadoras del cargamento. Entonces, el número de elementos del espacio muestral es:

$$N(S) = \binom{1500}{200} = \frac{1500!}{1300! \cdot 200!}$$

a) Sea $A = \{$ se encuentra exactamente 90 lavadoras defectuosas $\}$.

$$N(A) = \binom{400}{90}\binom{1100}{100}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{\binom{400}{90}\binom{1100}{100}}{\binom{1500}{200}}$$

b) Sea $B = \{$ se encuentre al menos 2 lavadoras defectuosas $\}$

Sabemos que $P(B) = 1 - P(\bar{B})$, $\bar{B} = \{$se encuentra a lo más

$$N(\bar{B}) = \binom{400}{0}\binom{1100}{200} + \binom{400}{1}\binom{1100}{199}$$

Por lo tanto:

$$P(B) = 1 - \frac{N(\bar{B})}{N(S)} = 1 - \frac{\binom{1100}{200} + 400\binom{1100}{199}}{\binom{1500}{200}}$$

(2.8) Un producto se arma en tres etapas. En la primera etapa hay 5 líneas de armado, en la segunda hay 4 líneas de armado, y en la tercera hay 6 líneas de armado. ¿De cuántas maneras puede moverse el producto en el proceso de armado?

Solución: En la primera etapa, el producto puede moverse de 5 formas: Para cada una de estas 5 formas, el producto puede moverse de 4 formas, entonces por el principio de la multiplicación en las dos primeras etapas el producto se armará de 5×4 formas distintas. Y para cada una de las maneras anteriores, en la tercera etapa el producto puede moverse de 6 formas. Por lo tanto, nuevamente por el principio de multiplicación, el producto se moverá de $5 \times 4 \times 6$, entonces, hay 120 formas diferentes en el proceso de armado.

(2.13) Supongase que de N objetos se eligen n al azar, con sustitución. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún objeto sea elegido más de una vez? Supongase que $n < N$.

Solución:

$$N(S) = N^n$$

Definimos:

$$A = \{\text{ningún objeto sea elegido más de una vez}\}$$

tenemos:

$$N(A) = N(N-1)\cdots(N-n+1)$$
$$= \frac{N!}{(N-n)!} = {}_N P_n$$

Por lo tanto:

$$P(A) = \frac{\frac{N!}{(N-n)!}}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!\cdot N^{n-1}}$$

(2.14) De las letras a, b, c, d, e, f; ¿Cuántas palabras de clave de 4 letras se pueden formar si:

a) Ninguna letra se puede repetir?
b) cualquier letra se puede repetir cualquier número de veces?

Solución:

Tenemos el conjunto $[a, b, c, d, e, f]$

a) Puesto que ninguna letra debe repetirse. Entonces, la primera letra de la clave puede ser cualquiera de las 6 letras, es decir la ~~pa~~ primera letra puede escojerse de 6 formas diferentes; Para cada una de estas, la segunda letra de la clave se escogerá de 5 formas y así sucesivamente se tendrá:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = {}_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$ formas.

b) Ya que todas las letras de la clave pueden repetirse cualquier número de veces, tenemos:

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 \text{ formas}$$

(2.15) Suponga que $\binom{99}{5} = a$ y $\binom{99}{4} = b$.
Expresar $\binom{100}{95}$ en función de a y b.

Solución:

$$\binom{100}{95} = \binom{100}{100-5} = \binom{100}{5}$$

pero $\binom{100}{5} = \binom{99}{4} + \binom{99}{5} = a + b$

dicho lo anterior

$$\boxed{\binom{100}{95} = a + b}$$

(2.16) Una caja contiene esferas numeradas 1, 2, ..., n. Se escogen dos esferas al azar. Encontrar la probabilidad de que los números sobre las esferas sean enteros consecutivos si:

a) Las esferas se escogen sin sustitución.
b) Las esferas se escogen con sustitución.

Solución:

a) $N(S) = \binom{n}{2}$ elementos.

Sea $A = \{$ Los números sobre las esferas son consecutivos $\}$

$N(A) = n-1$, ya que hay $n-1$ pares consecutivos $(1,2), (2,3), (3,4), \ldots, (n-1, n)$.

Luego,

$$P(A) = \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1}{\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}} = \frac{(n-1)(n-2)!\cdot 2}{n!}$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot 2}{n!} = \frac{\cancel{(n-1)!}\cdot 2}{\cancel{(n-1)!}\cdot n} = \frac{2}{n}$$

b) Las esferas se escogen con sustitución; Ahora el espacio muestral tiene:

$$N(S) = n \times n = n^2 \text{ elementos.}$$

En este caso

$N(A) = 2(n-1)$, Pues hay $(n-1)$ pares de números consecutivos que se permuten.

$$P(A) = \frac{2(n-1)}{n^2}$$

(2.17) ¿Cuantos subconjuntos que contengan al menos un elemento se pueden formar de un conjunto de 100 elementos?

Solución: El conjunto tiene 100 elementos. Entonces, el número de subconjuntos, incluyendo al conjunto ϕ, de este conjunto es 2^{100}, y como queremos sólo los ~~conjunt~~ subconjuntos que tienen al menos un elemento, este número será:

$$\underline{2^{100} - 1}$$

(2.18) Entre los números 1, 2, ..., 50 se escoge un número al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 o por 8?

Solución:

$$N(S) = 50$$

Definimos:

$A = \{$ el número es divisible por 6 $\}$
$B = \{$ el número es divisible por 8 $\}$

Luego:

$$\begin{cases} A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\} \\ N(A) = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \{8, 16, 24, 32, 40, 48\} \\ N(B) = 6 \end{cases}$$

Entonces $N(A \cap B) = 2$

Por lo tanto $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{8}{50} + \frac{6}{50} - \frac{2}{50}$$

$$= \frac{12}{50}$$

2.21 Un lote contiene n artículos. Si se sabe que r artículos son defectuosos y se inspeccionan en un orden aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad que el k-ésimo artículo ($k \geq r$) inspeccionado sea el último defectuoso en el lote?

Solución: se tiene n artículos, r de los cuales son defectuosos.

Sea $A = \{$el k-ésimo artículo ($k \geq r$) inspeccionado sea el último defectuoso del lote$\}$

$B = \{$en los $k-1$ artículos inspeccionados hay $r-1$ defectuosos$\}$

$D = \{$el k-ésimo artículo inspeccionado es defectuoso$\}$

El evento A se escribe en forma equivalente como:

$$A = B \cap D$$

$$P(A) = P(B) \cdot P(D/B)$$

$$= \frac{\binom{r}{r-1}\binom{n-r}{k-1-(r-1)}}{\binom{n}{k-1}} \times \frac{1}{n-k+1}$$