3er. examen. Mercredi, juin 23, 2021

(1)

Para la demostración tenemos:

$$V(Z) = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 \cdot \sigma^2 \cdot x + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 \sigma^2 y$$

- Primero desarrollamos H, como una serie de Taylor en el punto $(\mu x, \mu y)$ con uno y dos términos:

$$Y = H(\mu) + (X-\mu)\, H'(\mu) + \frac{(X-\mu)^2 H''(\mu)}{2} + R_1$$

donde: R_1 es un resto.

- Ahora, descartamos el término resto R_1, entonces, tomando el valor esperado en ambos miembros, tenemos:

$$\boxed{\mathcal{E}(Y) \simeq H(\mu) + \frac{H''(\mu)}{2}\sigma^2}$$

Puesto que $\mathcal{E}(X-\mu) = 0$

- Ahora, volvemos a desarrollar H en una serie de Taylor pero para $x = \mu$ con un término

$$Y = H(\mu) + (X-\mu)\, H'(\mu) + R_2.$$

- Desechamos el resto R_2 y tomamos la varianza en ambos lados, tenemos:

$$\boxed{V(Y) \simeq [H'(\mu)]^2 \sigma^2}$$

El resultado anterior puede extenderse a una función de n variables aleatorias independientes, esto es:

$$Z = H(X_1, \ldots, X_n)$$

Si:

$E(X_i) = \mu_i,$

$V(X_i) = \sigma_i^2,$ tenemos las siguientes aproximaciones, suponiendo que todas las derivadas existan:

$$E(Z) \simeq H(\mu_1, \ldots, \mu_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial X_i^2} \cdot \sigma_i^2$$

$$V(Z) \simeq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2$$

Donde, las derivadas parciales son evaluadas en el punto $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Por último, desarrollamos la expresión:

$$V(Z) \simeq \left[\frac{\partial H}{\partial x} \right]^2 \sigma_x^2 + \left[\frac{\partial H}{\partial y} \right]^2 \sigma_y^2$$

2 - Definimos a:

P = utilidad neta de fabricante por artículo.

Tenemos que aplicar $f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$$P = \begin{cases} -2, & \text{si } x \leq 0.9 \\ 3, & \text{si } x > 0.9 \end{cases}, \quad f\,dp = f(x) = e^{-x}, x > 0$$

Para lo cual:

$$E(P) = (-2)\cdot P(X \leq 0.9) + (3)\cdot P(X > 0.9)$$

$$= (-2)\int_0^{0.9} e^{-x}\,dx + 3\int_{0.9}^{\infty} e^{-x}\,dx$$

$$= (-2)(-e^{-x})\Big|_0^{0.9} + 3(-e^{-x})\Big|_{0.9}^{\infty}$$

$$= -2(1-e^{-0.9}) + 3e^{-0.9}$$

$$= -2 + 5e^{-0.9}$$

$$= -2 + 5(0.40657)$$

$$= 0.03285$$

(3):

x = número de artículos defectuosos seleccionados.

$R_x = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

a) Se tiene una distribución binomial con

$p = 0.2$
$n = 10$

$$P(x \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \binom{10}{0}(0.2)^0(0.8)^{10} + \binom{10}{1}(0.2)(0.8)^9$$

$$= 0.268 + 0.107 = 0.3758$$

b) Aproximando la distribución binomial de X por una distribución de Poisson con parámetro:

$$\lambda = (0.2) \cdot 10 = 2$$

Tenemos lo siguiente $P(X_0 = x) = P(X_p = x)$

$$= \frac{2^x \cdot e^{-2}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

y luego: $P(X_p \leq 1) = 1 - P(X_p \geq 2)$ → Tabla anexa

$$= 1 - 0.59399 = 0.406$$

x	$\frac{2^x e^{-2}}{x!}$
2	0.27067
3	0.18044
4	0.09022
5	0.03608
6	0.01202
7	0.00343
8	0.00085
9	0.00019
10	0.00003

$\therefore P(X_P \geq 2) = 0.593937$ ✗

4

b) Definimos

T es $N(50, 4)$

Calculamos:

$$P(48 < T < 53) = P\left(\frac{48-50}{2} < \frac{T-\mu}{\sigma} < \frac{53-50}{2}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 1.5)$$

$$= \Phi(1.5) - \Phi(1)$$

$$= 0.77452$$ ✗

1) a) Tenemos X es $N(0,1)$ y $Y = |X|$

Entonces:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y)$$

$$= \Phi(y) - \Phi(-y) = 2\Phi(y) - 1 \quad , y \geq 0$$

Por lo tanto, su f.d.p es

$$g(y) = G'(y) = 2\Phi'(y) = 2\phi(y)$$

o sea:

$$g(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2}{2}} \quad , y \geq 0$$

luego,

$$\mathcal{E}(Y) = \int_0^\infty y\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{\frac{-y}{2}} \, dy$$

si hacemos un cambio de variable

$$\frac{y^2}{2} = u \quad , \quad y\,dy = du$$

$$\mathcal{E}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-u} \cdot du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Calculamos:

$$\mathcal{E}(Y^2) = \int_0^\infty y^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2}{2}} \cdot dy$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{N \to \infty} \int_0^N y^2 e^{\frac{-y^2}{2}} \, dy$$

Haciendo un cambio de variable

$$u = y \qquad dv = y\, e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$
$$du = dy \qquad v = -e^{-y^2/2}$$

$$\mathcal{E}(Y^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{N \to \infty} \left(-y\, e^{-\frac{y^2}{2}} \right)\Big|_0^N + \int_0^N e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-0+0) + \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$$

$$V(Y) = \mathcal{E}(Y^2) - [\mathcal{E}(Y)]^2$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi}$$

5 $f(x) = \frac{1}{2} e^{|x|}$, $-\infty < x < \infty$

a) Calculamos el límite:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2} e^{|x|} \right) = \text{div} \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2} e^{|x|}$$

$$= \text{div}$$

Dicho lo anterior, $f(x)$ no es f.d.p, por lo cual no podemos calcular el ~~punto~~ inciso a y b