Mercredi, ~~mars~~ avril 12, 2021

3.2.- Dos tubos defectuosos se confunden con dos buenos. Los ~~tu~~ tubos se ~~aprueban~~ uno por uno, hasta encontrar los defectuosos:

a) Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la segunda prueba?

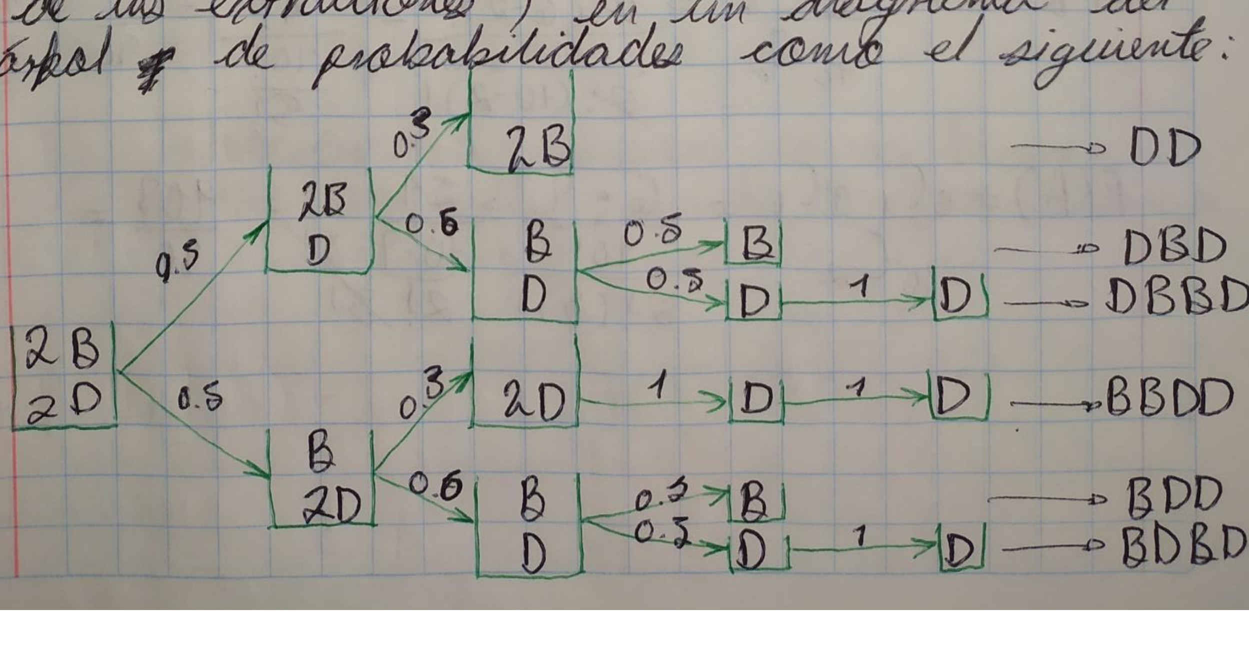
b) Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la tercera prueba?

c) Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la cuarta prueba?

d) Agregue los números obtenidos anteriormente en a), b), c). ¿Es sorprendente el resultado?

Solución:

Poniendo los resultados sucesivos del experimento (de las extracciones) en un diagrama del árbol ~~#~~ de probabilidades como el siguiente:



De lo anterior podemos decir:

a) $P(A) = P(DD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

b) $P(B) = P(BDD) + P(DBD)$
$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$

c) $P(C) = P(BBDD) + P(BDBD) + P(DBBD)$
$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\right)$
$= \frac{1}{2}$

d) Se cumple que la suma de a) con b) y c) es la unidad:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

3.5.- Supóngase que A y B son dos sucesos independientes asociados con un experimento. Si la probabilidad de que A o B ocurra igual a 0.6, mientras que la probabilidad de que A ocurra es igual a 0.4, determinar la probabilidad de que B ocurra:

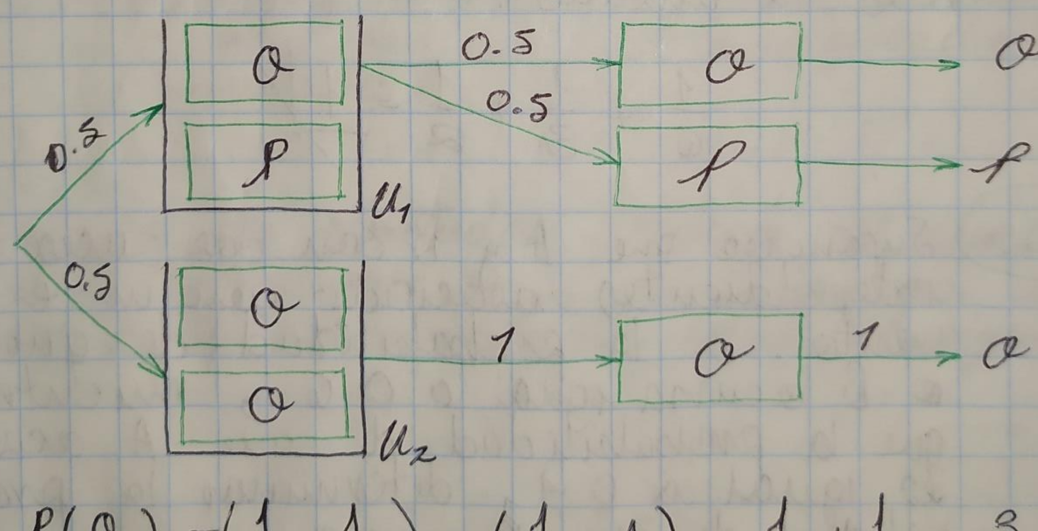
Solución:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6$
$0.6 = P(A) + P(B)(1 - P(A))$
$0.6 = 0.4 + P(B)(1 - 0.4)$
$\therefore$
$P(B) = \frac{0.6 - 0.4}{0.6} = \frac{1}{3}$

3.7.- Supóngase que tenemos 2 urnas, 1 y 2, cada una con dos cajones. La urna 1 tiene una moneda en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la urna 2 tiene una moneda de oro en ambos cajones.
Se escoje una urna al azar; y de esta se escoje una cajón al azar. La moneda encontrada en este cajón resulta ser de oro.
¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la urna 2?

Solución:

O = Moneda de oro
P = Moneda de plata



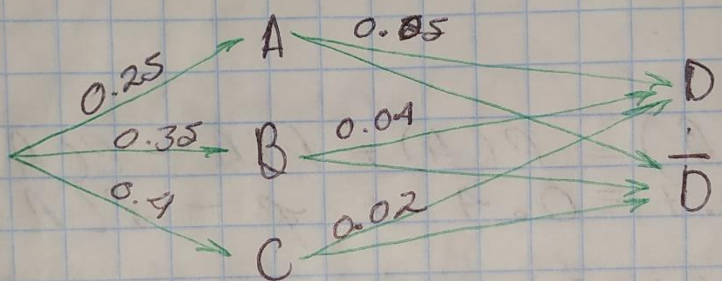
$$P(O) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 1\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(U_2 \mid O) = \frac{P(O \mid U_2)\cdot P(U_2)}{P(O)}$$

$$= \frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

3.9.- En una fábrica de pernos, las máquinas A, B y C fabrican 25, 35 y 40 porciento de la producción total, respect. De lo que producen, 5, 4 y 2 porciento son pernos defectuosos. Se escoje un perno al azar y se encuentra que es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad que el perno provenga de la máquina A, B y C?

Solución



de donde:

$$P(D) = (0.25)(0.05) + (0.35)(0.04) + (0.4)(0.02)$$
$$= 0.0125 + 0.014 + 0.008$$
$$= 0.0345$$

Por lo tanto:

$$P(A|D) = \frac{P(A) \cdot P(D|A)}{P(D)} = \frac{(0.25)(0.05)}{0.0345} = 0.362$$

$$P(B|D) = \frac{P(B) \cdot P(D|B)}{P(D)} = \frac{(0.35)(0.04)}{0.0345} = 0.406$$

$$P(C|D) = \frac{P(C) \cdot P(D|C)}{P(D)} = \frac{(0.4)(0.02)}{0.0345} = 0.232$$

3.10.- Sean A y B dos sucesos asociados con un experimento. Supongase que $P(A) = 0.4$ mientras que $P(A \cup B) = 0.7$. Sea $P(B) = p$.

a) Para qué elección de p son A y B mutuamente excluyentes?

b) Para que elección de p son A y B independientes?

Solución.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$0.7 = 0.4 + p - P(A \cap B)$$

$\therefore$ $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$, si y solo si $p = 0.3$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$0.7 = 0.4 + p - P(A) \cdot P(B)$$

$$0.7 = 0.4 + p - (0.4)p$$

de donde

$$p = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$$

3.12.- Se lanza un dado e, independientemente, se escoje al azar una carta de una baraja normal. Cuál es la probabilidad de que:

a) el dado muestre un número par y la carta sea un palo rojo?

b) el dado muestre un número par o la carta sea un palo rojo?

Solución:

A = el dado muestra un número par.
B = la carta sea de un palo rojo.

Además, los sucesos A y B son independientes, entonces:

a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{26}{52} = \frac{1}{4}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

3.15.- Dos personas lanzan tres monedas regulares cada una. ¿Probabilidad de que obtengan el mismo número de caras?

Solución:

A_i = la persona 1 obtiene i-caras, $i = 0, 1, 2, 3$

B_i = la persona 2 obtiene i-caras, $i = 0, 1, 2, 3$

Sabemos que los eventos A_i y B_i son independientes:

$$P\left[(A_0 \cap B_0) \cup (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup (A_3 \cap A_3)\right] = \dots$$

$$\dots = P(A_0 \cap B_0) + P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_2) + P(A_3 \cap B_3)$$

$$= P(A_0)P(B_0) + P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) + P(A_3)P(B_3)$$

$$= \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{5}{16}$$

(3.19.-) Probar que si A y B son sucesos independientes, también lo son A y $\bar{B}$, $\bar{A}$ y B, $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

Solución:

a) $P(A \cap \bar{B}) = P(A)\, P(\bar{B}|A)$
$= P(A)(1 - P(B|A))$
$= P(A)\cancel{P}(1 - P(B))$ pues A y $\bar{B}$ son independientes.
$= P(A) \cdot P(\bar{B})$

b) $P(\cancel{P}\bar{A} \cap B) = P(B) \cdot P(\bar{A}|B)$
$= P(B)(1 - P(A|B))$
$= P(B)(1 - P(A))$
$= P(B) \cdot P(\bar{A}) \rightarrow \bar{A}$ y B son indep.

c) $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A})$
$= P(\bar{A}) \cdot (1 - P(B|\bar{A}))$
$= P(\bar{A}) \cdot (1 - P(B))$
$= P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \rightarrow \bar{A}$ y $\bar{B}$ son indep.

(3.24.-) Verifique que el teorema de la multiplicación $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, establecida por dos sucesos, se puede generalizar para tres sucesos como sigue:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) \cdot P(B|C) \cdot P(C)$$

Solución:

$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap (B \cap C))$ ~~asociativa de~~
$= P(A|(B \cap C)) \cdot P(B \cap C)$
$= P(A|B \cap C)\, P(B|C) \cdot P(C)$

3.30.- Un tubo al vacío puede provenir de uno cualquiera de tres fabricantes con probabilidades $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.25$.

Las probabilidades de que el tubo funcione correctamente durante un periodo de tiempo especificado son iguales a 0.1, 0.2, 0.4 respectivamente, para los tres fabricantes. Calcular la probabilidad de que un tubo elegido aleatoriamente funcione durante el periodo de tiempo especificado.

Solución:

T_i = el tubo al vacío proviene de la fábrica i, $i = 1, 2, 3$.

T_c = el tubo funcione correctamente durante el periodo de tiempo especificado.

El evento T_c se escribe:

$$T_c = \bigcup_{i=1}^{3} T_i \cdot T_c$$

Los sucesos T_i, $i = 1, 2, 3$ forman una partición del espacio muestral, entonces los sucesos $T_i \cdot T_c$, $i = 1, 2, 3$ son mutuamente excluyentes dos a dos, y:

$P(T_1) = P_1 = 0.25$,
$P(T_2) = P_2 = 0.5$,
$P(T_3) = P_3 = 0.25$,

$P(T_c | T_1) = 0.1$,
$P(T_c | T_2) = 0.2$,
$P(T_c | T_3) = 0.4$,

luego, por el teorema de probabilidad total es:

$$P(T_c) = P(T_1) \cdot P(T_c | T_1) + P(T_2) \cdot P(T_c | T_2) + P(T_3) \cdot P(T_c | T_3)$$

$$= (0.25)(0.1) + (0.5)(0.2) + (0.25)(0.4)$$
$$= \underline{0.225}$$