Mardi, mai 25, 2021

Lista de ejercicios:

4.3.- Supongase que la variable aleatoria x tiene valores posibles $1, 2, 3, \dots,$ y $P(x=j) = \frac{1}{2^j}$, $j = 1, 2, \dots$

Calcular:

a) $P(X$ es par$)$
b) $P(X \geq 5)$
c) $P(X$ es divisible por $3)$

Solución: Aplicando directamente la fórmula:

$$P[X(S) \in A] = \sum_{x \in A} P(X=x)$$

a) $$P(X, \text{par}) = \sum_{j \text{ par}} \frac{1}{2^j}, \quad j = 2, 4, 6, \dots$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{12}$$

$$= \frac{1}{3}$$

b) $P(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{\infty} \frac{1}{2^j}$

$$= \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(\frac{1}{1-1/2}\right) = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{16}$$

c) $P(X = \text{divisible por } 3) = \sum_{j \text{ div por } 3} \frac{1}{2^j}$, $j = 3, 6, 9, \ldots$

$$= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2^3} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}}\right) = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{\frac{7}{8}}$$

$$= \frac{1}{7}$$

1.1.- Considere una variable aleatoria X con resultados posibles: $0, 1, 2, \ldots$ suponga que:

$$P(X = j) = (1-a)\,a^j \;, \; j = 0, 1, 2, \ldots$$

a) ¿Para que valores de a es significativo en el modelo anterior?

b) Verificar que lo anterior representa una distribución de probabilidades legítima.

c) Demostrar que para dos enteros positivos cualesquiera s y t.

$$P(X > s+t \,/\, X > s) = P(X \geq t)$$

Solución:

a) El modelo será significativo, si

$$(1-a)\,a^j > 0 \;, \; j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$(1-a)\,a^j > 0 \longleftrightarrow \begin{cases} 1-a > 0 \wedge a^j > 0 \;\; \forall j = 0, 1, 2, \ldots \\ \vee \\ 1-a < 0 \wedge a^j < 0 \;\; \forall j = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} 1 > a \quad \wedge \quad a > 0 \\ \vee \\ 1 < a \quad \wedge \quad \phi \end{cases}$$

$$0 < a < 1$$

es decir, el modelo tiene significado para $j = 0, 1, 2 \ldots$

b) Para que la función $P(X=j)=(1-a)a^j$, $j=0,1,2$ sea una distribución de probabilidad se debe tener:

i) $P(X=j)>0$, $\forall j=0,1,2,\ldots$

lo cual es obvio para $0<a<1$.

ii) $\sum_{j=0}^{\infty} P(X=j)=1$, en efecto:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1-a)a^j=(1-a)+(1+a)a+(1+a)a^2\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}(1-a)a^j$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-a^{n+1})$$

$$=1-\underbrace{\lim_{n\to\infty}(a^{n+1})}_{\to 0\ (0<a<1)}=\underline{1}$$

c) $$P(X>s+t\,/\,X>s)=\frac{P((X>s+t)\cap(X>s))}{P(X>s)}$$

$$=\frac{P(X>t+s)}{P(X>s)}$$

$$=\frac{\sum_{j=s+t+1}^{\infty}(1-a)a^j}{\sum_{j=s+1}^{\infty}(1-a)a^j}$$

$$= \frac{(1-a)\left(a^{s+1+t} + a^{s+1+t+1} + \cdots\right)}{(1-a)\left(a^{s+1} + a^{s+1+1} + \cdots\right)}$$

$$= \frac{a^{s+1}\left(a^{t} + a^{t+1} + a^{t+2} + \cdots\right)}{a^{s+1}\left(1 + a + a^{2} + \cdots\right)}$$

$$= \frac{a^{t} + a^{t+1} + a^{t+2} + \cdots}{\frac{1}{1-a}} = (1-a)(a^{t} + a^{t+1} + \cdots)$$

$$= \sum_{j=t}^{\infty} (1-a)\, a^{j} = P(X \geq t)$$

4.7.- Calcular $P(X=5)$, en donde X es la variable aleatoria definida en el ejemplo 4.10. Supongamos que $n_1 = 10$, $n_2 = 15$, $p_1 = 0,3$ y $p_2 = 0,2$.

Solución:

$$P(X=k) = \sum_{r=\max(0,\,k-n_2)}^{\min(k,\,n_1)} \binom{n_1}{r} p_1^{r} (1-p_1)^{n_1-r} \binom{n_2}{k-r} p_2^{k-r} (1-p_2)^{n_2}$$

~~Co~~ si $k=5$, $n_1=10$, $n_2=15$, $p_1=0.3$, $p_2=0.2$.

$$P(X=5) = \sum_{r=0}^{5} \binom{10}{r}(0.3)^{r}(0.7)^{10-r}\binom{15}{5-r}(0.2)^{5-r}(0.8)^{15-5+r}$$

$$= \sum_{r=0}^{5} \frac{10!}{(10-r)!\,r!}(0.3)^{r}(0.7)^{10-r} \cdot \frac{15!}{(15-5+r)!\,(5-r)!}(0.2)^{5-r}$$

$$= \frac{10!}{10!\,0!}(0.3)^{0}(0.7)^{10} \cdot \frac{15!}{14!\,5!} \cdot (0.2)^{5}(0.8)^{10} + \frac{10!}{9!\,1!}(0.3)(0.7)^{9} \cdot$$

$$\frac{15!}{11!\,4!}(0.2)^{4}(0.8)^{11} + \frac{10!}{8!\,2!}(0.3)^{2}(0.7)^{8} \cdot \frac{15!}{12!\,3!}(0.2)^{3}(0.8)^{12} +$$

$\frac{10!}{7!3!}(0.3)^3(0.7)^7 \cdot \frac{15!}{13!2!}(0.2)^2(0.3)^{13} + \frac{10!}{6!4!}(0.3)^4 \cdot$

$(0.7)^6 \cdot \frac{15!}{14!1!}(0.2)(0.8)^{14} + \frac{10!}{5!5!}(0.3)^5(0.7)^5 \cdot \frac{15!}{15!0!}(0.2)^0 \cdot$

$(0.8)^{15} = \underline{0.12}$ ✗

(4.8.-) (Propiedades de las probabilidades binomiales) En la discusión del ejemplo 4.8 se sugirió un modelo general para las propiedades binomiales $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, indiquemos estas probabilidades por $p_n(k)$.

a) Demostrar que para $0 \leq k \leq n$ tenemos:

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)} = \left(\frac{n-k}{k+1}\right)\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

b) Usando (a), demostrar que:

i) $p_n(k+1) > p_n(k)$, si $k < np - (1-p)$
ii) $p_n(k+1) = p_n(k)$, si $k = np - (1-p)$
iii) $p_n(k+1) < p_n(k)$, si $k > np - (1-p)$

c) Demostrar que si $np - (1-p)$ es un entero, $p_n(k)$ toma su valor máximo para dos valores de k, llamados $k_0 = np - (1-p)$ y $k_0' = np - (1-p) + 1$

d) Demostrar que si $np - (1-p)$ no es un entero entonces $p_n(k)$ toma su valor máximo cuando k es igual al entero más pequeño mayor que k_0.

e) Demostrar que si $np - (1-p) < 0$, $p_n(0) > p_n(1) > \cdots > p_n(n)$ mientras que si $np - (1-p) = 0$, $p_n(0) = \cdots p_n(1) > p_n(2) > \cdots > p_n(n)$.

Solución:

a) Para $0 \leq k \leq n$ tenemos que:

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} \cdot p^{k} (1-p)^{n-k}}$$

$$= \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot p}{\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (1-p)} = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p}$$

b) $p_n(k+1)$ será mayor, igual o menor que $p_n(k)$, según que el cociente demostrado en (a) $\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)}$ sea mayor, igual o menor que uno.

i) $\frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p} > 1$

$(n-k)p > (k+1)(1-p)$

$\hookrightarrow k < np-(1-p) \rightarrow p_n(k+1) > p_n(k)$ si $k < np-(1-p)$

ii) $\frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p} = 1$

$(n-k)p = (k+1)(1-p)$

$\hookrightarrow k = np-(1-p)$

iii) $p_n(k+1) < p_n(k) \leftrightarrow \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p} < 1$

$\leftrightarrow (n-k)p < (k+1)(1-p)$

$\leftrightarrow k > np-(1-p)$

c) Si $np-(1-p)$ es un entero, $np+p$ también lo es, luego $P_n(k)$ tomará su valor máximo en ambos valores.

d) Si $np-(1-p)$ no es entero, $np+p$ tampoco es, luego existirá entre dos extremos solo un entero el cual será igual al menor entero mayor que $np-(1-p)$.

e) Por (iii), si $np-(1-p)<k$, $P_n(k)>P_n(k+1)$.
Entonces, si $np-(1-p)<0$, $P_n(0)>P_n(1)$;
además, $np-(1-p)\leq 0<1 \rightarrow P_n(1)>P_n(2)$;

Por lo tanto si $np-(1-p)<0$, $P_n(0)>p(1)>\cdots > P_n(n)$.

De (ii), si $np-(1-p)=k$, $P_n(k)=P_n(k+1)$.
Luego, $np-(1-p)=0 \rightarrow P_n(0)=P_n(1)$
$np-(1-p)=0<1 \rightarrow P_n(1)>P_n(2)$
$np-(1-p)=0<n-1 \rightarrow P_n(n-1)>P_n(n)$

Por lo tanto si

$$np-(1-p)=0,$$
$$P_n(0)=P_n(1)>P_n(2)>\cdots>P_n(n)$$

4.11.- La variable aleatoria continua x tiene la fdp $f(x) = 3x^2$. $-1 \leq x \leq 0$. Si b es un número satisface $-1 < b < 0$, Calcular:

$P(X > b / X < b/2)$

Solución:

$$P(X > b / X < b/2) = \frac{P[(X > b) \wedge (X < b/2)]}{P(X < b/2)}$$

$$= \frac{P(b < X < b/2)}{P(X < b/2)}$$

$$= \frac{\int_b^{b/2} 3x^2 \cdot dx}{\int_{-1}^{b/2} 3x^2 \cdot dx} = \frac{x^3 \Big|_b^{b/2}}{x^3 \Big|_{-1}^{b/2}}$$

$$= \frac{(b/2)^3 - b^3}{(b/2)^3 - (-1)^3} = \frac{-7b^3}{b^3 + 8}$$

4.15.- Sea X una variable aleatoria continua con fdp f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ a & , \quad 1 \leq x \leq 2 \\ -ax + 3a & , \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

a) Determinar a.

b) Determinar F, la fda y graficar

c) Si X_1, X_2, y X_3 son tres observaciones independientes de X, ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de esos tres números sea mayor que 1.5?

Solución:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 = \int_0^1 ax\cdot dx + \int_1^2 a\cdot dx + \int_2^3 (-a\cdot x + 3a)\,dx$

$$= \frac{ax^2}{2}\Big|_0^1 + ax\Big|_1^2 + \left(-\frac{ax^2}{2} + 3ax\right)\Big|_2^3$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right) + (2a - a) + \left(-\frac{9a}{2} + 9a\right) - \left(-\frac{4a}{2} + 6a\right)$$

$$1 = 2a$$

$\therefore$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & , 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & , 1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & , 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

b) Si $x < 0$, es obvio que $F(x) = 0$

- Si $0 < x < 1$, $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^0 0\cdot dt + \int_0^x \frac{1}{2}t\,dt = \frac{x^2}{4}$

- Si $1 \leq x \leq 2$, $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^1 \frac{t}{2}dt + \int_1^x \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

- Si $2 \leq x < 3$, $F(x) = \int_0^1 \frac{t}{2}dt + \int_1^2 \frac{dt}{2} + \int_2^x \left(-\frac{t}{2} + \frac{3}{2}\right)dt$

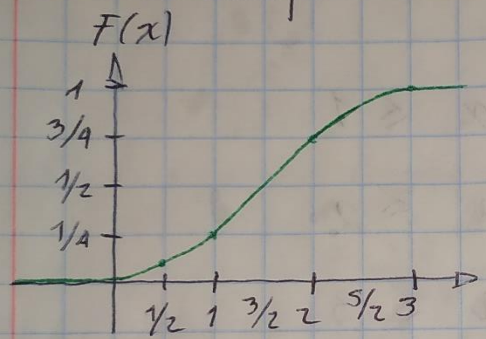
$$= 1 - 1/4 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - 3 + 1$$

$$= \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{4}$$

- Si $x \geq 3$ es obvio que $F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & , \ 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} & , \ 1 \le x < 2 \\ \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{4} & , \ 2 \le x < 3 \\ 1 & , \ x \geq 3 \end{cases}$$

la es



c) Sean x_i, $i = 1, 2, 3$ las observaciones de x.

$A_i = \{$ la observación x_i es mayor que 1.5 $\}$, $i = 1, 2, 3$

equivalente

$A_i = \{X_i > 1.5\}$, $i = 1, 2, 3$

Pero $P(X > 1.5) = 1 - P(X \le 1.5)$

$= 1 - \left(\frac{1.5}{2} - \frac{1}{4}\right)$

$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Definiendo sucesos:

$\mathcal{E} = \{$ exactamente uno de las tres observaciones sea mayor$\}$

$\mathcal{E} = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$

$P(\mathcal{E}) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3)$

$P(\mathcal{E}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3/8$

1.20.- Supongase que X está distribuida uniformemente en $[-a, +a]$, en donde $a > 0$. Cada vez que sea posible, determinar a de modo que se satisfaga lo siguiente:

a) $P(X > 1) = 1/3$
b) $P(X > 1) = 1/2$
c) $P(X < 1/2) = 0.7 = 7/10$
d) $P(X < 1/2) = 3/10$
e) $P(|X| < 1) = P(|X| > 1)$

Solución: Si x está distribuida uniformemente en $[-a, a]$, con $a > 0$, entonces:

$$f(x) = \begin{cases} \to \dfrac{1}{2a}, & -a \leq x \leq a \\ \to 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

a) $$\frac{1}{3} = P(X > 1) = \int_1^a \frac{dx}{2a} = \frac{x}{2a}\Big|_1^a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$2a = 6 \to a = 3$$

b) $$\frac{1}{2} = P(X > 1) = \int_1^a \frac{dx}{2a} = \frac{x}{2a}\Big|_1^a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} \to \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}$$

$\dfrac{1}{2a} = 0$, no existe un valor para a

c) $0.7 = P(X < 1/2) = \int_{-a}^{1/2} \frac{dx}{2a} = \left.\frac{x}{2a}\right|_{-a}^{1/2} = \frac{1}{4a} + \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{7}{10} = \frac{1}{4a} + \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{4a} = \frac{1}{5}$

$4a = 5 \longrightarrow a = 5/4$

d) $0.3 = P(X < 1/2) = 1/4a + 1/2$

$\therefore$

$\frac{3}{10} = \frac{1}{4a} + \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{4a} = -\frac{1}{5}$

$-4a = 5 \longrightarrow a = -\frac{5}{4}$, a es negativa y no cumple la condición.

e) $P(|X| < 1) = P(|X| > 1)$

$P(-1 < X < 1) = P(\cancel{>}1 \cancel{\geq}^{<} X \cancel{>} < -1)$

$= P(X > 1) + P(X < -1)$

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{2a} = \int_{1}^{a} \frac{dx}{2a} + \int_{-a}^{a-1} \frac{dx}{2a}$

$\left.\frac{x}{2a}\right|_{-1}^{1} = \left.\frac{x}{2a}\right|_{1}^{a} + \left.\frac{x}{2a}\right|_{-a=-2}^{-1}$

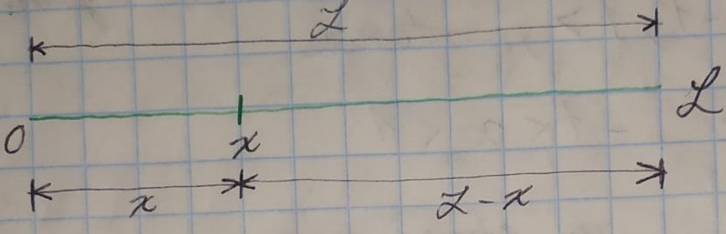
$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$

$\cancel{\frac{1}{2a}}\ \frac{2}{a} = 1 \longrightarrow a = 2$

4.22.- Se escoge un punto al azar de un segmento de longitud L. ¿Cuál es la probabilidad de que la razón del segmento más corto con relación al más largo sea menor que $1/4$?

Solución:



Sea x = longitud del segmento más corto.
Como el punto x se distribuye uniformemente en el intervalo $[0, L]$, entonces:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & 0 \leq x \leq L \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Entonces:

$$P\left(\frac{x}{L-x} < \frac{1}{4}\right) = P\left(x < \frac{L}{5}\right)$$

$$= \int_0^{L/5} \frac{dx}{L}$$

$$= \frac{x}{L} \Big|_0^{L/5}$$

$$= \frac{L/5}{L}$$

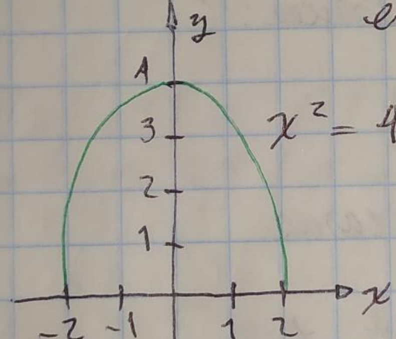
$$= \frac{1}{5}$$

5.1.- Supongase que X está distribuida uniformemente en $(-1, 1)$.
Sea $Y = 4 - x^2$. Encontrar la fdp de Y, sea $g(y)$ y dibujarla y verificarla.

Solución: Puesto que X está distribuida uniformemente en $<-1, 1>$, entonces

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & , -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{en otros casos.} \end{cases}$$

$Y = H(x) = 4 - x^2$ no es una función monótona en el intervalo $[-1, 1]$.



Por lo tanto obtenemos la función de densidad de probabilidad de $y = 4 - x^2$ de la sig. manera.

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(4 - x^2 \leq y) \\ &= P(x^2 \geq 4 - y) \\ &= P(x \geq \sqrt{4-y} \cup x \leq -\sqrt{4-y}) \\ &= P(x \geq \sqrt{4-y}) + P(x \leq -\sqrt{4-y}) \\ &= 1 - P(x \leq \sqrt{4-y}) + P(x \leq -\sqrt{4-y}) \end{aligned}$$

$= 1 - F(\sqrt{4-y}) + F(-\sqrt{4-y})$

Entonces:

$$g(y) = G'(y) = -\frac{f(\sqrt{4-y})}{2\sqrt{4-y}}(-1) + \frac{f(-\sqrt{4-y})}{-2\sqrt{4-y}}(-1)$$

$$= \frac{f(\sqrt{4-y}) + f(-\sqrt{4-y})}{2(\sqrt{4-y})}$$

Pero como $x = \pm\sqrt{4-y}$, tenemos que

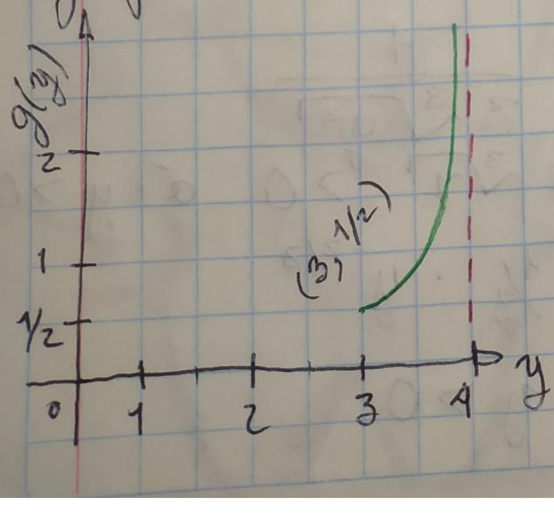
$$g(y) = \frac{1/2 + 1/2}{2\sqrt{4-y}} = \frac{1}{2\sqrt{4-y}}$$

$$x = \pm\sqrt{4-y} \longrightarrow -1 < \sqrt{4-y} < 1 \longrightarrow 3 < y < 4$$

así

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{4-y}}, & 3 < y < 4 \\ 0, & \text{para otros valores} \end{cases}$$

graficando:



Es obvio que $g(y) > 0 \quad \forall \; 3 < y < 4$;

$$\int_3^4 g(y)\cdot dy = \int_3^4 \frac{dy}{2\sqrt{4-y}} = -\int_3^4 \frac{-dy}{2\sqrt{4-y}}$$

$$= -\sqrt{4-y}\,\Big|_3^4 = -0 + \sqrt{1} = \underline{1}$$

Queda demostrado que $g(y)$ es una f.d.p.

5.3.- Supóngase que la variable aleatoria x tiene f.d.p: $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Calcular:

a) $Y = x^3$

b) $Z = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

Solución:

a) $Y = x^3$ es una función monótona (creciente) y diferenciable en toda x, luego es continua. Entonces la función de densidad de Y es:

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$y = x^3$, luego

$$x = \sqrt[3]{y} \longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

También, $x > 0$ implica que $\sqrt[3]{y} > 0$ ó $y > 0$

Por lo tanto:

$$g(y) = e^{-y^{1/3}} \times \frac{1}{3} \cdot y^{-2/3}$$

$$g(y) = \frac{y^{-2/3}}{3} \cdot e^{-y^{1/3}}, \; y > 0$$

b) $Z = \frac{3}{(x+1)^2}$ es una función decreciente, diferenciable y continua en todo $x > 0$. Entonces la función de densidad de Z está dada por:

$$g(z) = f(x)\left|\frac{dx}{dz}\right|$$

$z = \frac{3}{(x+1)^2}$, de donde $x = -1 + \sqrt{\frac{3}{z}}$, y $(x+1)^2$

$\left|\frac{dx}{dz}\right| = -\frac{3}{2z^2\sqrt{\frac{3}{z}}}$, también $-1+\sqrt{\frac{3}{z}} > 0$

implica que $0 < z < 3$. Por lo tanto:

$$g(z) = e^{1-\sqrt{\frac{3}{z}}}\left|-\frac{3}{2z^2\sqrt{\frac{3}{z}}}\right|$$

$$g(z) = \frac{3\cdot e^{1-\sqrt{\frac{3}{z}}}}{2z^2\sqrt{\frac{3}{z}}}, \quad 0 < z < 3$$

5.5.- Supóngase que x está distribuida uniformemente en el intervalo $(0,1)$; Encontrar la f.d.p. de las siguientes variables aleatorias:

a) $Y = x^2 + 1$

b) $Z = \frac{1}{x+1}$

Solución:

x está distribuida uniformemente $<0,1>$, Entonces su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{ para otros valores} \end{cases}$$

a) $y = x^2 + 1$ es una función creciente en $0 < x < 1$, diferenciable y por lo tanto continua en todo x; Entonces:

$$y = x^2 + 1 \text{ , implica } x = \sqrt{y-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}$$

luego

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = 1 \times \frac{1}{2\sqrt{y-1}} = \frac{1}{2\sqrt{y-1}} \text{ , } 1 < y < 2$$

pues

$$0 < x < 1 \longrightarrow 0 < \sqrt{y-1} < 1 \longrightarrow 1 < y < 2$$

b) $z = \frac{1}{x+1}$ es una función estrictamente decreciente en $0 < x < 1$, diferenciable y continua,

$z = \frac{1}{x+1}$, entonces $x = \frac{1}{z} - 1$,

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{1}{z^2}$$

además:

$$0 < x < 1 \rightarrow 0 < \frac{1}{z} - 1 < 1 \rightarrow \frac{1}{2} < z < 1$$

luego:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^2} & , \frac{1}{2} < z < 1 \\ 0 & , \text{para otros valores} \end{cases}$$

5.9.- La velocidad de una molécula en un gas uniforme en equilibrio es una variable aleatoria y cuya f.d.p. está dada por:

$$f(v) = a \cdot v^2 \cdot e^{-b \cdot v^2}, \quad v > 0$$

en donde $b = \frac{m}{2kT}$ y k, T y m denotan la constante de Boltzman, la temperatura absoluta y la masa de la molécula, respectivamente:

a) Calcular la constante a (en función de b).

b) Derivar la distribución de la variable aleatoria $W = \frac{m v^2}{2}$, que representa la energía cinética de la molécula

Solución

a) Haciendo uso de la segunda condición de la definición de función de densidad de probabilidad tenemos

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,dv = \int_0^{\infty} a \cdot v^2 \cdot e^{-b \cdot v^2} \cdot dv$$

$$= -\frac{a}{2b} \int_0^{\infty} v \cdot e^{-b \cdot v^2} \cdot (-2 \cdot b \cdot v) \cdot dv$$

$$= \frac{-a}{2b} \int_0^{\infty} v \cdot e^{-bv^2} \cdot d(-bv^2)$$

aplicando ~~integ~~ integración por partes

$u = v$
$du = dv$

$dz = e^{-b \cdot v^2} \cdot d(-bv^2) \rightarrow z = e^{-b \cdot v^2}$

$$1 = -\frac{a}{2b}\left(v \cdot e^{-b \cdot v^2}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-b \cdot v^2} \cdot dv\right.$$

$$= -\frac{a}{2b}\left[0 - \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^\infty e^{-(\sqrt{b}v)^2} \cdot d(\sqrt{b} \cdot v)\right]$$

$$= -\frac{a}{2b}\left(-\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{\pi}}{4\, b^{3/2}}$$

de donde:

$$a = \frac{4b^{\cancel{3/2}\,3/2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{4\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$$

b) $W = \frac{mv^2}{2}$ es una función creciente en $\langle 0, \infty \rangle$, 3)

diferenciable, por tanto continua; Luego,

$$w = \frac{mv^2}{2} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{2w}{m}}$$ 3)

y $\frac{dv}{dw} = \frac{1}{2}\left(\frac{2w}{m}\right)^{-1/2} \times \frac{2}{m} = \frac{1}{m}\cdot\left(\frac{2w}{m}\right)^{-1/2}$

También, $v > 0 \rightarrow \left(\frac{2w}{m}\right)^{1/2} > 0 \rightarrow w > 0$

Por lo tanto:

$$g(w) = a\left(\frac{2w}{m}\right)\cdot e^{-b\left(\frac{2w}{m}\right)} \times \frac{1}{m}\cdot\left(\frac{2w}{m}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{4\left(\frac{2w}{m}\right)\left(\frac{m}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{KT}\right)^{3/2}}{\sqrt{w}}\cdot e^{-\frac{m}{2KT}\left(\frac{2w}{m}\right)} \times \frac{1}{m}\left(\frac{2w}{m}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\cdot w^{1/2}\cdot e^{-\frac{w}{KT}}, \quad w > 0$$

5.11.- La energía radiante (en Btu/hr/ft²) está dada como la función siguiente de la temperatura T (en grados Fahrenheit):

$E = 0.173\,(T/100)$. Supongamos que la temperatura T está considerada que es una variable aleatoria continua con f.d.p.

$$f(t) = \begin{cases} 200\,t^{-2}, & 40 \leq t \leq 50 \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Encontrar la f.d.p. de la energía radiante E.

Solución: $E = (0.173)\left(\frac{T}{100}\right)^4$ es una función creciente en $[40, 50]$ y diferenciable por lo tanto continua. Entonces:

$$e = (0.173)\left(\frac{t}{100}\right)^4 \rightarrow t = 100\left(\frac{e}{0.173}\right)^{1/4}$$

$$\frac{dt}{de} = 100 \times \frac{1}{4}\left(\frac{e}{0.173}\right)^{-3/4} \times \frac{1}{0.173}$$

$$= \frac{100 \cdot e^{-3/4}}{4(0.173)^{1/4}}$$

También $40 \leq t \leq 50 \rightarrow 40 \leq 100\left(\frac{e}{0.173}\right)^{1/4} \leq 50$
o sea:

$$(0.4)^4(0.137) < e < (0.5)^4(0.173)$$

Luego:

$$g(e) = f(t)\left|\frac{dt}{de}\right| = 200\left[100\left(\frac{e}{0.173}\right)^{1/4}\right]^{-2} \times \frac{100e^{-3/4}}{4(0.173)^{1/4}}$$

$$= \frac{200 \times 100^{-2} \times 100}{(0.173)^{-1/2}(0.173)^{1/4}} \cdot e^{-1/2} \cdot e^{-3/4}$$

$$= \frac{0.173^{1/4} \cdot e^{-5/4}}{2}, \quad (0.4)^4(0.173) < e < (0.5)^4(0.173)$$

Finalmente, tenemos la f.d.p. de la energía radiante:

$$g(e) = \begin{cases} \dfrac{(0.173)^{1/4} \cdot e^{-5/4}}{2}, & (0.4)^4(0.173) < e < (0.5)^4(0.173) \\ 0, & \text{para todos los demás} \end{cases}$$