INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

No. 48 Serie: VERDE Fecha: Junio 2001

Lernmatrix de Steinbuch

Cornelio Yáñez Márquez[2]
Juan Luis Díaz de León Santiago[1]

RESUMEN

Este trabajo es el primero de una colección que consta de once números consecutivos en esta misma serie verde. El propósito fundamental de la colección es proporcionar al lector, de manera sucinta, el estado del arte en el tema de las memorias asociativas.

En este número se presenta uno de los trabajos pioneros, que constituye un antecedente crucial en el desarrollo de los modelos actuales de memorias asociativas: la Lernmatrix, ideada y desarrollada por el científico alemán Karl Steinbuch en 1961.

A continuación se enlistan, en orden, los diez títulos restantes de la colección: Correlograph de Willshaw,Buneman & Longuet-Higgins, Linear Associator de Anderson-Kohonen, Algunas aportaciones de S. Amari en Memorias Asociativas, Memoria Asociativa Hopfield, Pruebas de convergencia de la Memoria Hopfield, Modelo ADAM, Modelo BAM, Modelo SDM, Memorias Morfológicas Heteroasociativas y Memorias Morfológicas Autoasociativas.

Palabras clave: Clasificador de patrones binarios, crossbar, fase de aprendizaje, fase de recuperación, lernmatrix, memoria asociativa, memoria heteroasociativa, steinbuch.

[1]Profesor Investigador del Centro de Investigación en Computación.
[2]Estudiante de doctorado del Centro de Investigación en Computación

Introducción.

Este trabajo es el primero de una colección que consta de once números consecutivos en esta misma serie verde; el título inmediato posterior a éste es ”*Correlograph* de Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins”. El propósito fundamental de la colección es proporcionar al lector, de manera sucinta, el *Estado del Arte en Memorias Asociativas*.

El tema de las memorias asociativas ha estado vigente, desde hace varios lustros, dentro de algunas áreas de investigación en diversas latitudes del orbe. El propósito fundamental de una memoria asociativa es recuperar correctamente patrones completos a partir de patrones de entrada, los cuales pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado: ésta es la característica más atractiva de las memorias asociativas.

Notables investigadores han abordado el problema de generar modelos de memorias asociativas (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961; Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins, 1969; Amari, 1972; Anderson, 1972; Kohonen, 1972; Nakano, 1972; Kohonen & Ruohonen, 1973; Kohonen, 1974; Little & Shaw, 1975; Anderson, Silverstein, Ritz & Jones, 1977; Amari, 1977; Hopfield, 1982; Hopfield, 1984; Austin, 1987; Kanerva, 1988; Kolen, & Pollack, 1991; Buhmann, 1995; Kinser, 1995; Bandyopadhyay, & Datta, 1996; Aleksander & Morton, 1997; Austin, Buckle, Kennedy, Moulds, Pack & Turner, 1997; Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998; Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999), y han logrado resultados de importancia tal, que algunos de los trabajos pioneros (décadas 1970 y 1980) se han convertido en auténticos clásicos.

La capacidad de aprendizaje y almacenamiento, la eficiencia en la respuesta o recuperación de patrones, la rapidez y la inmunidad al ruido, son tópicos de interés entre los investigadores que se dedican a estudiar estos modelos con el fin de proponer variaciones y generalizaciones que, a la postre, se traduzcan en nuevos modelos de memorias asociativas con ventajas claras sobre los modelos conocidos y que, además, sean propicios para su aplicación directa en problemas reales.

Así, se han propuesto esquemas alternativos ante los clásicos (o variaciones de éstos), cuyos autores aseguran que sus modelos de memorias asociativas hacen gala de gran capacidad de almacenamiento (Chen & Honavar, 1995; Graham & Willshaw, 1995; Imada & Araki, 1995; Adeodato & Taylor, 1996; Storkey 1997; Bosch & Kurfess, 1998; Jagota, Narasimhan & Regan, 1998); exhiben más rapidez que otras (Kinser, 1995); prueban ser eficientes en cuanto a la recuperación de patrones (Hely, Willshaw & Hayes, 1997; Sommer & Palm, 1998) o se han implementado en hardware (Kennedy, Austin & Cass, 1995; Krikelis, & Weems, 1997; Stright, Coffield, & Brooks, 1998).

Existen equipos de investigación que han dirigido sus esfuerzos a incorporar las bondades de las técnicas aleatorias en los esquemas para memorias asociativas (Kanerva, 1988; Browne, & Aleksander, 1996; Villanueva, & Figueroa, 1998). Las indefectibles aplicaciones de las memorias asociativas también han dado lugar a relevantes proyectos y trabajos de investigación (Herrmann, & Sodini, 1992; Schwenk & Milgram, 1995; Gori, Lastrucci & Soda 1996; Silver, Glover & Stonham, 1996; Jørgensen 1997; Hattori & Hagiwara, 2000).

En esta vorágine de aportaciones e innovaciones, la aparición, desarrollo, aplicaciones y consolidación de las memorias asociativas morfológicas representó un salto cualitativo en la concepción y desarrollo de las memorias asociativas, por las características propias de las operaciones morfológicas, que permitieron ventajas de las memorias asociativas morfológicas respecto de los modelos conocidos (Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998; Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999); con objeto de proporcionar una muestra de la magnitud de este salto cualitativo, mencionaré que al funcionar en uno de los posibles modos (autoasociativo), las memorias asociativas morfológicas tienen respuesta perfecta y capacidad infinita de aprendizaje y almacenamiento (Díaz-de-León & Yáñez, 1999).

Un hecho que puede ser importante en el contexto de las potencialidades de la tecnología de punta a niveles de seguridad nacional, es que investigadores del *Air Force Research Lab*. de los Estados Unidos implementaron las memorias asociativas morfológicas en hardware VLSI (Stright, Coffield, & Brooks, 1998).

En este primer número de la colección *Estado del Arte en Memorias Asociativas* se presenta uno de los trabajos pioneros, que constituye un antecedente crucial en el desarrollo de los modelos actuales de memorias asociativas: la *Lernmatrix*, ideada y desarrollada por el científico alemán Karl Steinbuch en 1961.

Los diez números restantes de la colección abordarán los siguientes temas, en este orden:

- *Correlograph* de Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins
- *Linear Associator* de Anderson-Kohonen
- Algunas aportaciones de S. Amari en Memorias Asociativas
- Memoria Asociativa Hopfield
- Pruebas de convergencia de la Memoria Hopfield
- ADAM (*Advanced Distributed Associative Memory*) de Austin
- BAM (*Bidirectional Associative Memory*) de Kosko
- SDM (*Sparse Distributed Memory*) de Kanerva
- Memorias Morfológicas Heteroasociativas de Ritter, Díaz-de-León & Sussner
- Memorias Morfológicas Autoasociativas de Ritter, Díaz-de-León & Sussner

Memorias asociativas.

El propósito de esta sección es plantear de manera diáfana y concisa el problema inherente al funcionamiento de las memorias asociativas. Por su naturaleza, este problema se escinde en dos fases claramente distinguibles:

1. Fase de *aprendizaje* (generación de la memoria asociativa)
2. Fase de *recuperación* (operación de la memoria asociativa)

Para estar en condiciones de realizar el planteamiento del problema, es preciso previamente proporcionar los conceptos básicos, las notaciones y la nomenclatura relacionados con el diseño y funcionamiento de las memorias asociativas.

Los conceptos básicos son conocidos tres décadas ha, y se presentan como originalmente fueron establecidos en las referencias (Kohonen, 1972, 1977, 1987, 1989; Anderson, 1972; Anderson & Bower, 1977; Anderson & Rosenfeld, 1990; Hassoun, 1993, 1995, 1997).

Respecto de las notaciones y nomenclatura que se utiliza en esta colección de once números de la serie verde, en algunos casos se han realizado adaptaciones de la literatura incluida en la bibliografía, y en otros, para efectos de sencillez y facilidad de manipulación, se establecen arbitrariamente, en la inteligencia de que invariablemente se opta por aquellas notaciones que mejor reflejan, a juicio del autor, los conceptos ahí representados. La notación y nomenclatura que aquí se presenta es cosistente a lo largo de toda la colección.

Como se mencionó en la Introducción, el propósito fundamental de una memoria asociativa es recuperar patrones completos a partir de patrones de entrada que pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado. De acuerdo con esta afirmación, una *memoria asociativa* $\mathbf{M}$ puede formularse como un sistema de entrada y salida, idea que se esquematiza a continuación:

$$\mathbf{x} \rightarrow \boxed{\mathbf{M}} \rightarrow \mathbf{y}$$

El *patrón de entrada* está representado por un vector columna denotado por $\mathbf{x}$ y el *patrón de salida*, por el vector columna denotado por $\mathbf{y}$.

Cada uno de los patrones de entrada forma una *asociación* con el correspondiente patrón de salida. La notación para una asociación es similar a la de una pareja ordenada; por ejemplo, los patrones $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ del esquema forman la asociación $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Para facilitar la manipulación algebraica de los patrones de entrada y de salida, los denotaremos con las mismas letras negrillas, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, agregándoles números naturales como superíndices para efectos de discriminación simbólica. Por ejemplo, a un patrón de entrada $\mathbf{x}^1$ le corresponderá un patrón de salida $\mathbf{y}^1$, y ambos formarán la asociación $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$; del mismo modo, para un número entero positivo k específico, la asociación correspondiente será $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$.

La memoria asociativa $\mathbf{M}$ se representa mediante una matriz cuya componente ij-ésima es m_{ij} (Palm, Schwenker, Sommer & Strey, 1997); la matriz $\mathbf{M}$ se genera a partir de un conjunto finito de asociaciones conocidas de antemano: éste es el *conjunto fundamental de asociaciones*, o simplemente *conjunto fundamental*. Se denota por p la cardinalidad del conjunto fundamental (p es un número entero positivo).

Si μ es un índice, el conjunto fundamental se representa de la siguiente manera:

$$\{(\mathbf{x}^{\mu}, \mathbf{y}^{\mu}) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$$

A los patrones que conforman las asociaciones del conjunto fundamental, se les llama *patrones fundamentales*.

La naturaleza del conjunto fundamental proporciona un importante criterio para clasificar las memorias asociativas. Si se cumple que $\mathbf{x}^{\mu} = \mathbf{y}^{\mu}\ \forall\mu \in \{1, 2, ..., p\}$, se dice que la memoria es *autoasociativa*; de otro modo, la memoria es *heteroasociativa* (Kohonen,1972). Para una memoria heteroasociativa se puede afirmar lo siguiente: $\exists\mu \in \{1, 2, ..., p\}$ para el que se cumple que $\mathbf{x}^{\mu} \neq \mathbf{y}^{\mu}$.

Es posible que los patrones fundamentales sean alterados con diferentes tipos de ruido. Para diferenciar un patrón alterado del correspondiente patrón fundamental, usaremos la tilde en la parte superior; así, el patrón $\tilde{\mathbf{x}}^k$ es una versión alterada del patrón fundamental $\mathbf{x}^k$, y el tipo de alteración que representa $\tilde{\mathbf{x}}^k$ se evidenciará en el contexto específico donde se use.

Si al presentarle a la memoria $\mathbf{M}$ un patrón alterado $\tilde{\mathbf{x}}^{\omega}$ como entrada ($\omega \in \{1, 2, ..., p\}$), $\mathbf{M}$ responde con el correspondiente patrón fundamental de salida $\mathbf{y}^{\omega}$, se dice que la recuperación es *perfecta*. Una *memoria perfecta* es aquella que realiza recuperaciones perfectas para todos los patrones fundamentales.

Naturalmente, también los patrones de salida pueden ser alterados; por ejemplo, si $\mathbf{y}^3$ es un patrón fundamental, entonces $\tilde{\mathbf{y}}^3$ representa una versión alterada de $\mathbf{y}^3$.

Abundemos en la caracterización de los patrones de entrada, de salida y de la matriz $\mathbf{M}$.

Primeramente se requiere la especificación de dos conjuntos a los que llamaremos arbitrariamente A y B. La importancia de estos dos conjuntos radica en que las componenetes de los vectores columna que representan a los patrones, tanto de entrada como de salida, serán elementos del conjunto A, y las entradas de la matriz $\mathbf{M}$ serán elementos del conjunto B.

No hay requisitos previos ni limitaciones respecto de la elección de estos dos conjuntos, por lo que no necesariamente deben ser diferentes o poseer características especiales. Esto significa que el número de posibilidades para escoger A y B es infinito; a continuación se ejemplifican algunas de ellas:

- $A = B = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es el símbolo que representa al conjunto de los números reales.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{Z}$ y $B = \{-1, 1\}$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros.

- $A \subset \mathbb{Z}$ y $B \subset \mathbb{Z}$

Cada uno de los modelos de memorias asociativas que se incluyen en esta colección, posee sus propias especificaciones para los conjuntos A y B , de acuerdo con las necesidades del creador del modelo en cuestión.

Ya que se tienen especificados los conjuntos A y B, es necesario establecer las dimensiones de los patrones, tanto de entrada como de salida.

Sean m, n números enteros positivos. Se denota por n la dimensión de los patrones de entrada, y por m la dimensión de los patrones de salida; claramente, nada impide que los valores de m y de n sean iguales. Aún más, uno de los requisitos que debe cumplir una memoria autoasociativa es que la dimensión de los patrones de entrada sea igual a la dimensión de los patrones de salida; por otro lado, si en una memoria sucede que $m \neq n$, es evidente que la memoria debe ser heteroasociativa.

Cada vector columna que representa a un patrón de entrada tiene n componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A, y cada vector columna que representa a un patrón de salida posee m componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A. Es decir:

$$\mathbf{x}^{\mu} \in A^n \text{ y } \mathbf{y}^{\mu} \in A^m \; \forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$$

La j-ésima componente de un vector columna se indica con la misma letra del vector, pero sin negrilla, colocando a j como subíndice ($j \in \{1, 2, ..., n\}$ o $j \in \{1, 2, ..., m\}$ según corresponda). La j-ésima componente de un vector columna $\mathbf{x}^{\mu}$ se representa por

$$x_j^{\mu}$$

Ejemplos:

- La i-ésima componente del vector columna $\mathbf{x}^{\mu}$ se representa por x_i^{μ}
- La tercera componente del vector columna $\mathbf{x}^5$ se representa por x_3^5
- La j-ésima componente del vector columna $\mathbf{y}^{\mu}$ se representa por y_j^{μ}
- La l-ésima componente del vector columna $\mathbf{y}^{\omega}$ se representa por y_l^{ω}

Al usar el superíndice t para indicar el transpuesto de un vector, se obtienen las siguientes expresiones para los vectores columna que representan a los patrones fundamentales de entrada y de salida, respectivamente:

$$\mathbf{x}^\mu = (x_1^\mu, x_2^\mu, ..., x_n^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n$$

$$\mathbf{y}^\mu = (y_1^\mu, y_2^\mu, ..., y_m^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

Con lo anterior, es ya posible presentar el planteamiento del *problema general de las memorias asociativas*:

1. Fase de aprendizaje. Encontrar los operadores adecuados y una manera de generar una matriz $\mathbf{M}$ que almacene las p asociaciones del conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), (\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2), ..., (\mathbf{x}^p, \mathbf{y}^p)\}$, donde $\mathbf{x}^\mu \in A^n$ y $\mathbf{y}^\mu \in A^m$ $\forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$. Si $\exists \mu \in \{1, 2, ..., p\}$ tal que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$, la memoria será *heteroasociativa*; si $m = n$ y $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu$ $\forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$, la memoria será *autoasociativa*.
2. Fase de recuperación. Hallar los operadores adecuados y las condiciones suficientes para obtener el patrón fundamental de salida $\mathbf{y}^\mu$, cuando se opera la memoria $\mathbf{M}$ con el patrón fundamental de entrada $\mathbf{x}^\mu$; lo anterior para todos los elementos del conjunto fundamental y para ambos modos: autoasociativo y heteroasociativo. Exhibir y caracterizar, además, el ruido que puede soportar la memoria en el patrón de entrada $\tilde{\mathbf{x}}^\omega$, para entregar una salida perfecta $\mathbf{y}^\omega$.

La Lernmatrix.

Contexto.

Un análisis cuidadoso de la bibliografía que se ha generado a través de los años en relación con el tema de las memorias asociativas, nos permite percatarnos de que antes de la década de los setenta brilló por su ausencia la producción de trabajos en el área. Notables excepciones fueron la *Lernmatrix*, surgida en los albores de la década de los sesenta (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961) y que constituye el tema central de este primer número de la colección, y el *correlograph* (segundo número de esta colección), cuyo advenimiento acaeció en las postrimerías de esa misma década (Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins, 1969).

El año de 1972 fue testigo de una febril actividad de los investigadores pioneros en memorias asociativas. Para corroborar esta aserción, baste dar una vistazo a los items bibliográficos enlistados en la Introducción, donde se puede observar que cuatro de los primeros trabajos sobre modelos matemáticos para memorias asociativas se publicaron en revistas internacionales precisamente en las ediciones de ese año.

Apoyado por la *UCLA*, James A. Anderson prendió la mecha con su *Interactive Memory* (Anderson, 1972); en abril, Teuvo Kohonen, a la sazón profesor de la *Helsinki University of Technology*, presentó ante el mundo sus *Correlation Matrix Memories* (Kohonen, 1972); tres meses después, Kaoru Nakano de la *University of Tokyo*, dio a conocer su *Associatron* (Nakano, 1972); y en el ocaso del año, Shun-Ichi Amari, profesor de la *University of Tokyo* y uno de los más prolíficos escritores de artículos científicos hasta nuestros días, publicó un trabajo teórico donde continuaba con sus investigaciones sobre las *Self-Organizing Nets of Threshold Elements* (Amari, 1972), tópico cuyo estudio había iniciado un par de años atrás. Este trabajo de Amari constituye una valiosa muestra del estilo teórico característico de este personaje y representa, históricamente, un importante antecedente para la creación de lo que una década más tarde se convertiría en el modelo de memoria asociativa por antonomasia: la memoria Hopfield.

Los trabajos de Anderson y Kohonen, y en cierta medida el de Nakano, dieron lugar al modelo que actualmente se conoce con el nombre genérico de *Linear Associator*, que será descrito en el tercer número de esta colección.

El trabajo de Steinbuch.

Karl Steinbuch fue uno de los primeros investigadores en desarrollar un método para codificar información en arreglos cuadriculados conocidos como *crossbar* (Simpson, 1990). La importancia de la *Lernmatrix* (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961) se evidencia en una afirmación que hace Kohonen en su artículo de 1972, donde apunta que las matrices de correlación, base fundamental de su innovador trabajo, vinieron a sustituir a la *Lernmatrix* de Steinbuch.

La *Lernmatrix* es una memoria heteroasociativa que puede funcionar como un clasificador de patrones binarios si se escogen adecuadamente los patrones de salida; es un sistema de entrada y salida que al operar acepta como entrada un patrón binario $\mathbf{x}^{\mu} \in A^n$, $A = \{0, 1\}$ y produce como salida la clase $\mathbf{y}^{\mu} \in A^p$ que le corresponde (de entre p clases diferentes), codificada ésta con un método simple, a saber: para representar la clase $k \in \{1, 2, ..., p\}$, se asignan a las componentes del vector de salida $\mathbf{y}^{\mu}$ los siguientes valores: $y_k^{\mu} = 1$, y $y_j^{\mu} = 0$ para $j = 1, 2..., k-1, k+1, ...p$.

En la siguiente figura se esquematiza la fase de aprendizaje para la *Lernmatrix* de Steinbuch, al incorporar la pareja de patrones de entrenamiento $(\mathbf{x}^{\mu}, \mathbf{y}^{\mu}) \in A^n \times A^p$.

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 & x_1^\mu & x_2^\mu & \cdots & x_j^\mu & \cdots & x_n^\mu \\
\hline
y_1^\mu & m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1n} \\
\hline
y_2^\mu & m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2n} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
y_i^\mu & m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ij} & \cdots & m_{in} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
y_p^\mu & m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pj} & \cdots & m_{pn}
\end{array} \qquad \#
$$

Cada uno de los componentes m_{ij} de **M**, la *Lernmatrix* de Steinbuch, tiene valor cero al inicio, y se actualiza de acuerdo con la regla $m_{ij} + \Delta m_{ij}$, donde:

$$
\Delta m_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon \text{ si } x_i^\mu = 1 = y_j^\mu \\ -\varepsilon \text{ si } x_i^\mu = 0 \text{ y } y_j^\mu = 1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \qquad \#
$$

siendo ε una constante positiva escogida previamente.

La fase de recuperación consiste en encontrar la clase a la que pertenece un vector de entrada $\mathbf{x}^\omega \in A^n$ dado. Encontrar la clase significa obtener las coordenadas del vector $\mathbf{y}^\omega \in A^p$ que le corresponde al patrón $\mathbf{x}^\omega$; en virtud del método de construcción de los vectores $\mathbf{y}^\mu$ la clase debería obtenerse sin ambigüedad.

La i-ésima coordenada y_i^ω del vector de clase $\mathbf{y}^\omega \in A^p$ se obtiene como lo indica la siguiente expresión, donde $\bigvee$ es el operador *máximo*:

$$
y_i^\omega = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{ij}.x_j^\omega = \bigvee_{h=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{n} m_{hj}.x_j^\omega \right] \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \qquad \#
$$

Ejemplo 1.-

Sean $p = 3$, $n = 5$ y $\varepsilon > 0$. Es decir, se tienen 3 clases de patrones de dimensión 5; las primeras tres asociaciones se presentan a continuación:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para iniciar la creación (fase de aprendizaje) de la *Lernmatrix*, se asigna el valor cero a todos los elementos m_{ij} y se realizan las operaciones de la crossbar ref: Steinbuchcross y la expresión ref: Steinbuchapren con la primera pareja de asociaciones:

	$x_1^1 = 1$	$x_2^1 = 0$	$x_3^1 = 1$	$x_4^1 = 0$	$x_5^1 = 1$
$y_1^1 = 1$	ε	–ε	ε	–ε	ε
$y_2^1 = 0$	0	0	0	0	0
$y_3^1 = 0$	0	0	0	0	0

La segunda pareja de asociaciones provoca los siguientes cambios en la matriz:

	$x_1^2 = 1$	$x_2^2 = 1$	$x_3^2 = 0$	$x_4^2 = 0$	$x_5^2 = 1$
$y_1^2 = 0$	ε	–ε	ε	–ε	ε
$y_2^2 = 1$	ε	ε	–ε	–ε	ε
$y_3^2 = 0$	0	0	0	0	0

Y finalmente con la tercera pareja la matriz toma el siguiente aspecto:

	$x_1^3 = 1$	$x_2^3 = 0$	$x_3^3 = 1$	$x_4^3 = 1$	$x_5^3 = 0$
$y_1^3 = 0$	ε	–ε	ε	–ε	ε
$y_2^3 = 0$	ε	ε	–ε	–ε	ε
$y_3^3 = 1$	ε	–ε	ε	ε	–ε

#

Es decir,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \qquad \#$$

La fase de recuperación consiste en presentarle a la matriz **M** uno de los patrones de entrada y realizar las operaciones indicadas en la expresión ref: Steinbuchrecu ; a la salida se espera obtener la clase a la que pertenece el vector de entrada.

Iniciemos con el patrón $\mathbf{x}^1$.

$$\mathbf{M} \bullet \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Se observa que: $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^1 = 3\varepsilon$; $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^1 = \varepsilon$ y $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^1 = \varepsilon$. Por ello, $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^1 = \bigvee_{h=1}^{p}\left[\sum_{j=1}^{5} m_{hj}x_j^1\right]$ y de acuerdo con la expresión ref: Steinbuchrecu , se tiene que $y_1^1 = 1$ y $y_2^1 = 0 = y_3^1$. Por lo tanto, el vector que representa a la clase es:

$$\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recuperemos la clase a la que pertenece el patrón de entrada $\mathbf{x}^2$.

$$\mathbf{M} \bullet \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 3\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$$

En este caso se observa que: $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^2 = \varepsilon$; $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^2 = 3\varepsilon$ y $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^2 = -\varepsilon$. Por ello, $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^2 = \bigvee_{h=1}^{p}\left[\sum_{j=1}^{5} m_{hj}x_j^2\right]$ y de acuerdo con la expresión ref: Steinbuchrecu , se tiene que $y_2^2 = 1$ y $y_1^2 = 0 = y_3^2$. Por lo tanto, el vector que representa a la clase es:

$$\mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

finalmente recuperemos la clase a la que pertenece el patrón de entrada $\mathbf{x}^3$.

$$\mathbf{M} \bullet \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \\ 3\varepsilon \end{pmatrix}$$

En este caso se observa que: $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^3 = \varepsilon$; $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^3 = -\varepsilon$ y $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^3 = 3\varepsilon$. Por ello, $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^3 = \bigvee_{h=1}^{p}\left[\sum_{j=1}^{5} m_{hj}x_j^3\right]$ y de acuerdo con la expresión ref: Steinbuchrecu , se tiene que $y_3^3 = 1$ y $y_1^3 = 0 = y_2^3$. Por lo tanto, el vector que representa a la clase es:

$$\mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.-

Surge una cuestión interesante: ¿qué pasa si hay más vectores de entrada que clases?.

Dado que sólo existen tres clases diferentes, un cuarto patrón debe pertenecer necesariamente auna de esa tres clases.

Asignemos la clase $\mathbf{y}^1$ al vector de entrada $\mathbf{x}^4$ dado por:

$$\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eso significa que debemos modificar la matriz ref: Steinbuchlern llevando a cabo las operaciones de la expresión ref: Steinbuchapren en la crossbar ref: Steinbuchprelern :

	$x_1^4 = 0$	$x_2^4 = 1$	$x_3^4 = 0$	$x_4^4 = 1$	$x_5^4 = 1$
$y_1^1 = 1$	0	0	0	0	2ε
$y_2^1 = 0$	ε	ε	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
$y_3^1 = 0$	ε	$-\varepsilon$	ε	ε	$-\varepsilon$

Ahora la nueva *Lernmtrix*, que se representará con el símbolo $\mathbf{M}_{4patrones}$, es:

$$\mathbf{M}_{4patrones} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

Recuperemos la clase para cada uno de los 4 vectores de entrada, de acuerdo con la expresión ref: Steinbuchrecu :

$$\mathbf{M}_{4patrones} \bullet \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^1$$

$$\mathbf{M}_{4patrones} \bullet \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 3\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^2$$

$$\mathbf{M}_{4patrones} \bullet \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^3$$

$$\mathbf{M}_{4patrones} \bullet \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^1$$

Se observa que la recuperación se realizó de manera exacta para los cuatro patrones, a pesar de que hay más patrones que clases. Hasta aquí la *Lernmatrix* luce como un clasificador preciso. Cuando se aumenta el número de patrones, ocurre el fenómeno llamado saturación.

Ejemplo 3.-

Ejemplifiquemos el fenómeno de *saturación* en la *Lernmatrix* de Steinbuch, y para ello modifiquemos la matriz $\mathbf{M}_{4patrones}$ con la pareja:

$$\mathbf{x}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz:

$$\mathbf{M}_{4patrones} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

y de la pareja $(\mathbf{x}^5, \mathbf{y}^3)$ obtenemos:

	$x_1^5 = 0$	$x_2^5 = 0$	$x_3^5 = 1$	$x_4^5 = 0$	$x_5^5 = 1$
$y_1^3 = 0$	0	0	0	0	2ε
$y_2^3 = 0$	ε	ε	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
$y_3^3 = 1$	0	-2ε	2ε	0	0

La nueva *Lernmatrix*, que se representará con $\mathbf{M}_{5patrones}$ es:

$$\mathbf{M}_{5patrones} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al intentar recuperar la clase para cada uno de los cinco patrones de entrada, se obtiene:

$$\mathbf{M}_{5patrones} \bullet \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{¿clase } \mathbf{y}^1 \text{ o } \mathbf{y}^3\text{?}$$

$$\mathbf{M}_{5patrones}\bullet\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 3\varepsilon \\ -2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^2$$

$$\mathbf{M}_{5patrones}\bullet\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^3$$

$$\mathbf{M}_{5patrones}\bullet\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ -2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^1$$

$$\mathbf{M}_{5patrones}\bullet\mathbf{x}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 0 \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{¿clase } \mathbf{y}^1 \text{ o}$$

$\mathbf{y}^3$?

El fenómeno de saturación en todo su esplendor.

Epílogo.

En este número inicial de la colección *Estado del Arte en Memorias Asociativas* hemos presentado el antecedente más longevo conocido respecto del surgimiento, desarrollo y aplicaciones de las memorias asociativas.

Steinbuch es un buen ejemplo de la manera en que los trabajos pioneros en un campo específico del quehacer humano tienen trascendencia con el paso de los años... y de los siglos. Las recientes declaraciones de Robert Hecht-Nielsen, el notable científico creador de las redes neuronales conocidas como *counterpropagation*, lo constatan: Hecht-Nielsen es el director científico de un millonario proyecto de la DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency) de los Estados Unidos, cuyo objetivo es el diseño y construcción de un novedoso tipo de redes neuronales conocidas como redes cortrónicas; estas redes, según pregona el mencionado investigador, tienen como base la Lernmatrix del alemán Steinbuch (*www.gcn.com*).

Bibliografía.

bibitem Abu-Mostafa, Y. & St. Jacques, J. (1985). Information capacity of the Hopfield model, *IEEE Transactions on Information Theory*, *IT*-31, 4, 461-464.

bibitem Adeodato P. J. L. & Taylor J. G. (1996). Autoassociative memory with high storage capacity, In C. von der Malsburg, W. von Seelen, J. C. Vorbrueggen & B. Sendhoff (Eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, 1112, (pp. 29-34),. Bochum, Germany: ICANN'96.

bibitem Aleksander, I. & Morton, H. B. (1997). Weightless and other memory-based networks, In Emile Fiesler (Ed.), *Handbook of Neural Computation*, (pp. C1.5:1-C1.5:15). New York: Oxford.

bibitem Amari, S. (1972). Learning patterns and pattern sequences by self-organizing nets of threshold elements, *IEEE Transactions on Computers*, *C*-21, 11, 1197-1206.

bibitem Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation, *Biological Cybernetics*, 26, 175-185.

bibitem Anderson, J. A. (1972). A simple neural network generating an interactive memory, *Mathematical Biosciences*, 14, 197-220.

bibitem Anderson, J. A. & Rosenfeld, E. (Eds.) (1990). *Neurocomputing*: *Fundations of Research*, Cambridge: MIT Press.

bibitem Anderson, J. A., Silverstein, J., Ritz, S. & Jones, R. (1977). Distinctive features, categorical perception, and probability learning: some applications of a neural model, *Psichological Review*, 84, 413-451.

bibitem Anderson, J. R. & Bower, G. (1977). *Memoria Asociativa*, México: Limusa.

bibitem Austin, J. (1987). ADAM: A Distributed Associative Memory for Scene Analysis, In *Proceedings of First International Conference on Neural Networks*, (pp. 285-295). San Diego: Ed. M Caudhill and C Butler.

bibitem Austin, J., Buckle, S., Kennedy, J., Moulds, A., Pack, R. & Turner, A. (1997). The cellular neural network associative processor, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 284-306). Los Alamitos: IEEE Computer Society.

bibitem Bandyopadhyay, S. & Datta, A. K. (1996). A novel neural hetero-associative memory model for pattern recognition, *Pattern Recognition*, 29, 5, 789-795.

bibitem Bosch, H. & Kurfess, F. J. (1998). Information storage capacity of incompletely connected associative memories, *Neural Networks* (11), 5, 869-876.

bibitem Browne, C. & Aleksander, I. (1996).Learned Probabilistic Prediction in a Weightless Neural Network, London Imperial College Technical Report NSE96_03.

bibitem Buhmann, J. (1995). Oscillatory associative memories, In M. Arbib (Ed.), *Handbook of Brain Theory & Neural Networks*,.(pp. 691-694). Cambridge: MIT Press.

bibitem Chen, C. & Honavar, V. (1995). A neural architecture for content as well as address-based storage and recall: theory and applications, Iowa State University Technical Report TR95-03.

bibitem Díaz-de-León, J. L. & Yáñez, C. (1999). Memorias asociativas con respuesta perfecta y capacidad infinita, *Memoria del TAINA*'99, *México, D.F.*, 23-38.

bibitem Flynn, M., Kanerva, P. & Bhadkamkar, N. (1989). Sparse distributed memory: principles and

operation, Stanford University Technical Report CSL-TR-89-400.
bibitem Gori, M., Lastrucci, L. & Soda, G. (1996). Autoassociator-based models for speaker verification, *Pattern Recognition Letters*, 17, 3, 241-250.
bibitem Graham, B. & Willshaw, D. (1995). Improving recall from an associative memory, *Biological Cybernetics*, 72, 337-346.
bibitem Haralick, R. M., Sternberg, S. R. & Zhuang, X. (1987). Image analysis using mathematical morphology, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, *PAMI*-9, 4, 532-550.
bibitem Hassoun, M. H. (Ed.) (1993). *Associative Neural Memories*, New York: Oxford University Press.
bibitem Hassoun, M. H. (1995). *Fundamentals of Artificial Neural Networks*, Cambridge: MIT Press.
bibitem Hassoun, M. H. & Watta, P. B. (1997). Associative memory networks, In Emile Fiesler (Ed.), *Handbook of Neural Computation*, (pp. C1.3:1-C1.3:14). New York: Oxford.
bibitem Hattori, M. & Hagiwara, M. (2000). Associative memory for intelligent control, *Mathematics and Computers in Simulation*, 51, 349-374.
bibitem Hely, T. A., Willshaw, D. J. & Hayes, G. M. (1997). A new approach to Kanerva's sparse distributed memory, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 8, 3, 791-794.
bibitem Herrmann, F. P. & Sodini, C. G. (1992). A dynamic associative processor for machine vision applications, *IEEE Micro*, 12, 3, 31-41.
bibitem Hopfield, J.J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79, 2554-2558.
bibitem Hopfield, J.J. (1984). Neurons with graded respose have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 81, 3088-3092.
bibitem Imada, A. & Araki K. (1995). Genetic algorithm enlarges the capacity of associative memory. In L.J.Eshelman(Ed.), *Proceedings of* 6*th International Conference on Genetic Algorithms*, (pp 413-420). San Francisco: Morgan Kaufmann.
bibitem Jagota, A., Narasimhan, G. & Regan, K. W. (1998). Information Capacity of Binary Weights Associative Memories, *Neurocomputing*, 19(1-3), 35-38.
bibitem Jørgensen, T. M. (1997). Classification of handwritten digits using a RAM neural net architecture, *International Journal of Neural Systems*, 8, 1, 17-26.
bibitem Kanerva, P. (1988). *Sparse Distributed Memory*, Cambridge: MIT Press.
bibitem Kennedy, J. V., Austin, J. & Cass, B. (1995). A hardware implementation of a binary neural image processor, *Proceedings of the IEE Conference on Image Processing and its Applications*, Edinburgh, UK.
bibitem Kinser, J. M. (1995). Fast analog associative memory, *Poceedings of the SPIE*, 2568, 290-293.
bibitem Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories, *IEEE Transactions on Computers*, *C*-21, 4, 353-359.
bibitem Kohonen, T. (1974). An adaptive associative memory principle, *IEEE Transactions on Computers*, *C*-24, 4, 444-445.
bibitem Kohonen, T. (1987). *Content-Addressable Memories*, Berlin: Springer-Verlag.
bibitem Kohonen, T. (1989). *Self-Organization and Associative Memory*, Berlin: Springer-Verlag.
bibitem Kohonen, T. (1997). *Self-Organizing Maps*, Berlin: Springer.
bibitem Kohonen, T. & Ruohonen, M. (1973). Representation of associated data by matrix operators, *IEEE Transactions on Computers*, *C*-22, 701-702.
bibitem Kolen, J. F., & Pollack, J. B. (1991). Multiassociative memory, *The Proceedings of the Thirteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, 785-789.
bibitem Kosko, B. (1988). Bidirectional associative memories, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18, 1, 49-60.

bibitem Kosko, B. (1992). *Neural Networks and Fuzzy Systems*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
bibitem Krikelis, A. & Weems, C. C. (1997). Associative Processing and Processors, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 2-9). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
bibitem Little, W. & Shaw, G. (1975). A statistical theory of short and long term memory, *Behavioral Biology*, 14, 115-133.
bibitem Ludermir, T. B., Carvalho, A., Braga, A. & Souto, M. C. P. (1999). Weightless neural models: a review of current and past works, *Neural Computing Surveys*, 2, 41-61.
bibitem McCulloch, W. & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115-133.
bibitem McEliece, R., Posner, E., Rodemich, E. & Venkatesh, S. (1987). The capacity of the Hopfield associative memory, *IEEE Transactions on Information Theory*, *IT*-33, 4, 461-482.
bibitem Minsky, M. & Papert, S. (1988). *Perceptrons*, Cambridge: MIT Press.
bibitem Moore, J. (1968). *Elements of linear algebra and matrix theory*, New York: McGraw-Hill.
bibitem Nakano, K. (1972). Associatron-A model of associative memory, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, *SMC*-2, 3, 380-388.
bibitem Palm, G., Schwenker, F., Sommer F. T. & Strey, A. (1997). Neural associative memories, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 307-326). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
bibitem Ritter, G. X., Sussner, P. & Diaz-de-Leon, J. L. (1998). Morphological associative memories, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9, 281-293.
bibitem Ritter, G. X., Diaz-de-Leon, J. L. & Sussner, P. (1999). Morphological bidirectional associative memories, *Neural Networks*, 12, 851-867.
bibitem Rosen, K. H. (1995) *Discrete Mathematics and its Applications*, New York: McGraw-Hill.
bibitem Schwenk, H. & Milgram, M. (1995). Transformation invariant autoassociation with application to handwitten character recognition, In D. S. Touretzky, G. S. Tesauro & T. K. Leen (Eds.), *Neural Information Processing Systems*, (pp. 991-998). Cambridge: MIT Press.
bibitem Serra, J. (1992). *Image Analysis and Mathematical Morphology*, *Volume* 2: *Theoretical Advances*, London: Academic Press.
bibitem Silver, S., Glover, R. & Stonham, T. (1996). Associative memory neural networks for time series prediction, *Proceedings of the Third IEEE ICECS*, 651-654.
bibitem Simpson, P. K. (1990). *Artificial Neural Systems*, New York: Pergamon Press.
bibitem Sommer, F. T. & Palm, G. (1998). Bidirectional retrieval from associative memory, In M. I. Jordan, M. J. Kearns, & S. A. Solla (Eds.), *Advances in Neural Information Processing Systems* 10, (pp. 675-681). Cambridge: MIT Press.
bibitem Steinbuch, K. (1961). Die Lernmatrix, *Kybernetik*, 1, 1, 36-45.
bibitem Steinbuch, K. & Frank, H. (1961). Nichtdigitale Lernmatrizen als Perzeptoren, *Kybernetik*, 1, 3, 117-124.
bibitem Storkey, A. J. (1997). Increasing the capacity of a Hopfield network without sacrificing functionality, *International Conference on Artificial Neural Networks*, 451-456.
bibitem Stright, J. R., Coffield, P. C. & Brooks, G. W. (1998). Analog VLSI implementation of a morphological associative memory, *Poceedings of the SPIE*, 3452-03, 14-22.
bibitem Turner, M. & Austin, J. (1997). Matching performance of binary correlation matrix memories, *Neural Networks*,10, 9, 1637-1648.
bibitem Villanueva, N. & Figueroa, J. (1998). Superposición de información en memorias aleatorias: análisis cualitativo, *Memorias del Simposium Internacional de Computación CIC*'98, 559-564.
bibitem Willshaw, D., Buneman, O. & Longuet-Higgins, H. (1969). Non-holographic associative memory, *Nature*, 222, 960-962.

bibitem Zboril, F. (1997). An application of the sparse distributed memory, *Proceedings of the ASIS* 97, 127-132.