



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN



No. 57 Serie: VERDE Fecha: Junio 2001

Memorias Morfológicas Heteroasociativas

Juan Luis Díaz de León Santiago¹
Cornelio Yáñez Márquez²

RESUMEN

Este trabajo es el décimo de una colección que consta de once números consecutivos en esta misma serie verde. El propósito fundamental de la colección es proporcionar al lector, de manera sucinta, el estado del arte en el tema de las memorias asociativas.

En la vorágine de aportaciones e innovaciones en el campo de las memorias asociativas, después del espectacular éxito de la memoria Hopfield de 1982, no sucedió nada realmente trascendente hasta 1998, cuando aparecieron las memorias asociativas morfológicas. La diferencia fundamental entre estas memorias y las memorias asociativas clásicas como el Linear Associator y la Memoria Hopfield, es que mientras éstas basan su operación en la suma y multiplicación usuales, las memorias morfológicas se basan en las operaciones morfológicas de dilatación y erosión. En otras palabras, mientras que las memorias asociativas clásicas echan mano de la suma de productos, las memorias asociativas morfológicas hacen uso de máximos o mínimos de sumas.

En este número se presentan las memorias morfológicas heteroasociativas, y en el próximo, y último de la colección sobre el estado del arte de las memorias asociativas, se presentan las memorias morfológicas autoasociativas.

Los nueve títulos anteriores a éste son Lernmatrix de Steinbuch, Correlograph de Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins, Linear Associator de Anderson-Kohonen, Algunas aportaciones de S. Amari en Memorias Asociativas, Memoria Asociativa Hopfield, Pruebas de convergencia de la Memoria Hopfield, Modelo ADAM y Modelo BAM y Modelo SDM. El siguiente y último título de la colección será Memorias Morfológicas Autoasociativas.

Palabras clave: Dilatación, erosión, fase de aprendizaje, fase de recuperación, memoria asociativa, memoria autoasociativa, memoria heteroasociativa, morfología matemática.

¹Profesor Investigador del Centro de Investigación en Computación.

²Estudiante de doctorado del Centro de Investigación en Computación

Introducción.

Este trabajo es el décimo de una colección que consta de once números consecutivos en esta misma serie verde; los nueve títulos anteriores son "*Lernmatrix* de Steinbuch", "*Correlograph* de Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins", "*Linear Associator* de Anderson-Kohonen", "Algunas aportaciones de S. Amari en Memorias Asociativas", "Memoria Asociativa Hopfield", "Pruebas de convergencia de la Memoria Hopfield", "Modelo ADAM", "Modelo BAM" y "Modelo SDM", mientras que el título inmediato posterior, y último de la colección, es "Memorias Morfológicas Autoasociativas". El propósito fundamental de la colección es proporcionar al lector, de manera sucinta, el *Estado del Arte en Memorias Asociativas*.

Como se explicó en el primer número de la colección, el tema de las memorias asociativas ha estado vigente, desde hace varios lustros, dentro de algunas áreas de investigación en diversas latitudes del orbe. El propósito fundamental de una memoria asociativa es recuperar correctamente patrones completos a partir de patrones de entrada, los cuales pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado: ésta es la característica más atractiva de las memorias asociativas.

Notables investigadores han abordado el problema de generar modelos de memorias asociativas (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961; Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins, 1969; Amari, 1972; Anderson, 1972; Kohonen, 1972; Nakano, 1972; Kohonen & Ruohonen, 1973; Kohonen, 1974; Little & Shaw, 1975; Anderson, Silverstein, Ritz & Jones, 1977; Amari, 1977; Hopfield, 1982; Hopfield, 1984; Austin, 1987; Kanerva, 1988; Kolen, & Pollack, 1991; Buhmann, 1995; Kinser, 1995; Bandyopadhyay, & Datta, 1996; Aleksander & Morton, 1997; Austin, Buckle, Kennedy, Moulds, Pack & Turner, 1997; Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998; Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999), y han logrado resultados de importancia tal, que algunos de los trabajos pioneros (décadas 1970 y 1980) se han convertido en auténticos clásicos.

La capacidad de aprendizaje y almacenamiento, la eficiencia en la respuesta o recuperación de patrones, la rapidez y la inmunidad al ruido, son tópicos de interés entre los investigadores que se dedican a estudiar estos modelos con el fin de proponer variaciones y generalizaciones que, a la postre, se traduzcan en nuevos modelos de memorias asociativas con ventajas claras sobre los modelos conocidos y que, además, sean propicios para su aplicación directa en problemas reales.

Así, se han propuesto esquemas alternativos ante los clásicos (o variaciones de éstos), cuyos autores aseguran que sus modelos de memorias asociativas hacen gala de gran capacidad de almacenamiento (Chen & Honavar, 1995; Graham & Willshaw, 1995; Imada & Araki, 1995; Adeodato & Taylor, 1996; Storkey 1997; Bosch & Kurfess, 1998; Jagota, Narasimhan & Regan, 1998); exhiben más rapidez que otras (Kinser, 1995); prueban ser eficientes en cuanto a la recuperación de patrones (Hely, Willshaw & Hayes, 1997; Sommer & Palm, 1998) o se han implementado en hardware (Kennedy, Austin & Cass, 1995; Krikelis, & Weems, 1997; Stright, Coffield, & Brooks, 1998).

Existen equipos de investigación que han dirigido sus esfuerzos a incorporar las bondades de las técnicas aleatorias en los esquemas para memorias asociativas (Kanerva, 1988; Browne, & Aleksander, 1996; Villanueva, & Figueroa, 1998). Las indefectibles aplicaciones de las memorias

asociativas también han dado lugar a relevantes proyectos y trabajos de investigación (Herrmann, & Sodini, 1992; Schwenk & Milgram, 1995; Gori, Lastrucci & Soda 1996; Silver, Glover & Stonham, 1996; Jørgensen 1997; Hattori & Hagiwara, 2000).

En esta vorágine de aportaciones e innovaciones, la aparición, desarrollo, aplicaciones y consolidación de las memorias asociativas morfológicas representó un salto cualitativo en la concepción y desarrollo de las memorias asociativas, por las características propias de las operaciones morfológicas, que permitieron ventajas de las memorias asociativas morfológicas respecto de los modelos conocidos (Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998; Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999); con objeto de proporcionar una muestra de la magnitud de este salto cualitativo, mencionaré que al funcionar en uno de los posibles modos (autoasociativo), las memorias asociativas morfológicas tienen respuesta perfecta y capacidad infinita de aprendizaje y almacenamiento (Díaz-de-León & Yáñez, 1999).

Un hecho que puede ser importante en el contexto de las potencialidades de la tecnología de punta a niveles de seguridad nacional, es que investigadores del *Air Force Research Lab.* de los Estados Unidos implementaron las memorias asociativas morfológicas en hardware VLSI (Stright, Coffield, & Brooks, 1998).

En el primer número de la colección *Estado del Arte en Memorias Asociativas* se presentó uno de los trabajos pioneros, que constituye un antecedente crucial en el desarrollo de los modelos actuales de memorias asociativas: la *Lernmatrix*, ideada y desarrollada por el científico alemán Karl Steinbuch en 1961. Se presentaron las ideas que llevaron a Steinbuch a crear su *Lernmatrix*, se dieron ejemplos y se mencionaron las ventajas y desventajas del modelo.

En el segundo número de la colección se presentó otro trabajo pionero, notable por su poderosa sencillez: el *Correlograph*, dispositivo que fue desarrollado en Inglaterra por los científicos Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins en 1969, y que dio lugar a la *red asociativa*..

Al llegar al tercer número, le tocó el turno al *Linear Associator*, un modelo de memoria asociativa desarrollada de manera independiente por dos notables científicos: James A. Anderson y Teuvo Kohonen.

El cuarto número de la colección se dedicó a bosquejar algunas de las ideas que aparecen en los trabajos de un notable y prolífico teórico: el ingeniero matemático japonés Shun-ichi Amari, quien ha desplegado una gran actividad, trabajando en la *University of Tokyo* y en el Laboratory For Mathematical Neuroscience del Brain Science Institute de Japón (RIKEN), en busca de la creación de nuevos conceptos y la formación de recursos humanos de alto nivel en las áreas de redes neuronales y memorias asociativas.

Uno de los trabajos clásicos en memorias asociativas, cuyo autor se ha convertido en algo así como una leyenda viviente, es abordado en el quinto número de la colección: La Memoria Asociativa Hopfield.

Las razones de esta peculiar situación obedecen a que, entre otras cosas, algunos de los conspicuos autores científicos que publican regularmente en las áreas de redes neuronales, física y memorias asociativas han declarado, de manera muy seria que este personaje, el físico norteamericano John Hopfield, es el responsable de haber revivido el interés, a principios de los ochenta del siglo XX, en las redes neuronales y en particular en las memorias asociativas, después de un período de estancamiento de más de una década.

Uno de los hechos clave para que la memoria Hopfield fuese un verdadero éxito en su tiempo, es que se garantiza la existencia de un parámetro τ de convergencia, a través de la demostración que hace Hopfield de que existen puntos límite localmente estables en su modelo de memoria asociativa.

En el sexto número de la colección se presentaron los desarrollos de dos bosquejos de pruebas de convergencia de la Memoria Hopfield; una que proviene del mismo Hopfield y otra que apareció en el artículo (McEliece, Posner, Rodemich, & Venkatesh, 1987).

Los dos números anteriores y éste incluyen tres modelos de memoria asociativa, cuya relevancia no es tan impactante como la de los otros ocho modelos de la colección. Estos tres modelos de memorias asociativas no se consideran esenciales, debido a que son simples extensiones de modelos ya conocidos, de indudable importancia.

En el séptimo número de la colección se presentó el modelo ADAM (Advanced Distributed Associative Memory), el cual fue propuesto por el inglés Jim Austin en 1986 como tema de tesis doctoral y es básicamente una extensión de las redes asociativas de Willshaw *et. al.*

El modelo BAM (Bidirectional Associative Memory), descrito en el octavo número, es simplemente un ingenioso arreglo de dos memorias Hopfield, ideado por el estadounidense Bart Kosko en 1988, con el fin de lograr establecer heteroasociaciones.

Para finalizar la terna, en el noveno número de la colección *Estado del Arte en Memorias Asociativas* se presentó el modelo SDM (Sparse Distributed Memory), creado por el finlandés Pentti Kanerva en 1988, basado en el funcionamiento de una RAM usual.

En este penúltimo número se describen y ejemplifican las Memorias Morfológicas Heteroasociativas, y en el próximo y último, las Memorias Morfológicas Autoasociativas de Ritter, Díaz-de-León & Sussner.

Memorias asociativas.

El propósito de esta sección es plantear de manera diáfana y concisa el problema inherente al funcionamiento de las memorias asociativas. Por su naturaleza, este problema se escinde en dos

fases claramente distinguibles:

1. Fase de *aprendizaje* (generación de la memoria asociativa)
2. Fase de *recuperación* (operación de la memoria asociativa)

Para estar en condiciones de realizar el planteamiento del problema, es preciso previamente proporcionar los conceptos básicos, las notaciones y la nomenclatura relacionados con el diseño y funcionamiento de las memorias asociativas.

Los conceptos básicos son conocidos tres décadas ha, y se presentan como originalmente fueron establecidos en las referencias (Kohonen, 1972, 1977, 1987, 1989; Anderson, 1972; Anderson & Bower, 1977; Anderson & Rosenfeld, 1990; Hassoun, 1993, 1995, 1997).

Respecto de las notaciones y nomenclatura que se utiliza en esta colección de once números de la serie verde, en algunos casos se han realizado adaptaciones de la literatura incluida en la bibliografía, y en otros, para efectos de sencillez y facilidad de manipulación, se establecen arbitrariamente, en la inteligencia de que invariablemente se opta por aquellas notaciones que mejor reflejan, a juicio del autor, los conceptos ahí representados. La notación y nomenclatura que aquí se presenta es consistente a lo largo de toda la colección.

Como se mencionó en la Introducción, el propósito fundamental de una memoria asociativa es recuperar patrones completos a partir de patrones de entrada que pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado. De acuerdo con esta afirmación, una *memoria asociativa* **M** puede formularse como un sistema de entrada y salida, idea que se esquematiza a continuación:

$$\mathbf{x} \rightarrow \boxed{\mathbf{M}} \rightarrow \mathbf{y}$$

El *patrón de entrada* está representado por un vector columna denotado por **x** y el *patrón de salida*, por el vector columna denotado por **y**.

Cada uno de los patrones de entrada forma una *asociación* con el correspondiente patrón de salida. La notación para una asociación es similar a la de una pareja ordenada; por ejemplo, los patrones **x** y **y** del esquema forman la asociación (**x**, **y**).

Para facilitar la manipulación algebraica de los patrones de entrada y de salida, los denotaremos con las mismas letras negrillas, **x** y **y**, agregándoles números naturales como superíndices para efectos de discriminación simbólica. Por ejemplo, a un patrón de entrada **x**¹ le corresponderá un patrón de salida **y**¹, y ambos formarán la asociación (**x**¹, **y**¹); del mismo modo, para un número entero positivo *k* específico, la asociación correspondiente será (**x**^{*k*}, **y**^{*k*}).

La memoria asociativa **M** se representa mediante una matriz cuya componente *ij*-ésima es *m*_{*ij*} (Palm, Schwenker, Sommer & Strey, 1997); la matriz **M** se genera a partir de un conjunto finito de asociaciones conocidas de antemano: éste es el *conjunto fundamental de asociaciones*, o

simplemente *conjunto fundamental*. Se denota por p la cardinalidad del conjunto fundamental (p es un número entero positivo).

Si μ es un índice, el conjunto fundamental se representa de la siguiente manera:

$$\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$$

A los patrones que conforman las asociaciones del conjunto fundamental, se les llama *patrones fundamentales*.

La naturaleza del conjunto fundamental proporciona un importante criterio para clasificar las memorias asociativas. Si se cumple que $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, se dice que la memoria es *autoasociativa*; de otro modo, la memoria es *heteroasociativa* (Kohonen, 1972). Para una memoria heteroasociativa se puede afirmar lo siguiente: $\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ para el que se cumple que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$.

Es posible que los patrones fundamentales sean alterados con diferentes tipos de ruido. Para diferenciar un patrón alterado del correspondiente patrón fundamental, usaremos la tilde en la parte superior; así, el patrón $\tilde{\mathbf{x}}^k$ es una versión alterada del patrón fundamental \mathbf{x}^k , y el tipo de alteración que representa $\tilde{\mathbf{x}}^k$ se evidenciará en el contexto específico donde se use.

Si al presentarle a la memoria \mathbf{M} un patrón alterado $\tilde{\mathbf{x}}^\omega$ como entrada ($\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$), \mathbf{M} responde con el correspondiente patrón fundamental de salida \mathbf{y}^ω , se dice que la recuperación es *perfecta*. Una *memoria perfecta* es aquella que realiza recuperaciones perfectas para todos los patrones fundamentales.

Naturalmente, también los patrones de salida pueden ser alterados; por ejemplo, si \mathbf{y}^3 es un patrón fundamental, entonces $\tilde{\mathbf{y}}^3$ representa una versión alterada de \mathbf{y}^3 .

Abundemos en la caracterización de los patrones de entrada, de salida y de la matriz \mathbf{M} .

Primeramente se requiere la especificación de dos conjuntos a los que llamaremos arbitrariamente A y B . La importancia de estos dos conjuntos radica en que las componentes de los vectores columna que representan a los patrones, tanto de entrada como de salida, serán elementos del conjunto A , y las entradas de la matriz \mathbf{M} serán elementos del conjunto B .

No hay requisitos previos ni limitaciones respecto de la elección de estos dos conjuntos, por lo que no necesariamente deben ser diferentes o poseer características especiales. Esto significa que el número de posibilidades para escoger A y B es infinito; a continuación se ejemplifican algunas de

ellas:

- $A = B = \mathbb{R}$, donde \mathbb{R} es el símbolo que representa al conjunto de los números reales.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{Z}$ y $B = \{-1, 1\}$, donde \mathbb{Z} es el conjunto de los números enteros.
- $A \subset \mathbb{Z}$ y $B \subset \mathbb{Z}$

Cada uno de los modelos de memorias asociativas que se incluyen en esta colección, posee sus propias especificaciones para los conjuntos A y B , de acuerdo con las necesidades del creador del modelo en cuestión.

Ya que se tienen especificados los conjuntos A y B , es necesario establecer las dimensiones de los patrones, tanto de entrada como de salida.

Sean m, n números enteros positivos. Se denota por n la dimensión de los patrones de entrada, y por m la dimensión de los patrones de salida; claramente, nada impide que los valores de m y de n sean iguales. Aún más, uno de los requisitos que debe cumplir una memoria autoasociativa es que la dimensión de los patrones de entrada sea igual a la dimensión de los patrones de salida; por otro lado, si en una memoria sucede que $m \neq n$, es evidente que la memoria debe ser heteroasociativa.

Cada vector columna que representa a un patrón de entrada tiene n componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A , y cada vector columna que representa a un patrón de salida posee m componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A . Es decir:

$$\mathbf{x}^\mu \in A^n \text{ y } \mathbf{y}^\mu \in A^m \quad \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$$

La j -ésima componente de un vector columna se indica con la misma letra del vector, pero sin negrilla, colocando a j como subíndice ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$ o $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ según corresponda). La j -ésima componente de un vector columna \mathbf{x}^μ se representa por

$$x_j^\mu$$

Ejemplos:

- La i -ésima componente del vector columna \mathbf{x}^μ se representa por x_i^μ
- La tercera componente del vector columna \mathbf{x}^5 se representa por x_3^5
- La j -ésima componente del vector columna \mathbf{y}^μ se representa por y_j^μ

- La l -ésima componente del vector columna \mathbf{y}^ω se representa por y_l^ω

Al usar el superíndice t para indicar el transpuesto de un vector, se obtienen las siguientes expresiones para los vectores columna que representan a los patrones fundamentales de entrada y de salida, respectivamente:

$$\mathbf{x}^\mu = (x_1^\mu, x_2^\mu, \dots, x_n^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n$$

$$\mathbf{y}^\mu = (y_1^\mu, y_2^\mu, \dots, y_m^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

Con lo anterior, es ya posible presentar el planteamiento del *problema general de las memorias asociativas*:

1. **Fase de aprendizaje.** Encontrar los operadores adecuados y una manera de generar una matriz \mathbf{M} que almacene las p asociaciones del conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), (\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2), \dots, (\mathbf{x}^p, \mathbf{y}^p)\}$, donde $\mathbf{x}^\mu \in A^n$ y $\mathbf{y}^\mu \in A^m \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$. Si $\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$, la memoria será *heteroasociativa*; si $m = n$ y $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, la memoria será *autoasociativa*.
2. **Fase de recuperación.** Hallar los operadores adecuados y las condiciones suficientes para obtener el patrón fundamental de salida \mathbf{y}^μ , cuando se opera la memoria \mathbf{M} con el patrón fundamental de entrada \mathbf{x}^μ ; lo anterior para todos los elementos del conjunto fundamental y para ambos modos: autoasociativo y heteroasociativo. Exhibir y caracterizar, además, el ruido que puede soportar la memoria en el patrón de entrada \mathbf{x}^ω , para entregar una salida perfecta \mathbf{y}^ω .

Las Memorias Morfológicas Heteroasociativas.

Contexto.

En esta sección se contextualiza el contenido de este trabajo dentro del bagaje que existe en memorias asociativas, para evidenciar la importancia de las memorias asociativas morfológicas.

Un análisis cuidadoso de la bibliografía que se ha generado a través de los años en relación con el tema de las memorias asociativas, nos permite percatarnos de que antes de la década de los setenta brilló por su ausencia la producción de trabajos en el área. Notables excepciones fueron la

Lernmatrix, surgida en los albores de la década de los sesenta (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961) y que constituye el tema central del primer número de la colección *Estado del Arte en Memorias Asociativas*, y el *Correlograph*, que conforma el segundo número de la colección, y cuyo advenimiento acaeció en las postrimerías de esa misma década (Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins, 1969).

El año de 1972 fue testigo de una febril actividad de los investigadores pioneros en memorias asociativas. Para corroborar esta aserción, baste dar una vistazo a los items bibliográficos enlistados en la Introducción, donde se puede observar que cuatro de los primeros trabajos sobre modelos matemáticos para memorias asociativas se publicaron en revistas internacionales precisamente en las ediciones de ese año.

Apoyado por la *UCLA*, James A. Anderson prendió la mecha con su *Interactive Memory* (Anderson, 1972); en abril, Teuvo Kohonen, a la sazón profesor de la *Helsinki University of Technology*, presentó ante el mundo sus *Correlation Matrix Memories* (Kohonen, 1972); tres meses después, Kaoru Nakano de la *University of Tokyo*, dio a conocer su *Associatron* (Nakano, 1972); y en el ocaso del año, Shun-ichi Amari, profesor de la *University of Tokyo* y uno de los más prolíficos escritores de artículos científicos hasta nuestros días, publicó un trabajo teórico donde continuaba con sus investigaciones sobre las *Self-Organizing Nets of Threshold Elements* (Amari, 1972), tópico cuyo estudio había iniciado un par de años atrás. Este trabajo de Amari constituye una valiosa muestra del estilo teórico característico de este personaje y representa, históricamente, un importante antecedente para la creación de lo que una década más tarde se convertiría en el modelo de memoria asociativa por antonomasia: la memoria Hopfield.

Los trabajos de Anderson y Kohonen, y en cierta medida el de Nakano, dieron lugar al modelo que actualmente se conoce con el nombre genérico de *Linear Associator*, descrito en el tercer número de la colección *Estado del Arte en Memorias Asociativas*. Bosquejos de algunas de las ideas que aparecen en los trabajos de Amari son el tema central del cuarto número de la colección.

Si 1972 fue el año de los pioneros en el área de las memorias asociativas, 1982 fue el año de John J. Hopfield. Su artículo de ese año (Hopfield, 1982), publicado por la prestigiosa y respetada *National Academy of Sciences* (en sus *Proceedings*), impactó positivamente y trajo a la palestra internacional su memoria asociativa.

Las autorizadas voces de los editores del compendio *Neurocomputing* (Anderson, & Rosenfeld (Eds.), 1990) aseguran que la era moderna de las memorias asociativas (y de las redes neuronales) nace a raíz de la publicación del artículo de Hopfield; afirman que el éxito de este artículo se debe en gran parte a que, además de tener un estilo claro, coherente y sofisticado, fue escrito por el distinguido y reconocido físico John J. Hopfield, “en cuyas manos la teoría se convierte en algo legítimo y respetable”.

La formación como físico del autor queda de manifiesto cuando declara que en los sistemas físicos constituidos por un gran número de elementos simples, las interacciones entre estos elementos dan lugar a fenómenos colectivos (las orientaciones de los dominios en sistemas

magnéticos y los patrones de vórtices en sistemas de fluidos ejemplifican esta afirmación).

A partir de estas consideraciones, Hopfield se pregunta si la interacción de elementos simples de procesamiento similares a las *neuronas*, cuyo modelo simplificado se conocía desde hacía cuatro décadas (McCulloch & Pitts, 1943), da lugar a la aparición de propiedades computacionales colectivas, tales como la estabilidad de memorias; acto seguido, el autor afirma que en efecto, su artículo de 1982 demuestra que este tipo de propiedades computacionales aparecen espontáneamente.

El quinto número de la colección se dedicó a la Memoria Asociativa Hopfield, la cual es autoasociativa, simétrica, con ceros en la diagonal principal.

La existencia de un parámetro τ de convergencia para la memoria Hopfield, está garantizada a través de la sugerencia de demostración que hace el mismo autor de que existen puntos límite localmente estables en su modelo de memoria asociativa; para ello, define la energía E del sistema de la siguiente manera, tomando en cuenta la condición de que $m_{ii} = 0, \forall i$:

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i x_j \quad \#$$

y acto seguido sugiere la demostración de que E es una función de x_i monótona decreciente.

Además de la demostración sugerida por Hopfield, los investigadores McEliece *et. al.* esbozan otro camino para demostrar la convergencia de la expresión ref: Hopfieldenergy , en un importante trabajo donde analizan la capacidad de la memoria asociativa Hopfield (McEliece, Posner, Rodemich, & Venkatesh, 1987).

En el sexto número de la colección se desarrolla la sugerencia de Hopfield y también se desarrolla el esbozo de demostración de McEliece *et. al.*

Los trabajos de Hopfield causaron excitación en el mundo de las memorias asociativas y las redes neuronales, de modo tal que muchos de los científicos que habían estado al margen, gracias a Hopfield se interesaron en estos temas y se generó una actividad importante.

En la segunda mitad de la década de los ochenta del siglo XX aparecieron investigadores que tomaron los modelos clásicos, los modificaron o extendieron y dieron lugar a nuevos tipos de memorias asociativas, cuya importancia radica en que son consecuencia del trabajo de los grandes hombres involucrados en la concepción y desarrollo de los modelos hasta ahora descritos en esta colección.

De la gran cantidad de ideas que surgieron en esos años, tres modelos sobresalen por el ingenio de sus autores para aprovechar las ideas de los grandes y adaptarlas o extenderlas: ADAM, BAM y SDM. Los tres modelos comparten una característica común: son extensiones de modelos conocidos.

El ADAM de Austin se puede considerar como una extensión de las redes asociativas de Willshaw; la BAM de Kosko, que surgió en pleno auge de los intentos realizados por algunos grupos de investigación con miras a minimizar una de las desventajas de la memoria Hopfield, se puede considerar como una extensión ingeniosa de ésta última; y finalmente, la SDM de Kanerva está basada en la estructura de una RAM usual, y puede considerarse como una generalización de los conceptos involucrados en una RAM

Entre la miríada de aportaciones e innovaciones en el campo de las memorias asociativas, después del espectacular éxito de la memoria Hopfield de 1982, no sucedió nada realmente trascendente hasta 1998, cuando aparecieron las memorias asociativas morfológicas.

La diferencia fundamental entre estas memorias y las memorias asociativas clásicas como el *Linear Associator* y la Memoria Hopfield, es que mientras éstas basan su operación en la suma y multiplicación usuales, las memorias morfológicas se basan en las operaciones morfológicas de dilatación y erosión. En otras palabras, mientras que las memorias asociativas clásicas echan mano de la suma de productos, las memorias asociativas morfológicas hacen uso de máximos o mínimos de sumas.

Es a partir de este contexto que presentamos, en este número, las memorias morfológicas heteroasociativas, y dejamos para el último número de la colección sobre el estado del arte de las memorias asociativas, a las memorias morfológicas autoasociativas.

El trabajo de Ritter, Díaz-de-León & Sussner.

Los modelos de memorias asociativas hasta aquí presentados en la colección *Estado del Arte en Memorias Asociativas* funcionan con base en las operaciones usuales de suma y multiplicación. A este tipo de memorias asociativas, representadas principalmente por el *Linear Associator* y la memoria Hopfield, se les llama *clásicas* para contrastar su funcionamiento con las *memorias asociativas morfológicas*.

La diferencia fundamental entre las memorias asociativas clásicas y las morfológicas, radica en que los fundamentos operacionales de las *memorias asociativas morfológicas*, se encuentran en las operaciones morfológicas de dilatación y erosión. Estas memorias rompieron el esquema utilizado a través de los años en los modelos de memorias asociativas clásicas, que utilizan operaciones convencionales entre vectores y matrices para la fase de aprendizaje (ver nueve números anteriores de esta colección), y *suma de productos* para recuperar patrones.

Las memorias asociativas morfológicas, por otro lado, usan *máximos o mínimos de sumas* para la fase de aprendizaje, y *máximos o mínimos de sumas* para la fase de recuperación (Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998; Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999). La información que se expone a continuación constituye un resumen ilustrativo del diseño, operación y características de las memorias asociativas morfológicas y está tomada libremente del contenido de estas dos referencias (las cuales contienen, en total, 17 teoremas y cuatro corolarios) y de (Díaz-de-León & Yáñez, 1999).

Hay dos tipos de memorias asociativas morfológicas: las memorias *max*, simbolizadas con **M**, y las memorias *min*, las cuales se simbolizan con **W**; en cada uno de los dos tipos, las memorias pueden funcionar en ambos modos *heteroasociativo* y *autoasociativo*. Nótese, de entrada, esta ventaja que poseen las memorias asociativas morfológicas respecto de la memoria Hopfield, la cual se diseñó para funcionar sólo como memoria autoasociativa.

El conjunto fundamental será $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ con

$$\mathbf{x}^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \text{ y } \mathbf{y}^\mu = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

Antes de iniciar, es necesario definir dos nuevas operaciones entre matrices en términos de las operaciones $+$, \vee y \wedge , con el fin de poder expresar las fases de aprendizaje y recuperación de las memorias asociativas morfológicas.

Sea D una matriz $[d_{ij}]_{m \times p}$ y H una matriz $[h_{ij}]_{p \times n}$ cuyos términos son números enteros.

El *producto máximo* de D y H , denotado por $C = D \nabla H$, da como resultado una matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ y se define de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^p (d_{ik} + h_{kj}) \quad \#$$

Existen dos casos particulares de suma importancia en la aplicación del *producto máximo*.

El primer caso es cuando D es una matriz de dimensiones $m \times n$ y H es un vector columna de dimensión n . Al aplicar la expresión ref: MorphHetero1 para calcular el producto máximo $C = D \nabla H$ cuando D es una matriz $[d_{ij}]_{m \times n}$ y H es un vector columna de dimensión n $[h_i]_n$ se obtiene un vector columna C de dimensión m , cuya i -ésima componente es:

$$c_i = \bigvee_{j=1}^n (d_{ij} + h_j) \quad \#$$

El segundo caso es cuando se realiza el *producto máximo* entre un vector columna de dimensión m por un vector fila de dimensión n ; en ambos vectores se cumple que $p = 1$.

Al aplicar la expresión ref: MorphHetero1 para calcular $C = D \nabla H$ siendo D un vector columna de dimensión m y H un vector fila de dimensión n , se obtiene una matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^1 (d_{ik} + h_{kj}) = (d_{i1} + h_{1j})$$

expresión en la que se puede eliminar el subíndice 1, para quedar finalmente que la componente c_{ij} de la matriz $[c_{ij}]_{m \times n}$ que resulta del *producto máximo* entre un vector columna D de dimensión m por un vector fila H de dimensión n es:

$$c_{ij} = (d_i + h_j) \quad \#$$

Similarmente, el *producto mínimo* $C = D \triangle H$ se define así:

$$c_{ij} = \bigwedge_{k=1}^p (d_{ik} + h_{kj}) \quad \#$$

Al aplicar la expresión ref: MorphHetero4 para calcular el producto mínimo $C = D \triangle H$ cuando D es una matriz $[d_{ij}]_{m \times n}$ y H es un vector columna de dimensión n $[h_i]_n$ se obtiene un vector columna C de dimensión m , cuya i -ésima componente es:

$$c_i = \bigwedge_{j=1}^n (d_{ij} + h_j) \quad \#$$

Y la componente c_{ij} del *producto mínimo* entre un vector columna D de dimensión m por un vector fila H de dimensión n es:

$$c_{ij} = \bigwedge_{k=1}^1 (d_{ik} + h_{kj}) = (d_{i1} + h_{j1}) = (d_i + h_j) \quad \#$$

Las expresiones anteriores contienen a los operadores máximo \bigvee y mínimo \bigwedge , los cuales están íntimamente ligados con los conceptos de las dos operaciones básicas de la morfología matemática: *dilatación* y *erosión*, respectivamente (Serra, 1992; Haralick, Sternberg, & Zhuang, 1987; Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998); de ahí el nombre de memorias asociativas *morfológicas*.

Memorias morfológicas heteroasociativas *max*

Las memorias morfológicas heteroasociativas *max* utilizan el *producto mínimo* para ambas fases: aprendizaje y recuperación de patrones. Además, en la fase de aprendizaje juega un papel relevante el operador *máximo*; de ahí el nombre de memorias *max*.

La *fase de aprendizaje* consiste de dos etapas:

1. Aplicando la expresión ref: MorphHetero6 , para cada una de las p asociaciones $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu)$ se encuentra la matriz $\mathbf{y}^\mu \triangle (-\mathbf{x}^\mu)^t$ de dimensiones $m \times n$, donde $(-\mathbf{x}^\mu)^t = (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$:

$$\mathbf{y}^\mu \triangle (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \triangle (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$$

$$\mathbf{y}^\mu \triangle (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} [y_1^\mu + (-x_1^\mu)] & [y_1^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [y_1^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [y_1^\mu + (-x_n^\mu)] \\ [y_2^\mu + (-x_1^\mu)] & [y_2^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [y_2^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [y_2^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [y_i^\mu + (-x_1^\mu)] & [y_i^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [y_i^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [y_i^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [y_m^\mu + (-x_1^\mu)] & [y_m^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [y_m^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [y_m^\mu + (-x_n^\mu)] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^\mu \triangle (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu - x_1^\mu & y_1^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_1^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_1^\mu - x_n^\mu \\ y_2^\mu - x_1^\mu & y_2^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_2^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_2^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_i^\mu - x_1^\mu & y_i^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_i^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_i^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m^\mu - x_1^\mu & y_m^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_m^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_m^\mu - x_n^\mu \end{pmatrix} \quad \#$$

2. Se aplica el operador *máximo* \bigvee a las p matrices para obtener la memoria \mathbf{M} .

$$\mathbf{M} = \bigvee_{\mu=1}^p [\mathbf{y}^\mu \triangle (-\mathbf{x}^\mu)^t] = [m_{ij}]_{m \times n} \quad \#$$

de manera que la ij -ésima componente de la memoria \mathbf{M} se expresa así:

$$m_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^p (y_i^\mu - x_j^\mu) \quad \#$$

La *fase de recuperación* consiste en realizar el producto mínimo \triangle de la memoria \mathbf{M} con un patrón de entrada \mathbf{x}^ω , donde $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, para obtener un vector columna \mathbf{y} de dimensión m :

$$\mathbf{y} = \mathbf{M} \triangle \mathbf{x}^\omega \quad \#$$

De acuerdo con la expresión ref: MorphHetero5 , la i -ésima componente del vector \mathbf{y} es:

$$y_i = \bigwedge_{j=1}^n (m_{ij} + x_j^\omega) \quad \#$$

Ejemplo.-

Este ejemplo es meramente ilustrativo de los tipos de operaciones que se llevan a cabo en la generación y operación de las memorias asociativas morfológicas *max*; no se intenta mostrar, de ningún modo, sus bondades y ventajas, las cuales se tratarán detalladamente en un Informe Técnico de esta misma serie Verde, cuyo título es: "Memorias Asociativas: Clásicas vs. Morfológicas".

Se usarán tres parejas de patrones con $p = 3$, $n = 5$ y $m = 3$.

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para llevar a cabo el primer paso de la fase de aprendizaje, se encuentra la matriz $\mathbf{y}^\mu \triangle (-\mathbf{x}^\mu)^t$ de dimensiones 3×5 para cada una de las parejas del conjunto fundamental (expresión ref: MorphHeteroapren1).

$$\mathbf{y}^1 \triangle (\mathbf{x}^1)^t = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-0 & 1-1 & 1-0 & 1-1 \\ 0-1 & 0-0 & 0-1 & 0-0 & 0-1 \\ 0-1 & 0-0 & 0-1 & 0-0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^2 \triangle (\mathbf{x}^2)^t = \begin{pmatrix} 0-1 & 0-1 & 0-0 & 0-0 & 0-1 \\ 1-1 & 1-1 & 1-0 & 1-0 & 1-1 \\ 0-1 & 0-1 & 0-0 & 0-0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^3 \triangle (\mathbf{x}^3)^t = \begin{pmatrix} 0-1 & 0-0 & 0-1 & 0-1 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 0-1 & 0-1 & 0-0 \\ 1-1 & 1-0 & 1-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El segundo paso de la fase de aprendizaje consiste en aplicar el operador máximo a las tres matrices (expresión ref: MorphHeteroapren2).

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \vee (-1) \vee (-1) & 1 \vee (-1) \vee 0 & 0 \vee 0 \vee (-1) & 1 \vee 0 \vee (-1) & 0 \vee (-1) \vee 0 \\ (-1) \vee 0 \vee (-1) & 0 \vee 0 \vee 0 & (-1) \vee 1 \vee (-1) & 0 \vee 1 \vee (-1) & (-1) \vee 0 \vee 0 \\ (-1) \vee (-1) \vee 0 & 0 \vee (-1) \vee 1 & (-1) \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 & (-1) \vee (-1) \vee 1 \end{pmatrix}$$

La memoria \mathbf{M} queda así:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la fase de recuperación de patrones, se realiza el producto mínimo entre la memoria \mathbf{M} y cada uno de los tres patrones de entrada del conjunto fundamental (expresiones ref: MorphHeterorecu1 y ref: MorphHeterorecu2).

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{M} \triangle \mathbf{x}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \wedge_{j=1}^5 (m_{1j} + x_j^1) \\ \wedge_{j=1}^5 (m_{2j} + x_j^1) \\ \wedge_{j=1}^5 (m_{3j} + x_j^1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \\ (0+1) \wedge (0+0) \wedge (1+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \\ (0+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \wedge (0+0) \wedge (1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{M} \triangle \mathbf{x}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \wedge_{j=1}^5 (m_{1j} + x_j^2) \\ \wedge_{j=1}^5 (m_{2j} + x_j^2) \\ \wedge_{j=1}^5 (m_{3j} + x_j^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0+1) \wedge (1+1) \wedge (0+0) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \\ (0+1) \wedge (0+1) \wedge (1+0) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \\ (0+1) \wedge (1+1) \wedge (0+0) \wedge (0+0) \wedge (1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} = \mathbf{M} \triangle \mathbf{x}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \wedge_{j=1}^5 (m_{1j} + x_j^3) \\ \wedge_{j=1}^5 (m_{2j} + x_j^3) \\ \wedge_{j=1}^5 (m_{3j} + x_j^3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (0+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \wedge (1+1) \wedge (0+0) \\ (0+1) \wedge (0+0) \wedge (1+1) \wedge (1+1) \wedge (0+0) \\ (0+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \wedge (0+1) \wedge (1+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^3
\end{aligned}$$

■

Como se menciona en las referencias, la pregunta obvia a plantear es: ¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para asegurar respuesta perfecta en una memoria morfológica *max*?. Para ser más específicos, ¿para qué pares de vectores $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ podrá la memoria asociativa descrita por las expresiones ref: MorphHeteroapren1 , ref: MorphHeteroapren2 , ref: MorphHeteroapren3 , ref: MorphHeterorecu1 y ref: MorphHeterorecu2 proporcionar una salida perfecta?. La respuesta a esta interrogante se da en el teorema 1 y su correspondiente corolario 1.1 de (Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999):

Teorema 1: $\mathbf{M} \triangle \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$ para todo $\omega = 1, \dots, p$ si y sólo si para cada índice de fila $i = 1, \dots, m$ existen índices de columna $j_i^\epsilon \in \{1, \dots, n\}$ tales que $m_{ij_i^\omega} = y_i^\omega - x_{j_i^\omega}^\omega$ para todo $\omega = 1, \dots, p$.

Corolario 1.1: $\mathbf{M} \triangle \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$ para todo $\omega = 1, \dots, p$ si y sólo si para cada índice de fila $i = 1, \dots, m$ y cada $\gamma \in \{1, \dots, p\}$ existen índices de columna $j_i^\gamma \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$\mathbf{x}_{j_i^\gamma}^\gamma = \bigwedge_{\epsilon=1}^p (x_{j_i^\epsilon}^\epsilon - y_i^\epsilon) + y_i^\gamma$$

Con estos dos resultados se garantizan las condiciones formales para la recuperación perfecta en el caso de patrones del conjunto fundamental. En la figura 1 se presenta la respuesta perfecta de una memoria morfológica heteroasociativa *max* al presentársele como entradas los patrones superiores, en donde el conjunto fundamental tenía como salidas los patrones inferiores.

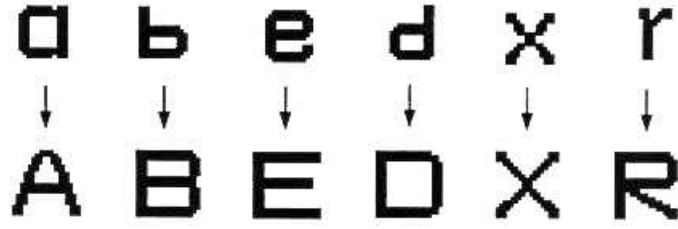


Figura 1

Es importante hacer notar la considerable mejora en la capacidad de almacenamiento de las memorias morfológicas heteroasociativas *max* con respecto a las memorias clásicas, así como el hecho de que la memoria morfológica *no requiere* convergencia; es decir, es capaz de responder en forma perfecta *en un solo paso*.

La segunda pregunta de interés con respecto al desempeño de una memoria asociativa es: ¿qué cantidad, y qué tipo de ruido se puede permitir como distorsión para los patrones de entrada sin sacrificar la respuesta (salida) perfecta?. Para el caso de las memorias clásicas, es un hecho que aun sin distorsión en la entrada, no es plausible esperar una respuesta perfecta. Para las memorias morfológicas heteroasociativas *max*, en cambio, es permisible la existencia de ruidos sin perder la propiedad de respuesta perfecta. La forma del ruido permisible está dada por el teorema 5 de la misma referencia (Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999):

Teorema 5: Para $\gamma = 1, \dots, p$ sea $\tilde{\mathbf{x}}^\gamma$ una versión distorsionada del patrón \mathbf{x}^γ . Entonces $\mathbf{M} \triangle \tilde{\mathbf{x}}^\gamma = \mathbf{y}^\gamma$ si y sólo si se cumple que:

$$\tilde{x}_j^\gamma \geq x_j^\gamma \wedge \bigvee_{i=1}^m \left(\bigwedge_{\varepsilon \neq \gamma} [y_i^\gamma - y_i^\varepsilon + x_i^\varepsilon] \right) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

y para cada índice renglón $i \in \{1, \dots, m\}$ existe un índice columna $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que:

$$\tilde{x}_{j_i}^\gamma = x_{j_i}^\gamma \wedge \left(\bigwedge_{\varepsilon \neq \gamma} [y_i^\gamma - y_i^\varepsilon + x_{j_i}^\varepsilon] \right)$$

La figura 2 ilustra la recuperación perfecta de patrones alterados con 20% de ruido aditivo, por una memoria morfológica heteroasociativa *max*. Como es posible apreciar, estas memorias son bastante robustas al ruido aditivo.

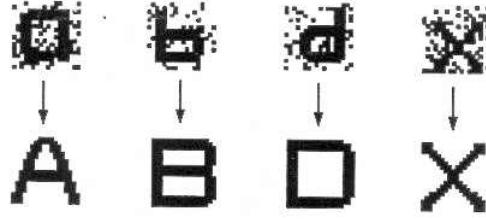


Figura 2

Memorias morfológicas heteroasociativas *min*

Las memorias morfológicas heteroasociativas *min* utilizan el *producto máximo* para ambas fases: aprendizaje y recuperación de patrones. Además, en la fase de aprendizaje juega un papel relevante el operador *mínimo*; de ahí el nombre de memorias *min*.

La *fase de aprendizaje* consiste de dos etapas:

1. Aplicando la expresión ref: MorphHetero3 , para cada una de las p asociaciones $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu)$ se encuentra la matriz $\mathbf{y}^\mu \nabla (-\mathbf{x}^\mu)^t$ de dimensiones $m \times n$, donde $(-\mathbf{x}^\mu)^t = (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$:

$$\mathbf{y}^\mu \nabla (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \nabla (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$$

$$\mathbf{y}^\mu \nabla (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} [y_1^\mu + (-x_1^\mu)] & [y_1^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [y_1^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [y_1^\mu + (-x_n^\mu)] \\ [y_2^\mu + (-x_1^\mu)] & [y_2^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [y_2^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [y_2^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [y_i^\mu + (-x_1^\mu)] & [y_i^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [y_i^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [y_i^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [y_m^\mu + (-x_1^\mu)] & [y_m^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [y_m^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [y_m^\mu + (-x_n^\mu)] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^\mu \nabla (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu - x_1^\mu & y_1^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_1^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_1^\mu - x_n^\mu \\ y_2^\mu - x_1^\mu & y_2^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_2^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_2^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_i^\mu - x_1^\mu & y_i^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_i^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_i^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m^\mu - x_1^\mu & y_m^\mu - x_2^\mu & \cdots & y_m^\mu - x_j^\mu & \cdots & y_m^\mu - x_n^\mu \end{pmatrix} \quad \#$$

2. Se aplica el operador mínimo \bigwedge a las p matrices para obtener la memoria \mathbf{W} .

$$\mathbf{W} = \bigwedge_{\mu=1}^p [\mathbf{y}^\mu \nabla (-\mathbf{x}^\mu)^t] = [w_{ij}]_{m \times n} \quad \#$$

de manera que la ij -ésima componente de la memoria \mathbf{W} se expresa así:

$$w_{ij} = \bigwedge_{\mu=1}^p (y_i^\mu - x_j^\mu) \quad \#$$

La **fase de recuperación** consiste en realizar el producto máximo ∇ de la memoria \mathbf{W} con un patrón de entrada \mathbf{x}^ω , donde $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, para obtener un vector columna \mathbf{y} de dimensión m :

$$\mathbf{y} = \mathbf{W} \nabla \mathbf{x}^\omega \quad \#$$

La i -ésima componente del vector \mathbf{y} , deacuerdo con la expresión ref: MorphHetero2 es:

$$y_i = \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + x_j^\omega) \quad \#$$

La referencia (Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999) también proporciona respuestas a las dos preguntas:

- ¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para asegurar respuesta perfecta en una memoria morfológica heteroasociativa *min*?
- ¿para qué pares de vectores $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ podrá la memoria asociativa descrita por las expresiones ref: MorphHeteroaprenmin1 , ref: MorphHeteroaprenmin2 ,

ref: MorphHeteroaprenmin3 , ref: MorphHeterorecumin1 y ref: MorphHeterorecumin2 proporcionar una salida perfecta?

Las respuestas se encuentran en el teorema 2 y su correspondiente corolario 2.1:

Teorema 2: $\mathbf{W} \nabla \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$ para todo $\omega = 1, \dots, p$ si y sólo si para cada índice de fila $i = 1, \dots, m$ existen índices de columna $j_i^\omega \in \{1, \dots, n\}$ tales que $w_{ij_i^\omega} = y_i^\omega - x_{j_i^\omega}^\omega$ para todo $\omega = 1, \dots, p$.

Corolario 2.1: $\mathbf{W} \nabla \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$ para todo $\omega = 1, \dots, p$ si y sólo si para cada índice de fila $i = 1, \dots, m$ y cada $\gamma \in \{1, \dots, p\}$ existen índices de columna $j_i^\gamma \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$x_{j_i^\gamma}^\gamma = \bigvee_{\varepsilon=1}^p (x_{j_i^\gamma}^\varepsilon - y_i^\varepsilon) + y_i^\gamma$$

Las memorias morfológicas heteroasociativas *min* muestran experimentalmente un comportamiento similar al de las memorias morfológicas heteroasociativas *max*, cuando se diseñan y se operan en conjuntos fundamentales *sin ruido*; los experimentos son análogos al mostrado en la figura 1, con patrones del mismo tipo y tamaño.

Sin embargo, las memorias morfológicas heteroasociativas *min* responden al ruido de una manera totalmente diferente a como lo hacen las memorias morfológicas heteroasociativas *max*, como se desprende del teorema 6 de (Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999), el cual es la respuesta a la interrogante ¿qué cantidad, y qué tipo de ruido se puede permitir como distorsión para los patrones de entrada en una memoria asociativa morfológica \mathbf{W} sin sacrificar la respuesta perfecta?.

Teorema 6: Para $\gamma = 1, \dots, p$ sea $\tilde{\mathbf{x}}^\gamma$ una versión distorsionada del patrón \mathbf{x}^γ . Entonces $\mathbf{W} \nabla \tilde{\mathbf{x}}^\gamma = \mathbf{y}^\gamma$ si y sólo si se cumple que:

$$\tilde{x}_j^\gamma \leq x_j^\gamma \vee \bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{\varepsilon \neq \gamma} [y_i^\gamma - y_i^\varepsilon + x_{j_i^\varepsilon}^\varepsilon] \right) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

y para cada índice renglón $i \in \{1, \dots, m\}$ existe un índice columna $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que:

$$\tilde{x}_{j_i}^\gamma = x_{j_i}^\gamma \vee \left(\bigvee_{\varepsilon \neq \gamma} [y_i^\gamma - y_i^\varepsilon + x_{j_i^\varepsilon}^\varepsilon] \right)$$

La contraparte de la figura 2 es la figura 3, donde se ilustra la respuesta de las memorias asociativas morfológicas **W** ante patrones de entrada alterados con 20% de ruido sustractivo. A diferencia de las memorias asociativas morfológicas tipo **M**, las memorias asociativas morfológicas *min* son robustas a ruido sustractivo: en eso difieren principalmente.

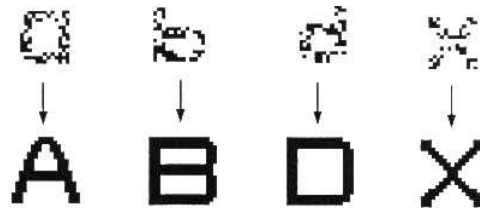


Figura 3

Similarmente a como lo hacen las memorias asociativas morfológicas tipo **M**, las memorias asociativas morfológicas tipo **W** son capaces de responder en forma perfecta en un solo paso, lo cual significa que *no requiere convergencia*.

Epílogo.

En este décimo y penúltimo número de la colección *Estado del Arte en Memorias Asociativas* hemos presentado las memorias morfológicas heteroasociativas en sus dos tipos: *max* y *min*.

Bibliografía.

- bibitem Abu-Mostafa, Y. & St. Jacques, J. (1985). Information capacity of the Hopfield model, *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-31, 4, 461-464.
- bibitem Adeodato P. J. L. & Taylor J. G. (1996). Autoassociative memory with high storage capacity, In C. von der Malsburg, W. von Seelen, J. C. Vorbrueggen & B. Sendhoff (Eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, 1112, (pp. 29-34),. Bochum, Germany: ICANN'96.
- bibitem Aleksander, I. & Morton, H. B. (1997). Weightless and other memory-based networks, In Emile Fiesler (Ed.), *Handbook of Neural Computation*, (pp. C1.5:1-C1.5:15). New York: Oxford.
- bibitem Amari, S. (1972). Learning patterns and pattern sequences by self-organizing nets of threshold elements, *IEEE Transactions on Computers*, C-21, 11, 1197-1206.
- bibitem Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation, *Biological Cybernetics*, 26, 175-185.
- bibitem Anderson, J. A. (1972). A simple neural network generating an interactive memory, *Mathematical Biosciences*, 14, 197-220.
- bibitem Anderson, J. A. & Rosenfeld, E. (Eds.) (1990). *Neurocomputing: Foundations of Research*, Cambridge: MIT Press.
- bibitem Anderson, J. A., Silverstein, J., Ritz, S. & Jones, R. (1977). Distinctive features, categorical perception, and probability learning: some applications of a neural model, *Psychological Review*, 84, 413-451.

- bibitem Anderson, J. R. & Bower, G. (1977). *Memoria Asociativa*, México: Limusa.
- bibitem Austin, J. (1987). ADAM: A Distributed Associative Memory for Scene Analysis, In *Proceedings of First International Conference on Neural Networks*, (pp. 285-295). San Diego: Ed. M Caudhill and C Butler.
- bibitem Austin, J., Buckle, S., Kennedy, J., Moulds, A., Pack, R. & Turner, A. (1997). The cellular neural network associative processor, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 284-306). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- bibitem Bandyopadhyay, S. & Datta, A. K. (1996). A novel neural hetero-associative memory model for pattern recognition, *Pattern Recognition*, 29, 5, 789-795.
- bibitem Bosch, H. & Kurfess, F. J. (1998). Information storage capacity of incompletely connected associative memories, *Neural Networks* (11), 5, 869-876.
- bibitem Browne, C. & Aleksander, I. (1996). Learned Probabilistic Prediction in a Weightless Neural Network, London Imperial College Technical Report NSE96_03.
- bibitem Buhmann, J. (1995). Oscillatory associative memories, In M. Arbib (Ed.), *Handbook of Brain Theory & Neural Networks*, (pp. 691-694). Cambridge: MIT Press.
- bibitem Chen, C. & Honavar, V. (1995). A neural architecture for content as well as address-based storage and recall: theory and applications, Iowa State University Technical Report TR95-03.
- bibitem Díaz-de-León, J. L. & Yáñez, C. (1999). Memorias asociativas con respuesta perfecta y capacidad infinita, *Memoria del TAINA'99, México, D.F.*, 23-38.
- bibitem Flynn, M., Kanerva, P. & Bhadkamkar, N. (1989). Sparse distributed memory: principles and operation, Stanford University Technical Report CSL-TR-89-400.
- bibitem Gori, M., Lastrucci, L. & Soda, G. (1996). Autoassociator-based models for speaker verification, *Pattern Recognition Letters*, 17, 3, 241-250.
- bibitem Graham, B. & Willshaw, D. (1995). Improving recall from an associative memory, *Biological Cybernetics*, 72, 337-346.
- bibitem Haralick, R. M., Sternberg, S. R. & Zhuang, X. (1987). Image analysis using mathematical morphology, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-9, 4, 532-550.
- bibitem Hassoun, M. H. (Ed.) (1993). *Associative Neural Memories*, New York: Oxford University Press.
- bibitem Hassoun, M. H. (1995). *Fundamentals of Artificial Neural Networks*, Cambridge: MIT Press.
- bibitem Hassoun, M. H. & Watta, P. B. (1997). Associative memory networks, In Emile Fiesler (Ed.), *Handbook of Neural Computation*, (pp. C1.3:1-C1.3:14). New York: Oxford.
- bibitem Hattori, M. & Hagiwara, M. (2000). Associative memory for intelligent control, *Mathematics and Computers in Simulation*, 51, 349-374.
- bibitem Hely, T. A., Willshaw, D. J. & Hayes, G. M. (1997). A new approach to Kanerva's sparse distributed memory, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 8, 3, 791-794.
- bibitem Herrmann, F. P. & Sodini, C. G. (1992). A dynamic associative processor for machine vision applications, *IEEE Micro*, 12, 3, 31-41.
- bibitem Hopfield, J.J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79, 2554-2558.
- bibitem Hopfield, J.J. (1984). Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 81, 3088-3092.
- bibitem Imada, A. & Araki K. (1995). Genetic algorithm enlarges the capacity of associative memory. In L.J.Eshelman(Ed.), *Proceedings of 6th International Conference on Genetic Algorithms*, (pp 413-420). San Francisco: Morgan Kaufmann.
- bibitem Jagota, A., Narasimhan, G. & Regan, K. W. (1998). Information Capacity of Binary Weights

Associative Memories, *Neurocomputing*, 19(1-3), 35-38.

- bibitem Jørgensen, T. M. (1997). Classification of handwritten digits using a RAM neural net architecture, *International Journal of Neural Systems*, 8, 1, 17-26.
- bibitem Kanerva, P. (1988). *Sparse Distributed Memory*, Cambridge: MIT Press.
- bibitem Kennedy, J. V., Austin, J. & Cass, B. (1995). A hardware implementation of a binary neural image processor, *Proceedings of the IEE Conference on Image Processing and its Applications*, Edinburgh, UK.
- bibitem Kinser, J. M. (1995). Fast analog associative memory, *Pocceedings of the SPIE*, 2568, 290-293.
- bibitem Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories, *IEEE Transactions on Computers*, C-21, 4, 353-359.
- bibitem Kohonen, T. (1974). An adaptive associative memory principle, *IEEE Transactions on Computers*, C-24, 4, 444-445.
- bibitem Kohonen, T. (1987). *Content-Addressable Memories*, Berlin: Springer-Verlag.
- bibitem Kohonen, T. (1989). *Self-Organization and Associative Memory*, Berlin: Springer-Verlag.
- bibitem Kohonen, T. (1997). *Self-Organizing Maps*, Berlin: Springer.
- bibitem Kohonen, T. & Ruohonen, M. (1973). Representation of associated data by matrix operators, *IEEE Transactions on Computers*, C-22, 701-702.
- bibitem Kolen, J. F., & Pollack, J. B. (1991). Multiassociative memory, *The Proceedings of the Thirteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, 785-789.
- bibitem Kosko, B. (1988). Bidirectional associative memories, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18, 1, 49-60.
- bibitem Kosko, B. (1992). *Neural Networks and Fuzzy Systems*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- bibitem Krikelis, A. & Weems, C. C. (1997). Associative Processing and Processors, In A. Krikelis & C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 2-9). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- bibitem Little, W. & Shaw, G. (1975). A statistical theory of short and long term memory, *Behavioral Biology*, 14, 115-133.
- bibitem Ludermir, T. B., Carvalho, A., Braga, A. & Souto, M. C. P. (1999). Weightless neural models: a review of current and past works, *Neural Computing Surveys*, 2, 41-61.
- bibitem McCulloch, W. & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115-133.
- bibitem McEliece, R., Posner, E., Rodemich, E. & Venkatesh, S. (1987). The capacity of the Hopfield associative memory, *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-33, 4, 461-482.
- bibitem Minsky, M. & Papert, S. (1988). *Perceptrons*, Cambridge: MIT Press.
- bibitem Moore, J. (1968). *Elements of linear algebra and matrix theory*, New York: McGraw-Hill.
- bibitem Nakano, K. (1972). Associatron-A model of associative memory, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-2, 3, 380-388.
- bibitem Palm, G., Schwenker, F., Sommer F. T. & Strey, A. (1997). Neural associative memories, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 307-326). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- bibitem Ritter, G. X., Sussner, P. & Diaz-de-Leon, J. L. (1998). Morphological associative memories, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9, 281-293.
- bibitem Ritter, G. X., Diaz-de-Leon, J. L. & Sussner, P. (1999). Morphological bidirectional associative memories, *Neural Networks*, 12, 851-867.
- bibitem Rosen, K. H. (1995) *Discrete Mathematics and its Applications*, New York: McGraw-Hill.
- bibitem Schwenk, H. & Milgram, M. (1995). Transformation invariant autoassociation with application to handwitten character recognition, In D. S. Touretzky, G. S. Tesauro & T. K. Leen (Eds.), *Neural Information Processing Systems*, (pp. 991-998). Cambridge: MIT Press.
- bibitem Serra, J. (1992). *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical*

Advances, London: Academic Press.

- bibitem Silver, S., Glover, R. & Stonham, T. (1996). Associative memory neural networks for time series prediction, *Proceedings of the Third IEEE ICECS*, 651-654.
- bibitem Simpson, P. K. (1990). *Artificial Neural Systems*, New York: Pergamon Press.
- bibitem Sommer, F. T. & Palm, G. (1998). Bidirectional retrieval from associative memory, In M. I. Jordan, M. J. Kearns, & S. A. Solla (Eds.), *Advances in Neural Information Processing Systems 10*, (pp. 675-681). Cambridge: MIT Press.
- bibitem Steinbuch, K. (1961). Die Lernmatrix, *Kybernetik*, 1, 1, 36-45.
- bibitem Steinbuch, K. & Frank, H. (1961). Nichtdigitale Lernmatrizen als Perzeptoren, *Kybernetik*, 1, 3, 117-124.
- bibitem Storkey, A. J. (1997). Increasing the capacity of a Hopfield network without sacrificing functionality, *International Conference on Artificial Neural Networks*, 451-456.
- bibitem Stright, J. R., Coffield, P. C. & Brooks, G. W. (1998). Analog VLSI implementation of a morphological associative memory, *Proceedings of the SPIE*, 3452-03, 14-22.
- bibitem Turner, M. & Austin, J. (1997). Matching performance of binary correlation matrix memories, *Neural Networks*, 10, 9, 1637-1648.
- bibitem Villanueva, N. & Figueroa, J. (1998). Superposición de información en memorias aleatorias: análisis cualitativo, *Memorias del Simposium Internacional de Computación CIC'98*, 559-564.
- bibitem Willshaw, D., Buneman, O. & Longuet-Higgins, H. (1969). Non-holographic associative memory, *Nature*, 222, 960-962.
- bibitem Zboril, F. (1997). An application of the sparse distributed memory, *Proceedings of the ASIS 97*, 127-132.