***Ejercicio 9.3** Un sistema basado en visión por computador trata de clasificar dos tipos de texturas naturales basadas en las tres componentes de color (R,G,B). Los dos tipos de texturas corresponden a paisajes naturales en los que se pretende distinguir áreas de cielo azul y zonas boscosas con predominio de verdes. Se han extraído los siguientes datos de la imagen.

		c_1			c_2	
R	200	210	215	90	92	87
G	160	170	172	130	138	128
B	120	130	133	60	54	66

Asumiendo una razón de aprendizaje $\alpha = 10^{-4}$ obtener los pesos actualizados asumiendo que la convergencia termina cuando $\|w(k+1) - w(k)\| < \varepsilon$, siendo $\varepsilon = 10^{-4}$.

Una vez obtenidos los pesos, clasificar las dos nuevas muestras siguientes:

$$\mathbf{A} \equiv (208, 170, 135) \text{ y } \mathbf{B} \equiv (89, 130, 60)$$

Solución:

Inicialización: $w^t(1) = (0,0,0)$; $\alpha = 0.0001$

Iteración 1

1.1 Patrón $x = \{200,160,120\}$: $w^t x = 0$; $O = -1$, error $= (fd_i - O) = 1+1 = 2$

se modifican pesos: $w^t(2) = w^t(1) + \alpha\,(fd_i - O)\mathbf{x} = 10^{-3}(40,32,24)$

1.2 Patrón $x = \{210,170,130\}$: $w^t x = 17$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = 1-1 = 0$

***no** se modifican pesos:* $w^t(3) = w^t(2)$

1.3 Patrón $x = \{215,172,133\}$: $w^t x = 17$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = 1-1 = 0$

***no** se modifican pesos:* $w^t(4) = w^t(3)$

1.4 Patrón $x = \{90,130,60\}$: $w^t x = 9.2$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = -1-1 = -2$

se modifican pesos: $w^t(5) = w^t(4) + \alpha\,(fd_i - O)\mathbf{x} = 10^{-3}(22,6,12)$

1.5 Patrón $x = \{92,138,54\}$: $w^t x = 3.5$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = -1-1 = -2$

se modifican pesos: $w^t(6) = w^t(5) + \alpha\,(fd_i - O)\mathbf{x} = 10^{-3}(4, -22,1)$

1.6 Patrón $x = \{87,128,66\}$: $w^t x = -2.4$; $O = -1$, error $= (fd_i - O) = -1+1 = 0$

***no** se modifican pesos:* $w^t(7) = w^t(6)$

Iteración 2

2.1 Patrón $x = \{200,160,120\}$: $w^t x = -2.59$; $O = -1$, error $= (fd_i - O) = 1+1 = 2$

se modifican pesos: $w^t(2) = w^t(1) + \alpha\,(fd_i - O)\mathbf{x} = 10^{-3}(44,10,25)$

2.2 Patrón $x = \{210,170,130\}$: $w^t x = 14.2$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = 1 - 1 = 0$

***no** se modifican pesos:* $w^t(3) = w^t(2)$

2.3 Patrón $x = \{215,172,133\}$: $w^t x = 14.5$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = 1 - 1 = 0$

***no** se modifican pesos:* $w^t(4) = w^t(3)$

2.4 Patrón $x = \{90,130,60\}$: $w^t x = 6.8$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = -1 - 1 = -2$

se modifican pesos: $w^t(5) = w^t(4) + \alpha\,(fd_i - O)\mathbf{x} = 10^{-3}(26,16,13)$

2.5 Patrón $x = \{92,138,54\}$: $w^t x = 0.9$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = -1 - 1 = -2$

se modifican pesos: $w^t(6) = w^t(5) + \alpha\,(fd_i - O)\mathbf{x} = 10^{-3}(7,-43,2)$

2.6 Patrón $x = \{87,128,66\}$: $w^t x = -4.7$; $O = -1$, error $= (fd_i - O) = -1 + 1 = 0$

***no** se modifican pesos:* $w^t(7) = w^t(6)$

Iteración 3

3.1 Patrón $x = \{200,160,120\}$: $w^t x = -5.2$; $O = -1$, error $= (fd_i - O) = 1 + 1 = 2$

se modifican pesos: $w^t(2) = w^t(1) + \alpha\,(fd_i - O)\mathbf{x} = 10^{-3}(47,11,26)$

3.2 Patrón $x = \{210,170,130\}$: $w^t x = 11.4$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = 1 - 1 = 0$

***no** se modifican pesos:* $w^t(3) = w^t(2)$

3.3 Patrón $x = \{215,172,133\}$: $w^t x = 11.7$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = 1 - 1 = 0$

***no** se modifican pesos:* $w^t(4) = w^t(3)$

3.4 Patrón $x = \{90,130,60\}$: $w^t x = 4.4$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = -1 - 1 = -2$

se modifican pesos: $w^t(5) = w^t(4) + \alpha\,(fd_i - O)\mathbf{x} = 10^{-3}(29,-37,14)$

3.5 Patrón $x = \{92,138,54\}$: $w^t x = -1.7$; $O = -1$, error $= (fd_i - O) = -1 + 1 = 0$

***no** se modifican pesos:* $w^t(6) = w^t(5)$

3.6 Patrón $x = \{87,128,66\}$: $w^t x = -1.3$; $O = -1$, error $= (fd_i - O) = -1 + 1 = 0$

***no** se modifican pesos:* $w^t(7) = w^t(6)$

Iteración 4

4.1 Patrón $x = \{200,160,120\}$: $w^t x = 1.6$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = 1 - 1 = 0$

se modifican pesos: $w^t(2) = w^t(1) + \alpha\,(fd_i - O)\mathbf{x} = 10^{-3}(29,-37,14)$

4.2 Patrón $x = \{210,170,130\}$: $w^t x = 1.7$; $O = 1$, error $= (fd_i - O) = 1 - 1 = 0$

***no** se modifican pesos:* $w^t(3) = w^t(2)$

4.3 Patrón $x = \{215,172,133\}$: $w^t x = 1.8$; O = 1, error = $(fd_i - O) = 1 - 1 = 0$

no se modifican pesos: $w^t(4) = w^t(3)$

4.4 Patrón $x = \{90,130,60\}$: $w^t x = -1.3$; O = −1, error = $(fd_i - O) = -1 + 1 = 0$

no se modifican pesos: $w^t(5) = w^t(4)$

4.5 Patrón $x = \{92,138,54\}$: $w^t x = -1.7$; O = −1, error = $(fd_i - O) = -1 + 1 = 0$

no se modifican pesos: $w^t(6) = w^t(5)$

4.6 Patrón $x = \{87,128,66\}$: $w^t x = -1.3$; O = −1, error = $(fd_i - O) = -1 + 1 = 0$

no se modifican pesos: $w^t(7) = w^t(6)$

El proceso converge en la iteración 4, resultando el siguiente vector de pesos:

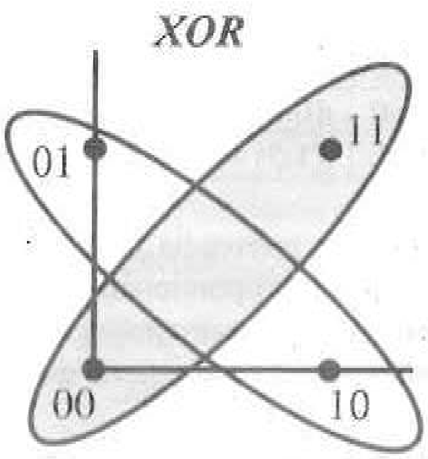
$w = 10^{-4}(292, -372, 144)$

Con dicho vector de pesos se clasifican los vectores dados:

$$w^t\mathbf{A} = 10^{-3}\begin{pmatrix} 29 & -37 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 208 \\ 170 \\ 135 \end{pmatrix} = 1.6936 > 0 \Rightarrow \mathbf{A} \text{ pertenece a la clase } c_1$$

$$w^t\mathbf{B} = 10^{-3}\begin{pmatrix} 29 & -37 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 89 \\ 130 \\ 60 \end{pmatrix} = -1.3732 < 0 \Rightarrow \mathbf{B} \text{ pertenece a la clase } c_2$$

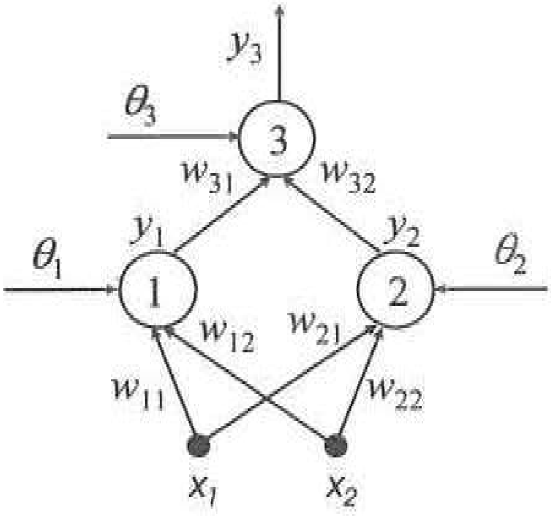
***Ejercicio 9.4** Ajustar los pesos para deducir la función lógica **XOR** con la distribución de clases mostrada en la figura adjunta.



NO existe recta que separe las clases

$$Clases \Rightarrow \begin{cases} c_1 : (0,0) \text{ y } (1,1) \\ c_2 : (0,1) \text{ y } (1,0) \end{cases}$$

Solución: se propone la siguiente red neuronal con los pesos y bias especificados



Pesos: $w_{11}= w_{12}= w_{21}= w_{22}= w_{32}= 1$; $w_{31}=-2$

Bias: $\theta_1=-1.5$; $\theta_2=-0.5$; $\theta_3=-0.5$

Las funciones resultantes son:

$y_1=f(w_{11}x_1+ w_{12}x_2 + \theta_1)= f(x_1+ x_2 -1.5)$; $y_2=f(w_{21}x_1+ w_{22}x_2 + \theta_2)= f(x_1+ x_2 -0.5)$

$y_3=f(w_{31}y_1+ w_{32}y_2 + \theta_3)= f(-2y_1 +y_2 -0.5)$

En la tabla adjunta se muestra el desarrollo de la función,

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3 = XOR
0	0	$f(-1.5) = 0$	$f(-0.5) = 0$	$f(-0.5) = 0$
0	1	$f(-0.5) = 0$	$f(0.5) = 1$	$f(0.5) = 1$
1	0	$f(-0.5) = 0$	$f(0.5) = 1$	$f(0.5) = 1$
1	1	$f(0.5) = 1$	$f(1.5) = 1$	$f(-1.5) = 0$

***Ejercicio 9.5** Tomando como referencia la topología de red del ejercicio 9.4 y dados los pesos iniciales y bias que se proporcionan a continuación, realizar un proceso de entrenamiento para dicha red mediante retropropagación. Considerar que la razón de aprendizaje es 0.05 y el error establecido como criterio de parada es 10^{-5}.

Pesos: $w_{11} = 11$; $w_{12}=-9$; $w_{21} = 16$; $w_{22} = -17$; $w_{31} = 26$; $w_{32}=-25$

Bias: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1$