Tarea 7

[1] Usando el teorema del muestreo, que nos indica la presentación, una señal es únicamente determinada por sus muestras si cumple.

$$F_s = \frac{1}{T} 2F_N \quad \text{dónde } 2F_N \text{ es la tasa de Nyquist}$$

$$F_N = \frac{5000\ Hz}{2} \geq 2500\ Hz \quad \text{donde } F_N \text{ es la frecuencia de muestreo de Nyquist.}$$

[2] $x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$: Recordando la trasformada de Fourier.

$$\cos(2\pi f_0 t) \rightarrow \frac{1}{2}(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)) \qquad f_0 = 2000$$

$$\text{sen}(2\pi f_1 t) \rightarrow \frac{1}{2j}(\delta(f-f_1) + \delta(f+f_1)) \qquad f_1 = 4000$$

Recordando $\quad f_s \geq f_1$

La mínima frecuencia es $\quad f_s \geq 2F_N \rightarrow \boxed{F_s \geq 8000}$

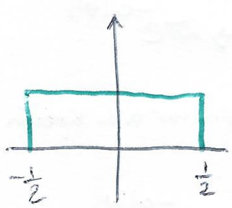
$\uparrow$ Frecuencia máxima

$x(t) = \dfrac{\text{sinc}(4000\pi t)}{\pi t}$ Recordando la trasformada de $\dfrac{\text{sinc}(\pi W t)}{\pi W t} \rightarrow \dfrac{1}{W}\text{rect}\left(\dfrac{f}{W}\right) \quad \text{rect}(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \leq 1/2 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$

La frecuencia máxima se obtiene con

$$\text{rect}\left(\frac{f}{W}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{f}{W}\right| \leq 1/2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\text{ó} \begin{cases} 1 & |f| \leq \frac{W}{2} \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$



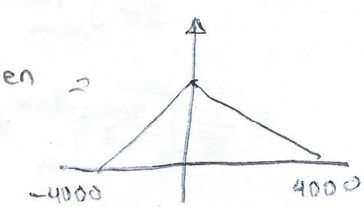
Función rectangulo

Tenemos que nuestro $W = 4000 \therefore B = 2000$ ← Frecuencia máxima

$f_s = 4000\ Hz$

$x(t) = \left(\dfrac{\text{sinc}(4000\pi t)}{\pi t}\right)^2$ Aplicando la propiedad de convolución $\quad x(t)h(t) = x(f) * h(f)$

tenemos que aplicando la convolución de una señal cuadrada se convierte en



$B = 4000$

$f_s = 8000$

[3] Sea $x(t)$ una señal con una tasa de Nyquist f_0, Determina la tasa de Nyquist para las siguientes señales

▷ $x(t) + x(t-1)$

$X(f) + e^{-2j\pi f} X(f)$

$X(f)(1 + e^{-2\pi j f})$

$X(f)\, e^{-j\pi f}(e^{j\pi f} + e^{-j\pi f})$

$2X(f)\cos(\pi f)\, e^{-j\pi f}$

Tenemos

$f_{max} = \frac{f_1}{2}$

Para 2 inciso $\frac{\partial x(t)}{\partial t}$ usando la formula directa

$= -j2\pi f X(t)$

Nuestra frecuencia: Es expresada como

$f_s = f_0$

Para el tercer inciso $x^2(t)$

$x(t)x(t) = x^2(t)$

Usando convolución de trasformadas de las mismas

$X(t) * X(t)$

Tenemos que la frecuencia se define como

$f_s = 2f_0$

$f_s = f_0$

[5.76]

$x(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$

Tenemos que la funcion $x(t)$ mas parecida es $e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + w^2} = \frac{2a}{a^2+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-a|w|}$

sin embargo esta función de frecuencia, estas se pueden cambiar usando dualidad

Para que sea más similar a la función dividimos en $2a$

$\frac{1}{a^2+t^2} \longleftrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|w|}$

$X(w) = \frac{\pi}{a} e^{-a|w|}$

Ahora usando la definición de bandwidth

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-W_{aa}}^{W_{aa}} |X(w)|^2 dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-W_{aa}}^{+W_{aa}} \left(\frac{\pi}{a} e^{-a|w|}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{W_{aa}} |X(w)|^2 dw$$

Ocupando (5.180) de Shaum

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{W_{aa}} \frac{\pi^2}{a^2} e^{-2aw} dw \quad \frac{\pi}{a^2}\int_0^{W_{aa}} e^{-2aw} dw = -\frac{\pi}{2a^3}\left[e^{-2aw}\right]_0^{W_{aa}}$$

$$= -\frac{\pi}{2a^3}\left[e^{-2aW_{aa}} - 1\right] ; \quad \frac{E_x W_{aa}}{E_x} = \frac{99}{100} \Rightarrow 0.99 = 1 - e^{-2aW_{aa}}$$

$$= 0.01 = e^{-2aW_{aa}}$$

Aplicando ln en la igualdad

$$W_{aa} = \frac{\ln(0.01)}{-2a} \Rightarrow \frac{-4.60}{-2a} = \frac{2.30}{a}\ \text{rad/s}$$