Mardi, septembre 7, 21

Tarea 3:

2.47.- Calcule la suma de convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ de los siguientes pares de series o secuencias:

a) $x[n] = u[n]$, $h[n] = 2^n u[-n]$

Solución:

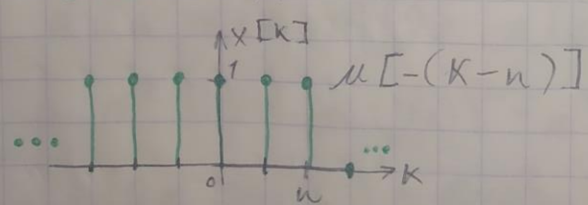
$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K] \cdot h[n-K] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[n-K] \cdot h[K]$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[n-K] \cdot h[K]$$

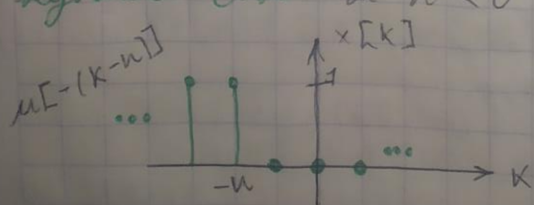
$$x[n] = u[n] \rightarrow x[n-K] = x[-(K-n)]$$

$$x[-(K-n)] = u[-(K-n)] \; ; \; h[K] = 2^K u[-K]$$

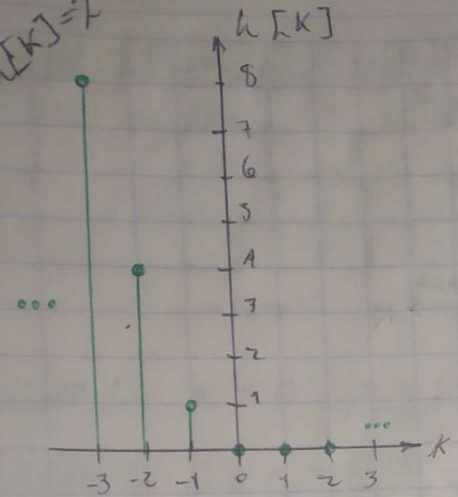
primer caso si $n \geq 0$



segundo caso si $n < 0$



$h[k] = 2^k u[-k]$



Primer caso si $n \geq 0$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=0} 2^k = \lim_{M \to -\infty} \left(\sum_{k=M}^{0} 2^k \right)$$

$$\boxed{\sum_{k=M}^{k=N} r^k = \frac{r^{N+1} - r^M}{r+1}}$$

$$y[n] = \lim_{M \to -\infty} \left(\frac{2^{0+1} - \underbrace{2^M}_{\to 0}}{2-1} \right) = 2$$

Segundo caso si $n < 0$

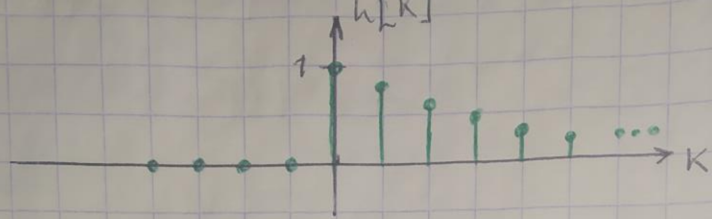
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=-n} 2^k = \lim_{M \to -\infty} \left(\sum_{k=M}^{-n} 2^k \right) = \lim_{M \to -\infty} \left(\frac{2^{-n+1} - 2^M}{2-1} \right)$$

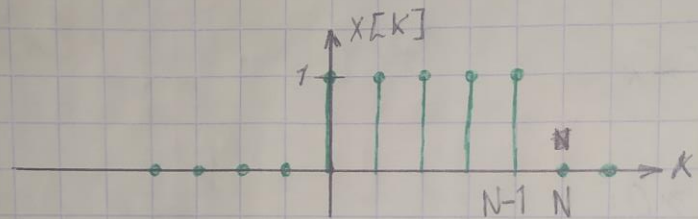
$$= 2^{-n+1}$$

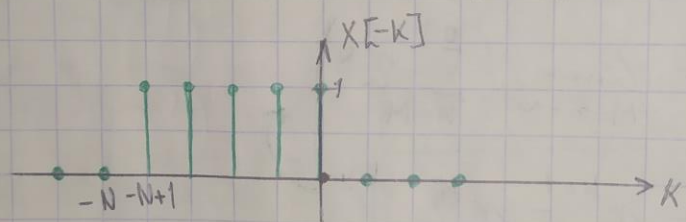
$$\therefore \; y[n] = \begin{cases} 2 , & n \geq 0 \\ 2^{1-n} , & n < 0 \end{cases}$$

b) $x[n] = u[n] - u[n-N]$

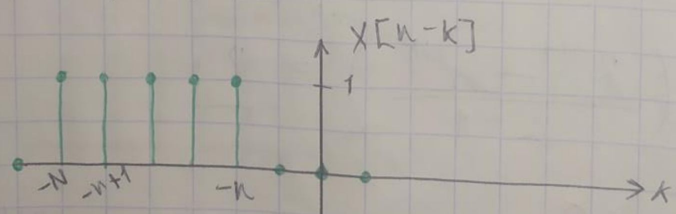
$h[n] = \alpha^n \cdot u[n]\ ,\ 0 < \alpha < 1$



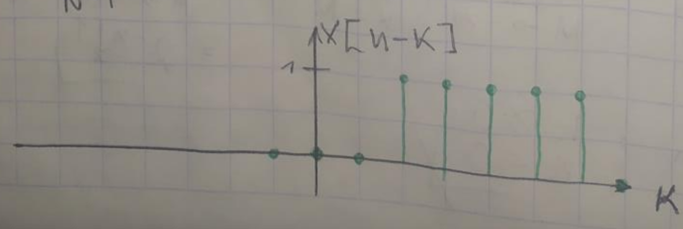




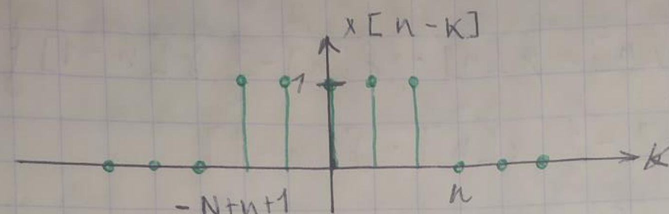
caso 1: si $n < 0$



caso 3: $N-1 \le n < (N-1)2$



caso 2: $0 \leq n < N-1$



caso 1: $n < 0 \rightarrow y[n] = 0$

caso 2: $0 \leq n < N-1 \rightarrow y[n] = \sum_{n=0}^{n} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}$

caso 3: $N-1 \leq n < 2(N-1) \rightarrow y[n] = \sum_{-N+1+n}^{n} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^{-N+1+n}}{\alpha - 1}$

$$y[n] = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^{-N} \cdot \alpha^{n+1}}{\alpha - 1}$$

$$= \frac{\alpha^{n+1}(-\alpha^{-N} + 1)}{\alpha - 1}$$

$$y[n] = \begin{cases} 0 , & n < 0 \\ \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} , & 0 \leq n < N-1 \\ \frac{\alpha^{n+1}(1 - \alpha^{-N})}{\alpha - 1} , & N-1 \leq n < 2(N-1) \\ 0 , & n \geq 2(N-1) \end{cases}$$

c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$; $h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$

$$y[n] = x[n] \cdot h[n] = x[n] \cdot \left\{\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]\right\}$$

$$= x[n] \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} x[n] \cdot \delta[n-1]$$

$$= x[n] - \frac{1}{2} x[n-1]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left\{u[n] - u[n-1]\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \delta[n]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \delta[n]$$

$$y[n] = \delta[n]$$

2.16 La respuesta al impulso de un sistema LIT de tiempo discreto está dada por:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n],$$

Sea $y[n]$ la salida del sistema con la entrada

$$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-3]$$

Encuentre $y[1]$ y $y[4]$

Solución:

$$y[n] = x[n] \cdot h[n] = \{2\delta[n] + \delta[n-3]\} \cdot h[n]$$

$$= 2\delta[n] \cdot h[n] + \delta[n-3] \cdot h[n]$$

$$= 2h[n] + h[n-3]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u[n-3]$$

$$y[1] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 \underbrace{u[1]}_{1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-3} \cdot \underbrace{u[1-3]}_{0}$$

$$= \frac{2}{2} \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \emptyset = 1$$

$$y[4] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \underbrace{u[4]}_{1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} \cdot \underbrace{u[4-3]}_{1}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{5}{8}$$

2.57) Considere un sistema LIT de tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$ dada por:

$$h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n-1]$$

a) El sistema es causal?

si $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$

$$h[-1] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \underbrace{u[-2]}_{\to 0} = \emptyset \therefore \text{ es causal.}$$

b) El sistema es estable?

si $h[n]$ es sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

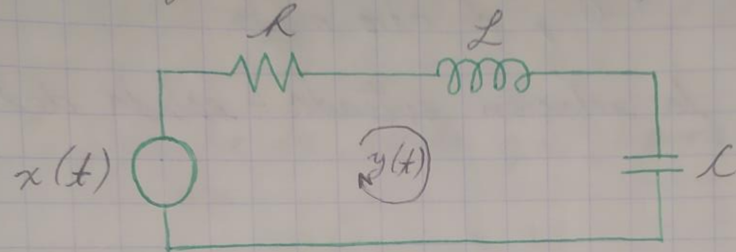
$$= \lim_{M \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{M} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left(\frac{(-2^{-1})^{M+1} - (-2^{-1})^1}{-2^{-1} - 1} \right)$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left(\frac{-(2^{-M} \cdot 2^{-1}) + 2^{-1}}{-2^{-1} - 1} \right)$$

$$= \frac{1}{-1-2} = -\frac{1}{3} < \infty \therefore \text{ es BIBO}$$

2.58 Considere el circuito RLC mostrado en la figura. Encuentre la ecuación diferencial que relaciona la corriente de salida $y(t)$ y el voltaje de entrada $x(t)$.



Solución:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{R}{L}\cdot\frac{dy(t)}{dt} + \frac{y(t)}{LC} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\frac{1}{L}$$

2.63 Considere un sistema LIT de tiempo discreto con respuesta al impulso:

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Encuentre la relación entrada-salida del sistema.

Solución:

(2.63) Considere un sistema LIT de tiempo discreta con respuesta al impulso

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Encuentre la relación entrada - salida del sistema:

Solución:

$$h[n] = \delta[n-1] + \delta[n]$$

$$y[n] = h[n] \cdot x[n]$$

$$= (\delta[n-1] + \delta[n]) \cdot x[n]$$

$$= (\delta[n-1] \cdot x[n]) + (\delta[n] \cdot x[n])$$

$$y[n] = x[n-1] + x[n]$$

Encontrar la relación entrada - salida del sistema consiste en utilizar la relación de convolución con una señal genérica $x[n]$

2.64 Considere un sistema de tiempo discreto cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ se encuentran relacionadas por:

$$y[n] - \frac{y}{2}[n-1] = x[n] \text{, con } y[-1] = 0$$

Encuentre la salida $y[n]$ para las siguientes entradas:

a) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n]$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]$

Solución: