Signals and Communication Theory

Fourier Series

Alfonso Fernandez-Vazquez

Ingeniería en Sistemas Computacionales
Escuela Superior de Cómputo, ESCOM
Instutito Politécnico Nacional, IPN

Semestre Agosto-Diciembre 2021

Contents

Contents

Introducción

Una función es **periódica** si existe una constante $T > 0$ para la cual

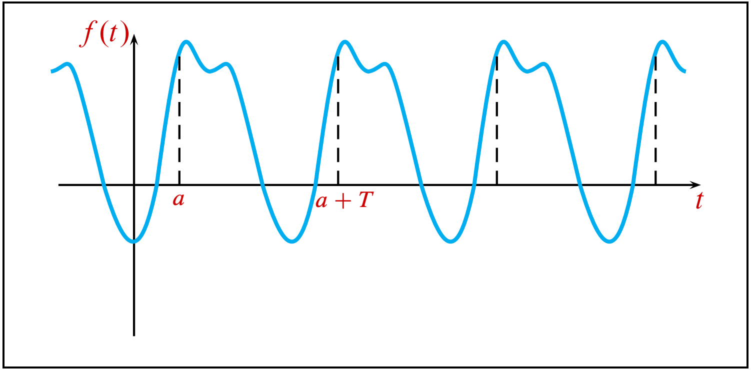
$$f(t + T) = f(t). \tag{1}$$

Tal constante $T > 0$ se llama **periodo** de la función $f(t)$.

Las funciones periódicas mas conocidas son $\sin t$, $\cos t$, $\tan t$, etc.

Gráfica de una función periódica

Si graficamos la función $f(t)$ en el intervalos cerrado $a \le t \le a+T$, entonces obtenemos toda la gráfica de $f(t)$ por repetición de esta porción.



El periodo no es *único*

Si T es un periodo de la función $f(t)$, entonces los numeros $2T, 3T, 4T, \ldots$ son periodos también. En otras palabras

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = f(t+3T) = f(t+4T) = \cdots \tag{2}$$

Note también que se satisface la siguiente ecuación:

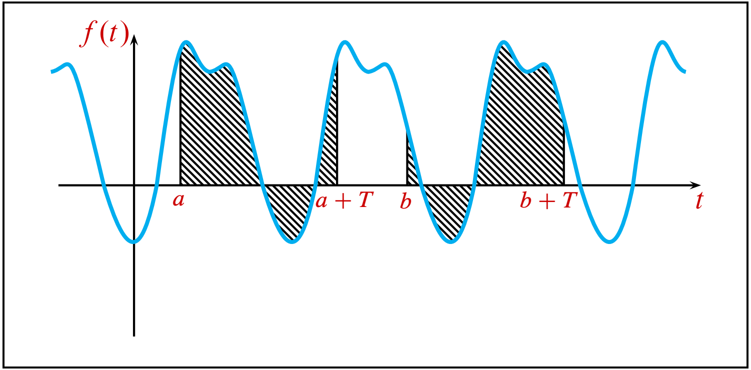
$$f(t) = f(t-T) = f(t-2T) = f(t-3T) = f(t-4T) = \cdots \tag{3}$$

Propiedad de integración

Si $f(t)$ es integrable en un intervalo de longitud T, entonces es integrable en otro intervalo de la misma longitud, y el valor de la integral es la misma, es decir,

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{b}^{b+T} f(t)\,dt \tag{4}$$

para cualquier a y b.

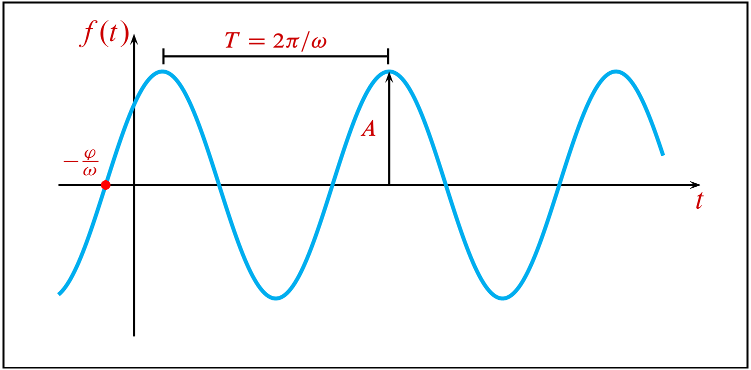


Armónico

La función periódica mas simple, y de las mas importantes, es

$$f(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{5}$$

donde A, ω_0, y φ son constantes. La función se llama **armónico** de **amplitud** A, **frecuencia angular** ω_0, y **fase inicial** φ. El periodo esta dado por $T = 2\pi/\omega_0$.



Funciones ortogonales

Un conjunto de funciones $\phi_k(t)$, para $k = 1, 2, \ldots,$, es **orthogonal** en un intervalo $a < t < b$ si para dos funciones cualesquiera $\phi_n(t)$ y $\phi_m(t)$ se cumple:

$$\int_a^b \phi_n(t)\phi_m^*(t)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n, \\ c & \text{para } m = n. \end{cases} \tag{6}$$

donde c es una constante real.

Ortogonalidad de funciones sinuidales y cosinuidales

Consider el conjunto de funciones sinoidales $\sin(n\omega_0 t)$, para $n = 1, 2, \ldots,$, y funciones cosinoidales $\cos(n\omega_0 t)$, para $n = 0, 1, 2, \ldots,$. Este conjunto es ortogonal en el intevalo $-T/2 < t < T/2$, donde $T = 2\pi/\omega_0$.
Estas funciones satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq 0, \\ T & \text{para } n = 0. \end{cases} \tag{7}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq m, \\ T/2 & \text{para } m = n. \end{cases} \tag{8}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq m, \\ T/2 & \text{para } m = n. \end{cases} \tag{9}$$

Ortogonalidad de funciones sinuidales y cosinuidales. Continuación

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)\, dt = 0, \tag{10}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t)\, dt = 0 \tag{11}$$

Tarea

Comprobar las condiciones de ortogonalidad de los funciones sinuidales y cosenuidales.

Límites izquierdo y derecho

Introducimos la siguiente notación:

$$f(t_0^-) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t), \quad \text{Límite izquierdo,} \tag{12}$$

$$f(t_0^+) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t), \quad \text{Límite derecho.} \tag{13}$$

Asumimos que los límites existen y son finitos

Por otro lado, la **función es continua** si

$$f(t_0^-) = f(t_0) = f(t_0^+). \tag{14}$$

Discontinuidad *súbita*

Si t_0 es un punto de discontinuidad de la función $f(t)$, entonces los límites izquierdo y derecho (uno o ambos) pueden existir y en otros casos no.

Si ambos límites existen, decimos que el punto t_0 es un punto de discontinuidad o **dicontinuidad súbita**.

Para una discontinuidad súbita, la cantidad

$$\delta = f(t_0^+) - f(t_0^-), \tag{15}$$

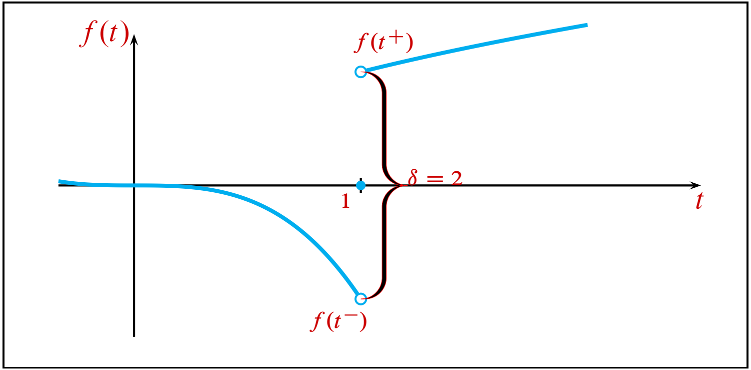
se llama **salto** de la función $f(t)$ en t_0.

Ejemplo de discontinuidad súbita

Suponga que

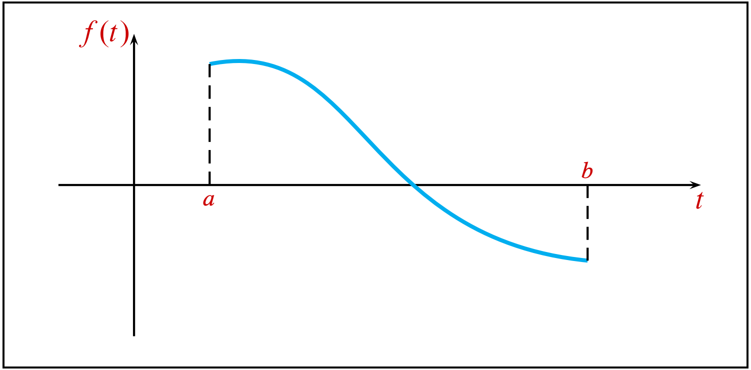
$$f(t) = \begin{cases} -t^3 & \text{para } t < 1, \\ 0 & \text{para } t = 1, \\ \sqrt{t} & \text{para } t > 1. \end{cases} \tag{16}$$

Obsevamos que $f(1) = 0$, $f(1^-) = -1$, $f(1^+) = 1$, y $\delta = 2$.



Curva *lisa*

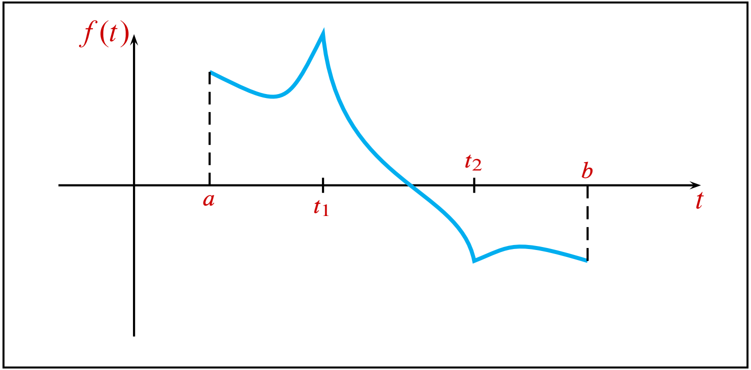
La función $f(t)$ se dice que es **lisa** en el intervalo $[a, b]$ si tiene derivadas continuas en $[a, b]$. En lenguaje geométrico, esto es, la dirección de la tangente cambia **suavemente**, sin saltos, a lo largo de la curva $f(t)$.



Curva *lisa* por partes

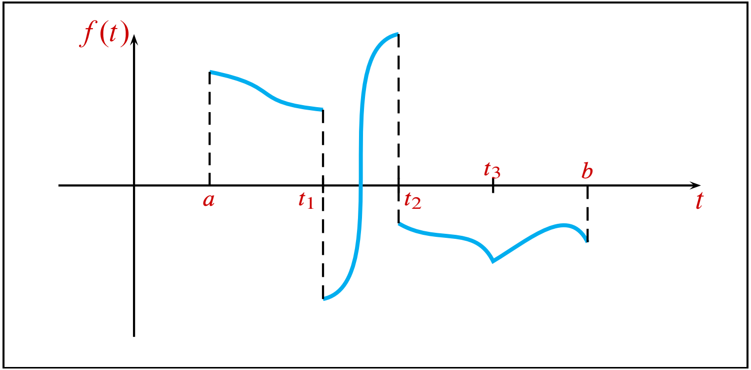
La función $f(t)$ se dice que es **lisa** por partes en el intervalo $[a, b]$, si existe un numero finito de puntos t_k para $k = 0, \ldots, n$, donde la derivada de $f(t)$ es discontinua.

Cuando la función $f(t)$ es continua en t_k, a esos puntos de la curva se llama **esquinas**.



Curva *lisa* por partes, continuación

La función $f(t)$ puede ser discontinua en algún punto t_j.



Serie Trigonométrica de Fourier

Sea la función $f(t)$ una función periódica de periodo T. Esta se puede representar por la serie trigonométrica de **Fourier**, es decir,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\Big), \tag{17}$$

donde $T = 2\pi/\omega_0$ y

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt, \tag{18}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt. \tag{19}$$

Tarea

Comprobar las ecuaciones para calcular a_n y b_n.

Criterio de convergencia

La serie trigonométrica de Fourier de una función periódica $f(t)$ lisa por partes (continua o discuntinua) converge para todos los valores de t.

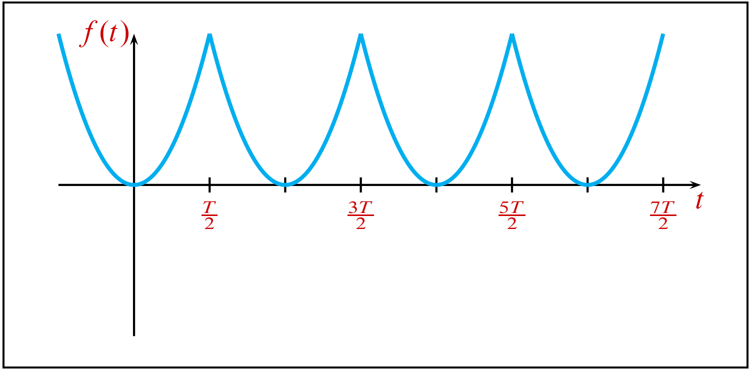
La suma de la serie iguala a $f(t)$ en cada punto de continuidad e iguala a

$$A_m = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right), \tag{20}$$

la media arimética de los límites derecho e izquierdo, en cada punto de discontinuidad.

Ejemplo 1.

Expanda $f(t) = t^2\ (-T/2 \leq t \leq T/2)$ *en serie trigonométrica de Fourier.*



Ejemplo 1. Continuación

En este caso, $b_n = 0$. Para a_0 y a_n, tenemos

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t^2\,dt = \frac{2}{T}\,\frac{t^3}{3}\Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{T^2}{6}$$

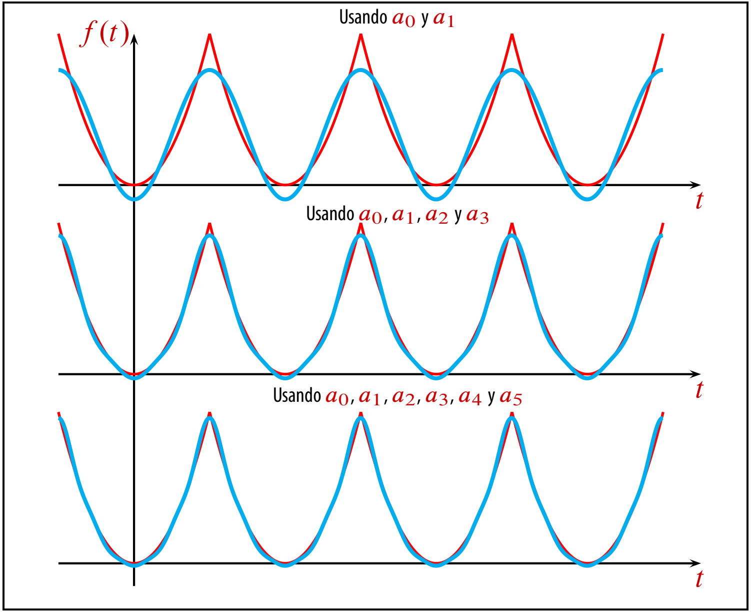
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t^2 \cos(n\omega_0 t)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\,\frac{(n^2t^2\omega_0^2 - 2)\sin(n\omega_0 t) + 2n\omega_0 t\cos(n\omega_0 t)}{n^3\omega_0^3}\Bigg|_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} \\
&= \frac{2}{T}\Bigg(\frac{(n^2\pi^2 - 2)\sin(n\pi) + 2n\pi\cos(n\pi)}{n^3\omega_0^3} \\
&\quad + \frac{(n^2\pi^2 - 2)\sin(n\pi) + 2n\pi\cos(n\pi)}{n^3\omega_0^3}\Bigg) = \frac{8\pi\cos(n\pi)}{Tn^2\omega_0^3} \\
&= \frac{(-1)^n T^2}{n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1. Continuación

Finalmente

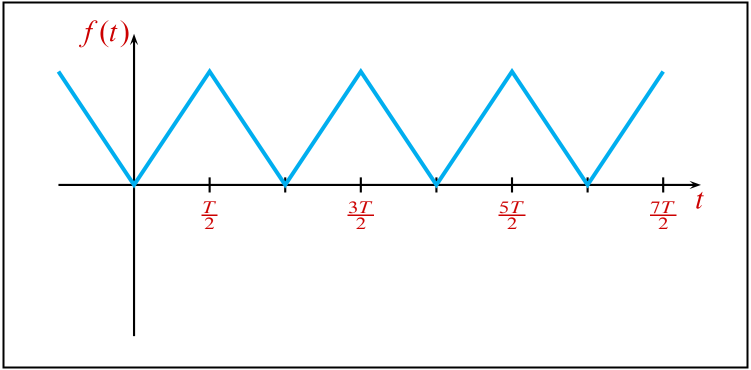
$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{T^2}{12} + \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\omega_0 t)}{n^2} \\
&= \frac{T^2}{12} + \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \Bigg(-\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{4}\cos(2\omega_0 t) \\
&\qquad - \frac{1}{9}\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{16}\cos(4\omega_0 t) \\
&\qquad - \frac{1}{25}\cos(4\omega_0 t) + \cdots \Bigg)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1. Simulación



Ejemplo 2.

Expanda $f(t) = |t| \; (-T/2 \leq t \leq T/2)$ *en serie trigonométrica de Fourier.*



Ejemplo 2. Continuación

En este caso, $b_n = 0$. Para a_0 y a_n, tenemos

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |t|\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} t\,dt = \frac{4}{T}\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{T/2} = \frac{T}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} t\cos(n\omega_0 t)\,dt \\ &= \frac{4}{T}\left.\frac{\cos(n\omega_0 t) + tn\omega_0\sin(n\omega_0 t)}{n^2\omega_0^2}\right|_0^{\pi/\omega_0} \\ &= \frac{4}{T}\left(\frac{\cos(n\pi) + n\pi\sin(n\pi)}{n^2\omega_0^2} - \frac{\cos(0)}{n^2\omega_0^2}\right) \\ &= \frac{T\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

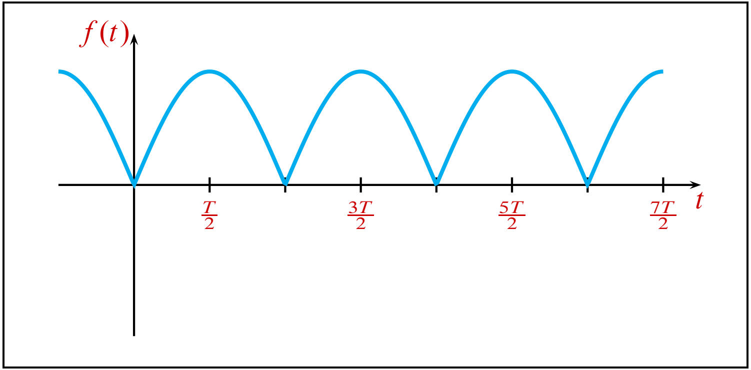
Ejemplo 2. Continuación

Finalmente

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{T}{4} - \frac{T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)\cos(n\omega_0 t)}{n^2} \\
&= \frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2} \Bigg(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9}\cos(3\omega_0 t) \\
&\quad + \frac{1}{25}\cos(5\omega_0 t) + \frac{1}{49}\cos(7\omega_0 t) \\
&\quad + \frac{1}{81}\cos(9\omega_0 t) + \cdots \Bigg)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.

Expanda $f(t) = |\sin(\pi t/T)|$ *en serie trigonométrica de Fourier.*



Ejemplo 3. Continuación

En este caso, $b_n = 0$. Para a_0 y a_n, tenemos

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |\sin(\pi t/T)|\, dt \\
&= \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} \sin(\pi t/T)\, dt = \frac{4}{T}\left.\frac{-T\cos(\pi t/T)}{\pi}\right|_0^{T/2} = \frac{4}{\pi} \\
a_n &= \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} \sin(\pi t/T)\cos(n\omega_0 t)\, dt \\
&= 4\left.\frac{(2n+1)\cos(\pi t(2n-1)/T)}{(8n^2-2)\pi}\right|_0^{T/2} \\
&\quad -4\left.\frac{(2n-1)\cos(\pi t(2n+1)/T)}{(8n^2-2)\pi}\right|_0^{T/2} \\
&= -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}.
\end{aligned}
$$

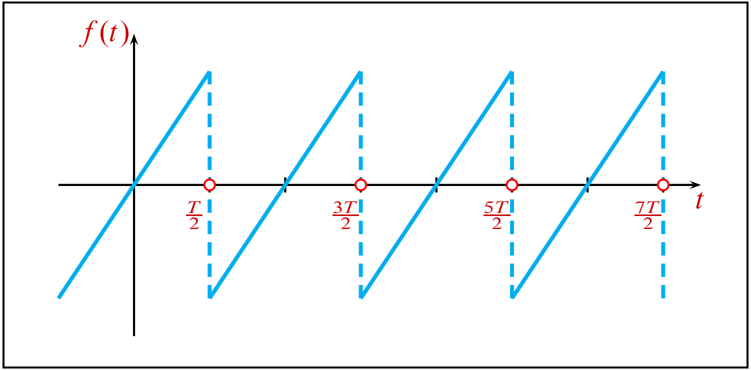
Ejemplo 3. Continuación

Finalmente

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\omega_0 t)}{4n^2 - 1} \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{15} \cos(2\omega_0 t) \right. \\
&\qquad + \frac{1}{35} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{63} \cos(4\omega_0 t) \\
&\qquad \left. + \frac{1}{99} \cos(5\omega_0 t) + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.

Expanda $f(t) = t \ (-T/2 \leq t \leq T/2)$ *en serie trigonométrica de Fourier.*



Ejemplo 4. Continuación

En este caso, $a_n = 0$. Para b_n, tenemos

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} t \sin(n\omega_0 t)\, dt \\
&= \frac{4}{T}\left[\frac{-Tt\cos(2n\pi t/T)}{2n\pi} + \frac{\sin(2n\pi t/T)T^2}{4n^2\pi^2}\right]_0^{T/2} \\
&= \frac{4}{T}\left[\frac{-T^2\cos(n\pi)}{4n\pi} + \frac{\sin(n\pi)T^2}{4n^2\pi^2}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}T}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

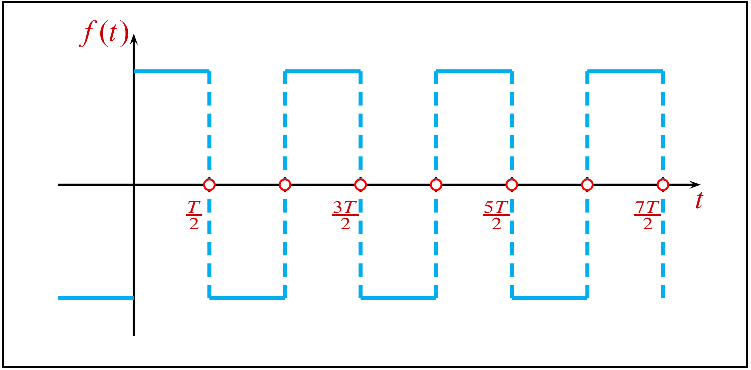
Ejemplo 4. Continuación

Finalmente

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(n\omega_0 t)}{n} \\
&= \frac{T}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega_0 t) \\
&\quad \left. + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5.

Expanda $f(t) = \mathrm{sign}\,(t)\ (-T/2 \leq t \leq T/2)$ *en serie trigonométrica de Fourier, donde* $\mathrm{sign}\,(t)$ *es la función signo.*



Ejemplo 5. Continuación

En este caso, $a_n = 0$. Para b_n, tenemos

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \sin(n\omega_0 t)\, dt \\
&= \frac{4}{T}\left[\frac{-\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_0^{\pi/\omega} \\
&= \frac{4}{T}\left[\frac{-\cos(n\pi)}{n\omega_0} + \frac{\cos(0)}{n\omega_0}\right] \\
&= \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

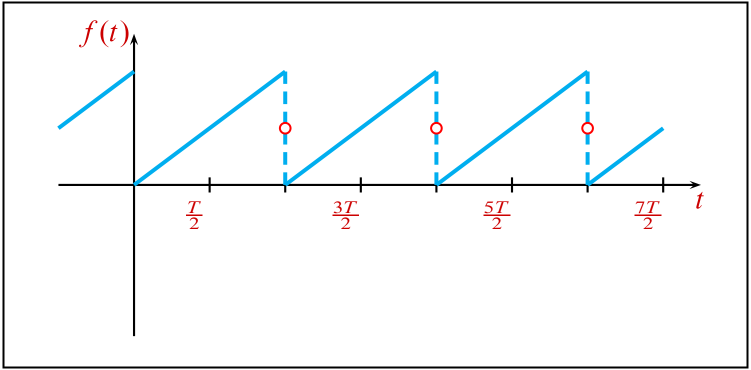
Ejemplo 5. Continuación

Finalmente

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)\sin(n\omega_0 t)}{n} \\
&= \frac{4}{\pi}\Big(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) \\
&\quad + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega_0 t) \\
&\quad + \frac{1}{9}\sin(9\omega_0 t) + \cdots\Big)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 6.

Expanda $f(t) = t \;\; (0 \leq t \leq T)$ *en serie trigonométrica de Fourier.*



Ejemplo 6. Continuación

En este caso, $a_n = 0$, $n \neq 0$. Para a_0 y b_n, tenemos

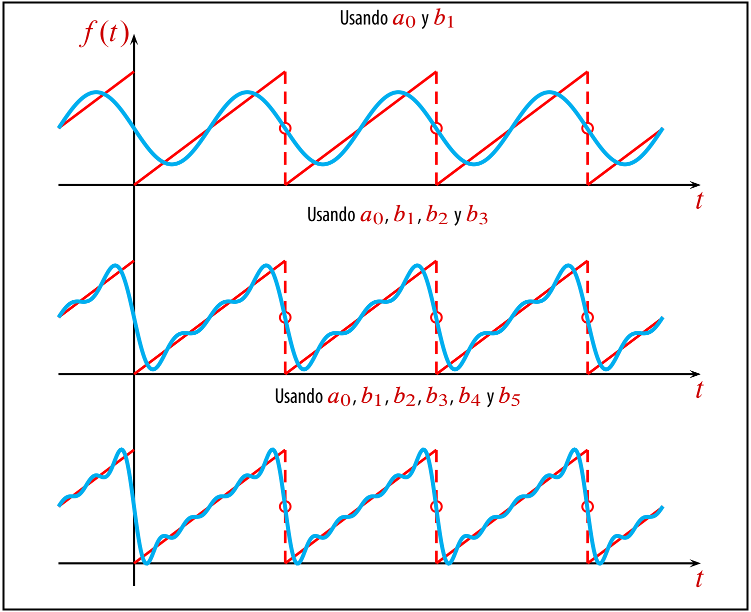
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T t\,dt = \frac{2}{T}\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^T = T \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T t\sin(n\omega_0 t)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{-Tt\cos(2n\pi t/T)}{2n\pi} + \frac{\sin(2n\pi t/T)T^2}{4n^2\pi^2}\right]_0^T \\
&= \frac{-T}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 6. Continuación

Finalmente

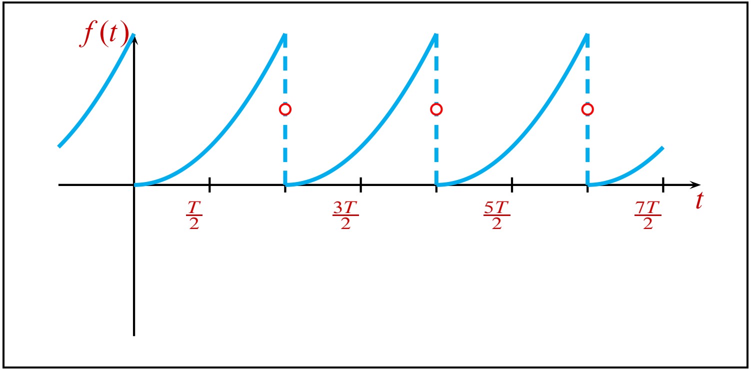
$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{T}{2} - \frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n} \\
&= \frac{T}{2} - \frac{T}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)\right. \\
&\quad + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{4}\sin(4\omega_0 t) \\
&\quad \left. + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 6. Simulación



Ejemplo 7.

Expanda $f(t) = t^2 \ (0 < t < T)$ *en serie trigonométrica de Fourier.*



Ejemplo 7. Continuación

Para a_0 y a_n, tenemos

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T t^2\,dt = \frac{2}{T}\,\frac{t^3}{3}\bigg|_0^T = \frac{2T^2}{3} \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T t^2\cos(n\omega_0 t)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{2t\cos(n\omega_0 t)}{n^2\omega_0^2}\right]_0^{2\pi/\omega_0} \\
&= \frac{T^2}{n^2\pi^2}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7 Continuación

Similarmente para b_n, tenemos

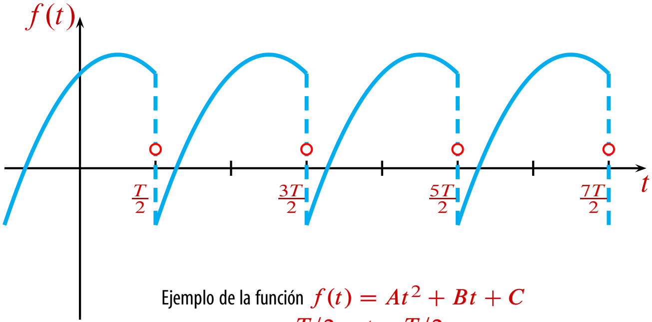
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T t^2 \sin(n\omega_0 t)\, dt \\ &= \frac{2}{T}\left[\frac{(-n^2t^2\omega_0^2 + 2)\cos(n\omega_0 t)}{n^3\omega_0^3}\right]_0^{2\pi/\omega_0} \\ &= -\frac{T^2}{n\pi}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$f(t) = \frac{T^2}{3} + \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n^2} - \pi\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n}\right)$$

Ejemplo 8.

Expanda $f(t) = At^2 + Bt + C$ $(-T/2 < t < T/2)$, *donde* A, B *y* C *son constantes, en serie trigonométrica de Fourier.*



Ejemplo de la función $f(t) = At^2 + Bt + C$
para $-T/2 < t < T/2$

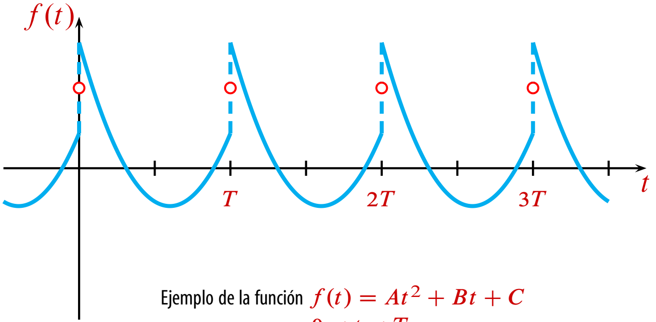
Ejemplo 8. Continuación

Usando los Ejemplos 1 y 4, obtenemos

$$
\begin{aligned}
f(t) = {} & A\left(\frac{T^2}{12} + \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\omega_0 t)}{n^2}\right) \\
& + B\frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(n\omega_0 t)}{n} \\
& + C \\
= {} & \frac{AT^2}{12} + C + \frac{AT^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\omega_0 t)}{n^2} \\
& - \frac{BT}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\omega_0 t)}{n}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 9.

Expanda $f(t) = At^2 + Bt + C \ (0 < t < T)$*, donde* A*,* B *y* C *son constantes, en serie trigonométrica de Fourier.*



Ejemplo de la función $f(t) = At^2 + Bt + C$
para $0 < t < T$

Ejemplo 9. Continuación

Usando los Ejemplos 6 y 7, obtenemos

$$
\begin{aligned}
f(t) = {} & A\left(\frac{T^2}{3} + \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n^2} - \pi\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n}\right)\right) \\
& + B\left(\frac{T}{2} - \frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n}\right) \\
& + C \\
= {} & \frac{AT^2}{3} + \frac{BT}{2} + C + \frac{AT^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n^2} \\
& - \frac{T(AT+B)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n}
\end{aligned}
$$

Definición

La serie compleja de Fourier para una función periódica $f(t)$ de periodo T se define por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \tag{21}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-in\omega_0 t}\, dt, \tag{22}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. Usualmente, $a = 0$ o $a = -T/2$.

De serie trigonométrica a serie compleja

La serie compleja de Fourier se obtiene al sustituir las funciones sinuidales por sus correspondiente representación compeja en la serie trigonométrica de Fourier (ver ecuaciones (17), (18) y (19)).

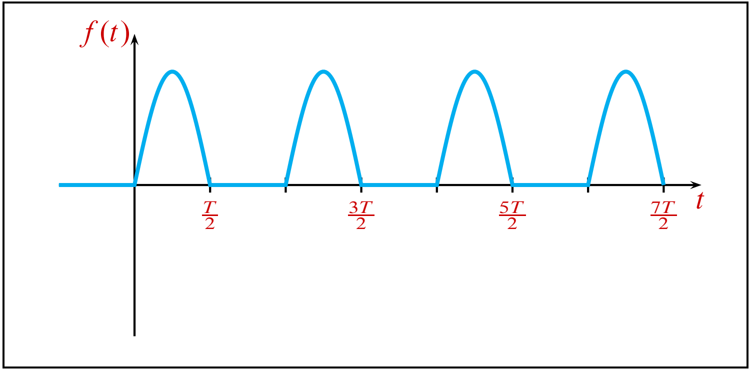
$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2i},$$
$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2}.$$

Adicionalmente, $c_n = a_n + i\,b_n$

Ejemplo 10

Expanda $f(t)$ *en serie compleja de Fourier, donde*

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_o t) & \text{para } 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{para } \frac{T}{2} < t < T. \end{cases} \tag{23}$$



Ejemplo 10. Continuación

Los coeficientes c_n los calculamos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} \sin\left(\omega_0 t\right) e^{-in\omega_0 t}\, dt \\ &= \frac{1}{T}\left[\frac{\cos(\omega_0 t)e^{-in\omega_0 t}}{\omega_0(n^2-1)} + i\,\frac{\sin(\omega_0 t) n e^{-in\omega_0 t}}{\omega_0(n^2-1)}\right]_0^{\pi/\omega_0} \\ &= \frac{1}{T}\left[\frac{\cos(\omega_0 t)e^{-in\omega_0 t}}{\omega_0(n^2-1)}\right]_0^{\pi/\omega_0} \\ &= -\frac{1+(-1)^n}{2(n^2-1)\pi}. \end{aligned}$$

Note que el coeficiente $c_{\pm 1}$ no esta definido. Repitiendo el procedimieto para $n = 1$, obtenemos

$$c_{\pm 1} = \mp\frac{i}{4}.$$

Ejemplo 10. Continuación

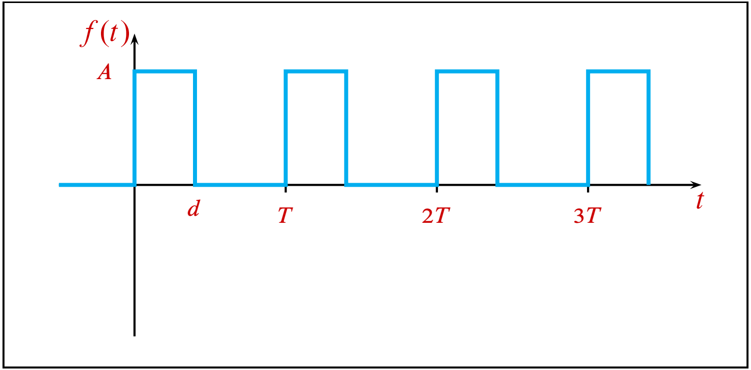
Finalmente

$$f(t) = -\frac{i}{4}e^{i\omega_0 t} - \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 1}}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1}e^{in\omega_0 t}.$$

Ejemplo 11

Expanda $f(t)$ *en serie compleja de Fourier, donde*

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{para } 0 < t < d, \\ 0 & \text{para } d < t < T. \end{cases} \tag{24}$$



Ejemplo 11. Continuación

Los coeficientes c_n los calculamos de la siguiente forma:

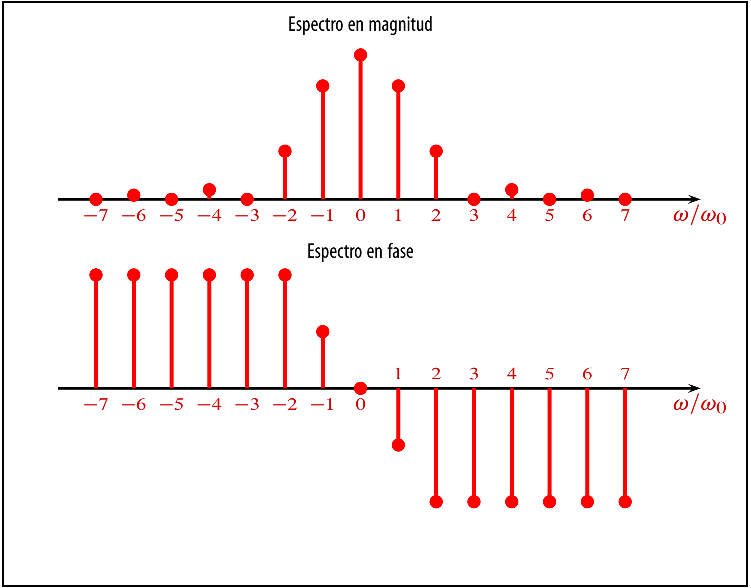
$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{A}{T}\int_0^d e^{-in\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{A}{T}\left[\frac{e^{-in\omega_0 t}}{-in\omega_0}\right]_0^d \\
&= \frac{Ade^{-in\omega_0 d/2}}{T}\left[\frac{e^{in\omega_0 d/2}-e^{-in\omega_0 d/2}}{2idn\omega_0/2}\right] \\
&= \frac{Ade^{-in\omega_0 d/2}}{T}\frac{\sin(n\omega_0 d/2)}{n\omega_0 d/2} \\
&= \frac{Ade^{-in\pi d/T}}{T}\frac{\sin(n\pi d/T)}{n\pi d/T}
\end{aligned}
$$

Espectro

- La gráfica de la **magnitud** de los coeficientes complejos c_n versus la frecuencia angular ω se llama **espectro en magnitud** de la función periódica $f(t)$.
- Similarmente, la gráfica de la **fase** de los coeficientes complejos c_n versus la frecuencia angular ω se llama **espectro en fase** de la función periódica $f(t)$.

Ejemplo 12

Grafique el espectro del Ejemplo 10.



Tarea

Grafique el espectro del Ejemplo 11.

Problemas de tarea

1. Expanda las siguientes funciones usando la serie trigómetrica de Fourier
   1. $f(t) = e^{at}$ $(-\pi < t < \pi)$, donde $a \neq 0$ es una constante.
   2. $f(t) = \cos(at)$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$, donde a no es entero.
   3. $f(t) = \sin(at)$ $(-\pi < t < \pi)$, donde a no es entero.
   4. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < t < 0 \\ t & \text{para } 0 < t < \pi \end{cases}$
2. Use los resultados del **Problema 1.2** y muestre que

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right], \tag{25}$$

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right], \tag{26}$$

donde z es cualquie numero que no es multiplo de π.