Universidade Federal do Paraná - Departamento de Estatística

CE310- Modelos de regressão linear

Prof. Cesar Augusto Taconeli

Lista de exercícios (Revisão de matrizes)

1. Sejam $x' = (1 \;\; 3)$ e $y' = (2 \;\; 1)$.
   a) Represente num gráfico os dois vetores;
   b) Determine e represente no gráfico $x + y$, $x - y$ e $0,5(x + y)$;
   c) Determine o comprimento de x e y;
   d) Determine o ângulo formado pelos dois vetores;
   e) Apresente a projeção de y em x.

2. Sejam:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

   a) Determine $A + B$ e $A - B$;
   b) Determine $A'A$ e AA'.

3. Dadas as matrizes:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determine:

   a) $5\boldsymbol{A}$;
   b) $\boldsymbol{BA}$;
   c) $\boldsymbol{A'B'}$;
   d) $\boldsymbol{c'B}$;
   e) O produto $\boldsymbol{AB}$ está definido?

4. Usando as matrizes apresentadas na sequência, ilustre as propriedades gerais das matrizes transpostas apresentadas nos itens a-c:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) $(\boldsymbol{A'})' = \boldsymbol{A}$;
   b) $(\boldsymbol{C'})^{-1} = (\boldsymbol{C}^{-1})'$;

c) $(\boldsymbol{AB})'$=$(\boldsymbol{B'A'})$.

5. Sejam:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Determine $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{BA}$. São iguais?;

b) Determine $|\boldsymbol{AB}|$. $|\boldsymbol{A}|$ e $|\boldsymbol{B}|$. Verifique, para esse par de matrizes, a validade da regra $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$;

c) Determine $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ e $tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$;

d) Verifique, para esse par de matrizes, a validade da regra $tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B})$.

6. Seja:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) $\boldsymbol{A}$ é simétrica?

b) Determine os autovalores e autovetores de $\boldsymbol{A}$;

c) Escreva a decomposição espectral de $\boldsymbol{A}$;

d) Determine $\boldsymbol{A}^{-1}$;

e) Obtenha os autovalores e autovetores de $\boldsymbol{A}^{-1}$;

f) Verifique que $|\boldsymbol{A}^{-1}| = 1/|\boldsymbol{A}|$.

7. As colunas da seguinte matriz são mutuamente ortogonais:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Normalize as colunas de $\boldsymbol{A}$ dividindo cada uma por seu respectivo comprimento. Denote a matriz resultante por $\boldsymbol{C}$;

b) Mostre que $\boldsymbol{C}$ é uma matriz ortonormal, de tal forma que $\boldsymbol{C'C}$=$\boldsymbol{CC'}$=$\boldsymbol{I}$

8. Seja:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que 1, 4 e -2 são os autovalores de $\boldsymbol{A}$;

b) Determine os autovetores normalizados correspondentes aos três autovalores e apresente a matriz ortogonal $\boldsymbol{A}$ cujas colunas correspondem aos autovetores encontrados;

c) Mostre que $\boldsymbol{C'AC} = \boldsymbol{D}$, onde $\boldsymbol{D}$ é a matriz diagonal, sendo que os elementos da diagonal são os autovalores de $\boldsymbol{A}$, e $\boldsymbol{D}$ é a matriz composta pelos autovetores de $\boldsymbol{A}$;

d) Mostre que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{CDC'}$;

e) Encontre a matriz raiz quadrada $\boldsymbol{A^{\frac{1}{2}}} = \boldsymbol{CD^{\frac{1}{2}}C'}$ e verifique que $\boldsymbol{A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}} = (\boldsymbol{A^{\frac{1}{2}}})^2 = \boldsymbol{A}$.

f) Determine $tr(\boldsymbol{A})$ e $|\boldsymbol{A}|$ e verifique que $tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$ e $|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i$.

9. Considere as matrizes:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4,001 \\ 4,001 & 4,002 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 4,001 \\ 4,001 & 4,002001 \end{pmatrix}$$

Essas matrizes são quase idênticas, exceto por uma pequena diferença em um de seus elementos. Adicionalmente, as colunas das duas matrizes são aproximadamente linearmente dependentes. Usando o R, mostre que $\boldsymbol{A^{-1}} = (-3)\boldsymbol{B^{-1}}$ e que, numa situação desse tipo, pequenas alterações (causadas até mesmo por arredondamentos) podem alterar substancialmente as inversas.