Lista de Exercícios – Unidade 2

1) Os diâmetros de oito mancais selecionados ao acaso são os seguintes (em mm):

50,001	50,002	49,998	50,006	50,005	49,996	50,003	50,004

a) Calcule a média amostral.
b) Calcule o desvio-padrão amostral.

2) O tempo de vida até falhar em horas de um componente eletrônico sujeito a um teste de durabilidade acelerado é mostrado abaixo para uma amostra com tamanho n = 40. Para acelerar a falha no teste, as unidades experimentais são testadas sob uma temperatura elevada.

127	125	131	124	129	121	142	151	160	125
124	123	120	119	128	133	137	124	142	123
121	136	140	137	125	124	128	129	130	122
118	131	125	133	141	125	140	132	129	126

a) Calcule a média amostral e o desvio-padrão.
b) Construa o histograma.
c) Ache a mediana e os quartis.

3) Os dados abaixo são leituras do rendimento de um processo químico em dias sucessivos (leia da esquerda para a direita). Faça o histograma dos dados, comente o aspecto do histograma e verifique se o histograma lembra alguma distribuição de probabilidade conhecida.

94,1	87,3	94,1	92,4	84,6	85,4	93,2	84,1	92,1	90,6
83,6	86,6	90,6	90,1	96,4	89,1	85,4	91,7	91,4	95,2
88,2	88,8	89,7	87,5	88,2	86,1	86,4	86,4	87,6	84,2
86,1	94,3	85,0	85,1	85,1	85,1	95,1	93,2	84,9	84,0
89,6	90,5	90,0	86,7	87,3	93,7	90,0	95,6	92,4	83,0
89,6	87,7	90,1	88,3	87,3	95,3	90,3	90,6	94,3	84,1
86,6	94,1	93,1	89,4	97,3	83,7	91,2	97,8	94,6	88,6
96,8	82,9	86,1	93,1	96,3	84,1	94,4	87,3	90,4	86,4
94,7	82,6	96,1	86,4	89,1	87,6	91,1	83,1	98,0	84,5

4) Considere o rendimento do processo químico do exercício anterior. Calcule a média amostral e o desvio-padrão.

5) Suponha que dois dados não viciados são lançados e uma variável aleatória observada, digamos X, que corresponde a soma das duas faces superiores. Descreva o espaço amostral do experimento e determine a função de probabilidade da v.a. X.

7) Calculadoras eletrônicas são classificadas ao final de um trabalho de inspeção. Três tipos de não-conformidade podem ocorrer nas calculadoras: crítica, maior e menor. A experiência tem indicado que os defeitos ocorrem da maneira seguinte:

calculadoras com defeitos	percentual
críticos	1,5%
maiores	1,0%
menores	2,0%
ambos crítico e maior	0,2%
ambos crítico e menor	0,8%
ambos maior e menor	0,5%
os três defeitos	0,1%

a) Qual a porcentagem da produção que estão de acordo com as especificações de projeto?
Pela figura acima, 96,9% estão de acordo com as especificações do projeto.
b) Calculadoras que tem defeito crítico ou defeito crítico e outro tipo de defeito devem ser jogados fora. Qual a porcentagem da produção jogada fora?
c) Calculadoras com defeito maior ou menor ou ambos devem ser consertados. Qual a porcentagem da produção sujeita a retrabalho?

8) A distribuição de probabilidade da v.a. contínua X tem a seguinte função densidade de probabilidade $f_X(x) = ke^{-kx}, 0 < x < \infty$. Ache a valor da constante k e também a média e a variância de X.

9) A v.a. X assume os valores 1, 2, ou 3 com probabilidades (1+3k)/3, (1+2k)/3 e (0,5+5k)/3, respectivamente.

a) Determine o valor adequado de k.
b) Determine a média e a variância de X.
c) Determine a função distribuição acumulada de X.

10) A distribuição de probabilidade de uma v.a. discreta é: $p_X(x) = kr^x, 0 < r < 1$. Ache o valor adequado de k sabendo-se que o contradomínio de x é 0, 1, 2, ...

11) Uma fábrica de calculadoras eletrônicas oferece garantia de um ano. Se a calculadora falha por qualquer razão neste período, ela é substituída. O tempo de falha é modelado pela seguinte distribuição de probabilidade $f_X(x) = 0{,}125e^{-0{,}125x}, x > 0$.
a) Qual a porcentagem de calculadoras que falham no período da garantia?
b) O custo de fabricação da calculadora é \$50 e o lucro é de \$25. Qual é o efeito da garantia de substituição sobre o lucro?

12) A variabilidade do volume engarrafado de uma bebida está sendo analisada. Uma amostra com tamanho n = 10 foi tomada do processo. Os volumes medidos e os resultados são os seguintes, na unidade adequada:

10,05 10,03 10,02 10,04 10,05 10,01 10,02 10,02 10,03 10,01
Descreva a amostra.

13) Seja a v.a. X que representa o número de itens defeituosos presentes em uma amostra de tamanho n=10, tomada de um lote que possui 100 itens, inclusive 5 defeituosos. A amostra é tomada sem reposição. Calcule a probabilidade de aparecer na amostra no máximo 1 dos defeituosos.

14) Em um processo de produção de tecido aparecem determinado defeito com uma média de 4 defeitos por unidade de comprimento. Calcule probabilidade de em uma unidade de comprimento selecionada ao caso ocorrer no máximo 2 defeitos.

15) A resistência a tração é uma característica muito importante do papel usada para fazer sacolas para carregar mantimentos. Supondo que a v.a. X represente esta força e que ela tem uma distribuição N(μ=40, σ^2=4) para determinado tipo de papel e que a alça dessa sacola requer que a força de resistência seja de pelo menos 35 unidades, calcule a probabilidade de que uma sacola produzida com este papel atinja ou exceda a especificação.

16) O diâmetro do pino de metal usado em uma unidade de "disk-drive" é normalmente distribuída com média de 0,2508 e desvio-padrão de 0,0005 unidades. A especificação de projeto do pino estabeleceu que o diâmetro deve ficar entre $0{,}2500 \pm 0{,}0015$ unidades. Determine a fração de defeituosos produzidos de acordo com a especificação.

17) Muitos experimentos são tais que os resultados possíveis apresentam ou não uma determinada característica. Uma moeda é lançada: o resultado é "cara", ou não é; um dado é lançado: ou ocorre face 5, ou não (ocorrendo, então, uma das faces 1, 2, 3, 4 ou 6); uma pessoa é escolhida, ao acaso, entre os moradores de uma cidade e pergunta-se se ela diz "sim" ou "não" a um projeto da prefeitura. Estes experimentos resultam numa variável aleatória de Bernoulli e também são chamados "ensaios Bernoulli". A função de probabilidade discreta que uma variável aleatória, digamos, X assume é dada pela função de probabilidade:

$$f(x) = p^x q^{1-x} I_{(0,1)}(x),\ 0 \le p \le 1,\ (q = 1 - p)$$

a) Encontre a E(X).
b) Encontre a Var(X)
c) Encontre a função geratriz de momentos, $M_X(t)$, da variável aleatória X.
d) Através da função geratriz de momentos, encontre a média e a variância da variável aleatória X.

18) Um lote é constituído de M peças das quais $D(D \le M)$ defeituosas. Uma amostra aleatória de n peças é selecionada deste lote sem reposição, e o número de peças desta amostra com defeitos, digamos x é observada. Então x é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade Hipergeométrica conforme segue: $p(x) = \dfrac{\binom{D}{x}\binom{M-D}{n-x}}{\binom{M}{n}}$, $x = 0, 1, 2, ..., \min(n, D)$.

a) Encontre E(X)
b) Encontre Var(X).

19) Ir lançando uma moeda, não necessariamente honesta, independentemente. Contar o número de lançamentos até o da primeira saída de cara, inclusive. Seja X esse número. Se p é a probabilidade de cara em um dado lançamento, então X tem função de probabilidade:
$p(k) = (1-p)^{k-1} p,\ k = 1, 2, ...$. Dizemos que X tem distribuição geométrica com parâmetro p. A geométrica é a distribuição do tempo de espera até o primeiro sucesso em uma sequência de ensaios de Bernoulli com probabilidade p de sucesso. Encontre a média e a variância da variável aleatória X.

20) Determine a distribuição do tempo de espera até o segundo sucesso em uma sequência de ensaios de Bernoulli com probabilidade p de sucesso.

21) Descreva um espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios:
a) 3 jogadas de uma moeda,
b) número de fumantes em um grupo de 500 adultos de sexo masculino,
c) jogar uma mesma moeda até que apareça coroa,
d) número de chamadas em uma central telefônica,
e) jogada de uma moeda e um dado.

22) Obtenha uma fórmula para $P(A \cup B \cup C)$

23) Uma caixa contém 2 (duas) bolas vermelhas e 3 azuis. Extraem-se ao acaso 2 (duas) bolas, sem reposição. Determine a probabilidade de serem:
a) ambas azuis,
b) ambas vermelhas,
c) uma vermelha e uma azul

24) A Urna I contém 2 (duas) bolas brancas e 3 (três) pretas; a Urna II contém 4 (quatro) bolas brancas e 1 (uma) preta; a Urna III contém 3 (três) bolas brancas e 4 (quatro) pretas. Escolhe-se uma Urna ao acaso e dela extrai-se uma bola, que tem cor branca. Qual a probabilidade de ter sido escolhida a Urna I.

25) A distribuição de Poisson é largamente empregada quando se deseja contar o número de eventos de um certo tipo, que ocorrem em um intervalo de tempo, ou superfície, ou volume. Esta distribuição é chamada distribuição de eventos raros, tais como: número de chamadas telefônicas recebidas em uma central durante um intervalo de tempo pequeno, número de falhas de um computador em um dia de operação, número de acidentes ocorridos em um cruzamento, etc. A sua função densidade discreta é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{x!} e^{-\lambda} \lambda^x I_{(0,\infty)}(x)$$

a) Encontre a média e variância da variável aleatória X.
b) Encontre a função geratriz de momentos da variável aleatória X.
c) Através da função geratriz de momentos, encontre a média e a variância da variável aleatória X.

26) A distribuição geométrica é a distribuição do tempo de espera até que ocorra o primeiro sucesso em uma sequência de ensaios Bernoulli com probabilidade p de sucesso. Suponha o lançamento de uma moeda, independentemente, não necessariamente honesta. Seja X o número de lançamentos até o da saída de cara, inclusive. Dizemos então, que a variável aleatória X tem distribuição geométrica com parâmetro p, e a sua função de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = p(1-p)^{(x-1)} I_{(1,2,\ldots)}(x)$$

Dica: O limite da soma de uma progressão geométrica ilimitada é dada pela expressão:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$, onde q é a razão e a_1 é o primeiro termo.

a) Mostre que é uma função de probabilidade discreta.
b) Encontre a média e a variância da variável aleatória X.

27) Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, cada X_i com a mesma média μ e mesma variância σ^2.

Calcule a $E(\bar{x})$ e a $Var(\bar{x})$, onde $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

28) Joga-se uma moeda três vezes. Se X é uma variável aleatória que representa o número de caras,
a) construa uma tabela da distribuição de probabilidade de X.
b) faça o gráfico da distribuição de probabilidade de X,
c) determine a função distribuição (acumulada) de X,
d) faça o gráfico da função distribuição (acumulada) de X,
e) determine a média e a variância de X.

29) Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 pretas. Extraem-se duas bolas aleatoriamente, **sem reposição**. Seja X o número de bolas brancas.
a) determine a distribuição de probabilidade de X,
b) faça o gráfico da distribuição de probabilidade de X,
c) determine a função distribuição (acumulada) de X,
d) faça o gráfico da função distribuição (acumulada) de X
e) determine a média e a variância de X.

30) Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 pretas. Extraem-se duas bolas aleatoriamente, **com reposição**. Seja X o número de bolas brancas.
a) determine a distribuição de probabilidade de X,
b) faça o gráfico da distribuição de probabilidade de X,
c) determine a função distribuição (acumulada) de X,
d) faça o gráfico da função distribuição (acumulada) de X
e) determine a média e a variância de X.

31) Seja Z uma variável aleatória que represente o número de caras menos o número de coroas em duas jogadas de uma moeda "honesta".
a) determine a distribuição de probabilidade de X,
b) faça o gráfico da distribuição de probabilidade de X,
c) determine a função distribuição (acumulada) de X,
d) faça o gráfico da função distribuição (acumulada) de X
e) determine a média e a variância de X.

32) Seja X uma variável aleatória que represente o número de ases em uma extração aleatória de 4 cartas de um baralho usual de 52 cartas.
a) determine a distribuição de probabilidade de X,
b) faça o gráfico da distribuição de probabilidade de X,
c) determine a função distribuição (acumulada) de X,
d) faça o gráfico da função distribuição (acumulada) de X
e) determine a média e a variância de X.

33) A função densidade de probabilidade da variável aleatória contínua X é

$$f(x) = \begin{cases} c\,x^2, 0 < x < 3 \\ 0, \text{em caso contrário} \end{cases}$$

a) determine a constante c de modo que a função acima seja uma densidade,
b) calcule $P(1 \le X \le 2)$,
c) determine a função distribuição (acumulada) da variável aleatória,
d) encontre a média da variável aleatória X,
e) encontre a variância da variável aleatória X.

34) Seja X uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, \ \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine o valor da constante c.,
b) Ache o valor α tal que $F_X(\alpha) = 0{,}25$. (α é o primeiro quartil da distribuição de X)

35) Suponha que a variável aleatória X tenha a seguinte densidade "triangular":

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x \text{ se } -1 \le x \le 0 \\ 1 - x \text{ se } \quad 0 < x \le 1 \\ 0 \text{ se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

a) Calcule E(X) e
b) Var(X)

36) Suponhamos que X possua densidade $f_X(x)$. Seja $Y = bx + c$, onde b>0 e $c \in R$. Então Y tem densidade: $f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X(\frac{y-c}{b}), y \in R$. Mostre que a suposição é verdadeira.