Física Nuclear
Solución 1

Autor: *Luis Hernández*
luis.hernandez@ciencias.unam.mx

9 de octubre del 2018

Solución propuesta a la tarea 1, cualquier comentario u observación es bienvenido al correo adjunto.

Problema 1. Simetría de isoespín

De acuerdo a la teoría electromagnética clásica, el potencial electroestático está relacionado con el trabajo por unidad de carga, esto es, la diferencia entre dos puntos espaciales $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual al trabajo por unidad de carga requerido para llevar una partícula de $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Supongamos que el protón con carga positiva está fijo y que queremos saber cuánto trabajo costaría otro protón a una distancia r del protón fijo, la respuesta es $q_2V_1(\vec{r}_2)$, donde V_1 es el potencial debido a q_1 (la carga del protón fijo), $\vec{r}_2$ es el vector posición relativo a la posición de la carga q_1 (tomando que q_1 está en el origen del sistema de referencia entonces $\vec{r}_2 = \vec{r}$). Por lo tanto el trabajo W es

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}$$

Esto es cuanto trabajo toma ensamblar la configuración de cargas puntuales, desde otro punto de vista es la cantidad de energía que tendrías de vuelta si desmantelas el sistema, en este sentido representa la energía almacenada en el sistema, es decir "la energía potencial". Entonces $E_p = -W = -e^2/4\pi\epsilon_0 r$. Por otro lado recordemos que la constante de estructura fina está dada por $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$. Por lo que la energía potencial debido a la repulsión electroestática de los protones en el núcleo de He se puede escribir de la siguiente manera

$$E_p = -\frac{\alpha\hbar c}{r} \tag{1}$$

Por otra parte, la energía de amarre (en unidades naturales) está dada por

$$B(Z,A) = Zm(^1H) + (A-Z)m_n - m(A,Z),$$

tomando la diferencia entre las energías de amarre del ^3He respecto a la del ^3H tenemos

$$B(^3He) - B(^3H) = 2m(^1H) + (3-2)m_n - m(^3He) - m(^1H) - (3-1)m_n + m(^3H) = m(^1H) - m_n - m(^3He) + m(^3H),$$

donde $m(^1H) = m_p + m_e$, ($m_p :=$ masa del protón, $m_e :=$ masa del electrón). Ahora, aunque parezca otro problema completamente diferente consideremos el decamiento β del ^3H el cual nos permitirá encontrar información acerca de la diferencia de masas de los dos núcleos de interés. Dicho decaimiento es $^3H \to {}^3He + e^- + \bar{\nu}_e$, el cual básicamente es $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$. Consideremos la conservación de cuadrimomento (recuerden que componente a componente es la conservación de energía y la conservación de momento lineal) en cualquier sistema de referencia, en particular usemos por conveniencia el sistema en el cual el ^3H se encuentra en reposo, en dicho sistema la energía es su masa $m(^3H)$ y su momento lineal es $\vec{p}_{^3H} = \vec{0}$. Por conservación de cuadrimomento tenemos las siguientes cuatro ecuaciones

$$0 = \vec{p}_e + \vec{p}_{\bar{\nu}_e} + \vec{p}_{^3He},$$

$$m(^3H) = E_e + E_{\bar{\nu}_e} + E_{^3He}$$

, de estas dos expresiones buscamos la combinación de valores que nos permitan hallar cuando ocurre que la energía del electrón es máxima, noten que tenemos más variables que ecuaciones por lo que es necesario hacer algunas aproximaciones en el problema, de hecho lo primero que podemos pensar es que cuando la energía del electrón es máxima está ligado a que los momentos lineales del antineutrino y del ^3He son colineales, de la energía que se llevan estos dos últimos, podemos suponer que uno se lleva toda la energía mientras que el otro permanece en reposo, entonces tenemos dos casos, el núcleo queda en reposo y el antineutrino se lleva la energía o viceversa. Si tenemos el primer caso, podemos pensar que el neutrino es una partícula ultra-relativista tomando su masa igual a cero, de tal forma que

$$E_{\bar{\nu}_e} = K_{\bar{\nu}_e} = p_{\bar{\nu}_e},$$

donde K representa la energía cinética. La otra opción es que el neutrino quede en reposo, si esto sucede el núcleo se lleva toda la energía cinética, como dicha partícula se mueve a velocidad no relativista entonces su energía cinética K_N está dada por

$$K_N = \frac{p_e^2}{2m_N},$$

donde m_N es la masa del núcleo. La elección se basa en cual de las opciones se lleva menor energía cinética (la restante se irá al electrón y nos dará el valor máximo), volviendo al sistema de ecuaciones tenemos

$$0 = \vec{p}_e + \vec{p}_{^3He},$$

$$m(^3H) = E_{max,e} + m_{\bar{\nu}_e} + E_{^3He},$$

de la primera igualdad tenemos que los módulos de los momentos lineales coinciden y sustituyendo la energía cinética del ^3He, obtenemos

$$m(^3H) = E_{max,e} + m_{\bar{\nu}_e} + m(^3He) + \frac{p_e^2}{2m(^3He)},$$

por lo tanto llegamos a la siguiente expresión

$$m(^3H) - m(^3He) = E_{max,e} + m_{\bar{\nu}_e} + \frac{E_{max,e}^2 - m_e^2}{2m(^3He)},$$

aquí podemos considerar que tanto la masa como la energía máxima del electrón son ordenes de magnitud menores a la masa de ^3He, entonces parece razonable realizar la siguiente aproximación

$$E_{max,e} \approx m(^3H) - m(^3He).$$

Regresando al problema inicial

$$B(^3He) - B(^3H) = m(^1H) - m_n - m(^3He) + m(^3H) = m(^1H) - m_n + E_{max,e},$$

si igualamos la diferencia de energía de amarre de estos dos isótopos a la energía potencial asociada a la repulsión de los protones

$$B(^3He) - B(^3H) = E_p$$

y despejamos para r tenemos

$$r = \frac{\alpha\hbar c}{m(^1H) - m_n + E_{max,e}} = \frac{\alpha\hbar c}{m_p - m_n + K_{max,e} + 2m_e},$$

donde $m_p = 938.272\ MeV$ y $m_n = 939.565\ MeV$.

$$\therefore r = 5.71 fm$$

Problema 2. Decaimiento α

La actividad de una fuente radioactiva está dada por la siguiente ecuación

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

donde N es el número de radioisótopos en la muestra, y λ su constante de decaimiento. Si integramos la ecuación anterior respecto al tiempo obtenemos

$$\int_0^t \frac{dN/dt}{N} \cdot dt = -\lambda \cdot dt$$

,

$$\ln(N) - \ln(N_0) = -\lambda t,$$

donde N_0es el número de radioisótopos al tiempo $t = 0$, despejando N, tenemos

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

regresando a la ecuación de la actividad podemos sustituir el valor de $N = N(t)$, entonces

$$A(t) = \lambda t = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

De acuerdo al análisis dimensional, $[A] = decaimientos/tiempo$, la energía cinética por decaimiento α, $K_\alpha = 5.49$ MeV es tal que $[K_\alpha] = energía/decaimiento$. entonces multiplicar estas dos últimas cantidades nos daría la cantidad de energía que emite la muestra de radioisótopos por unidad de tiempo, sin embargo, como lo dice el problema no toda la energía se transforma en electricidad para el aparato, entonces debemos multiplicar por el valor de la eficiencia η para obtener la potencia eléctrica P,

$$P = A(t)K_\alpha \eta,$$

de acuerdo al problema necesitamos saber cuánto plutonio necesitaría un RTG en el Voyager 2 para liberar al menos $395W$ de potencia eléctrica después de que la prueba pase a Saturno, hasta el momento nos quedan tres variables en la ecuación anterior, a saber, $\lambda = 1/\tau = \ln(2)/t_{1/2}$ para el ^{238}Pu donde $t_{1/2} = 87.7$ *años* (buscar una referencia confiable), el tiempo que le tomó al Voyager 2 desde que fue lanzado de la Tierra hasta el momento en que alcanza Saturno, esto es de acuerdo a los datos del problema $t = 126,662,400$ s (equivalente a 4 años y seis días) y finalmente N_0 que es lo que queremos determinar, si sustituímos el valor de la actividad obtenemos la siguiente relación

$$\frac{1}{\tau} N_0 e^{-t/\tau} K_\alpha \eta = P,$$

despejando para N_0 tenemos

$$N_0 = \frac{P\tau e^{t/\tau}}{K_\alpha \eta} = \frac{(395\ W)(3,990,072,062\ s)e^{0.0317}}{8.795 \times 10^{-13}\ W \cdot s(0.055)} = 3.36 \times 10^{25}$$

donde utilizamos la conversión 1 $MeV = 1.60 \times 10^{-13}$ $W \cdot s$.

$$\therefore N_0 = 3.36 \times 10^{25}\ isótopos\ de\ ^{238}Pu$$

Para la siguiente pregunta podemos usar la expresión para la potencia eléctrica que encontramos en el inciso anterior y usar el valor de N_0, en este caso el tiempo t corresponde al tiempo que le toma al Voyager 2 llegar a Neptuno, es decir $t = 378,604,800$ s, sustituyendo tenemos

$$P = 369.20\ W$$

Desde otro punto vista, sabemos que la radiación como otras cantidades físicas que son emitidas radialmente desde una fuente puntual en el espacio tridimensional disminuyen su intensidad de forma proporcional al inverso de la distancia de la fuente al punto de interés al cuadrado, esto se debe a que el área de la esfera que van formando a medida que se propaga la *"onda"* es proporcional a $4\pi r^2$ (para más información revisar *ley del cuadrado inverso*). Teniendo en cuenta esto y usando la irradiancia definida como la potencia incidente debido a radiación por unidad de superficie $I = P_{inc}/A_s$, de tal manera que la irradiancia en los paneles de Skylab (a 1 UA del Sol) es $I_{skylab} = \frac{10500\ W}{730\ m^2}$, usando la ley del cuadrado inverso sabemos que $I \propto 1/r^2$, si denotamos la irradiancia del Voyager 2 como I_V y tomamos las razones entre la irradiancia del Voyager 2 con los paneles de Skylab tenemos

$$\frac{I_V}{I_{skylab}} = \frac{r^2_{skylab}}{r^2_V} = \frac{I_V}{0.016\ W/m^2} = \frac{P_V}{A_V} \frac{1}{0.016\ W/m^2},$$

donde usamos la definición de irradiancia, la variable P_V es la potencia eléctrica del Voyager 2 y A_V el área del supuesto panel solar. Para llegar a Saturno el Voyager 2 necesitaría $A_V = 2468.75\ m^2$ y para llegar a Neptuno el Voyager 2 necesitaría $A_V = 23180\ m^2$.

Problema 3. Radioactividad

Consideremos la expresión general que encontramos en el problema anterior para el decamiento de una muestra de N radioisótopos, esto es

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

debido a que la cantidad inicial N_0 de radioisótopos tanto de ^{238}U y ^{235}U son iguales al momento de que se crean, podemos considerar la razón de radioisótopos en la actualidad

$$\frac{N_{^{238}U}(t)}{N_{^{235}U}(t)} = \frac{N_0 e^{-\lambda_{^{238}U} t}}{N_0 e^{-\lambda_{^{235}U} t}},$$

sin embargo, sabemos que la razón $N_{^{238}U}(t)/N_{^{235}U}(t) = 0.9928N_U/0.0078N_U = 127.28$, donde N_U es la cantidad de uranio que usualmente se encuentra en la naturaleza. El valor del tiempo t, corresponde de hecho al tiempo en el que la proporción de ambos isótopos eran iguales en una mustra de uranio. Despejando t, obtenemos lo siguiente

$$\ln(127.28) = ln\left(\frac{e^{-\lambda_{^{238}U}t}}{e^{-\lambda_{^{235}U}t}}\right)$$

$$t = \ln(127.28)\frac{\tau_{^{238}U}\tau_{^{235}U}}{\tau_{^{238}U} - \tau_{^{235}U}},$$

si usamos los valores para la vida media de los isótopos de uranio que se dan en la redacción del problema, tenemos

$$\therefore t = 6.35 \times 10^9 \ \textit{años}.$$

Algo bastante interesante en este problema es que $4,571$ *miles de millones años* es la edad que se aceptan usualmente del estudio de los meteoritos más viejos (podrían investigar un poco más de esto), sin embargo, el valor que se calculó es previo a este valor por lo que uno podría esperar que la formación de uranio ocurrió en un proceso previo a la formación de nuestro sistema solar.
Como no conocemos la cantidad inicial de ^{238}U al tiempo $t = 0$ podemos calcular el porcentaje que ha decaído respecto al valor inicial

$$\frac{N(t)}{N(t=0)} = e^{-\lambda}t,$$

usandos $t = 2.5 \times 10^9$ *años* obtenemos

$$\frac{N(t)}{N(t=0)} = 0.57,$$

por lo que solo resta el 57% de lo que había al inicio, en otras palabras decayó el 43%.

Para obtener la energía que libera el núcleo de uranio en la cadena $^{238}U \rightarrow ^{206}Pb$ debemos considerar 8 decaimientos α y los procesos de fisión espontánea, para los decaimientos α obtenemos $E = 51.45\ MeV$, mientras que para la fisión espontánea se libera $E \approx 126.69\ MeV$.

Problema 4. Actividad del radón
Realizando el procedimiento en general, la situación física es la siguiente, consideremos un núcleo radioactivo que decae en otro núcleo que también es radioactivo. Supongamos que $N_1(t)$ es el número de isótopos en la muestra al tiempo t del núcleo madre y λ_1 corresponde a su constante de decaimiento. Para el isótopo madre sabemos que se cumple la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t),$$

cuya solución es $N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$, para el caso del isótopo hijo tenemos la siguiente relación

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t),$$

dicha relación se puede interpretar de la siguiente manera: la razón total de cambio del número de isótopos hijo será igual a la razón de decaimiento radioactivo de los isótopos hijo más la razón de formación de los isótopos hijo (del decaimiento radioactivo de la madre), para resolver esta ecuación es necesario utilizar la solución que encontramos previamente tal que

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) + N_0\lambda_1 e^{-\lambda_1 t},$$

multiplicando por $e^{\lambda_2 t}$ tenemos la siguiente igualdad

$$e^{\lambda_2 t}\frac{dN_2(t)}{dt} + e^{\lambda_2 t}\lambda_2 N_2(t) = N_0\lambda_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} = \frac{d(e^{\lambda_2 t}N_2(t))}{dt},$$

integrando ambos lados de la última igualdad tenemos lo siguiente

$$e^{\lambda_2 t}N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}N_0 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + C,$$

para encontrar el valor de la constante necesitamos una condición inicial, la que usualmente se toma es que al momento $t = 0$ la cantidad del isótopo hijo es cero, es decir el isótopo madre aún no comienza a producirlo, si $N_2(0) = 0$ se puede mostrar que

$$C = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}N_0,$$

sustituyendo obtenemos

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_0 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Finalmente la actividad del isótopo hijo será

$$A_2(t) = \lambda_2 N_2(t).$$

$$\therefore A_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_0 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Por otro lado, el volumen del cuarto es $V_c = 400 m^3$, mientras que el volumen efectivo donde se encontrará la cantidad de uranio $V_{efectivo} = 0.15\ m((10\ m)(4\ m)(4\ paredes) + (10\ m)(10\ m)(2\ paredes)) = 5.4\ m^3$

De la relación que encontramos para la actividad del isótopo hijo podemos tomar dos aproximaciones bastante razonables esto es si

$$\lambda_2 \gg \lambda_1$$

y para tiempos t muy grandes.

$$A_2 = \lambda_1 N_0,$$

donde N_0 es la cantidad de ^{238}U, de esta relación podemos despejar N_0, por otro lado sabemos que la actividad de ^{222}Rn es

$$A_2 = 100 \frac{Bq}{m^3} V_c,$$

finalmente la densidad de isótopos de ^{238}U ρ_U será igual a

$$\rho_U = \frac{A_2}{\lambda_1 V_{efectivo}} = 1.05 \times 10^{21}\ \frac{isótopos}{m^3}.$$

Problema 5. Fórmula de la masa

Consideremos la fórmula semiempírica de masas, podemos escribir está relación en términos de cada una de las contribuciones

$$M(A, Z) = \alpha A - \beta Z + \gamma Z^2 + \frac{\delta}{A^{1/2}},$$

además, en dicha relación tenemos las variable $A = 186$ y $Z = 94$ fijas (de hecho se asume que A fija para que la ecuación sea válida) justo como lo describe Isaac Asimov en *The Gods Themselves* con la finalidad de que $^{186}_{94}Pu$ sea el isótopo más estable con dicho valor de A. Esto como consecuencia hace que el valor de la constante de acoplamiento electromagnético α_e se modifique. Por otro lado, de esta relación de masas es posible encontrar una condición que nos permite saber cual es la isótopo con mayor estabilidad y justo dicha condición se obtiene de encontrar el valor de Z para el cual la masa de isótopo se encuentra en un mínimo (equilibrio estable que permita que dicho valor no se modifique fácilmente, en particular para el decaimiento β), la condición para la Z_{min} se obtiene derivando $M(A, Z)$ respecto a Z, igualando a cero la derivada y resolviendo para Z_{min}, tal que $Z_{min} = \beta/2\gamma$, donde

$$\gamma = \frac{a_a}{A} + \frac{a_c}{A^{1/3}},$$

donde $a_a = 93.15\ MeV$ (en unidades naturales, es decir $c = 1$) que acompaña al término de asimetría dentro de la relación para la masa y que no depende de la constante de acoplamiento electromagnética. Por el contrario a_c aparece en el término electroestático y claramente debe depender del acoplamiento electromagnético, a saber si uno aproxima la repulsión electroestática de protones en un núcleo con muchos protones entonces puede considerarse como una esfera con una distribución de carga uniforme, la energía potencial asociada a dicho sistema será

$$E_c = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)^2}{r_0 A^{1/3}} \approx \frac{3e^2 Z(Z-1)}{20\pi\epsilon_0 r_0 A^{1/3}} = a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}},$$

tal que

$$a_c = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{3}{5} \frac{\hbar c \alpha_e}{r_0} = \kappa \alpha_e.$$

Finalmente para obtener el valor de α_e despejamos de la ecuación de Z_{min}, tal que

$$\alpha_e = \frac{5A^{1/3} r_0}{3\hbar c} \left(\frac{a_a + m_n - m_p - m_e}{2Z_{min}} - \frac{a_a}{A} \right),$$

donde usamos $\beta = a_a + m_n - m_p - m_e$, además $r_0 \approx 1.2\ fm$, podemos trabajar en unidades naturales y como les mencioné a principio del curso esto es bastante útil porque permite trabajar en orden de magnitud manejable, para pasar de unidades naturales a SI es necesario reinsertar los valores de $\hbar$ y c de forma adecuada de tal manera que obtengamos las unidades deseadas en el SI. Por otra parte notemos que en la ecuación anterior aparece un factor de $\hbar c$ que en unidades naturales es uno, sin embargo si lo dejo expresado y lo sustituyo por su valor en el SI, justo me da las unidades necesarias para que a_e se adimensional (lo que es válido en cualquier sistema de unidades), por lo tanto dejo ese factor y lo sustituyo por y $\hbar c = 0.197\ GeV fm$, tal que

$$\alpha_e = \frac{2}{197} A^{1/3} \left(\frac{46.96}{Z_{min}} - \frac{93.15}{A} \right),$$

y como anticipaba la constante de acomplamiento electromagnética queda sin unidades como debe de ser. Finalmente, sabemos que el valor que es más conocido es el inverso de la constante de acoplamiento electromagnético en este universo cuyo valor es aproximadamente $1/\alpha_e \approx 1/137$, sustituyendo los valores para ${}^{186}_{94}Pu$ tenemos $1/\alpha_e \approx -14006$, para ${}^{186}_{82}Pb$, $1/\alpha_e \approx 240$ y finalmente para ${}^{186}_{88}Ra$, $1/\alpha_e \approx 525$. Por último para ${}^{186}_{94}Pu$ nos da una constante de acoplamiento *negativa*, ¿cómo cambia el comportamiento de la naturaleza el que está constante de acoplamiento sea negativa?.

Problema 6. Decaimiento α (segunda parte)
Consideremos la siguiente reacción

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + \alpha + E,$$

donde E es la energía que sale del sistema por radiación, de tal forma que si uno piensa en la conservación de energía tenemos la siguiente relación $B(X) = B(Y) + B(\alpha) - E$. La razón por la que elegimos este camino es que la condición $E \geq 0$ nos permitirá obtener la condición para A que buscamos. Conocemos el valor de $B(\alpha)$ y podemos estimar el valor de la variación de $B(X) - B(Y) = \delta B$, conocemos el valor explícito de la energía de amarre

$$B(Z, A) = Zm(^1H) + (A - Z)m_n - m(A, Z),$$

donde la masa del isótopo está dada por

$$m(A, Z) = (A - Z)m_n + Zm_p + Zm_e - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(N - Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{1/2}},$$

de dicha expresión podemos considerar a Z y A como variables independientes y por lo tanto N queda fija una vez que se conocen los valores de las dos anteriores. La diferencial desde otro punto de vista es

$$\delta B = \frac{\partial B}{\partial Z}\delta Z + \frac{\partial B}{\partial A}\delta A,$$

donde $\delta A = 4$ y $\delta Z = 2$. Si tomamos las parciales para la nueva expresión de la energía de amarre y usando $N = A - Z$

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{4A} - \frac{\delta}{A^{1/2}},$$

tenemos

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -a_c \frac{2Z}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A - 2Z)}{A},$$

$$\frac{\partial B}{\partial A} = a_v - \frac{2}{3}\frac{a_s}{A^{1/3}} + \frac{1}{3}\frac{a_c Z^2}{A^{4/3}} - \frac{1}{4}a_a \left(1 - \frac{4Z^2}{A^2}\right),$$

donde hemos omitido hacer la derivada del término asociado al emparejamiento (asociado a si el número de protones o neutrones es par o impar) debido que la derivada respecto a Z o A no es nada trivial, vean la definición para convencerse, además uno podría pensar ingenuamente que no tendrá mucha influencia debido a que cambia ligeramente; por tanto la energía $E = B(\alpha) - \delta B$ se escribe de la siguiente manera

$$E = B(\alpha) + \frac{4a_c Z}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{Z}{3A}\right) - a_a \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + \frac{8}{3}\frac{a_s}{A^{1/3}} - 4a_v.$$

Problema 7. Sección eficaz
Consideremos la reacción en la cual isótopos de deuterio ^2H o denotados por d son lanzados contra un blanco de

tritio (^3H) de tal modo que se estudia la siguiente reacción $^3H(d,n)^4He$, podemos calcular la cantidad de isótopos de tritio $N_{^3H}$ dispersados durante esta reacción mediante la siguiente relación $N_{^3H} = n_{^3H}A_{^3H}$, donde $n_{^3H}$ es la densidad de isótopos de tritio por unidad de área y $A_{^3H}$ es el área asociada al blanco de tritio, por otro lado la cantidad de neutrones dispersados N_n mediante la colisión estará dada por

$$N_n = n_b N_a \delta\sigma,$$

donde N_a corresponde al número de isótopos de deuterio que inciden en el blanco; cabe destacar que en la práctica, solo una fracción de todas las posibles reacciones pueden ser detectadas, si un detector de área A_D es colocado a una distancia r y a un ángulo θ de la dirección del haz, tal que cubre un ángulo sólido igual a $\delta\Omega = A_D/r^2$ entonces

$$\delta\sigma = \frac{d\sigma(E,\theta)}{d\Omega}\delta\Omega.$$

Si tomamos la derivada respecto al tiempo de la relación que obtuvimos para N_n la única variable que depende del tiempo es N_a lo que básicamente nos daría el flujo de ^2H por unidad de tiempo en el haz, para obtener dicho valor es necesario usar la corriente de ^2H que se aplica al blanco, esto es $I_d = \dot{N}_a e$. En resumen tenemos las siguiente relación

$$\dot{N}_n = n_b \dot{N}_a \frac{d\sigma}{d\Omega}\frac{A_D}{r^2}$$

y sustituyendo el valor que acabamos de hallar para $\dot{N}_a$,

$$\dot{N}_n = n_b \frac{d\sigma}{d\Omega}\frac{A_D}{r^2}\frac{I_d}{e},$$

finalmente para encontrar el valor de n_b en términos de μ_b la cual es la densidad de masa por unidad de área o densidad de ocupación de masa del tritio consideremos la definición $\mu_b = m_b/A_t$, donde A_t es el área del blanco que contiene tritio, sustituyendo tenemos

$$n_b = \frac{N_b \mu_b}{m_b} = \frac{N_A \mu_b}{M_b},$$

donde N_A y M_b son el número de Avogadro y la masa molar del tritio, respectivamente, noten que en el último paso de la ecuación anterior tanto N_b como m_b tienen son proporcionales al número de moles tal que se cancelan. Sustituyendo la última relación y los valores dados por el problema

$$\dot{N}_n = \frac{d\sigma}{d\Omega}\frac{A_D}{r^2}\frac{I_d}{e}\frac{N_A \mu_b}{M_b},$$

donde $d\sigma/d\Omega = 13\ mb/sr = 13 \times 10^{-3} \times 10^{-28}\ m^2/sr$, $A_D = 0.2\ m^2$, $r^2 = 9\ m^2$, $I_d/e = 2 \times 10^{-6} A/1.602 \times 10^{-19} C$, $N_A = 6.022 \times 10^{23}\ partículas/mol$, $\mu_b = 0.2 \times 10^{-5}\ g/m^2$, y la masa molar $M_b = 3.021\ g/mol$ para el tritio.

$$\therefore \dot{N}_n = 1438\ neutrones/s.$$

Si se inclina el área del blanco un ángulo θ respecto a la dirección perpendicular del haz de isótopos de deuterio entonces el área efectiva para la colisión se ve modificada, tal que ahora el área perpendicular a la dirección del haz será $A_t cos(\theta)$, en pocas palabras el nuevo resultado será lo obtenido en el inciso anterior multiplicado por $1/cos(10°)$ (la cantidad de neutrones por segundo se incrementa aproximadamente 1.5%

$$\therefore \dot{N}_n = 1460\ neutrones/s.$$

Problema 8. Longitud de absorción

Antes de comenzar el problema se utilizará de nuevo la siguiente notación a para el tipo de partícula incidente y b para la partícula "blanco". De la ecuación de sección eficaz

$$\sigma_b = \frac{\dot{N}}{\Phi_a \cdot N_b},$$

podemos reinterpretar de la siguiente manera: $\dot{N}$ es la razón de cambio de las reacciones que se generan dentro del material pero a su vez es la razón de cambio con la cual las partículas incidentes disminuyen su número, tal que $\dot{N} = -\dot{N}_a$, si tomamos un intervalo de tiempo finito y recordamos que

$$\Phi_a = n_a v_a = n_a \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

donde v_a es el módulo de la velocidad promedio de las partículas incidentes sobre el material (una aproximación razonable), entonces tenemos la siguiente igualdad

$$-\frac{\Delta N_a}{\Delta t} = \sigma_b n_a \frac{\Delta x}{\Delta t} N_b,$$

, podemos cancelar los intervalos de tiempo y considerar δx infinitesimal, por otro lado $n_a = N_a/V$ y $N_b = n_b V$, tal que obtenemos la siguiente relación

$$\frac{dN_a/dx}{N_a} = -\sigma_b n_b.$$

Realizando la integral sobre x' (cambiamos el nombre de la variable de integración) de 0 a x (en $x = 0$ $N_a(x = 0) = N_{a,0}$) obtenemos lo siguiente

$$N_a(x) = N_{a,0} e^{-\sigma_b n_b x},$$

para que la muestra se reduzca a $1/e$ veces su valor inicial, tenemos la siguiente condición

$$N_a(\lambda) = \frac{1}{e} N_{a,0} = N_{a,0} e^{-\sigma_b n_b \lambda},$$

si llamo λ a el valor de la variable x en el punto en el que esto sucede, esto implica que

$$e^{-1} = e^{-\sigma_b n_b \lambda},$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{\sigma_b n_b}.$$

Finalmente el número de partículas N_a del haz decrece con la distancia x proporcional a $e^{-x/\lambda}$, donde $\lambda = 1/\sigma_b n_b$.
Una relación útil será la siguiente,

$$n_b = \frac{N_b}{V} = \rho_b \frac{N_A \cdot n_{mol,b}}{M_b \cdot n_{mol,b}} = \rho_b \frac{N_A}{M_b},$$

donde $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ *partículas/mol* es el número de Avogadro, ρ_b la densidad del isótopo blanco y M_b la masa molar del isótopo blanco.
a) Para el caso de neutrones en Cadmio

$$n_{Cd} = \rho_{Cd} \frac{N_A}{M_{Cd}},$$

donde la masa molar del Cadmio es $M_{Cd} = 112.40\ g/mol$, $\rho_{Cd} = 8650\ kg/m$ y $\sigma_{Cd}(25\ MeV) = 24506\ barn$.

$$\therefore \lambda_{n,Cd} = 8.8\ \mu m.$$

b) Para fotones en plomo tenemos $\rho_{Pb} = 11.3 g/cm^3$, $M_{Pb} = 207.2\ g/mol$ y $\sigma_{Pb}(2\ MeV) = 15.7\ barn/átomo$.
c)Primero usemos el hecho de que las interacciones con los núcleos se pueden despreciar (después discutirán en clase acerca del acoplamiento de un neutrino o antineutrino con un núcleo y verán que la sección eficaz para este proceso es realmente muy pequeña), por otro lado se da la información de que $\frac{Z}{A} = 0.5$, por otro lado, una buena aproximación para obtener la masa m de un cierto volumen V de la Tierra es solo considerar la contribución de los nucleones (esto tiene sentido porque la masa del electrón es casi 2000 veces más pequeña que la de un nucleón (aproximadamente 0.511 MeV y 939MeV, respectivamente), de tal forma que $m = N_N m_N = 2N_e m_N$, donde N_n se refiere al nucleón, m_N a la masa de nucleón y hemos usado el hecho de que el número de electrones es dos veces el número de nucleones, si dividimos entre V, tenemos la siguiente relación

$$\rho_{tierra} = \frac{2N_e m_N}{V} = 2n_e m_N.$$

Finalmente $n_e = \rho_{tierra}/2m_N$, y sustituyendo en la relación que encontramos para la longitud de absorción tenemos

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_e n_e} = \frac{2m_N}{\sigma_e \rho_{tierra}} = \frac{2(1.674 \times 10^{-24}\ g)}{10^{-19} \times 10^{-24}\ cm^2 \times 5\ g/cm^3} = 6.696 \times 10^{18}\ cm,$$

$$\therefore \lambda = 6.69 \times 10^{16}\ m$$