Física Nuclear
Solución 2

Autor: *Luis Hernández*
luis.hernandez@ciencias.unam.mx

9 de octubre del 2018

Solución propuesta a la tarea 2, cualquier comentario u observación es bienvenido al correo adjunto.

Problema 1. Cinématica de la dispersión electromagnética
Consideremos la dispersión de un haz de electrones con energía E_e con un núcleo pesado, con la finalidad de calcular el valor máximo de momento transferido usemos la conservación de cuadrimomento en la dispersión elástica con un núcleo N

$$e^- + N \to e^- + N,$$

si denotamos los cuadrimomentos del electrón incidente p_e^μ y dispersado $p_e'^\mu$ (índices griegos como μ representan vectores de una entrada temporal y tres espaciales mientras que e y N solo etiquetan a que partícula se refiere el cuadrivector), de tal manera que la transferencia de cuadrimomento está dada por $p_e'^\mu - p_e^\mu$, consideremos

$$(p_e'^\mu - p_e^\mu)^2 = 2m_e^2 - 2E_eE_e' + 2\vec{p_e}\cdot\vec{p}_e',$$

dicha relación se obtiene de desarrollar el cuadrado y usar que $p^\mu p_\mu = m^2$. Por otro lado si implementamos la conservación de cuadrimomento $p_e^\mu + p_N^\mu = p_e'^\mu + p_N'^\mu$, elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación y desarrollando obtenemos la siguiente relación

$$p_e^\mu p_{N\mu} = p_e'^\mu p_{N\mu}' = p_e'^\mu(p_{e\mu} + p_{N\mu} - p_{e\mu}'),$$

donde usan $p_e^\mu p_{e\mu} = m_e^2$ y $p_N^\mu p_{N\mu} = m_N^2$ (se tienen igualdades similares para los cuadrimomentos primados).
Por otro lado, sabemos que la conservación de cuadrimomento se tiene que cumplir en cualquier sistema de referencia, consideremos el sistema en el cual el núcleo antes de ser dispersado se encuentra en reposo, entonces $p_N^\mu = (M_N, \vec{0})$, sustituyendo este cuadrivector en la relación anterior obtenemos la siguiente igualdad

$$E_em_N = E_e'E_e - \vec{p_e}\cdot\vec{p}_e' + E_e'm_N - m_e^2,$$

o visto desde otro punto de vista

$$\vec{p_e}\cdot\vec{p}_e' = E_e'E_e + E_e'm_N - E_em_N - m_e^2,$$

si sustituimos este valor en la relación que encontramos para $p_e'^\mu - p_e^\mu$ el resultado es el siguiente

$$(p_e'^\mu - p_e^\mu)^2 = 2(E_e' - E_e)m_N,$$

por otro lado $(p_e'^\mu - p_e^\mu)^2 = (E_e' - E_e)^2 - (\vec{p}_e' - \vec{p}_e)^2$, con esto ya es claro que el momento lineal transferido (la cantidad que queremos calcular maximizar) está dado por la siguiente relación

$$(\vec{p}_e' - \vec{p}_e)^2 = (E_e' - E_e)^2 - 2(E_e' - E_e)m_N = (E_e' - E_e)(E_e' - E_e - 2m_N).$$

A partir de aquí pensemos en el sistema físico que estamos estudiando, el electrón que incide sobre el núcleo en reposo le tranfiere la mayor cantidad de momento justo cuando la energía del electrón dispersado E_e' es mínima (esto quiere decir que la energía restante se la lleva el núcleo dispersado si consideramos una colisión elástica), por otro lado, es sencillo mostrar que la energía del electrón dispersado está dada por la siguiente expresión

$$E_e' = E_e\left((1 + \frac{E_e}{m_N}(1 - cos(\theta))\right)^{-1},$$

si queremos minimizar esta expresión entonces la elección del ángulo es $\theta = 180°$, tal que

$$E'_{e,min} = \frac{E_e}{1 + \frac{2E_e}{m_N}},$$

usando este valor en la relación que encontramos para el momento transferido obtenemos

$$Q^2_{max} = (p'^{\mu}_e - p^{\mu}_e)^2 = \frac{4E_e^2 m_N}{m_N^2 + 2E_e}.$$

Para calcular el momento y la energía del núcleo disperso hacia atrás consideremos la conservación de energía en el sistema de referencia en el cual el núcleo se encuentra en reposo antes de la dispersión, entonces se cumple $m_n + E_e = E'_N + E'_e$, resolviendo para E'_N (con el ángulo $\theta = 180°$) y usando la relación que tenemos para E'_e se obtiene

$$\therefore E'_N = m_N + \frac{2E_e^2}{m_N^2 + 2E_e}.$$

Para el cálculo de la magnitud de momento lineal usemos la relación de energía de Einstein en unidades naturales $E'^2_N = m_N^2 + |\vec{p}'_N|^2$, usando el resultado anterior tenemos

$$|\vec{p}'_N| = \sqrt{\frac{4E_e^2 m_N}{m_N^2 + 2E_e} + \frac{4E_e^4}{(m_N^2 + 2E_e)^2}}$$

Finalmente para la dispersión elástica de fotones con la misma energía consideremos la transferencia de cuadrimomento se puede repetir un procedimiento análogo usando la conservación de cuadrimomento, el paso base radica en el hecho de que es posible volver a usar la relación

$$E'_\gamma = E_\gamma \left((1 + \frac{E_\gamma}{m_N}(1 - cos(\theta) \right)^{-1},$$

para la energía del fotón dispersado, esto viene del hecho que para realizar la derivación se usa que $E \gg m$, por lo tanto obtendremos expresiones similares solo cambiando la energía del electrón E_e por la del fotón E_γ, además cabe señalar que la masa del electrón m_e no es esencial en ninguna parte del cálculo (incluso si regresamos a la primera parte es posible observar como se cancela desde el inicio).

Problema 2. Longitud de onda

Consideremos la dispersión elástica de una partícula α con un núcleo de ^{56}Fe, uno podría pensar que dicha dispersión produce una "sombra" que no necesariamente tiene forma circular pero que podría aproximarse para fines prácticos como un círculo de radio $r_c = r_\alpha + r_{Fe}$, por otro lado, es posible realizar una aproximación para el cálculo del radio de un núcleo r_n a partir de la siguiente relación $r_n = r_0 A^{1/3}$, donde $r_0 = 1.2\ fm$ y A es el número de masa del núcleo.

$$r_c = (4^{1/3} + 56^{1/3})1.2\ fm$$

Por otro lado la longitud de onda de la partícula α incidente se pude calcular a través de la relación de De Broglie $\lambda_\alpha = 2\pi/p_\alpha$ (en unidades naturales $\hbar = 1$), donde p es el momento de la partícula, usando la relación de energía de Einstein en unidades naturales $E_\alpha = \sqrt{p_\alpha^2 + m_\alpha^2} = m_\alpha + K_\alpha$, para la última igualdad separamos la energía total en la energía en reposo (la masa) más la cinética. Despejando para el momento tenemos

$$p_\alpha = \sqrt{(m_\alpha + K_\alpha)^2 - m_\alpha^2},$$

con $m_\alpha = 3727.3\ MeV$, tal que $p_\alpha = 869.2\ MeV$. Para recuperar λ_α en unidades de SI multiplicamos por $\hbar c = 0.197\ GeV \cdot fm$. Por lo tanto, tenemos

$$\lambda_\alpha = \frac{2\pi\hbar c}{p_\alpha} = \frac{2\pi(197\ MeV \cdot fm)}{869.2\ MeV} = 1.42\ fm.$$

Finalmente el primer mínimo está dado por la siguiente relación

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{2r_c} = 0.133\ = 7.64°.$$

Problema 3. Dispersión de Rutherford

La difencial de la sección eficaz de Rutherford solo considera la parte electromagnética de la dispersión, en general

buscamos encontrar desviaciones de la descripción que ofrece esta cantidad, es decir, si consideramos la dispersión de partículas α con ^{197}Au con la energía indicada en el enunciado y encontramos que es posible un ángulo en el cual estas partículas se acerquen a una distancia tal que la influencia de la fuerza nuclear fuerte sea significativa entonces tendremos desviaciones para la descripción que da esta sección eficaz.
Consideremos la dispersión de Rutherford, en este caso solo la fuerza electroestática es la única interacción entre las partículas. Lejos del potencial sabemos que la energía de las partículas incidentes no es afectada por el potencial de tal manera que la energía inicial está dada por la energía cinética K,

$$E_i = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 = K,$$

para el caso final en el cual la partícula llega a la distancia mínima aparece la contribución a la energía que viene de la interacción electromagnética con el núcleo, esto es la energía potencial, entonces la energía final en el punto más cercano es igual a

$$E_f = \frac{1}{2} m_\alpha v_{min}^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha Q_{Au}}{d},$$

antes de continuar cabe resaltar que para un potencial central se conserva la energía y el momento angular. Para momento angular tenemos $l_i = l_f$ lo que implica que $m_\alpha v_0 s = m_{\alpha v_{min} d}$. Sustituyendo $K = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$, y despejando para d (la distancia mínima que alcanza la partícula α en función de su energía cinética) tenemos

$$d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha Q_{Au}}{2K} + \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha Q_{Au}}{2K} \right)^2 + s^2},$$

donde s es el parámetro de impacto en la dispersión de Rutherford

$$s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha Q_{Au}}{m v_0^2} cot \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha Q_{Au}}{2K} cot \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

sustituyendo en d tenemos

$$d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha Q_{Au}}{2K} \left(1 + \frac{1}{sen\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right),$$

esta cantidad depende del ángulo justo como queriamos y ahora tenemos que buscar como obtener la distancia mínima para compararla con la distancia a la que se podrían observar efectos de la interacción fuerte, este ángulo es $\theta = 180°$. Por lo tanto

$$d_{min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha Q_{Au}}{K},$$

sustituyendo los valores $q_\alpha = 2e$, $Q_{Au} = 79e$ y $K = 6\ MeV$,

$$\therefore d_{min} = 38.5\ fm.$$

Ahora comparemos la escala de distancia a la que actua la fuerza nuclear $R = R_\alpha + R_{Au}$, dicha distancia corresponde al impacto entre ambas partículas, por otro lado usando la relación para el cálculo de radios de un núcleo $R_N = r_0 A^{1/3}$, con $r_0 = 1.2\ fm$, sustituyendo obtenemos $R = 1.21(4^{1/3} + 197^{1/3})\ fm = 9\ fm$. Por lo que podemos concluir que el proceso será descrito de forma adecuada con la aproximación de Rutherford para la sección eficaz difencial debido a que la partícula α no alcanzará a colisionar con el núcleo del ^{197}Au, y por lo tanto no habrá desviaciones debido a la interacción fuerte.

Problema 4. Factor de forma
Podemos realizar el cálculo de la longitud de onda de De Broglie asociada al electrón $\lambda = h/p_e$, con $p_e = \sqrt{E_e^2 + m_e^2} = \sqrt{(K_e + m_e)^2 + m_e^e} = \sqrt{2K_e m_e + K_e^2}$, donde K_e es la energía cinética del electrón. Podemos hacer la aproximación $K_e \gg m_e$ de tal manera que

$$\lambda_e = \frac{2\pi\hbar}{K_e} = \lambda_\alpha = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2K_\alpha m_\alpha + K_\alpha^2}},$$

donde hemos usado la suposición de que la longitud de onda del electrón es igual a la de la partícula α, usando la masa de la partícula α y su energía cinética dada podemos encontrar el valor de $K_e \approx 211.6\ MeV$. Por otro lado, a este rango de energía es necesario considerar los factores de forma en la sección eficaz asociada al proceso de dispersión, de hecho si se usa el factor de forma para una esfera uniforme (considerando una buena aproximación para modelar a los núcleos de oro) se tiene

$$F(Q) = 3 \frac{sen(\alpha) - \alpha cos(\alpha)}{\alpha^3},$$

con $\alpha = QR/\hbar$, donde $R \approx 7\ fm$ es el radio del núcleo de oro y Q_{max} es el valor máximo de cuadrimomento transferido, del problema 1 sabemos que

$$Q^2 = 2m_e^2 + 2(E_e E'_e - \vec{p}'_e \cdot \vec{p}_e) = 2|\vec{p}_e|(1 - cos(\theta)),$$

donde hicimos dos supociones importantes para llegar a la última igualdad, la primera m_e es despreciable entonces $E_e = |\vec{p}_e| = K_e$ y la segunda es que si despreciamos el retroceso del núcleo dispersado tenemos por conservación de la energía en el sistema en el que el núcleo está en reposo $m_N + E_e = m_N + E'_e$ tal que $E_e = E'_e$. Con esta información ya podemos calcular $Q_{max} = 2K_e = 423.3\ MeV$ (sabemos de antemano que Q_{max} se obtiene cuando $\theta = 180°$). Esto a su vez nos permite hacer el cálculo de

$$\alpha_{max} = \frac{(423.33\ MeV)(7\ fm)}{197\ MeV \cdot fm} \approx 15,$$

de tal manera que ya sabemos el rango en el cual se tienen que buscar los mínimos asociados a $F(Q)$. Lo que básicamente se traduce a encontrar los ceros del numerador $sen(\alpha) - \alpha cos(\alpha)$, la condición para encontrar los ceros básicamente se traduce a encontrar los ceros de la función $tan(\alpha) - \alpha$ en el dominio de α entre 0 y 15, si uno gráfica dicha función en este rango y cuenta las raíces encuentra que hay 4 puntos (omitiendo el caso $\alpha = 0$) los cuales corresponden a los mínimos y máximos del factor de forma.

Problema 5. Dispersión elástica de rayos X

Los rayos X que inciden sobre una muestra de helio líquido puede ser dispersados ya se por los electrones o por las partículas α. Por otro lado, la interacción con la nube electronica es más probable debido a que los electrones oscilan en el campo de los rayos X a una frecuencia mayor que los núcleos de helio debido a la diferencia de masas $m_N \gg m_e$, de tal manera que para el primer portador uno puede estudiar el efecto Compton debido a la dispersión entre un fotón y un electrón. Por otro lado, los factores de forma que se pueden ajustar a la sección eficaz del proceso dependen de como es el comportamiento de los electrones a medida que se propagan en la nube electrónica, en principio podemos pensar de forma intuitiva que será decreciente, por lo cual sería adecuado ajustar como primera aproximación un factor de forma como el del dipolo o uno que caiga como una distribución Gaussiana.

Problema 6. Dispersión de Compton

Consideremos la dispersión de rayos γ con electrones, de la dispersión Compton sabemos que la energía de los rayos γ después de dispersarse está dada por la siguiente relación

$$K_{\gamma'} = \frac{K_\gamma}{1 + \frac{K_\gamma}{m_e}(1 - cos(\theta_\gamma))},$$

por otro lado es posible calcular la energía que cinética que obtienen los electrones a partir del cambio en las energías cinéticas del rayo γ incidente y el dispersado, esto es $K_{e,d} = K_\gamma - K_{\gamma'}$, donde la energía cinética $K_{e,d}$ del electrón dispersado está dada por la relación

$$K_{e,d} = \frac{E_\gamma^2(1 - cos(\theta_\gamma))}{m_e + E_\gamma(1 - cos(\theta_\gamma)},$$

por lo tanto el momento transferido va de acuerdo a la siguiente relación

$$p_e = \sqrt{2m_e K_{e,d} + K_{e,d}^2}.$$

Dicho lo anterior, podemos relacionar la energía de enlace E_b de la siguiente manera $E_b = K_e + E_p$ con K_e la energía cinética del electrón ligado y E_p su energía potencial. Ahora usemos el Teorema del Virial, el cual permite establecer la siguiente relación $2K_{e,l} = -E_p$, esto es válido ya que estas cantidades son valores que coinciden con los valores del promedio temporal de la energía cinética y potencial del sistema, por tanto $E_b = -K_e = -24\ eV$, vale la pena hacer notar que hasta el momento hemos hablado de dos energías cinéticas diferentes, $K_{e,d}$ la cual es la energía cinética transferida al electrón después de la dispersión con el rayo γ y la segunda K_e que corresponde a la energía cinética del electrón ligado. Además como hay una variación en la energía es posible obtener una variación en el momento del electrón de Compton la cual será $\Delta p = \pm 5 \times 10^{-3} MeV$. Por otro lado podemos relacionar el ángulo máximo del electrón con la variación del momento a través de la siguiente relación

$$\Delta p = 2p_e sen\left(\frac{\theta_{e,max}}{2}\right),$$

despejando para el ángulo máximo

$$\theta_{e,max} = 2arcsen\left(\frac{\Delta p}{2p_e}\right),$$

finalmente obtenemos la extensión angular al sustituir los dos valores de Δp en $\theta_{e,max}$, tal que se obtiene la siguiente relación

$$\Delta\theta = 2arcsen\left(\frac{\Delta p}{2\sqrt{2m_e K_{e,d} + K_{e,d}^2}}\right),$$

, para obtener la extensión angular es necesario sustituir tanto el valor de $\theta_\gamma = 30°$ como el valor de la energía E_γ, como menciona al inicio el problema los rayos γ vienen de la aniquilación del positronio, por lo tanto deben tener una energía fija de $E_\gamma = 0.511\ MeV$, sustituyendo los valores obtenemos $\Delta\theta \approx \pm 1.1°$.

Problema 7. Radio del electrón
Conocemos el factor de forma asociado a una esfera homogenea, tomando esta aproximación para el electrón entonces el factor de forma se puede escribir de acuerdo a la siguiente relación

$$F(Q^2) = 3\frac{sen(\alpha) - \alpha cos(\alpha)}{\alpha^3},$$

donde $\alpha = Qr_e/\hbar$, por otro lado, podemos suponer que $\alpha \approx 1$, si esto sucede, entonces podemos hallar una relación para el momento transferido

$$Q \approx \frac{\hbar}{r_e},$$

nuevamente para tener las unidades correctas en el SI podemos insertar un valor de c, tal que

$$Q \approx \frac{\hbar c}{r_e} = \frac{0.197 GeV \cdot fm}{10^{-3} fm} = 197\ GeV.$$

A partir del momento transferido Q es posible hallar la energía del centro de masa s, tal que $\sqrt{s} = 197\ GeV$, como esta energía es calculada en el centro de masa significa que cada haz debe tener un aproximado de 100 GeV para la colisión. Por otro lado, es posible calcular la energía para un experimento de blanco fijo, la energía necesaria del electrón incidente E_e está dada por la siguiente relación:

$$\sqrt{s} = \sqrt{2m_e^2 + 2m_e E_e},$$

despejando para E_e tenemos

$$E_e = \frac{s}{2m_e} + m_e \approx 3.8 \times 10^7 GeV.$$

Problema 8. Dispersión electrón-pión
Consideremos la fórmula de Rosenbluth para el proceso de dispersión

$$e^-\pi^0 \to e^-\pi^0,$$

de tal manera que la sección eficaz para la dispersión elástica de este proceso está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}((e^-\pi \to e^-\pi)) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\left(\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1+\tau} + 2\tau G_M^2(Q^2)\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right),$$

sin embargo, debido a que el pión tiene espín $s = 0$ el factor de forma magnético $G_M^2(Q^2) = 0$, de tal manera que la relación anterior se reduce a la siguiente expresión

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}((e^-\pi \to e^-\pi)) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} G_{E,\pi}^2(Q^2),$$

donde $G_{E,\pi}^2(Q^2) = G_E^2(Q^2)/1 + \tau$, $\tau = Q^2/4M_\pi^2 c^2$. Donde el valor de la sección eficaz de Mott es el siguiente

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford}\left(1 - \beta^2 sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\frac{E'}{E}.$$

Por otro lado podemos calcular el factor de forma del pión usando la aproximación a primer orden de Q^2,

$$F(Q^2) = 1 - \frac{Q^2}{6\hbar^2} < r^2 >= G_E(Q^2)$$

como $1 \gg Q^2$, la contribución de τ tiende a cero de tal manera que en este límite se cumple $G_{E,\pi}(Q^2) = G_E(Q^2)$, si reinsertamos el valor de $< r^2 >= 0.44 fm^2$ y un factor de $c^2 = 1$ dividiendo (noten que el factor de forma tiene que ser adimensional de tal manera que insertar este término simplemente me da las unidades correctas y la escala adecuada en el SI). Finalmente

$$G^2_{E,\pi}(Q^2) = \left(1 - \frac{Q^2}{6(\hbar c)^2} < r^2 >\right)^2 \approx 1 - \frac{Q^2}{3(\hbar c)^2} < r^2 >= 1 - 3.78\frac{Q^2}{GeV^2},$$

donde cabe destacar que Q^2 se toma con unidades de GeV^2.