

QFT: Regularización Dimensional

Eduardo Esquivel Ramírez

June 6, 2018

Resumen

En este texto se tradujeron las notas "Quantum Field Theory" de Robert Casalbuoni, de las paginas 180 a 187 donde se trata el tema de la regularización dimensional en la Teoría Cuántica de Campos, agregando algunos desarrollos y explicaciones que no se encontraban en las notas originales.

1 Introducción

A lo largo del curso hemos visto muchos ejemplos donde las integrales que son representadas por algunos diagramas de Feynman divergen, por ejemplo algunas burbujas de vacío. El problema de las divergencias es un problema serio y para darle algún sentido a la teoría debemos de encontrar una forma de definir las integrales con el propósito de hacer las integrales finitas. Esto se puede hacer de varias formas convenientes, por ejemplo, hacer un corte en el ultravioleta o haciendo una *regularización dimensional*. De cualquier manera queremos que la teoría no dependa de la forma en que redefinimos las integrales, queremos más bien encontrar un significado física en el proceso de regularización que escojamos.

Para empezar, vamos a ilustrar algunos resultados en general de la renormalización. Si consideramos solamente las teorías de campos escalares, de fermiones y partículas sin masa de spín 1 (como el foton), no es difícil construir un algoritmo que nos permite evaluar en rangos de radiación ultravioleta (es decir, para momentos grandes) la divergencia de cualquier diagrama de Feynman. En el caso de la auto energía del electrón Fig. 1 a) y 1 b).

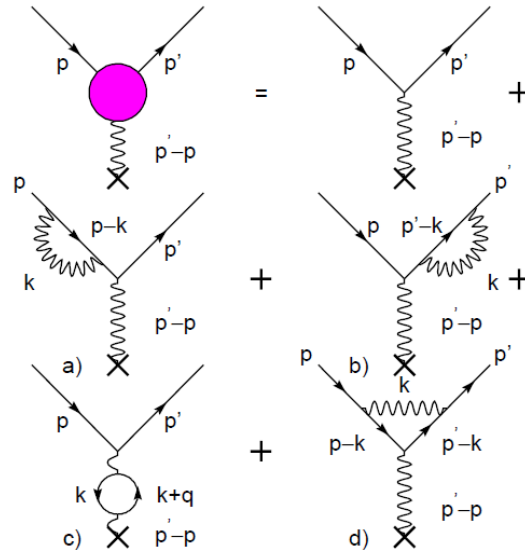


Figura. 1: El diagrama de Feynman de la dispersión de Coulomb en el tercer orden de la carga y el primer orden el campo externo.

se tiene la integración sobre el cuadrimomento p y tiene un comportamiento del integrando, que viene de los propagadores como $1/p^3$, que nos da una divergencia lineal (resulta que la divergencia únicamente es logarítmica). Veamos por qué:

Se tiene que en la Fig. 1a) la amplitud está dada por:

$$\mathcal{M}_a = \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)A_\mu^{ext}(p' - p) \frac{i}{\hat{p} - m + i\epsilon} [ie^2\Sigma(p)]u(p) \quad (1)$$

Donde

$$ie^2\Sigma(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie\gamma_\mu) \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \frac{i}{\hat{p} - \hat{k} - m + i\epsilon} (-ie\gamma_\nu) = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \quad (2)$$

o lo que es lo mismo

$$\Sigma(p) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad (3)$$

Para momentos grandes de k , el integrando se comporta como $1/k^3$ y la integral diverge linealmente. De estas observaciones podemos ver que solo las densidad lagrangianas que contengan monomios en los campos con dimensiones de masa menores o igual al número de dimensiones espacio temporales tienen un número finito de diagramas divergentes. Resulta que estas teorías son renormalizables. Las dimensiones de masa de los campos pueden ser fácilmente evaluados a partir de la observacion de que la acción carece de dimensiones en nuestras unidades ($\hbar = 1$). Por lo tanto, en n dimensiones espacio-temporales, la densidad lagrangiana esta definida como:

$$\int d^n x \mathcal{L} \quad (4)$$

tiene una masa de dimensión n . Observando los términos cinéticos de los campos bosónicos (es decir los términos con dos derivadas) y de los campos fermiónicos (una derivada), se observa que:

$$\dim[\phi] = \dim[A_\mu] = \frac{n}{2} - 1, \dim[\psi] = \frac{n-1}{2} \quad (5)$$

En particular en 4 dimensiones los campos bosónicos tiene dimensión 1 y los fermiónicos $3/2$. Luego entonces, vemos que la electrodinámica cuántica es renormalizable, ya que todos los términos de la densidad lagrangiana tienen dimensiones igual o menores a 4:

$$\dim[\bar{\psi}\psi] = 3, \dim[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu] = 4, \dim[(\partial^\mu A_\mu)^2] = 4 \quad (6)$$

La condición en las dimensiones de los operadores que aparecen en el lagrangiano se pueden traducir a una condición sobre las constantes de acoplamiento. De hecho, cada monomio \mathcal{O}_i aparecerá multiplicado por una constante de acoplamiento g_i

$$\mathcal{L} = \sum_i g_i \mathcal{O}_i \quad (7)$$

entonces

$$\dim[g_i] = 4 - \dim[\mathcal{O}_i] \quad (8)$$

La renormalización requiere que

$$\dim[\mathcal{O}_i] \leq 4 \quad (9)$$

de donde se encuentra que

$$\dim[g_i] \geq 0 \quad (10)$$

Esto es que las constantes de acoplamiento deben tener dimensiones positivas en la masa. En la electrodinámica cuántica las únicas constantes de acoplamiento son las de la masa del electrón y la de la carga eléctrica, ambas sin dimensiones. Como un ejemplo consideremos un solo campo escalar libre. La densidad lagrangiana más general que se puede renormalizar esta caracterizada por dos parámetros:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \rho \phi^3 - \lambda \phi^4 \quad (11)$$

Aquí ρ tiene dimension 1 y λ no tiene dimensiones. Vemos que los modelos σ lineales son teorías renormalizables.

Dados estos hechos tratemos de entender lo que diferencia a una teoría renormalizable de una que no lo es. En el caso renormalizable, si nosotros escribimos la densidad lagrangiana más general, los únicos diagramas divergentes que aparecerán son los correspondientes a los procesos descritos por los operadores que aparecen en el lagrangiano, luego entonces, añadiendo a \mathcal{L} un término de la densidad lagrangiana que cancele las divergencias:

$$\mathcal{L}_{c.t} = \sum_i \delta g_i \mathcal{O}_i \quad (12)$$

donde el subíndice significa "counter term" por su traducción al inglés. Nosotros podemos elegir δg_i de tal manera que cancele término a término las divergencias. La teoría depende en un número finito de parámetros arbitrarios igual al número de parámetros g_i . Luego entonces la teoría es una teoría predictiva.

En el caso no renormalizable, el número de diagramas divergentes crece con el orden de perturbación. En cada orden tenemos que introducir nuevos términos que cancelen las divergencias ("counter terms"), eso nos va a dar una estructura de operador diferente a la que teníamos originalmente. Al final, la teoría dependerá en un número infinito de parámetros arbitrarios. Como un ejemplo, consideremos la teoría fermiónica con una interacción del tipo $(\bar{\psi}\psi)^2$. Como este término tiene dimensión 6, el término de acoplamiento tiene dimensión -2

$$\mathcal{L}_{int} = -g_2 (\bar{\psi}\psi)^2 \quad (13)$$

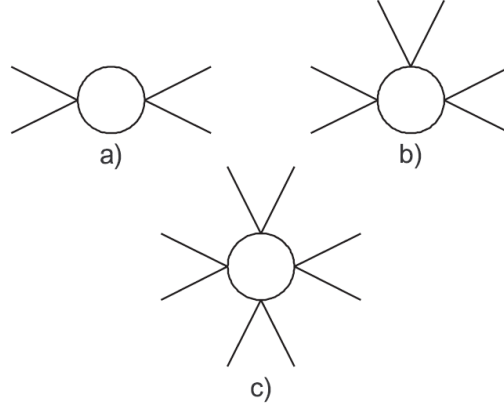


Figura. 2: Diagramas divergentes que surgen de la interacción $(\bar{\psi}\psi)^2$

Con un solo loop la teoría da como diagramas divergentes los que aparecen en la figura 2. La divergencia del primer diagrama se puede cancelar con un término de la forma:

$$-\delta g_2 (\bar{\psi}\psi)^2 \quad (14)$$

Los otros dos términos que se necesitan para cancelar todo es:

$$\delta g_3 (\bar{\psi}\psi)^3 + \delta g_4 (\bar{\psi}\psi)^4 \quad (15)$$

Sin embargo estos términos originan nuevos diagramas de un lazo divergentes, por ejemplo los que se presentan en la figura 3. El primer diagrama modifica el término que ya habíamos introducido $(\bar{\psi}\psi)^4$, pero el segundo necesita un nuevo término de cancelación

$$\delta g_5 (\bar{\psi}\psi)^5 \quad (16)$$

Este procedimiento nunca terminaría, siempre aparecerían nuevos términos que divergen con cada corrección que hacemos.

Los requerimientos de la renormalización introducen restricciones a las teorías de campo, de cualquier forma uno puede pensar que este requerimiento es demasiado técnico y uno puede imaginar otras formas de darle significado a los lagrangianos que no satisfacen esta condición. Supongamos que estamos tratando de darle un significado a un lagrangiano que no es renormalizable,

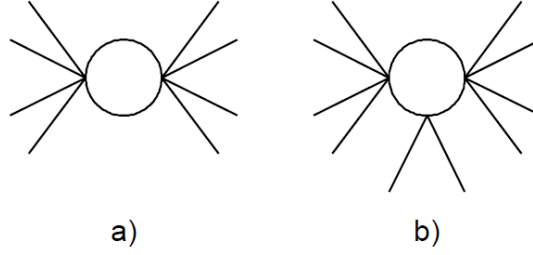


Figura. 3: Diagramas divergentes de las interacciones $(\bar{\psi}\psi)^2$ y $(\bar{\psi}\psi)^4$

sencillamente buscando que ese lagrangiano nos de una teoría consistente en cualquiera nivel energético. Mostraremos que esto no sucede. Consideremos de nuevo una teoría con una interacción de 4 fermiones. Como $\dim g_2 = -2$, si consideramos el proceso: $\psi + \psi \rightarrow \psi + \psi$ en el límite de altas energías (donde nosotros podemos despreciar todas las masas), en la dimension base nosotros vemos que la sección transversal total se comporta como:

$$\sigma \approx (g_2)^2 E^2 \quad (17)$$

Análogamente, en cualquier teoría no renormalizable, donde los términos de acoplamiento tienen dimensiones negativas, la sección transversal va a incrementar en la energía. Pero la sección transversal tiene que ver con la matriz S que es una matriz unitaria. Como todas las matrices unitarias tienen valores propios de módulo 1, se sigue que los elementos de la matriz deben estar acotados. Traduciendo este argumento en la sección transversal encontramos que esta acotado por

$$\sigma \leq \frac{c^2}{E^2} \quad (18)$$

Donde c es una constante. Del ejemplo anterior encontramos que

$$g_2 E^2 \leq c \quad (19)$$

Esto implica que se viola la unitariedad de la matriz S en energías tal que

$$E \geq \sqrt{\frac{c}{g_2}} \quad (20)$$

Esto implica que podemos darle un significado a las teorías no renormalizables, pero solo en un rango limitado de energías. Este rango esta fijado por el valor del término de acoplamiento no renormalizable. No es difícil darse cuenta que el hecho de que no se pueda renormalizar una teoría y el mal comportamiento de las amplitudes a altas energías son dos fenómenos que están conectados.

1.1 Regularización dimensional de las integrales de Feynman

Como ya discutimos anteriormente, necesitamos un procedimiento para darle sentido a los diagramas divergentes de Feynman. El más sencillo de estos procedimientos es simplemente introducir un "parámetro de corte" Λ que nos redefina las integrales de la siguiente forma $\int_0^\infty \rightarrow \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda$. Por supuesto que en la renormalización primero necesitamos hacer una expansión perturbativa y luego se toma el límite en el parámetro de corte Λ . A pesar de que este procedimiento es bastante simple, resulta ser inapropiado en algunas situaciones como en las teorías de norma. Un tipo de regularización que es muy utilizado en nuestros días es la regularización dimensional. Consiste en considerar la integración en un número arbitrario de dimensiones espacio temporales y luego, al final, se toma el límite en 4 dimensiones. Esta forma de regularización es bastante conveniente porque respeta todas las simetrías. De hecho, excepto por algunos casos, las simetrías no dependen del número de dimensiones espacio temporales. Veamos de qué se trata esta regularización dimensional.

Queremos evaluar integrales del tipo:

$$I_4(k) = \int d^4 p F(p, k) \quad (21)$$

Con $F(p, k) \approx p^{-2}$ o p^{-4} . La idea es que integrar en un número menor de dimensiones las propiedades de convergencia de la integral mejora en el rango ultravioleta. Por ejemplo, si $F(p, k) \approx p^{-4}$, la integral es convergente en 2 y 3 dimensiones.

Luego entonces, nos gustaría introducir la cantidad

$$I(\omega, k) = \int d^{2\omega} p F(p, k) \quad (22)$$

Considerando que ahora es una función compleja dependiente de la variable compleja ω . Luego entonces si podemos definir la función compleja $I'(\omega, k)$ en todo el plano complejo, con singularidad definida tal que coincide con la de I en un dominio común, luego entonces, por continuación analítica I e I' definen la misma función analítica. Un ejemplo sencillo de este procedimiento esta dado por la función Γ de Euler. Esta función compleja esta definida para $\text{Re}z > 0$ por la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \quad (23)$$

Si $\text{Re}z \leq 0$ la integral diverge en el término

$$\frac{dt}{t^{1+|\text{Re}z|}} \quad (24)$$

cuando se toma el limite $t \rightarrow 0$. A pesar de esto, es fácil obtener una representación válida también para $\text{Re}z \leq 0$. Dividamos la región de integración en dos partes definiendo un parámetro α

$$\Gamma(z) = \int_0^\alpha dt e^{-t} t^{z-1} + \int_\alpha^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \quad (25)$$

Ahora expandimos la exponencial en la primer integral e integramos término por término para obtener:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\alpha dt t^{n+z-1} + \int_\alpha^\infty dt e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\alpha^{n+z}}{n+z} + \int_\alpha^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \quad (26)$$

La segunda integral converge para todo z ya que $\alpha > 0$. Esta expresión coincide con la representación de Γ para $\text{Re}z > 0$, pero está definida también para $\text{Re}z < 0$ y tiene polos simples localizados en $z = -n$. Luego entonces es una expresión que tiene sentido en todo el plano complejo z . Nótese que para aislar las divergencias necesitamos introducir un parámetro arbitrario α . Sin embargo el resultado no depende en el valor particular de este parámetro. Esta es la representación de Wiestrass de la función Γ de Euler. De este ejemplo deducimos 3 pasos importantes:

- Encontrar un dominio en el cual $I(\omega, k)$ sea convergente. Esto es típicamente para $\text{Re}\omega < 2$.
- Contruir una función analítica idéntica a $I(\omega, k)$ en el dominio de convergencia, pero definida en un dominio más grande incluyendo el punto $\omega = 2$.
- Al final del cálculo debemos tomar el límite cuando $\omega \rightarrow 2$.

1.2 Integración en dimensiones arbitrarias

Consideremos la integral

$$I_N = \int d^N p F(p^2) \quad (27)$$

con N un número entero y p un vector en un espacio Euclidiando de N dimensiones. Ya que el integrando es invariante ante rotaciones del vector N -dimensional p , podemos hacer la integración de la parte angular pasando a unas coordenadas esféricas N dimensionales

$$d^N p = d\Omega_N p^{N-1} dp \quad (28)$$

donde $d\Omega_N$ es el elemento de ángulo sólido en N dimensiones. Luego entonces $\int d\Omega_N = S_N$, con S_N la superficie en la esfera unitaria de N dimensiones, Luego entonces

$$I_N = S_N \int_0^\infty p^{N-1} F(p^2) dp \quad (29)$$

El valor de la superficie de la esfera se puede evaluar con el siguiente truco. Consideremos

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (30)$$

Tomando N de estos factores podemos obtener

$$I^N = \int dx_1 \cdots dx_N e^{-((x_1)^2 + \cdots + (x_N)^2)} = \pi^{N/2} \quad (31)$$

La misma integral se puede evaluar en coordenadas polares

$$\pi^{N/2} = S_N \int_0^{\infty} \rho^{N-1} e^{-\rho^2} d\rho \quad (32)$$

Y haciendo el cambio de variable $x = \rho^2$ se obtiene

$$\pi^{N/2} = \frac{1}{2} S_N \int_0^{\infty} x^{N/2-1} e^{-x} dx = \frac{1}{2} S_N \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \quad (33)$$

Donde hemos utilizado la representacion de la función Γ de Euler que hemos dado en la sección previa. Luego entonces

$$S_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \quad (34)$$

y

$$I_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{N/2-1} F(x) dx \quad (35)$$

con $x = p^2$. Las integrales en las que estaremos interesado son del tipo

$$I_N^{(M)} = \int \frac{d^N p}{(p^2 - a^2 + i\epsilon)} \quad (36)$$

con p un vector en un espacio N dimensional de Minkowski. Podemos hacer una rotación en sentido antihorario de 90° (Rotación de Wick) en el plano complejo de p_0 sin atinarle a ninguna singularidad. Luego necesitamos cambiar las variables $p_0 \rightarrow ip_0$ para obtener

$$I_N^{(M)} = i \int \frac{d^N p}{(-p^2 - a^2)^A} = i(-1)^A I_N \quad (37)$$

donde I_N es una integral euclideana del tipo que se discutió al inicio de esta sección con $F(x)$ dada por

$$F(x) = (x + a^2)^{-A} \quad (38)$$

se sigue que

$$I_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{x^{N/2-1}}{(x + a^2)^A} dx \quad (39)$$

sustituyendo $x = a^2 y$ obtenemos que

$$I_N = (a^2)^{N/2-A} \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^{N/2-1} (1+y)^{-A} dy \quad (40)$$

Y recordando la representación integral de la funcion $B(x, y)$ de Euler (válida para $Re x, y > 0$)

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^{\infty} t^{x-1} (1+t)^{-(x+y)} dt \quad (41)$$

Se sigue que

$$I_N = \pi^{N/2} \frac{\Gamma(A - N/2)}{\Gamma(A)} \frac{1}{(a^2)^{A-N/2}} \quad (42)$$

Hemos obtenido esta representación para $N/2 > 0$ y $Re(A - N/2) > 0$. Pero nosotros ya sabemos como extender la función gamma de Euler a todo el plano complejo, y por lo tanto podemos extender esta formula a dimensiones complejas $N = 2\omega$

$$I_{2\omega} = \pi^\omega \frac{\Gamma(A - \omega)}{\Gamma(A)} \frac{1}{(a^2)^{A-\omega}} \quad (43)$$

est muestra que $I_{2\omega}$ tiene polos simples localizados en

$$\omega = A, A + 1, \dots \quad (44)$$

Por lo tanto nuestra integral estará perfectamente definida para todo ω tal que $\omega \neq A, A + 1, \dots$. Al final vamos a tener que considerar el límite $\omega \rightarrow 2$. La integral original en el espacio de Minkowski es

$$\int \frac{d^{2\omega} p}{(p^2 - a^2)^A} = i\pi^\omega (-1)^A \frac{\Gamma(A - \omega)}{\Gamma(A)} \frac{1}{(a^2)^{A-\omega}} \quad (45)$$

Es conveniente deducir otra fórmula, sea $p = p' + k$ y $b^2 = -a^2 + k^2$, luego entonces

$$\int \frac{d^{2\omega} p'}{(p'^2 + 2p' \cdot k + k^2 - a^2)^A} = i\pi^\omega (-1)^A \frac{\Gamma(A - \omega)}{\Gamma(A)} \frac{1}{(a^2)^{A-\omega}} \quad (46)$$

De donde se obtiene

$$\int \frac{d^{2\omega} p}{(p^2 + 2p \cdot l + b^2)^A} = i\pi^\omega (-1)^A \frac{\Gamma(A - \omega)}{\Gamma(A)} \frac{1}{(k^2 - b^2)^{A-\omega}} \quad (47)$$

Derivamos respecto de k_μ

$$\int d^{2\omega} p \frac{p_\mu}{(p^2 + 2p \cdot k + b^2)^A} = i\pi^\omega (-1)^A \frac{\Gamma(A - \omega)}{\Gamma(A)} \frac{-k_\mu}{(k^2 - b^2)^{A-\omega}} \quad (48)$$

y

$$\int d^{2\omega} p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2p \cdot k + b^2)^A} = i \frac{\pi^\omega (-1)^A}{\Gamma(A) (k^2 - b^2)^{A-\omega}} [\Gamma(A - \omega) k_\mu k_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (k^2 - b^2) \Gamma(A - \omega - 1)] \quad (49)$$

Y debido a que al final de los cálculos tendremos que tomar el límite $\omega \rightarrow 2$, será útil recordar la expansión de la función Gamma alrededor de sus polos

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (50)$$

donde

$$\gamma = 0.5772... \quad (51)$$

es la constante de Euler-Mascheroni, y para $(n \geq 1)$:

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \psi(n + 1) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \quad (52)$$

donde

$$\psi(n + 1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma \quad (53)$$

2 Bibliografía

- Casalbuoni, R. (1997-1998). Lectures on Quantum Field Theory. University of Genova.