

# Modelo Cosmológico Inflacionario basado en GeometroTermoDinámica

Jesús Eduardo Anaya Galeana

Tesis presentada a

*Universidad Nacional Autónoma de México*

**Tutor:**

Hernando Quevedo Cubillos

**Lienciado en Física**

in some subject



Department of Subject

**Address line – 2**

**Address line – 4, INDIA**

**April 2011**



# Agradecimientos

I like to acknowledge ...

# Índice general

Resumen . . . . .	VIII
Introducción . . . . .	IX
<b>1. Planteamiento del problema</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes del Problema . . . . .	1
1.2. Justificación . . . . .	1
1.3. Objetivos . . . . .	1
<b>2. Marco teórico</b>	<b>2</b>
2.1. Relatividad General . . . . .	3
2.2. Cosmología . . . . .	3
2.2.1. Inflación . . . . .	5
2.2.2. Condiciones para Slow-Roll . . . . .	6
2.2.3. Tiempo conforme . . . . .	8
2.3. Teoría de Perturbaciones . . . . .	9
2.3.1. Teoría (Relativista) de Perturbaciones Cosmológicas . . . . .	9
2.4. Teoría cuántica de perturbaciones cosmológicas . . . . .	15
2.5. Geometrotermodinamica . . . . .	19

<b>3. Desarrollo</b>	<b>20</b>
3.1. Modelo . . . . .	20
3.2. Condiciones para inflación . . . . .	21
3.2.1. Parámetros del modelo . . . . .	23
3.2.2. Factor de escala . . . . .	27
3.2.3. Comportamiento termodinámico . . . . .	28
3.3. Campo escalar inducido . . . . .	31
3.3.1. Slow-Roll . . . . .	32
<b>4. Conclusiones</b>	<b>34</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>35</b>
<b>Anexos</b>	<b>37</b>

# Índice de figuras

3.1. Gráfica de $\frac{c_2}{c_1}$ vs $N$ . . . . .	25
3.2. Gráfica de $K$ vs $N$ . . . . .	25
3.3. Gráfica de $\alpha$ vs $N$ . . . . .	26
3.4. Gráfica de $\beta$ vs $N$ . . . . .	26
3.5. Gráfica del factor de escala $a$ durante la inflación. . . . .	28
3.6. Gráfica de $\frac{P_{inf}}{10^{140}}$ vs $t$ . . . . .	29
3.7. Gráfica de $\frac{\rho_{inf}}{10^{140}}$ vs $t$ . . . . .	30
3.8. Gráfica de $V(\phi)$ para distintos valores de $\phi_0$ . . . . .	33
3.9. Gráfica de $\phi(t)$ para distintos valores de $\phi_0$ . . . . .	33

# Índice de tablas

3.1. Valores de las constantes $\alpha_c$ , $\beta_c$ , $K$ y $\frac{c_2}{c_1}$ para 60 e-foldings . . . . .	27
3.2. Comparación de las constantes $\alpha_c$ , $\beta_c$ , $K$ y $\frac{c_2}{c_1}$ para 55 e-foldings . . . . .	27



## Resumen

Usando el formalismo de la GeometroTermoDinámica para derivar una ecuación termodinámica fundamental, se construye un modelo cosmológico consistente con la inflación. Se estudia también la dependencia de dicho modelo con el número de e-foldings, y su comportamiento termodinámico durante la etapa de inflación.

## Summary

Usando el formalismo de la GeometroTermoDinámica para derivar una ecuación termodinámica fundamental, se construye un modelo cosmológico consistente con la inflación. Se estudia también la dependencia de dicho modelo con el número de e-foldings, y su comportamiento termodinámico durante la etapa de inflación.

## Introducción

Como sabemos  $\Lambda$ CDM es el modelo cosmológico más acertado que tenemos junto con el modelo inflacionario caótico [Linde, 1983]. Sin embargo, aún existen otros modelos que nos permiten describir al universo tal y como lo observamos, y que principalmente se diferencian por la ecuación de estado que proponen (usualmente la ecuación de estado relaciona a la densidad de energía del universo con su presión). Esto nos lleva a preguntarnos, ¿Podemos usar una ecuación de estado arbitraria para generar un "buen" modelo cosmológico?; la respuesta es: no necesariamente, sin embargo existen métodos para obtenerlas, uno de estos es a partir de una ecuación fundamental [Callen, 1985]

Es aquí es en donde entra en juego la GeometroTermoDinámica, que nos permita obtener ecuaciones termodinámicas fundamentales [Quevedo, 2007]. En [A. Vázquez and Sánchez, 2010] se hace uso de esta herramienta para "generar" nuestra ecuación de estado y así, junto con la ecuación de continuidad en cosmología y las ecuaciones de Friedmann, se crea un modelo cosmológico; tal y como se realizó en [Gruber and Quevedo, 2017]

A lo largo del presente trabajo, se hará uso de la ecuación fundamental "generada" por la GeometroTermoDinámica y utilizada en [Gruber and Quevedo, 2017] y se desarrollará el modelo cosmológico que ésta última implica de una manera más generalizada, incluyendo perturbaciones cosmológicas.

A continuación se presentan los apartados que comprenden el trabajo de investigación

En el Capítulo 1, Planteamiento del Problema



# Capítulo 1

## Planteamiento del problema

Descripción del problema

### 1.1. Antecedentes del Problema

historia de la cosmología y algunos modelos breve historia de GTD y su implementación a cosmología

### 1.2. Justificación

porque usar GTD en cosmología, porque ver perturbaciones cosmológicas y perturbaciones térmicas (fluctuaciones)

### 1.3. Objetivos

objetivos y preguntas de investigación

## Capítulo 2

# Marco teórico

Cosmología física se entiende por el estudio del origen, la evolución y el destino del Universo. Es por eso que cuando hablamos de Cosmología, no sólo nos referimos a modelar al universo con Relatividad General, sino que, además se involucran otras áreas de estudio de la física teórica, como Termodinámica y Teoría (Cuántica) de Campos, para describir las distintas etapas de evolución del universo.

Sin embargo, los modelos cosmológicos se basan fuertemente en 4 postulados

- Una teoría de Relatividad; usualmente, la teoría relativista usada es la de Einstein, sin embargo, pueden usarse teorías modificadas como en [Kiritsis and Kofinas, 2009]
- Un ansatz en el que se supone que el universo es un fluido perfecto, que nos impone un tensor de energía momento muy particular, del cual hablaremos más adelante.
- Un segundo ansatz en el que se supone que el universo es un sistema termodinámico cerrado y aislado, esto es, para que las leyes de la termodinámica sean válidas para todo el universo visto como un sólo sistema
- Un tercer ansatz, el Principio Cosmológico, el cual nos dice que el universo es homogéneo e isotrópico a grandes escalas (i.e. a más de  $300Mps$ )

## 2.1. Relatividad General

Recordemos, que en la teoría de la Relatividad General de Einstein, las ecuaciones que definen la dinámica son las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\mu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_N T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

En donde  $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}$  denota a la contracción del primer y tercer índices del tensor de Riemann;  $R$  denota al escalar de Ricci que es una contracción total de los índices del tensor de Riemann.

Por completez, recordemos que el tensor de Riemann está dado por

$$R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}$$

En donde  $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$  son los símbolos de Christoffel, i.e.

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \right)$$

Por otro lado,

- $G_N$  denota la constante gravitacional de Newton
- $g_{\mu\nu}$  la métrica con la que se trabaja
- $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía momento del sistema con el que se trabaje

Esta teoría es tratada en diversos libros, siendo [Schutz, 2009] uno de los más digeribles ó [Hamilton, 2014] en donde se da un enfoque más formal.

## 2.2. Cosmología

Para cumplir con principio cosmológico, necesitamos que la métrica que utilicemos denote la isotropía y homogeneidad, es por eso que se usa la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson Walker (FLRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.2)$$

En donde  $t$  es la variable temporal, y  $(r, \theta, \phi)$  son las coordenadas polares usuales. La constante  $k$  "mide" la curvatura espacial y toma los valores de  $-1$ ,  $0$  y  $1$  que corresponden a universos abiertos,

planos o cerrados respectivamente. Si  $k = -1$  o  $k = 0$  entonces  $r \in (0, \infty)$  pero si  $k = 1$  entonces  $r \in (0, \frac{1}{\sqrt{k}})$

Por último,  $a(t)$  es el llamado factor de escala del universo, que mide el tamaño físico.

Como se mencionó anteriormente, supondremos que el universo es un fluido perfecto, lo que nos implica que el tensor de energía-momento a utilizar en 2.1 será el de un fluido perfecto i.e.

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + P)u^\mu u_\nu + P\delta^\mu{}_\nu \quad (2.3)$$

Con  $\rho$  la densidad y  $P$  la presión.

Una vez que sustituimos 2.2 y 2.3 en 2.1 obtenemos las llamadas ecuaciones de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho \quad (2.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3P) \quad (2.5)$$

Para poder resolver el sistema (conocer  $a = a(t)$ ) es necesario otra la ecuación de estado que relacione  $P$  y  $\rho$ , o bien, se puede utilizar la ecuación de continuidad 2.6 junto con la ecuación de estado y 2.4

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \quad (2.6)$$

En  $\Lambda$ CDM la ecuación de estado es la barotrópica, i.e.

$$P = \omega\rho$$

en donde  $\omega$  es la constante barotrópica y toma distintos valores dependiendo de la etapa del universo. Para radiación,  $\omega = \frac{1}{3}$ , para la etapa de materia  $\omega = 0$  y  $\omega = -1$  corresponde energía de vacío debida a la constante cosmológica; esto puede ponerse explícitamente en las ecuaciones de Friedmann debido a que

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G_N}$$

con  $\Lambda$  la constante cosmológica.

También, se define el parámetro de densidad como

$$\Omega - 1 = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G_N} = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.7)$$

y como  $a^2 H^2 > 0$  entonces el signo de  $\Omega - 1$  coincide con el de  $k$ .

Observacionalmente, se ha determinado que  $\Omega - 1 \approx 10^{-12}$  y además, se sabe que (insertar una cita) 0 es un valor inestable de  $\Omega - 1$  por lo que en el pasado, debió de haber sido aún mas cercano. Es por eso, que se considerará  $k = 0$  para los cálculos siguientes.

### 2.2.1. Inflación

Aunque  $\Lambda$ CDM es un buen modelo que cubre las etapas de radiación y materia, aún tiene problemas, entre ellos:

- **El problema de la planitud:** Experimentalmente, se mide que el parámetro de densidad es muy próximo a 1. El problema, es que 1 es una solución inestable y que para que hoy en día tengamos ese valor, en el pasado, debió de haber sido aún mas cercano (i.e el universo debió de haber sido plano desde el inicio!)
- **El problema del horizonte:** La radiación cósmica de fondo de áreas del universo que no son causalmente conectadas tiene la misma temperatura
- **Las reliquias cosmológicas:** En la actualidad, no hay reliquias topológicas que puedan ser observadas (como los monopolos magnéticos), pero es muy probable que fueran producidas en los primeros momentos del universo

Para que estos problemas se solucionen es necesario que  $\ddot{a} > 0$  [Riotto, 2018]

Para poder conseguir las condiciones previamente mencionadas se puede utilizar un campo escalar. La acción de dicho campo escalar es:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right]$$

En donde  $V(\phi)$  representa un potencial. Usando Euler-Lagrange podemos obtener la ecuación de movimiento, que se reduce a

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} + V'(\phi) = 0 \quad (2.8)$$



Por otro lado, se puede calcular el tensor de energía momento relacionado al campo escalar (también llamada el “tensor de energía-momento de Hilbert” [A.R. and D.H., 2000])

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] \quad (2.9)$$

Este tensor de energía-momento resulta ser diagonal, y comparándolo con el tensor de energía-momento de un fluido perfecto, se obtiene:

$$\rho_\phi = T_{00} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{(\nabla\phi)^2}{6a^2}$$

$$P_\phi = \frac{T^i_i}{3} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{(\nabla\phi)^2}{6a^2}$$

Nuestro campo escalar puede ser dividido en un campo clásico y una fluctuación, i.e.

$$\phi(t) = \phi_0(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t)$$

El campo clásico  $\phi_0$  representa el valor de expectación del campo en el estado isotrópico y homogéneo, mientras que  $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$  representa la fluctuación (cuántica) alrededor de  $\phi_0$

Si nos fijamos solamente en el estado isotrópico y homogéneo, debemos “tirar” el término del gradiente y utilizar sólo la parte clásica del campo (debido a que las fluctuaciones son despreciables en comparación) y lo comparamos con el tensor energía-momento de un fluido perfecto, se tiene:

$$\rho_{\phi_0} = \frac{\dot{\phi}_0^2}{2} + V(\phi_0) \quad (2.10)$$

$$P_{\phi_0} = \frac{\dot{\phi}_0^2}{2} - V(\phi_0) \quad (2.11)$$

### 2.2.2. Condiciones para Slow-Roll

Como trabajamos con la parte clásica del campo, la ecuación de movimiento se vuelve

$$\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 + V'(\phi_0) = 0$$

Por otro lado, 2.4 se vuelve

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \left[ V(\phi_0) + \frac{1}{2} \dot{\phi}_0^2 \right]$$

Ahora, considerando que necesitamos que

$$\ddot{a} > 0 \iff P_\phi < -\frac{\rho_\phi}{3} \iff \dot{\phi}_0^2 < V(\phi_0)$$

para tener inflación, entonces necesitamos que la energía potencial domine. Esto último es posible si el potencial es lo suficientemente “plano” (i.e.  $V'(\phi_0)$  es “pequeño”) y si el campo escalar “rueda lento” (i.e.  $\dot{\phi}_0^2 \ll V(\phi_0)$ ). Además, el potencial debe tener un mínimo en el que la inflación pueda terminar.

Éstas últimas condiciones se conocen como aproximación de rodamiento lento (o SRA por sus siglas en inglés), y nos simplifican las ecuaciones anteriores

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G_N}{3} V(\phi_0) \quad (2.12)$$

$$3H\dot{\phi}_0 \simeq -\frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} \quad (2.13)$$

Si definimos a los parámetros de rodamiento lento como:

$$\epsilon(\phi_0) = \frac{1}{16\pi G_N} \left( \frac{\partial_{\phi_0} V}{V} \right)^2 = 4\pi G_N \frac{\dot{\phi}_0^2}{H^2} \quad (2.14)$$

$$\zeta(\phi_0) = \frac{1}{8\pi G_N} \left( \frac{\partial_{\phi_0}^2 V}{V} \right) = \frac{1}{3} \frac{\partial_{\phi_0}^2 V}{H^2} \quad (2.15)$$

Usando 2.12 y 2.13 junto con las condiciones de rodamiento lento ( $\dot{\phi}_0^2 \ll V(\phi_0)$ ,  $\ddot{\phi}_0 \ll \partial_{\phi_0} V(\phi_0)$ ), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{\phi_0} V^2}{V} &\ll H^2 \\ |\partial_{\phi_0}^2 V| &\ll |H^2| \end{aligned}$$

Éstas condiciones, en términos de los parámetros de rodamiento lento, nos llevan a:

$$\begin{aligned}\epsilon &\ll 1 \\ |\zeta| &\ll 1\end{aligned}$$

### 2.2.3. Tiempo conforme

En ciertos cálculos, resulta mucho más sencillo utilizar otra variable temporal, el tiempo conforme  $\eta(t)$  que se define como:

$$\eta(t) = \int_{\infty}^t \frac{dt}{a(t)} \quad (2.16)$$

Así, el elemento de línea FLRW (2.2) toma la forma:

$$ds^2 = a(\eta)^2 (-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j) \quad (2.17)$$

Y la métrica se vuelve:

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Además, todas las expresiones y cantidades pasadas pueden ser expresadas en términos del tiempo conforme. En particular, se satisface la regla de la cadena y se tiene

$$\begin{aligned}\dot{f}(t) &= \frac{f'(\eta)}{a(\eta)} \\ \ddot{f}(t) &= \frac{f''(\eta)}{a^2(\eta)} - \mathcal{H} \frac{f'(\eta)}{a^2(\eta)}\end{aligned}$$

Con  $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$ . Un listado de todas las expresiones útiles que se utilizarán en el presente trabajo se encuentra en Sección 4.

### 2.3. Teoría de Perturbaciones

La teoría de perturbaciones en general, es un método matemático para encontrar soluciones aproximadas a un problema complejo; que se divide usualmente en un problema simple, ya resuelto, y una parte “perturbada” [Fenichel, 1979].

Usualmente las soluciones para el problema complejo son en forma de series de potencias de un parámetro “pequeño”, tal y como se hace en mecánica cuántica (cita sobre esto)

En algunos modelos astrofísicos suele usarse la Teoría de Perturbaciones Newtoniana que considera fluctuaciones sobre la densidad, la presión, la entropía, la velocidad del fluido y un campo gravitacional newtoniano (ver por ejemplo, [Baumann, 2003]).

Sin embargo, la Teoría de Perturbaciones Newtonianas no cumple con las ecuaciones de Einstein, que es la teoría gravitacional que se usa como base de nuestro modelo cosmológico, ni tampoco considera fluctuaciones en la métrica. Es por ello que se necesita una teoría que sí lo considere.

#### 2.3.1. Teoría (Relativista) de Perturbaciones Cosmológicas

En este caso, se considera que  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\epsilon)$  con lo que,  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(\epsilon)$ ,  $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\epsilon)$ . El procedimiento a seguir es hacer una expansión en términos de  $\epsilon$ ; i.e:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)}(\epsilon) + \epsilon^{(1)} g_{\mu\nu}^{(1)}(\epsilon) + \epsilon^{(2)} g_{\mu\nu}^{(2)}(\epsilon) + \dots$$

Y nos quedamos a primer orden, entonces se obtiene que la primera corrección a la métrica (2.18) es

$$\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(1)} = a^2 \begin{pmatrix} -2\Phi & B_i \\ B_i & 2C_{ij} \end{pmatrix}$$

Donde

$$B_i = B_{,i} + S_i$$

$$C_{ij} = -\Psi\delta_{ij} + E_{,ij} + F(i, j) + \frac{1}{2}h_{ij}$$

$\Phi$  (the lapse function),  $\Psi$  (the curvature perturbation),  $B$  (un vector con rotacional cero) y  $E$  (the scalar shear) son perturbaciones escalares (una explicación intuitiva de “the lapse function” el “scalar shear” puede verse en [Beenakker, 2016]).

$S_i$ ,  $F_i$  son perturbaciones vectoriales sin divergencia y  $h_{ij}$  es una perturbación tensorial transversa, sin traza y sin divergencia; i.e:

$$\begin{aligned}
\partial_i S_i &= 0 \\
\partial_i F_i &= 0 \\
\partial_i h^{ij} &= 0 \quad \text{sin divergencia} \\
h_i^i &= 0 \quad \text{sin traza}
\end{aligned}$$

Las perturbaciones son clasificadas en esas 3 categorías debido a la forma en que se transforman bajo transformaciones puramente espaciales (i.e transformaciones sobre una hiper-superficie de tiempo constante). Además, al hacer este tipo de separación, es posible resolver las ecuaciones perturbadas de manera independiente (osea se tienen 3 ecuaciones independientes, uno con cada tipo de perturbación); sin embargo, las vectoriales y tensoriales no logran exhibir inestabilidades, de hecho, las perturbaciones vectoriales decaen a medida que el universo se expande, y las tensoriales se asocian a ondas gravitacionales que no se acoplan a las fluctuaciones de densidad y presión.

Para continuar, a primer orden (orden lineal) se tiene que la métrica perturbada más general es:

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -(1+2\Phi) & B_i \\ B_i & \delta_{ij} + 2C_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Con elemento de línea

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1+2\Phi) d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta + (\delta_{ij} + 2C_{ij}) dx^i dx^j \right] \quad (2.20)$$

Ahora, si se hace un desarrollo en serie de perturbaciones para  $\Phi$ ,  $\Psi$ , etc. a primer orden y si se impone la condición:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$$

Se tiene:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2(\eta)} \begin{pmatrix} -1+2\Phi & B^i \\ B^i & \delta^{ij} - 2C^{ij} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Como ya se mencionó anteriormente, no nos interesan las perturbaciones vectoriales ni tensoriales, sólo las escalares que son las que nos llevarán a las inhomogeneidades que buscamos, por lo que consideraremos  $S_i = 0$ ,  $F_i = 0$ ,  $h_{ij} = 0$ , i.e:

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -(1+2\Phi) & B_{,i} \\ B_{,i} & (1-2\Psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij} \end{pmatrix}$$

Una vez teniendo esto, usando las definiciones de  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  y de  $R_{\mu\nu}$  pueden obtenerse las conexiones afines, el tensor de Riemann y el escalar de Richie perturbados a primer orden. (ver Sección 4)

Una vez teniendo eso, se puede calcular el tensor de Einstein perturbado

$$\delta G_{\mu\mu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta R$$

De donde obtenemos\*:

$$\delta G_{00} = -2\frac{a'}{a}B_{,i}^i - 6\frac{a'}{a}\Psi' + 2\Psi_{,i}^i + E_{,ik}^{ik} \quad (2.22)$$

$$\delta G_{0i} = -2\frac{a''}{a}B_{,i} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 B_{,i} + 2\Psi'_{,i} + 2\frac{a'}{a}\Phi_{,i} + E_{,ik}^{ik} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \delta G_{ij} = & \left( 2\frac{a'}{a}\Phi' + 4\frac{a'}{a}\Psi' + 4\frac{a''}{a}\Phi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi + 4\frac{a''}{a}\Psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi + 2\Psi'' - \Psi_{,k}^k + 2\frac{a'}{a}B_{,k}^k \right) \delta_{ij} \\ & + (B_{,k}^k + \Phi_{,k}^k + E_{,km}^{km}) \delta_{ij} - B'_{,ij} + \frac{a'}{a}E'_{,ij} - 2\frac{a''}{a}E_{,ij} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 E_{,ij} + E_{,ij}'' \\ & + \Psi_{,ij} - \Phi_{,ij} - 2\frac{a'}{a}B_{,ij} + E_{,kij}^k \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ahora, el tensor energía-momento debido al campo escalar también debe ser perturbado, para hacerlo, debemos perturbar el campo escalar de la misma manera que se hizo con las demás cantidades, y se tiene que\*:

$$\delta T_{00} = \delta\phi'\phi' + 2\Phi V(\phi)a^2 + a^2\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi}\delta\phi \quad (2.25)$$

$$\delta T_{0i} = \delta\phi'_{,i}\phi' + \frac{1}{2}B_{,i}\phi'^2 - a^2V(\phi)B_{,i} \quad (2.26)$$

$$\delta T_{ij} = \left( \delta\phi'\phi' - \Phi\phi'^2 - a^2\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi}\delta\phi - \Psi\phi'^2 + 2\Psi V(\phi)a^2 \right) \delta_{ij} + E_{,ij}\phi'^2 - a^2V(\phi)E_{,ij} \quad (2.27)$$

*\*Estos cálculos se pueden ver de manera concisa en Sección 4*

Cabe recalcar, que este cálculo es sólo a primer orden de aproximación. Sin embargo, existen trabajos más recientes en los que se hace hasta segundo orden de aproximación (ver [Nakamura, 2003], [Nakamura, 2005], [Nakamura, 2006], [Nakamura, 2007], [Noh and Hwang, 2004])

Ahora, Para poder trabajar poder trabajar con nuestra métrica perturbada, necesitamos seleccionar una norma. En el presente trabajo se utilizará la norma longitudinal o Newtoniana conforme (longitudinal or Conformal Newtonian gauge) que impone que una transformada de coordenadas tal que  $B = E = 0$ , i.e. una métrica de la forma:

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -(1+2\Phi) & 0 \\ 0 & (1-2\Psi)\delta_{ij} \end{pmatrix}$$

Con tensor de Einstein:

$$\delta G_{00} = -6\frac{a'}{a}\Psi' + 2\Psi_{,i}^i \quad (2.28)$$

$$\delta G_{0i} = 2\Psi'_{,i} + 2\frac{a'}{a}\Phi_{,i} \quad (2.29)$$

$$\delta G_{ij} = \left( 2\frac{a'}{a}\Phi' + 4\frac{a'}{a}\Psi' + 4\frac{a''}{a}\Phi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi + 4\frac{a''}{a}\Psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi + 2\Psi'' - \Psi_{,k}^k + \Phi_{,k}^k \right) \delta_{ij} + \Psi_{,ij} - \Phi_{,ij} \quad (2.30)$$

Y tensor de energía-momento

$$\delta T_{00} = \delta\phi'\phi'_0 + 2\Phi V(\phi_0)a^2 + a^2\frac{\partial V(\phi_0)}{\partial\phi_0}\delta\phi \quad (2.31)$$

$$\delta T_{0i} = \delta\phi'_{,i}\phi'_0 \quad (2.32)$$

$$\delta T_{ij} = \left( \delta\phi'\phi'_0 - \Phi\phi'^2_0 - a^2\frac{\partial V(\phi_0)}{\partial\phi_0}\delta\phi - \Psi\phi'^2_0 + 2\Psi V(\phi_0)a^2 \right) \delta_{ij} \quad (2.33)$$

Existen otras normas como la “densidad de energía uniforme”(uniform energy density), la “espacialmente plana”(spatially flat), la de “curvatura uniforme”(uniform curvature), etc. Las características de éstas pueden ser vistas en [Riotto, 2018], [Uggla and Wainwright, 2011], [Ma and Bertschinger, 1995].

Usando las ecuaciones de Einstein 2.1 obtenemos que para la parte espacial no diagonal ( $i \neq j$ ) se tiene

$$\Psi_{,ij} - \Phi_{,ij} = \partial_i \partial_j (\Psi - \Phi) = 0$$

Por lo que se tiene:

$$\Psi = \Phi \quad (2.34)$$

Utilizando (2.34), (11), (12), para simplificar las demás ecuaciones, obtenemos:

Componente (00)

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') \Phi = 4\pi G_N \left( \delta\phi' \phi'_0 + a^2 \frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} \delta\phi \right) \quad (2.35)$$

Componente (0i)

$$\Phi' + 3\mathcal{H}\Phi = 4\pi G_N \delta\phi' \phi'_0 \quad (2.36)$$

Componente (ii)

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') \Phi = 4\pi G_N \left( \delta\phi' \phi'_0 - a^2 \frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} \delta\phi \right) \quad (2.37)$$

Restando (2.35) de (2.37); usando (2.23) para poner a  $\delta\phi_0$  en términos de  $\Phi$ ,  $\Phi'$ , (11) y (2.8) se tiene:

$$\Phi'' + 2 \left( \mathcal{H} - \frac{\phi''_0}{\phi'_0} \right) \Phi' - \nabla^2 \Phi + 2 \left( \mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\phi''_0}{\phi'_0} \right) \Phi = 0 \quad (2.38)$$

Esta última ecuación puede resolverse, usando la transformada de Fourier (expandiendo en una base de ondas planas) y con la ayuda de (2.36) se obtienen:

Para perturbaciones de longitud de onda corta  $aH \ll l$  ó  $H^{-1} \gg \lambda$

$$\begin{aligned} \Phi_l &\simeq \dot{\phi}_0 \left[ C_1 \sin \left( l \int a^{-1} dt \right) + C_2 \cos \left( l \int a^{-1} dt \right) \right] e^{i\vec{l} \cdot \vec{x}} \\ \delta\phi_l &\simeq \frac{2}{3l^2} \left[ C_1 \cos \left( l \int a^{-1} dt \right) - C_2 \sin \left( l \int a^{-1} dt \right) \right] e^{i\vec{l} \cdot \vec{x}} \end{aligned}$$



Para perturbaciones de longitud de onda larga  $aH \gg l$  ó  $H^{-1} \ll \lambda$

$$\begin{aligned}\Phi_l &\simeq A \left( 1 - \frac{H}{a} \int a dt \right) \\ \delta\phi_l &\simeq \dot{\phi}_0 A \left( a^{-1} \int a dt \right)\end{aligned}$$

Con  $l = \frac{a}{\lambda}$ ,  $\lambda$  la longitud de onda física de la perturbación,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $A$  constantes de integración.

Sin embargo, puede demostrarse que, para un universo inflacionario las perturbaciones toman la forma:

$\delta\phi$  para las perturbaciones de onda corta

$$\delta\phi_l \simeq \frac{l^{-1/2}}{a} \exp(il\eta(a)) \quad (2.39)$$

$\delta\phi$  para las perturbaciones de onda larga

$$\delta\phi_l \simeq \frac{l^{-1/2}}{a_l} \left( \frac{V}{V_{,\phi_0}} \right)_\tau \frac{V_{,\phi_0}}{V} \quad (2.40)$$

Y  $\Phi$  para las perturbaciones de onda larga se vuelve:

$$\begin{aligned}\Phi_l &\simeq 4\pi \frac{l^{-1/2}}{a_l} \left( \frac{V}{V_{,\phi_0}} \right)_\tau \frac{V_{,\phi_0}}{V} \frac{\dot{\phi}}{H} \\ &\simeq -\frac{l^{-1/2}}{a_l} \left( \frac{V}{V_{,\phi_0}} \right)_\tau \left( \frac{V_{,\phi_0}}{V} \right)^2 \\ &\simeq 4\pi \frac{\dot{\phi}}{H} \delta\phi_l\end{aligned} \quad (2.41)$$

Donde  $\tau$  es tal que

$$a(\tau)H(\tau) = l \quad (2.42)$$

## 2.4. Teoría cuántica de perturbaciones cosmológicas

La teoría de perturbaciones cosmológicas previamente desarrollada nos permite saber el comportamiento del campo escalar  $\phi_0$  y del gravitacional  $\Phi$  al final de la inflación. Sin embargo, por sí sola no explica el origen de la estructura del universo (i.e producción de partículas, etc.)

Es por ello que necesitamos cuantizar nuestra teoría, pero cuantizarla significa cuantizar simultáneamente las perturbaciones (a primer orden) de la métrica y del tensor energía-momento de nuestro campo inflacionario.

Para llevarlo a cabo, consideraremos que el espacio de configuraciones original esta conformado por las perturbaciones de la métrica y del tensor energía-momento a primer orden, y para obtener su acción, perturbaremos a segundo orden la acción inicial i.e.

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x R \sqrt{-g} + \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right]$$

Debido a que las ecuaciones de movimiento de las perturbaciones a primer orden están dadas en términos de las perturbaciones de segundo orden.

Para hacerlo, se usa el formalismo ADM [Tong, 2006] para expresar al elemento de línea en términos de otras cantidades que facilitan el cálculo []. Si comparamos la métrica  $g_{\mu\nu}$  dada en 2.18 con la dada por ADM, asociamos los términos, y se expande hasta segundo orden en la perturbación, se puede demostrar que la acción perturbada a segundo orden es:

$$\delta_2 S = \frac{1}{2} \int \left( v'^2 - v_{,i} v_{,i} + \frac{z''}{z} v^2 + \frac{1}{8\pi G_N} \Sigma_{i=0}^4 \mathcal{D}_i \right) d^4x \quad (2.43)$$

Con:

$$v = a \left( \delta\phi + \frac{\phi'_0}{\mathcal{H}} \Psi \right)$$

$$z = a \frac{\phi'_0}{\mathcal{H}}$$

Y  $\mathcal{D}_i$  son derivadas totales que no afectan a las ecuaciones de movimiento.

Ahora, para hacer la cuantización, construiremos el momento canónico asociado a  $v$ , el hamiltoniano y las ecuaciones de movimiento. Así, se tiene:

$$\Pi(\eta, x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = v'(\eta, x)$$

$$H = \int (v' \Pi - \mathcal{L}) d^3x = \frac{1}{2} \int \left( \Pi^2 + \delta^{ij} v_{,i} v_{,j} - \frac{z''}{z} v^2 \right) d^3x$$

A  $\eta$  constante, imponemos las reglas de conmutación usuales:

$$[\hat{v}(\eta, \vec{x}), \hat{v}(\eta, \vec{y})] = [\hat{\Pi}(\eta, \vec{x}), \hat{\Pi}(\eta, \vec{y})] = 0$$

$$[\hat{v}(\eta, \vec{x}), \hat{v}(\eta, \vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y})$$

Variando la acción respecto a  $v$  obtenemos la ecuación de movimiento para  $v$ :

$$\hat{v}'' - \Delta \hat{v} - \frac{z''}{z} \hat{v} = 0 \quad (2.44)$$

con  $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left( \sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f \right)$  el operador de Laplace-Beltrami.

Para resolver la Ecuación 2.44 tomamos la transformada de Lapace y hacemos separación de variables, i.e:

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \int dJ \left[ v_J + v_J^\dagger \right] \\ v_J &= \gamma_J(\vec{x}) v^*(\eta) \end{aligned}$$

Esto hace que  $\gamma_J(\vec{x})$  sea eigenfunción de  $\Delta$  con eigenvalor  $l_J^2$  (i.e  $\Delta + l_J^2$ )

En un universo inflacionario, consideramos  $\mathcal{H} = 0$  debido a que debe ser plano. Así, se puede construir una base de ondas planas para las  $\gamma_J(\vec{x})$  y la ecuación de movimiento (2.44) se vuelve:

$$v_J' + \left( l_J^2 - \frac{z''}{z} \right) v_J = 0$$

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3l \left[ \gamma_J(\vec{x}) v^*(\eta) \hat{a}_J^- + \gamma_J^*(\vec{x}) v(\eta) \hat{a}_J^+ \right]$$

Donde  $\hat{a}_J^+$ ,  $\hat{a}_J^-$  son los operadores de creación y aniquilación, que deben satisfacer las relaciones de conmutación:

$$[\hat{a}_I^+, \hat{a}_J^+] = [\hat{a}_I^-, \hat{a}_J^-] = 0$$

$$[\hat{a}_I^+, \hat{a}_J^-] = \delta(\vec{I} - \vec{J})$$

Para que eso suceda, se debe cumplir:

$$1 \tag{2.45}$$

Lo único que nos faltaría sería construir el vacío de nuestra teoría. Para un campo escalar real en teoría cuántica de campos con la métrica de Minkowsky ( $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ) podemos definir al vacío como el estado que cumple:

$$\hat{a}^+|0\rangle = |1\rangle \qquad \hat{a}^-|0\rangle = |0\rangle$$

Y los operadores  $\hat{a}^-$  son los de energías positivas.

Y lo que hace que el vacío sea único es la distinción temporal distinguible para partículas y anti-partículas, y que las energías sean positivas definidas. El problema de cuantizar un campo con la métrica FLRW es que no hay una noción de tiempo absoluta, de hecho, si uno logra encontrar soluciones en donde las energías de  $\hat{a}^-$  sean positivas, entonces para algún tiempo  $t_2$  eso podría ya no ser cierto.

Es por eso, que debe hacerse una elección de vacío, parecida a las elecciones de norma que consideramos anteriormente.\*

Sin embargo, para obtener los espectros de las perturbaciones, sólo necesitamos los vacíos en las soluciones de longitud de onda corta. Así, podemos definir:

$$v_l(\eta_0) = l^{-1/2}M(l\eta_0) \qquad v'_l(\eta_0) = il^{1/2}N(l\eta_0)$$

Tales que

$$NM^* + N^*M = 2 \qquad |M(l\eta_0)| \rightarrow 1 \quad |N(l\eta_0)| \rightarrow 1 \text{ cuando } l\eta_0 \gg 1$$

*\*Una discusión sobre este tema se da en [V.F. Mukhanov, 1992], [Birrel and Davies, 1982], [Mukhanov and Winitzki, 2004]*

Como ya cuantizamos  $v$ , ahora, podemos regresarnos a lo que nos interesa i.e. el espectro de potencias de  $\Phi$ .

Para esto definimos

$$\langle 0|\hat{\Phi}(\eta, \vec{x})\hat{\Phi}(\eta, \vec{x} + \vec{r})|0\rangle = \int_0^\infty \frac{dl}{l} \frac{\text{sen}(lr)}{r} |\delta_l|^2 \tag{2.46}$$

Donde

$$\hat{\Phi}(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\phi'_0}{a} \int \frac{d^3 l}{2\pi^3} \left[ e^{i\vec{l} \cdot \vec{x}} u^*(\eta) \hat{a}_l^- + e^{-i\vec{l} \cdot \vec{x}} u(\eta) \hat{a}_l^+ \right]$$

Y las  $u_l(\eta)$  cumplen la ecuación de movimiento

$$u_l''(\eta) + \left[ l^2 - \left( \frac{1}{z} \right)'' z \right] u_l(\eta) = 0 \quad z = a \frac{\phi'_0}{\mathcal{H}}$$

Y además se relacionan con las  $v$  que ya cuantizamos mediante:

$$u_l(\eta) = -4\pi G_N \frac{z}{l^2} \left( \frac{v_l}{z} \right)'$$

Así, de (2.46) se tiene

$$|\delta_l|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\phi_0'^2}{a} |u_l(\eta)|^2 l^3$$

Por lo que sólo debemos encontrar las soluciones de  $u_l(\eta)$  que cumplan con la ecuación de movimiento, y cuya cuantización siga las reglas de conmutación impuestas por  $v$ . Para hacerlo, nuevamente se resuelve por regímenes y se puede demostrar que durante la inflación [V.F. Mukhanov, 1992] se tienen:

$$|\delta_l| = \frac{8\pi G_N}{4\pi^2} |\dot{\phi}(t)| \quad \text{para} \quad \frac{l}{a(\eta)} > H(t) \quad (2.47)$$

$$|\delta_l| = \frac{8\pi G_N}{4\pi^2} \left( \frac{\dot{\phi}_0 H^2}{\dot{H}} \right) \left( \frac{1}{a} \int_a dt \right)' \quad \text{para} \quad H(t) > \frac{l}{a(\eta)} > H_i(t) \frac{a_i}{a(t)} \quad (2.48)$$

Donde (2.47) es para perturbaciones que inician y se quedan dentro del radio de Hubble, y (2.48) es para perturbaciones que están inicialmente dentro del radio de Hubble, y cuando la inflación termina, están afuera

## **2.5. Geometrotermodinamica**

hola

## Capítulo 3

# Desarrollo

### 3.1. Modelo

Gracias a GTD [Gruber and Quevedo, 2017], podemos obtener la ecuación fundamental

$$S = c_1 \ln \left( U + \frac{\alpha}{V} \right) + c_2 \ln(V - \beta) \quad (3.1)$$

Que debe cumplir con la primera ley de la termodinámica (que se ve de la forma  $TdS = dU + PdV$ ) y las ecuaciones de estado, que en este caso son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial U} \\ \frac{P}{T} &= \frac{\partial S}{\partial V} \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones anteriores podemos determinar  $T$  y  $P$ , las cuales son.

$$T = \frac{U}{c_1} + \frac{\alpha}{c_1 V} \quad (3.2)$$

$$P = \frac{c_2 UV^2 + \alpha [\beta c_1 + (c_2 - c_1)V]}{c_1 V^2 (V - \beta)} \quad (3.3)$$

Definimos  $\rho = \frac{U}{V} \Rightarrow U = \rho V$  y además usamos que  $V = V_0 a^3$ , utilizando esto, y sustituyéndolo en la

fórmula para la presión (3.3), tenemos que:

$$P = \frac{c_2 \rho V_0^3 a^9 + \alpha [\beta c_1 + (c_2 - c_1) V_0 a^3]}{c_1 V_0^2 a^6 (V_0 a^3 - \beta)} \quad (3.4)$$

Sustituyendo esto en la ecuación de continuidad (2.6), obtenemos una ecuación diferencial para  $\rho$  y  $a$

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \left\{ \rho \frac{c_2 \rho V_0^3 a^9 + \alpha [\beta c_1 + (c_2 - c_1) V_0 a^3]}{c_1 V_0^2 a^6 (V_0 a^3 - \beta)} \right\}$$

cuya solución es:

$$\rho = K \frac{(a^3 V_0 - \beta)^{-\frac{c_2}{c_1}}}{a^3} - \frac{\alpha}{a^6 V_0^2} \quad (3.5)$$

### 3.2. Condiciones para inflación

Para poder obtener un comportamiento inflacionario, necesitamos que la densidad durante el tiempo en que ocurre la inflación (aproximadamente entre  $t_i = 10^{-36} s$  y  $t_f = 10^{-32} s$ ) sea proporcional a  $a^{-m}$  con  $m > 0$ .

Formalmente, necesitamos que  $a \propto e^{At}$  con  $A$  una constante, sin embargo se puede obtener un periodo de expansión si se fija el número e-foldings de manera apropiada.

Una forma de hacerlo con este modelo es considerar que  $\beta \ll 1$  y haciendo una aproximación a primer orden en la densidad. Esto nos lleva a:

$$\rho = \frac{K V_0^{-\frac{c_2}{c_1}}}{a^{-3 \left[ -\frac{c_2}{c_1} - 1 \right]}} - \left( -\frac{c_2}{c_1} \right) \frac{K \beta V_0^{-\frac{c_2}{c_1} - 1}}{a^{-3 \left[ -\frac{c_2}{c_1} - 2 \right]}} - \frac{\alpha}{a^6 V_0^2} \quad (3.6)$$

Como mencionamos anteriormente, necesitamos que  $\rho \propto \frac{1}{a^m}$  en este caso, es claro que el denominador del primer término siempre será mas pequeño que el del segundo, lo que asegura, que el segundo se vuelva despreciable a tiempos muy pequeños (en los que ocurre la inflación). Por lo que sólo nos haría falta ver para que valores de  $c_2$  y  $c_1$  se puede despreciar el tercer término. Esto último, se ve reflejado en la condición  $-3 \left[ -\frac{c_2}{c_1} - 1 \right] < 6$  que nos implica  $\frac{c_2}{c_1} < 1$  y como  $0 < m = -3 \left[ -\frac{c_2}{c_1} - 1 \right]$  entonces se tiene que:

$$-1 < \frac{c_2}{c_1} < 1 \quad (3.7)$$



Por otro lado, debemos también asegurar que los numeradores de los otros términos (el segundo y tercero), sean también despreciables en comparación con el primero, esto nos impone condiciones sobre  $\alpha$  y  $\beta$

$$\left| \frac{c_2}{c_1} \frac{K\beta V_0^{-\frac{c_2}{c_1}-1}}{a_i^{-3\left[-\frac{c_2}{c_1}-2\right]}} \right| \ll \frac{KV_0^{-\frac{c_2}{c_1}}}{a_i^{-3\left[-\frac{c_2}{c_1}-1\right]}}$$

$$\left| \frac{\alpha}{a_i^6 V_0^2} \right| \ll \frac{KV_0^{-\frac{c_2}{c_1}}}{a_i^{-3\left[-\frac{c_2}{c_1}-1\right]}}$$

las cuales se reducen a

$$|\beta| \ll V_0 a_i^3 \left| \frac{c_1}{c_2} \right| =: \beta_c \quad (3.8)$$

$$|\alpha| \ll KV_0^{-\frac{c_2}{c_1}+2} a_i^{-3\left[\frac{c_2}{c_1}-1\right]} =: \alpha_c \quad (3.9)$$

Si todo lo anterior se cumple, entonces durante la inflación se tiene:

$$\rho(a) \approx \frac{KV_0^{-\frac{c_2}{c_1}}}{a^{-3\left[-\frac{c_2}{c_1}-1\right]}} \equiv \rho_{inf}(a) \quad (3.10)$$

Por otro lado, de la ecuación fundamental 3.1 se sabe que  $\beta$  debe estar relacionada a algún volumen característico del sistema, mientras que  $\alpha$  es un término de interacción (constante) entre las moléculas del fluido; y que en principio puede ser positivo o negativo. Consideremos entonces que  $\beta > 0$ ,  $\alpha < 0$  y que se cancelan totalmente los términos que las contienen en la ecuación (3.6 para que, al inicio de la inflación la densidad sea (3.10).

Esto nos impone, nuevamente, una relación entre  $\alpha$  y  $\beta$

$$|\alpha| = \left| \frac{c_2}{c_1} \right| \beta V_0^{-\frac{c_2}{c_1}+1} a^{3\left(\frac{c_2}{c_1}\right)} \quad (3.11)$$

Notemos que si  $\beta$  cumple con la condición dada en (3.8), entonces, automáticamente se cumple (3.9) lo que nos dice que, en general, no nos importa sólo valor de  $\alpha$  y  $\beta$  sino su relación con  $\alpha_c$  y  $\beta_c$ . Así, definimos:

$$\chi = \frac{\beta}{\beta_c} = -\frac{|\alpha|}{\alpha_c} \quad (3.12)$$

A lo largo del trabajo, como nos interesa el comportamiento de la presión, temperatura, etc. durante la inflación, se utilizará  $\chi \ll 1$  lo que implica  $\alpha \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$ .

Ahora de la primera ecuación de Friedmann (2.4), con  $k = 0$  (debido a que las observaciones nos lo dicen) y sustituyendo (3.10) en (2.4) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} &= \sqrt{\frac{8\pi G_N}{3}} K V_0^{-\frac{c_2}{c_1}} a^{\frac{3}{2}(-\frac{c_2}{c_1}-1)} \\ \Rightarrow \frac{a^{\frac{3}{2}(\frac{c_2}{c_1})+\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)+\frac{3}{2}} &= \sqrt{\frac{8\pi G_N}{3}} K V_0^{-\frac{c_2}{c_1}} t \Rightarrow \\ a(t) &= \left(\frac{8\pi G_N}{3} K V_0^{-\frac{c_2}{c_1}}\right)^{\frac{1}{3\left[\frac{c_2}{c_1}+1\right]}} \left(\frac{3}{2}\left[\frac{c_2}{c_1}+1\right] t\right)^{\frac{2}{3\left[\frac{c_2}{c_1}+1\right]}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Y además tenemos que el parámetro de Hubble  $H(t)$  es:

$$H(t) = \frac{2}{3\left[\frac{c_2}{c_1}+1\right]} \frac{1}{t} \quad (3.14)$$

El número de e-foldings se define como  $N = \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt$  y para nuestro caso se tiene:

$$N = \frac{8}{3\left[\frac{c_2}{c_1}+1\right]} \ln\left(\frac{t_f}{t_i}\right) \quad (3.15)$$

Donde  $t_i$  y  $t_f$  son los tiempos de inicio y término de la inflación, que tomaremos como  $10^{-36}$  y  $10^{-32}$  respectivamente, para que coincidan con los de  $\Lambda$ CDM [] (insertar cita tiempos inflacionarios)

### 3.2.1. Parámetros del modelo

Para poder realizar simulaciones y cálculos, es necesario conocer los valores de  $\alpha_c$ ,  $\beta_c$ ,  $K$ ,  $\frac{c_2}{c_1}$  y  $V_0$ . Sin embargo, éstos pueden ser calculados de la siguiente forma. De la ecuación (3.15) se puede escoger un número de e-foldings y con ello se encuentra  $\frac{c_2}{c_1}$ . Una vez que tenemos el número de e-foldings deseado, podemos entonces calcular  $V_0$

Sabemos que el universo observable tiene un radio de  $l_0 \approx 10^{26} m$  luego entonces el volumen observable es  $V_0 \approx 10^{78}$

El diámetro del universo al principio de la inflación, es  $l_i = \frac{l_0}{10^{30}e^N}$  debido a que se expandió  $10^{30}$  veces durante la etapa de radiación y de materia bosónica y  $e^N$  durante la inflación (N es el número de e-foldings). Usando que  $V = V_0 a^3$  y que  $a(t_0) = 1$ , entonces podemos determinar el factor de escala  $a$  al inicio de la inflación, que viene dado por

$$a_i = \frac{l_i}{l_0} = e^{-N} 10^{-30}$$

Sustituyéndolo en (3.8), obtenemos  $\beta_c$

Por otro lado, para obtener  $K$ , es necesario calcular la densidad que se tenía al iniciar la inflación, i.e., si consideramos que se tenía una energía del orden de la escala GUT ( $\approx 10^{16} GeV$ ), entonces se tiene

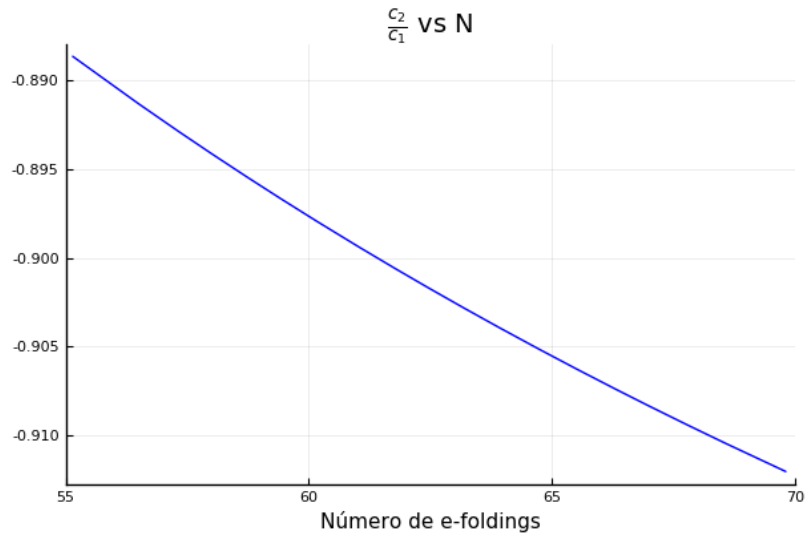
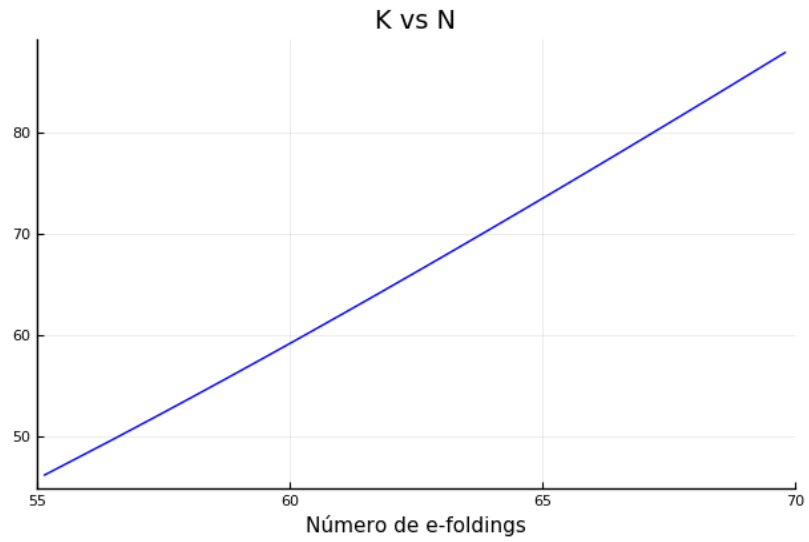
$$\rho_{inf}(a_i) = \frac{K V_0^{-\frac{c_2}{c_1}}}{3 \left[ \frac{c_2}{c_1} + 1 \right]} = \frac{10^{16} GeV}{l_i^3} = 10^{89} \frac{J}{m^3} \Rightarrow$$

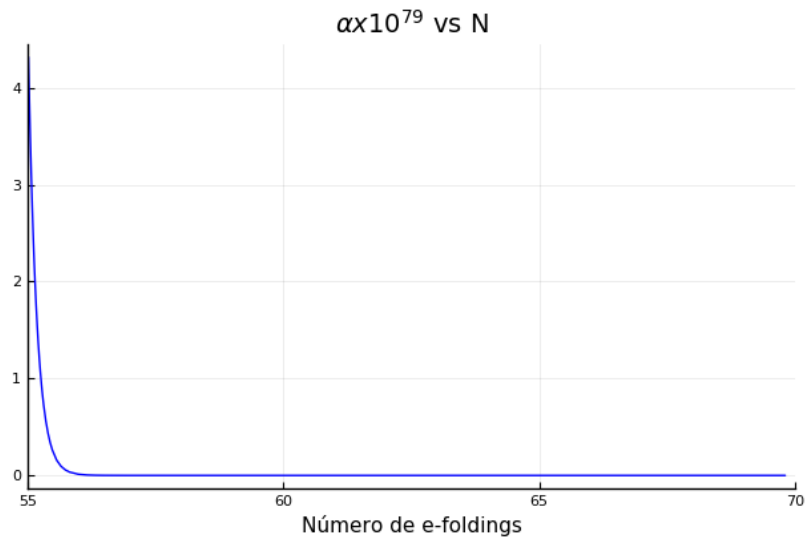
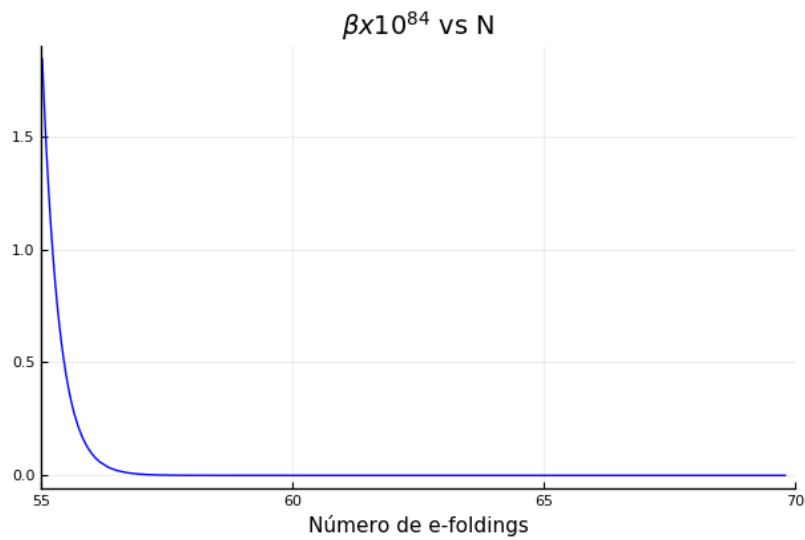
$$K = \frac{10^{89} a_i^{3 \left[ \frac{c_2}{c_1} + 1 \right]}}{V_0^{-\frac{c_2}{c_1}}} \quad (3.16)$$

y por último, se puede obtener el valor de  $\alpha_c$  a partir de la ecuación (3.9)

Como se puede observar, los cuatro parámetros anteriores dependen del número de e-foldings N. Es por ello que primero observamos su dependencia; para esto se hicieron gráficas correspondientes con valores de N en (55,70).

En las figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 se encuentran las gráficas  $\frac{c_2}{c_1}$ ,  $K$ ,  $\alpha_c$  y  $\beta_c$  vs N. Cabe resaltar que en las últimas dos la diferencia entre vecinos (entre N's muy parecidas) es del orden de  $10^{-79}$  y  $10^{-84}$  respectivamente, por lo que no aparece una escala en el eje de las "Y" (que representa dichos parámetros).

Figura 3.1: Gráfica de  $\frac{c_2}{c_1}$  vs  $N$ .Figura 3.2: Gráfica de  $K$  vs  $N$ .

Figura 3.3: Gráfica de  $\alpha$  vs  $N$ .Figura 3.4: Gráfica de  $\beta$  vs  $N$ .

Como se pudo apreciar en las gráficas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 los valores de los parámetros  $\frac{c_2}{c_1}$ ,  $K$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  no cambian mucho con el número de e-foldings, en realidad, las diferencias entre dichos parámetros para 70 y 50 e-foldings es del orden de  $10^{-2}$ ,  $10^1$ ,  $10^{-79}$  y  $10^{-84}$  respectivamente. Además,  $\frac{c_2}{c_1}$  cumple con la condición dada en (3.7)

Como elección, se tomó  $N = 60$  y que en el modelo  $\Lambda$ CDM es el número de e-foldings que se obtiene de manera "natural" [] (poner la cit de riotto).

Los valores de las constantes  $\alpha_c$ ,  $\beta_c$ ,  $K$  y  $\frac{c_2}{c_1}$  para 60 e-foldings se encuentran en la Tabla 3.1

Parámetro	Valor
$\frac{c_2}{c_1}$	-0.897663
$K$	59.15
$\alpha_c$	$4.50816 \times 10^{-92}$
$\beta_c$	$6.02707 \times 10^{-91}$

Tabla 3.1: Valores de las constantes  $\alpha_c$ ,  $\beta_c$ ,  $K$  y  $\frac{c_2}{c_1}$  para 60 e-foldings

En [Gruber and Quevedo, 2017] se hace un desarrollo considerando que  $\frac{c_2}{c_1} = -\frac{8}{9}$ . En ese caso, se impone la condición sobre  $\frac{c_2}{c_1}$  y se obtiene que  $N \approx 55$ . Basándonos en eso, y usando las ecuaciones anteriores se pueden obtener los parámetros del modelo. En la Tabla 3.2 se puede ver una comparación entre los valores calculados con el algoritmo aquí propuesto y aquellos calculados en [Gruber and Quevedo, 2017].

Parámetro	Valor Calculado	Valor dado en [3]
$N$	55	$\approx 55$
$\frac{c_2}{c_1}$	-0.88835	-0.88888
$K$	45.7418	46.41588
$\alpha_c$	$4.8174 \times 10^{-79}$	$\approx$
$\beta_c$	$1.9498 \times 10^{-84}$	$\approx 10^{-84}$

Tabla 3.2: Comparación de las constantes  $\alpha_c$ ,  $\beta_c$ ,  $K$  y  $\frac{c_2}{c_1}$  para 55 e-foldings

### 3.2.2. Factor de escala

Se hizo la gráfica del factor de escala (Ecuación 3.13) durante la inflación (figura 3.5) . Se consideró  $G_N = 3.65 \times 10^{-66} \text{ cm}^2$  y que los tiempos de inicio y término de las inflación son  $t_i = 10^{-36} \text{ s}$  y  $t_f = 10^{-32} \text{ s}$  respectivamente.

En dicha gráfica se puede apreciar el comportamiento exponencial del factor de escala durante la inflación.

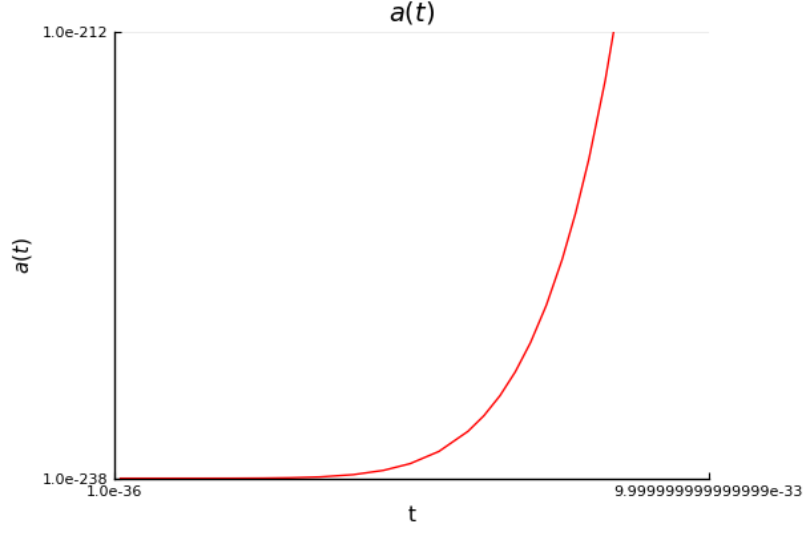


Figura 3.5: Gráfica del factor de escala  $a$  durante la inflación.

### 3.2.3. Comportamiento termodinámico

De la ecuación para la temperatura (3.2) usando nuevamente que  $\rho = \frac{U}{V}$ ,  $V = V_0 a^3$ , se tiene:

$$T = \frac{1}{c_1} \left[ V_0 a^3 \rho + \frac{\alpha}{V_0 a^3} \right]$$

$$P = -\frac{\alpha}{V_0^2 a^6} + \frac{c_2}{c_1} \left[ \frac{\rho V_0^2 a^6 + \alpha V_0 a^3}{V_0 a^3 (V_0 a^3 - \beta)} \right]$$

Implementando  $\beta \ll 1$  y (3.6) obtenemos

$$T = \frac{K}{c_1} a^{-3 \frac{c_2}{c_1}} \left[ V_0^{-\frac{c_2}{c_1} + 1} + \left( \frac{c_2}{c_1} \right) \frac{\beta V_0^{-\frac{c_2}{c_1}}}{a^3} \right] \quad (3.17)$$

Haciendo lo mismo, pero para la presión (3.3) tenemos:

$$P = -\frac{\alpha}{V_0^2 a^6} + \frac{c_2}{c_1} \frac{K V_0^{-\frac{c_2}{c_1}}}{a^{3 \left[ \frac{c_2}{c_1} + 1 \right]}} + \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{K \beta V_0^{-\frac{c_2}{c_1} - 1}}{a^{3 \left[ \frac{c_2}{c_1} + 2 \right]}} \quad (3.18)$$

Si tomamos en cuenta las condiciones que impusimos para lograr (3.10) en la (3.18), podemos obtener una "densidad inflacionaria" que está dada por:

$$P_{inf} = \frac{c_2}{c_1} \frac{KV_0^{-\frac{c_2}{c_1}}}{a^{3\left[\frac{c_2}{c_1}+1\right]}} \quad (3.19)$$

De igual manera, aplicando las condiciones para llegar a (3.10) en (3.17) se llega a una temperatura que llamaremos "temperatura inflacionaria"

$$T_{inf} = \frac{KV_0^{-\frac{c_2}{c_1}+1}}{c_1 a^{3\frac{c_2}{c_1}}} \quad (3.20)$$

Para darnos una idea del comportamiento termodinámico del sistema, se graficaron las funciones de presión y densidad dadas por (3.19), (3.10) "normalizadas" por un factor de  $10^{140}$  para poder apreciarlas. Dichas gráficas se muestran en las figuras (3.6, 3.7) respectivamente.

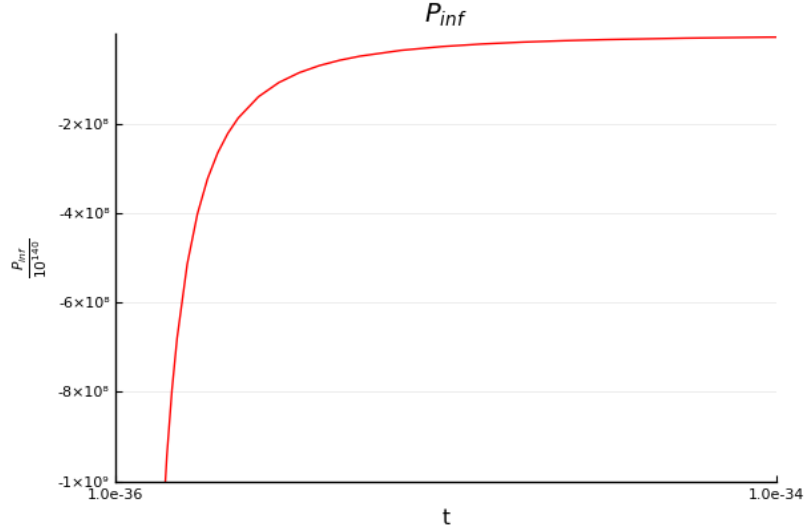


Figura 3.6: Gráfica de  $\frac{P_{inf}}{10^{140}}$  vs  $t$ .



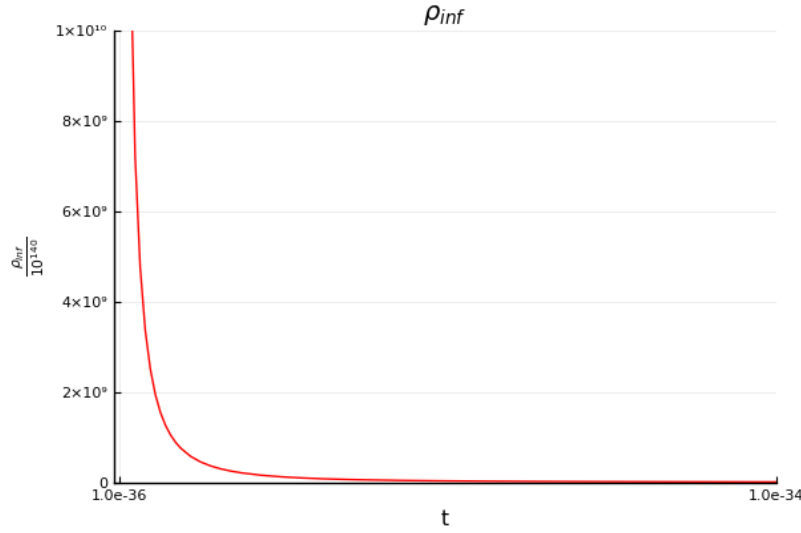


Figura 3.7: Gráfica de  $\frac{\rho_{inf}}{10^{140}}$  vs  $t$ .

La densidad inflacionaria es positiva y decae exponencialmente con el tiempo, esto es de esperar, debido a que el campo encargado de generar la inflación (aka inflatón) debe ceder su energía al término de la inflación en un fenómeno conocido como recalentamiento (reheating en inglés) []. (Insertar cita sobre reheating).

Por otro lado, la presión inflacionaria es negativa y crece de manera asintótica a 0. Esto es consistente con nuestras definiciones de  $P_{inf}$  y  $\rho_{inf}$ , debido a que éstas cumplen:

$$P_{inf} = \frac{c_2}{c_1} \rho_{inf}$$

Y usando la Ecuación 2.6 se tiene que  $\rho_{inf} \propto a^{-3\left[\frac{c_2}{c_1}+1\right]}$  i.e decrece si  $\frac{c_2}{c_1} < 0$ .

Un abordaje sobre las presiones negativas se da en [Bedran, 2003]

### 3.3. Campo escalar inducido

Una vez definidas la densidad y presión inflacionarias, se puede encontrar el campo escalar y el potencial que los generan. Esto se logra igualando (3.19) con (2.11) y (3.10) con (2.10). Así, se tiene:

$$\dot{\phi}^2(t) = \frac{KV_0^{-\frac{c_2}{c_1}}}{a^{3\left[\frac{c_2}{c_1}+1\right]}} \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 \right) \quad (3.21)$$

$$V(\phi(t)) = \frac{1}{2} \frac{KV_0^{-\frac{c_2}{c_1}}}{a^{3\left[\frac{c_2}{c_1}+1\right]}} \left( -\frac{c_2}{c_1} + 1 \right) \quad (3.22)$$

La Ecuación 3.21 puede ser resuelta por integración directa. El cálculo directo nos lleva a:

$$\phi(t) = \phi_0 + M_{pl} \left[ \frac{3}{8\pi} \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 \right) \right]^{-1} \ln \left( \frac{t}{t_i} \right) \quad (3.23)$$

Donde  $\phi_0$  es una constante de integración (un parámetro libre que podemos ajustar adecuadamente),  $t_i$  es el tiempo al cual empieza la inflación ( $10^{-36}s$ ) y  $M_{pl}$  es la masa de plank.

Para obtener al potencial en función del campo, debemos sustituir (3.23) en (3.22).

Realizando los cálculos, se obtiene:

$$V(\phi) = M^4 \exp \left[ 2 \left( \frac{\phi_0 - \phi}{M_{pl}\mu} \right) \right] \quad (3.24)$$

Donde

$$\mu = \left[ \frac{3}{8\pi} \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 \right) \right]^{-1}$$

$$M^4 = \frac{3}{16\pi} \left( 1 - \frac{c_2}{c_1} \right) \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 \right) \right]^{-2} \frac{1}{t_i^2} M_{pl}^2$$

### 3.3.1. Slow-Roll

Recordemos que la condición de rodamiento lento (slow-roll) es:  $\frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi)} \ll 1$ . De las ecuaciones (3.21) y (3.22) se tiene

$$\frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \frac{c_2}{c_1}}{1 - \frac{c_2}{c_1}} \right)$$

Usando los datos de la Tabla 3.1 se consigue que  $\frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi)} \approx 0.027 \ll 1$

Por otro lado, tenemos los parámetros de slow-rolling  $\epsilon$  y  $\eta$ . Usando sus definiciones (ecuaciones 2.14 y 2.15) se llega a:

$$\epsilon = \frac{2}{3 \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 \right)} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 \right) \right]^2 \quad (3.25)$$

$$\eta = \frac{4}{3 \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 \right)} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{c_2}{c_1} + 1 \right) \right]^2 = 2\epsilon \quad (3.26)$$

Si empleamos el valor calculado de  $\frac{c_2}{c_1}$  en las expresiones se obtiene:

$$\epsilon \approx 0.1535$$

$$\eta \approx 0.3070$$

Como se puede apreciar, el modelo cumple con las condiciones de rodamiento lento, i.e. se tiene inflación.

Antes de continuar con las perturbaciones veamos que tipo de potencial tenemos (que tipo de modelo inflacionario representa). Para ello, en la Figura 3.8 se gráfica el potencial dado por (3.24) con distintos valores de  $\phi_0$ .

En la Figura 3.9 se graficó  $\phi(t)$  durante el periodo de inflación, para distintos valores de  $\phi_0$

Como era de esperarse,  $\phi_0$  no es un factor determinante para el comportamiento de  $\phi(t)$ , sin embargo se esperaba que si afectara el comportamiento de  $V(\phi)$  pero según la Figura 3.8 esto no es así. Lo que nos da una libertad total sobre el parámetro  $\phi_0$

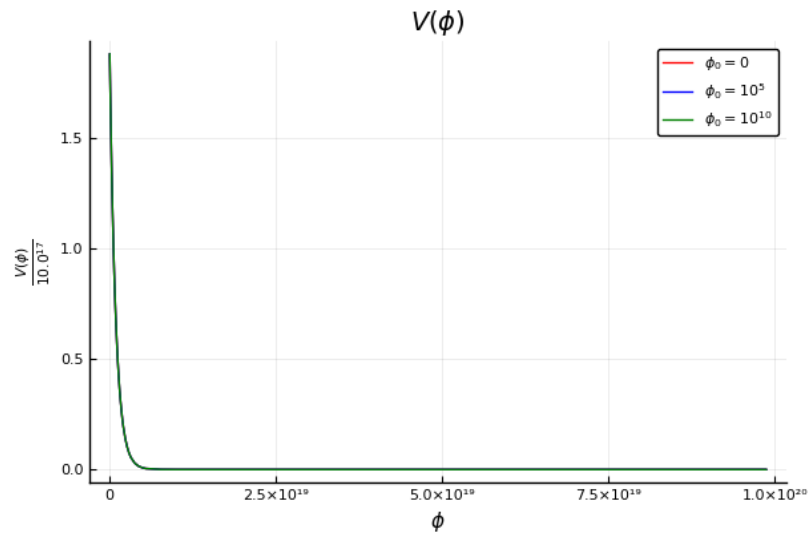


Figura 3.8: Gráfica de  $V(\phi)$  para distintos valores de  $\phi_0$

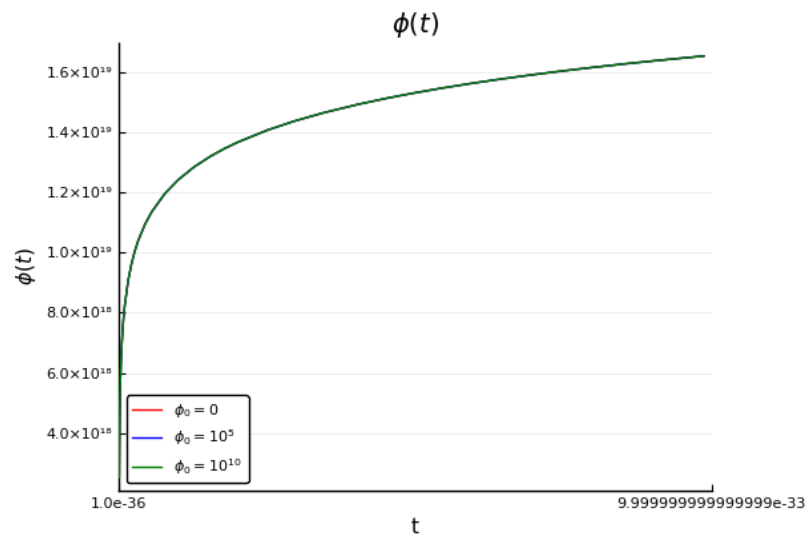


Figura 3.9: Gráfica de  $\phi(t)$  para distintos valores de  $\phi_0$

Otra cosa importante es que el campo escalar rueda de izquierda a derecha hacia un mínimo asintótico. Por lo que, se podría decir que se parece a un modelo de campo pequeño (small-field model). Sin embargo, para este potencial,  $V'' > 0$  y  $\eta > -\epsilon$ , lo cual es totalmente lo contrario a las características principales de los de campo pequeño.

De hecho, revisando la literatura, se podría decir que este tipo de potencial es "nuevo"

## Capítulo 4

## Conclusiones

# Bibliografía

- [A. Vázquez and Sánchez, 2010] A. Vázquez, H. Q. and Sánchez, A. (2010). Thermodynamic systems as external hypersurfaces. *J. Geom. Phys.*, 60.
- [A.R. and D.H., 2000] A.R., L. and D.H., L. (2000). *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge University Press.
- [Baumann, 2003] Baumann, D. (2003). *Cosmology*, pages 77–81. Lecture Notes.
- [Bedran, 2003] Bedran, M. (2003). The effect of negative pressure. [https://www.researchgate.net/publication/228934959\\_The\\_Effect\\_of\\_Negative\\_Pressure](https://www.researchgate.net/publication/228934959_The_Effect_of_Negative_Pressure).
- [Beenakker, 2016] Beenakker, C. (2016). Intuition behind the “lapse function”. <https://mathoverflow.net/questions/226643/intuition-behind-the-lapse-function>. 26/09/2018.
- [Birrel and Davies, 1982] Birrel, N. D. and Davies, P. C. W. (1982). *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, first edition.
- [Callen, 1985] Callen, H. B. (1985). *Thermodynamics and an Introduction to Themostatistics*. John Wiley ‘—&’ Sons., third edition.
- [Fenichel, 1979] Fenichel, N. (1979). Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal Differential Equations*, 31(Issue 1):53–98.
- [Gruber and Quevedo, 2017] Gruber, C. and Quevedo, H. (2017). Geometrothermodynamic model for the evolution of the universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 07(032).
- [Hamilton, 2014] Hamilton, A. J. S. (2014). General relativity, black holes, and cosmology. [https://jila.colorado.edu/~ajsh/ast3740\\_17/grbook.pdf](https://jila.colorado.edu/~ajsh/ast3740_17/grbook.pdf).
- [Kiritsis and Kofinas, 2009] Kiritsis, E. and Kofinas, G. (2009). Hořava–lifshitz cosmology. *Nuclear Physics B*, 821.
- [Linde, 1983] Linde, A. (1983). Chaotic inflation. *Phys. Lett.*, 129B(177):177.
- [Ma and Bertschinger, 1995] Ma, C.-P. and Bertschinger, E. (1995). Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges. <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/9506072.pdf>. 27/09/2018.
- [Mukhanov and Winitzki, 2004] Mukhanov, V. F. and Winitzki, S. (2004). *Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds*. Lecture Notes.

- [Nakamura, 2003] Nakamura, K. (2003). Gauge invariant variables in two-parameter nonlinear perturbations. *Prog.Theor.Phys.*, 110:723–755.
- [Nakamura, 2005] Nakamura, K. (2005). Second order gauge invariant perturbation theory. *Prog.Theor.Phys.*, 113:481–511.
- [Nakamura, 2006] Nakamura, K. (2006). Gauge-invariant formulation of the second-order cosmological perturbations. *Physical Review D*, 74:101301(1–5).
- [Nakamura, 2007] Nakamura, K. (2007). Second order gauge invariant cosmological perturbation theory. *Prog. Theor. Phys.*, 117:17–74.
- [Noh and Hwang, 2004] Noh, H. and Hwang, J. (2004). Second order perturbations of the friedmann world model. *Physical Review D*, 69:104011(1–52).
- [Quevedo, 2007] Quevedo, H. (2007). Geometrothermodynamics. *J. Math. Phys.*, 48(177).
- [Riotto, 2018] Riotto, A. (2018). *Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations*. Lecture Notes.
- [Schutz, 2009] Schutz, B. F. (2009). *A First Course in General Relativity, Second Edition*, pages 111–189. Cambridge University Press, New York, United States of America, second edition.
- [Tong, 2006] Tong, F. (2006). A hamiltonian formulation of general relativity. <http://www.math.toronto.edu/mccann/assignments/426/Tong.pdf>. 1/10/2018.
- [Uggla and Wainwright, 2011] Uggla, C. and Wainwright, J. (2011). Cosmological perturbation theory revisited. <https://arxiv.org/pdf/1102.5039.pdf>. 27/09/2018.
- [V.F. Mukhanov, 1992] V.F. Mukhanov, H.A. Feldman, R. B. (1992). Theory of cosmological perturbations. *Nuclear Physics B*, 5,6:203–233.

# Anexos

Unidades

Notación



## Cantidades asociadas a las ecuaciones sin perturbar (“Background”)

Para los cálculos que a continuación se presentan, se considera:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_0 \partial_\nu \phi_0 + g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - V(\phi_0) \right]$$

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi$$

$$a = a(\eta)$$

## Símbolos de Christoffel

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \right)$$

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{a'}{a}$$

$$\Gamma^0{}_{0i} = 0$$

$$\Gamma^i{}_{00} = 0$$

$$\Gamma^0{}_{ij} = \frac{a'}{a} \delta_{ij}$$

$$\Gamma^i{}_{0j} = \frac{a'}{a} \delta_j^i$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = 0$$

**Tensor de Riemman**

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}$$


---

$$R_{00} = -3 \frac{a''}{a} + 3 \left( \frac{a'}{a} \right)^2$$

$$R_{0i} = 0$$

$$R_{ij} = \left( \frac{a''}{a} + \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \right) \delta_{ij}$$

**Escalar de Ricci**

$$R = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu}$$


---

$$R = \frac{6}{a^2} \frac{a''}{a}$$

**Tensor de Einstein**

$$G_{\mu\mu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$


---

$$G_{00} = 3 \left( \frac{a'}{a} \right)^2$$

$$G_{0i} = 0$$

$$G_{ij} = \left( -2 \frac{a''}{a} + \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \right) \delta_{ij}$$

### Tensor de energía-momento para un campo escalar

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_0 \partial_\nu \phi_0 + g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - V(\phi_0) \right]$$


---

$$T_{00} = \frac{1}{2} \phi_0'^2 + a^2 V(\phi_0)$$

$$T_{0i} = 0$$

$$T_{ij} = \left( \frac{1}{2} \phi_0'^2 - a^2 V(\phi_0) \right) \delta_{ij}$$

### Ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$$


---

#### Componente (00)

$$3 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 = 8\pi G_N \left( \frac{1}{2} \phi_0'^2 + a^2 V(\phi_0) \right)$$

#### Componente (ii)

$$-2 \frac{a''}{a} + \left( \frac{a'}{a} \right)^2 = 8\pi G_N \left( \frac{1}{2} \phi_0'^2 - a^2 V(\phi_0) \right)$$

Las componentes (0i) (ij) dan  $(0 = 0)$ .

## Cantidades con perturbación escalar a primer orden

Para los cálculos que a continuación se presentan, se considera:

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\Phi & B_{,i} \\ B_{,i} & -2\Psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} \end{pmatrix}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 2\Phi & B^i \\ B^i & 2\Psi\delta_{ij} - 2E_{,ij} \end{pmatrix}$$

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi$$

$$a = a(\eta)$$

Donde  $\phi_0$  es el que cumple con las condiciones de slow-roll y suele ser llamado como “background field”

## Símbolos de Christoffel

$$\delta\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\delta g^{\mu\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \right) + \frac{1}{2}g^{\mu\rho} \left( \frac{\partial\delta g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial\delta g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\delta g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \right)$$

$$\delta\Gamma^0{}_{00} = \Phi'$$

$$\delta\Gamma^0{}_{0i} = \Phi_{,i} + \frac{a'}{a}B_{,i}$$

$$\delta\Gamma^i{}_{00} = \Phi^i + \frac{a'}{a}B^i_{,}$$

$$\delta\Gamma^0{}_{ij} = -2\frac{a'}{a}\Phi\delta_{ij} - B_{,ij} - 2\frac{a'}{a}\Psi\delta_{ij} - \Psi'\delta_{ij} - 2\frac{a'}{a}E_{,ij} + E'_{,ij}$$

$$\delta\Gamma^i{}_{0j} = -\Psi'\delta^i_j + E'^i_{,j}$$

$$\delta\Gamma^i{}_{jk} = \Psi_{,j}\delta^i_k - \Psi_{,k}\delta^i_j + \Psi^i_{,}\delta_{jk} - \frac{a'}{a}B^i_{,}\delta_{jk} + E^i_{,(kj)} - E^i_{,jk}$$

## Tensor de Riemman

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \delta \Gamma^\alpha_{\nu\alpha} + \delta \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \delta \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}$$


---

$$\delta R_{00} = \frac{a'}{a} B_{,i}^i + \Phi_{,i}^i + 3\Psi'' + 3\frac{a'}{a} \Psi' + 3\frac{a'}{a} \Phi'$$

$$\delta R_{0i} = \frac{a''}{a} B_{,i} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 B_{,i} + 2\Psi'_{,i} + 2\frac{a'}{a} \Phi'_{,i} + E_{,ki}^k$$

$$\begin{aligned} \delta R_{ij} = & \left( -\frac{a'}{a} \Phi' - 5\frac{a'}{a} \Psi' - 2\frac{a''}{a} \Phi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \Phi - 2\frac{a''}{a} \Psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \Psi - \Psi'' + \Psi_{,k}^k - \frac{a'}{a} B_{,k}^k \right) \delta_{ij} \\ & - B_{,ij}' + 2\frac{a'}{a} E_{,ij}' + \frac{a''}{a} E_{,ij} + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 E_{,ij} + E_{,ij}'' + \Psi_{,ij} - \Phi_{,ij} - 2\frac{a'}{a} B_{,ij} + E_{,(ij)k}^k - E_{,ijk}^k \end{aligned}$$

## Escalar de Ricci

$$\delta R = \delta g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu} + g^{\mu\alpha} \delta R_{\alpha\mu}$$


---

$$\delta R = \frac{1}{a^2} \left( -6\frac{a'}{a} B_{,i}^i - 2B_{,i}^i' - 2\Phi_{,i}^i - 6\Psi'' - 6\frac{a'}{a} \Phi' - 18\frac{a'}{a} \Psi' - 12\frac{a''}{a} \Phi + 4\Psi_{,i}^i + 2E_{,ik}^{ik} \right)$$

## Tensor de Einstein

$$\delta G_{\mu\mu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta R$$

$$\delta G_{00} = -2\frac{a'}{a}B_{,i}^i - 6\frac{a'}{a}\Psi' + 2\Psi_{,i}^i + E_{,ik}^{ik}$$

$$\delta G_{0i} = -2\frac{a''}{a}B_{,i} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 B_{,i} + 2\Psi_{,i}' + 2\frac{a'}{a}\Phi_{,i} + E_{,ik}'^k$$

$$\begin{aligned} \delta G_{ij} = & \left( 2\frac{a'}{a}\Phi' + 4\frac{a'}{a}\Psi' + 4\frac{a''}{a}\Phi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \Phi + 4\frac{a''}{a}\Psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \Psi + 2\Psi'' - \Psi_{,k}^k + 2\frac{a'}{a}B_{,k}^k \right) \delta_{ij} \\ & + (B_{,k}'^k + \Phi_{,k}^k + E_{,km}^{km}) \delta_{ij} - B_{,ij}' + \frac{a'}{a}E_{,ij}' - 2\frac{a''}{a}E_{,ij} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 E_{,ij} + E_{,ij}'' \\ & + \Psi_{,ij} - \Phi_{,ij} - 2\frac{a'}{a}B_{,ij} + E_{,kij}^k \end{aligned}$$

## Tensor de energía-momento para un campo escalar

$$\begin{aligned} \delta T_{\mu\nu} = & \partial_\mu \delta\phi \partial_\nu \phi_0 + \partial_\mu \phi_0 \partial_\nu \delta\phi - \delta g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2}g^{\alpha\mu} \partial_\mu \phi_0 \partial_\alpha \phi_0 + V(\phi_0) \right] \\ & - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\mu} \partial_\mu \phi_0 \partial_\alpha \phi_0 + g^{\alpha\mu} \partial_\mu \phi_0 \partial_\alpha \delta\phi + \frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} \delta\phi \right] \end{aligned}$$

$$\delta T_{00} = \delta\phi'\phi_0' + 2\Phi V(\phi_0)a^2 + a^2 \frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} \delta\phi$$

$$\delta T_{0i} = \delta\phi_{,i}'\phi_0' + \frac{1}{2}B_{,i}\phi_0'^2 - a^2 V(\phi_0)B_{,i}$$

$$\delta T_{ij} = \left( \delta\phi_{,i}'\phi_0' - \Phi\phi_0'^2 - a^2 \frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} \delta\phi - \Psi\phi_0'^2 + 2\Psi V(\phi_0)a^2 \right) \delta_{ij} + E_{,ij}\phi_0'^2 - a^2 V(\phi_0)E_{,ij}$$

## Relaciones en tiempo conforme

Se tiene que:

$$\dot{a} = \frac{a'}{a} \quad (1)$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2} = \frac{\mathcal{H}}{a} \quad (2)$$

$$\dot{H} = \frac{\mathcal{H}}{a^2} - \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} \quad (3)$$

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G_N \rho a^2}{3} - k \quad (4)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G_N a^2}{3} (\rho + 3P) a^2 \quad (5)$$

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + P) = 0 \quad (6)$$

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + a^2 \frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\mathcal{H}^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3} V(\phi_0) \quad (8)$$

$$\frac{3\mathcal{H}^2}{a^2} \phi' = -\frac{\partial V(\phi_0)}{\partial \phi_0} \quad (9)$$

$$\frac{a''}{a} = \mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 \quad (10)$$

Usando las relaciones anteriores juntos con las ecuaciones de Einstein para el “Background” se obtienen las últimas 2 ecuaciones.

$$4\pi G_N \phi'_0 = \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' \quad (11)$$

$$8\pi G_N a^2 V(\phi_0) = 2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}' \quad (12)$$