

Top

Left side

TEST

Right side

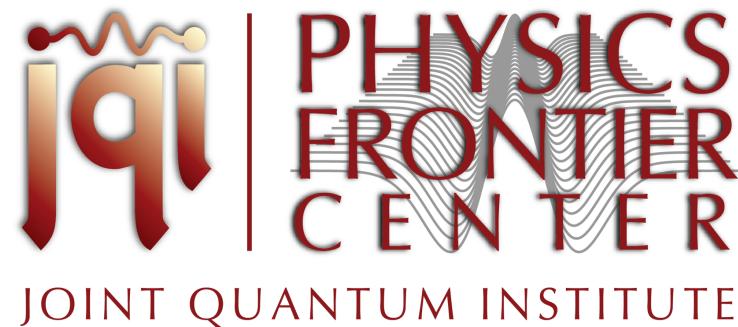
bottom

Temas Selectos de Optica Cuántica 1; Funciones de correlación, ejemplos clásicos.

Postgrado UNAM, Física, México, Marzo 2019

Luis A. Orozco

www.jqi.umd.edu



El material del curso está disponible en:



<http://www.physics.umd.edu/rgroups/amo/orozco/results/2019/Results19.htm>

La mayor parte del trabajo Luis A. Orozco ha sido apoyado por la National Science Foundation de los Estados Unidos.

1. Una revisión histórica

Historia incompleta en matemáticas, física, estadística, microscopía, meteorología,...

- Auguste Bravais (1811-63), francés, físico y tambien meteorologo.
- Francis Galton (1822-1911), inglés, estadístico, sociólogo, psicólogo, proto-genetista, eugenista.
- Norbert Wiener (1894-1964), Estados Unidos, matemático.
- ...

Empecemos con la idea de correlación en un conjunto de datos sin ruido:

- Piensen en los datos como dos vectores columnas, tales que su media es cero.
- Cada punto es (x_i, y_i) ;
- La función de correlación C es el producto interno de los dos vectores normalizada por la norma (magnitud) de los vectores.

$$C = \frac{\sum_i x_i y_i}{\left(\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2 \right)^{1/2}} = \frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \vec{X} \bullet \vec{Y}$$

Si hay una relación lineal perfecta entre los datos, tal que $y_i = mx_i$ (recuerden la media de x es cero y la media de y es cero).

$$C = \frac{\sum_i x_i y_i}{\left(\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2 \right)^{1/2}} = \frac{\sum_i x_i m x_i}{\left(\sum_i x_i^2 \sum_i m^2 x_i^2 \right)^{1/2}}$$

$$C = \frac{m \sum_i x_i^2}{\left(m^2 \sum_i x_i^2 \sum_i x_i^2 \right)^{1/2}} \frac{m \vec{x} \bullet \vec{x}}{m |\vec{x}| |\vec{x}|} = \pm 1$$

C adquiere los valores extremos

queremos ver si dados los vectores \vec{y}, \vec{x}
 existe una función tal que $y_i = f(x_i)$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i, \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$$

$$Var(y) = \frac{1}{(n-1)} \sum_i (y_i - \bar{y})^2, Var(x) = \frac{1}{(n-1)} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$Var \ Exp(y) = \frac{1}{(n-1)} \sum_i (f(x_i) - \bar{y})^2$$

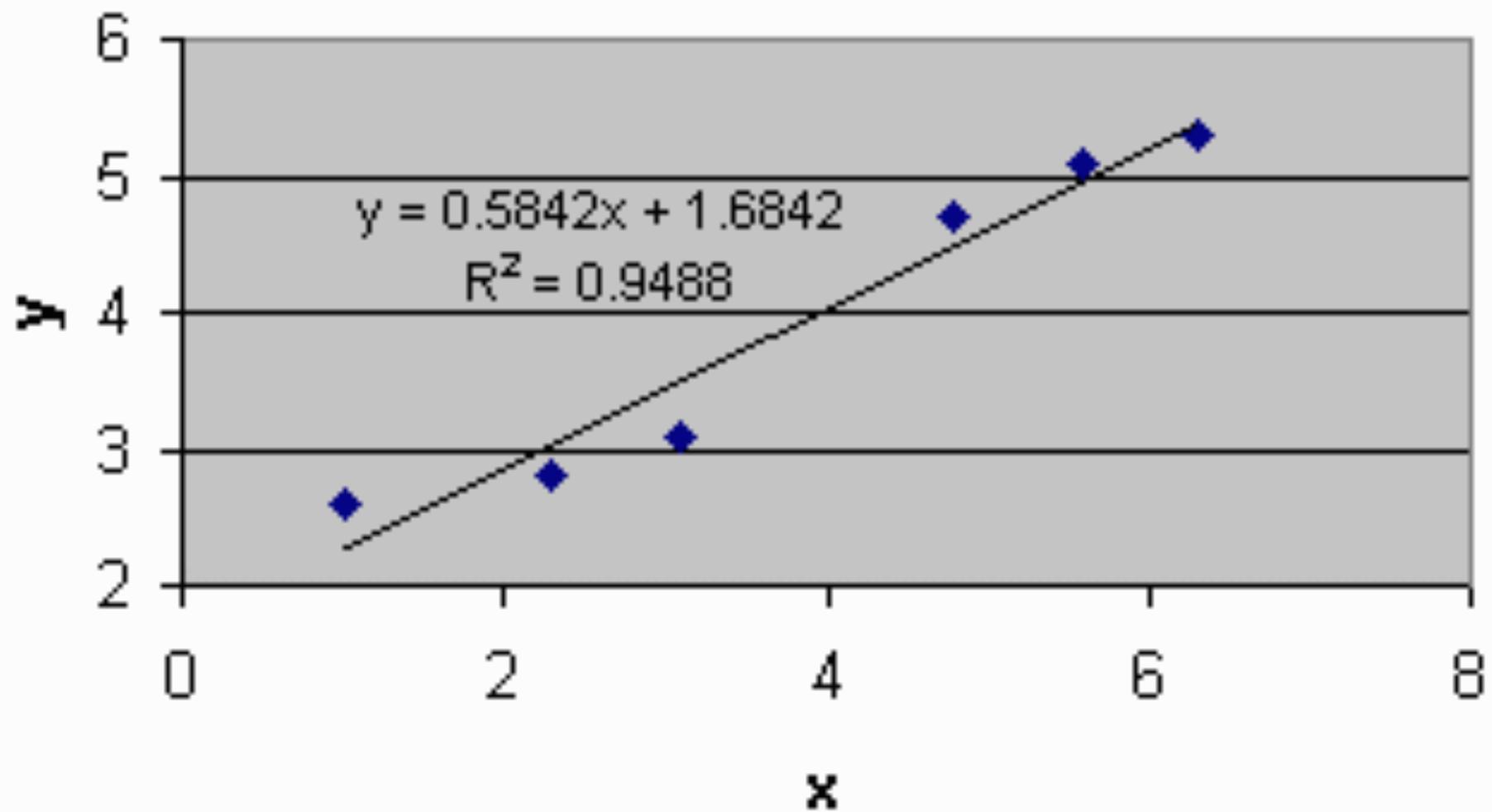
$$Var \ no \ Exp(y) = \frac{1}{(n-1)} \sum_i (f(x_i) - y_i)^2$$

$$C = \left(1 - \frac{Var \ no \ Exp}{Var} \right)^{1/2}$$

La función de correlación C es el producto interno entre los datos de salida (y) y el valor calculado de la función esperada ($f(x)$) con los datos de entrada (x)

$$C = \frac{\sum_i f(x_i) y_i}{\left(\sum_i f(x_i)^2 \sum_i y_i^2 \right)^{1/2}} = \frac{\vec{f} \bullet \vec{y}}{|\vec{f}| |\vec{y}|} = \vec{F} \bullet \vec{Y}$$

Linear Fit

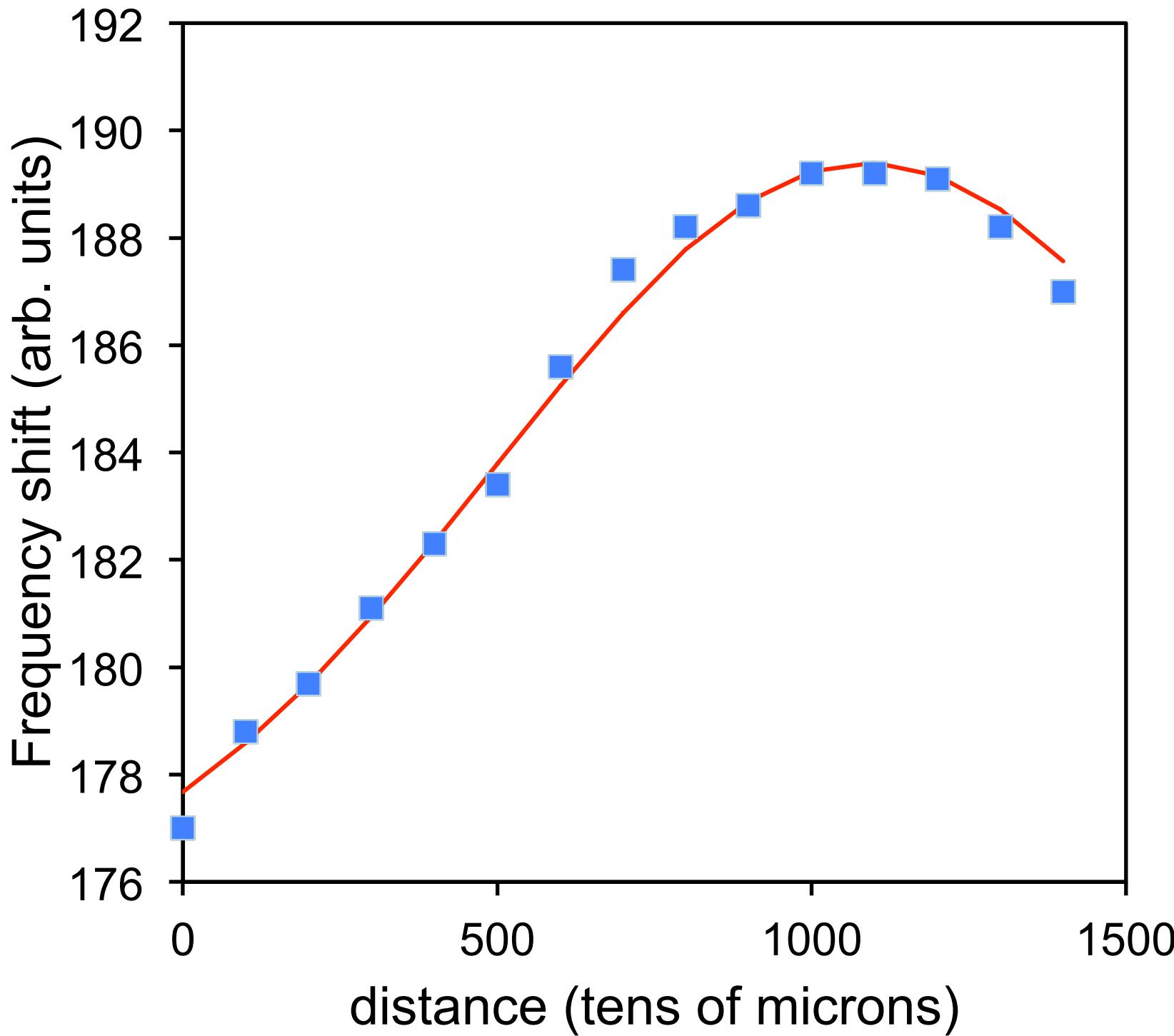


Coeficiente de correlación C=R

Este es llamado, en análisis de datos, el coeficiente de correlación, entre dos mediciones o una medición y una predicción

- C está acotada : $-1 < C < 1$
- C es en realidad el $\cos \phi$, donde el ángulo ϕ está en un espacio abstracto.
- Correlación no implica causalidad

Comiencen a pensar en los datos como vectores, puede ser muy útil.



Data Vectors

X	Y	Y calc	(Y- Y calc)	Y• Ycalc
0	177	177.67	-0.6736	31448.2
100	178.8	178.59	0.20984	31931.9
200	179.7	179.69	0.01373	32289.6
300	181.1	180.95	0.15392	32769.3
400	182.3	182.33	-0.0337	33239.4
500	183.4	183.79	-0.3924	33707.5
600	185.6	185.25	0.35335	34381.8
700	187.4	186.61	0.79232	34970.3
800	188.2	187.78	0.41799	35340.6
900	188.6	188.68	-0.0818	35585.4
1000	189.2	189.24	-0.0356	35803.4
1100	189.2	189.4	-0.198	35834.1
1200	189.1	189.16	-0.0552	35769.2
1300	188.2	188.53	-0.3275	35480.9
1400	187	187.57	-0.5665	35074.9
Least Squares				Correlation
$\sum Y^2$	513552	513703	2.08244	$\sum Y \cdot Y_c$
				513627
				0.99999798

Pero la correlación no esta limitada a estar en un solo punto espacial o temporal, puede ser entre un vector de m entradas y otro vector con n entradas.

En funciones continuas como una serie de tiempo la correlacion dependerá de la diferencia del tiempo entre los dos eventos iniciales

La correlacion puede depender de la distancia real, de la distancia angular, o de otro u otros parámetros que caracterizan a una serie.

Mas allá de índices iguales (tiempo,
posición, ...)

Correlación cruzada (dos funciones)
autocorrelacion la misma función

$$C(n) = (f \star g)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^*[m] g[m+n].$$

$$C(\tau) = (f \star g)(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t + \tau) dt,$$

Se parece mucho a la convolución entre dos funciones

Algunas propiedades matemáticas (hay generalizaciones a matrices)

La correlación de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ es equivalente a la convolución de $f^*(-t)$ y $g(t)$

$$f \star g = f^*(-t) * g = f^* * g(-t).$$

Si f es Hermiticas, entonces la correlacion es igual a la convolución

$$f \star g = f * g.$$

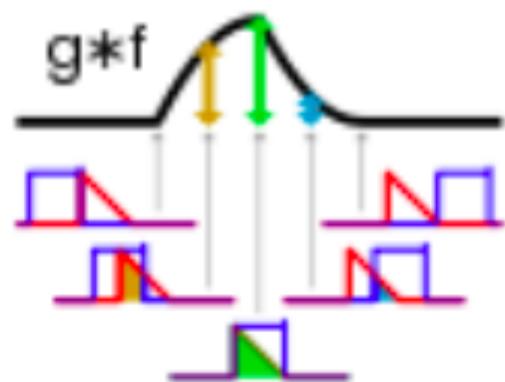
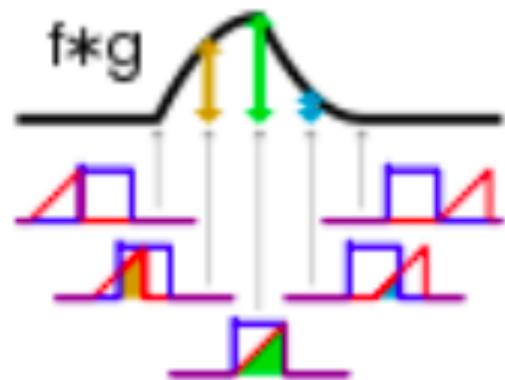
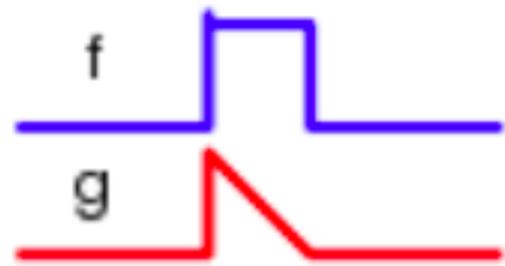
Si ambas son Hermiticas entonces:

$$f \star g = g \star f.$$

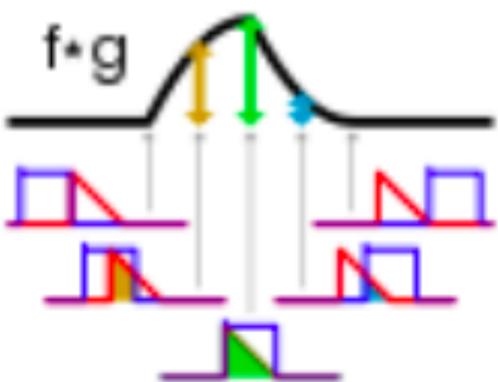
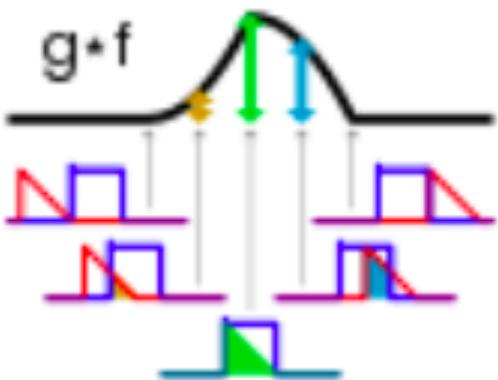
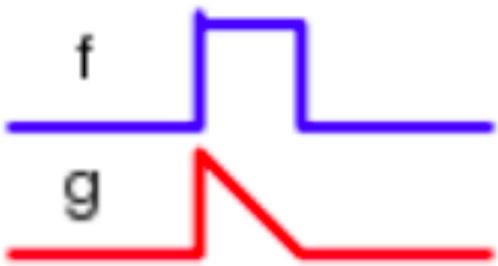
Como la convolución la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f \star g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}^*$$

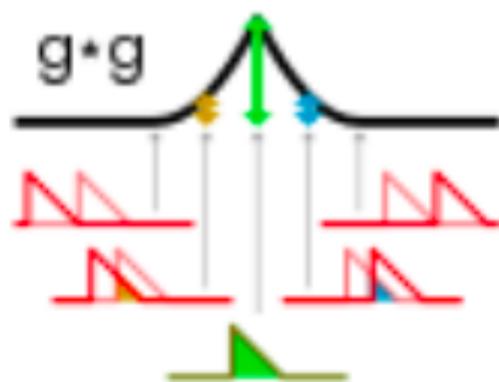
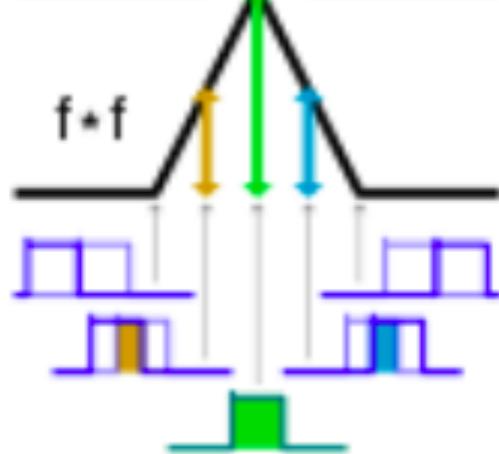
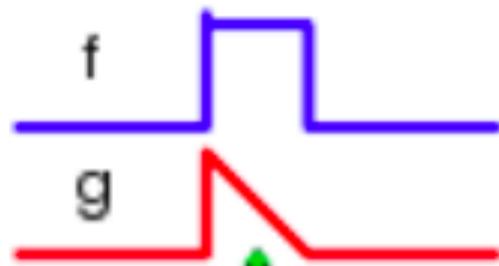
Convolution



Cross-correlation



Autocorrelation

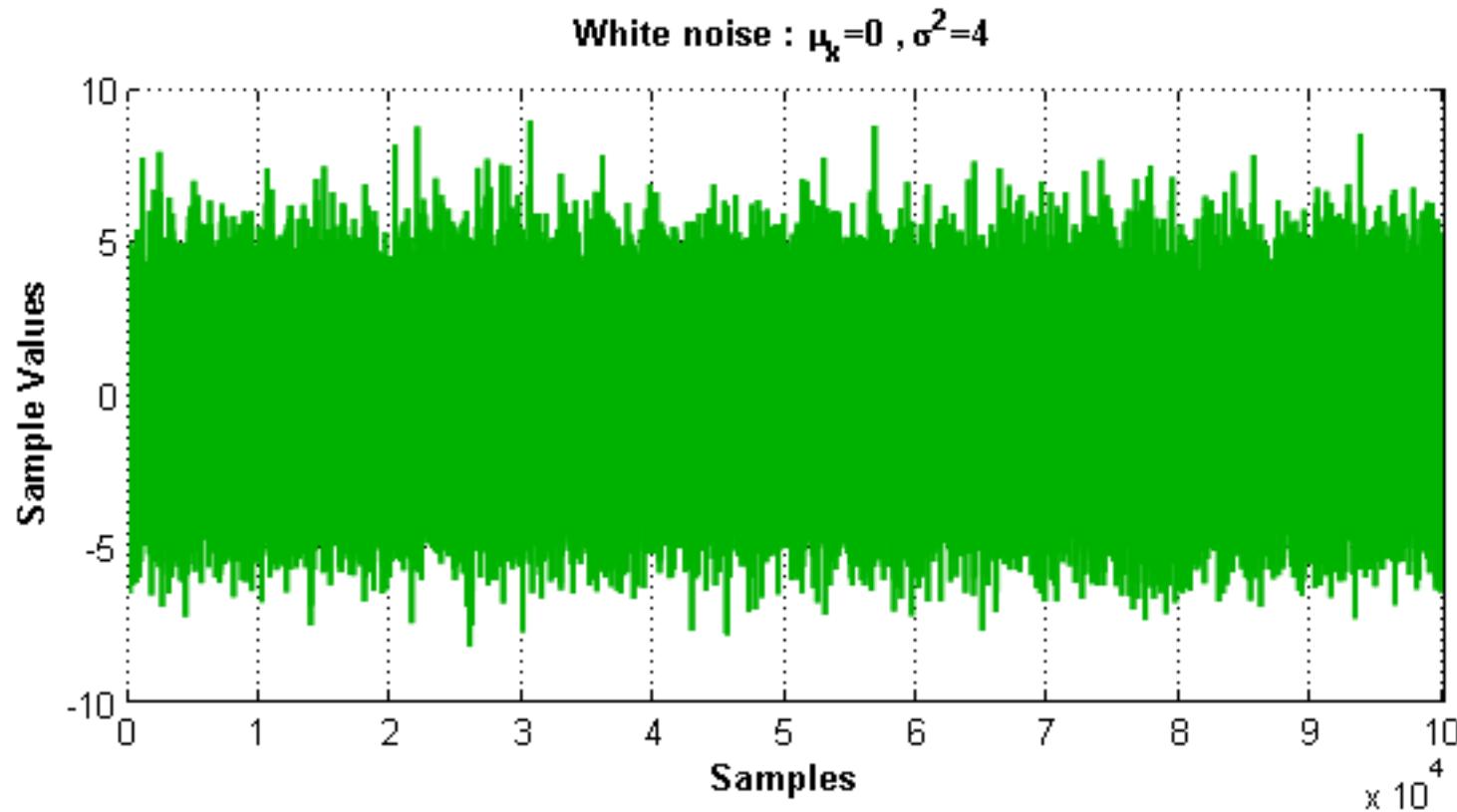


La función de correlación tambien se puede pensar como un tipo de momento sobre una distribución de probabilidad:

$$C(\tau) = \langle p(t)x(t)x(t+\tau) \rangle$$

Donde la probabilidad debe satisfacer las propiedades de una densidad de probabilidad (positiva) integral igual a uno,...

Cuando la señal es ruido, hay problemas formales para encontrar la densidad de potencia espectral, no es una simple transformada de Fourier



Teorema de Wiener–Khinchin-Kolmogorov: la densidad de potencia espectral de una función de ruido es la transformada de Fourier de la correlacion

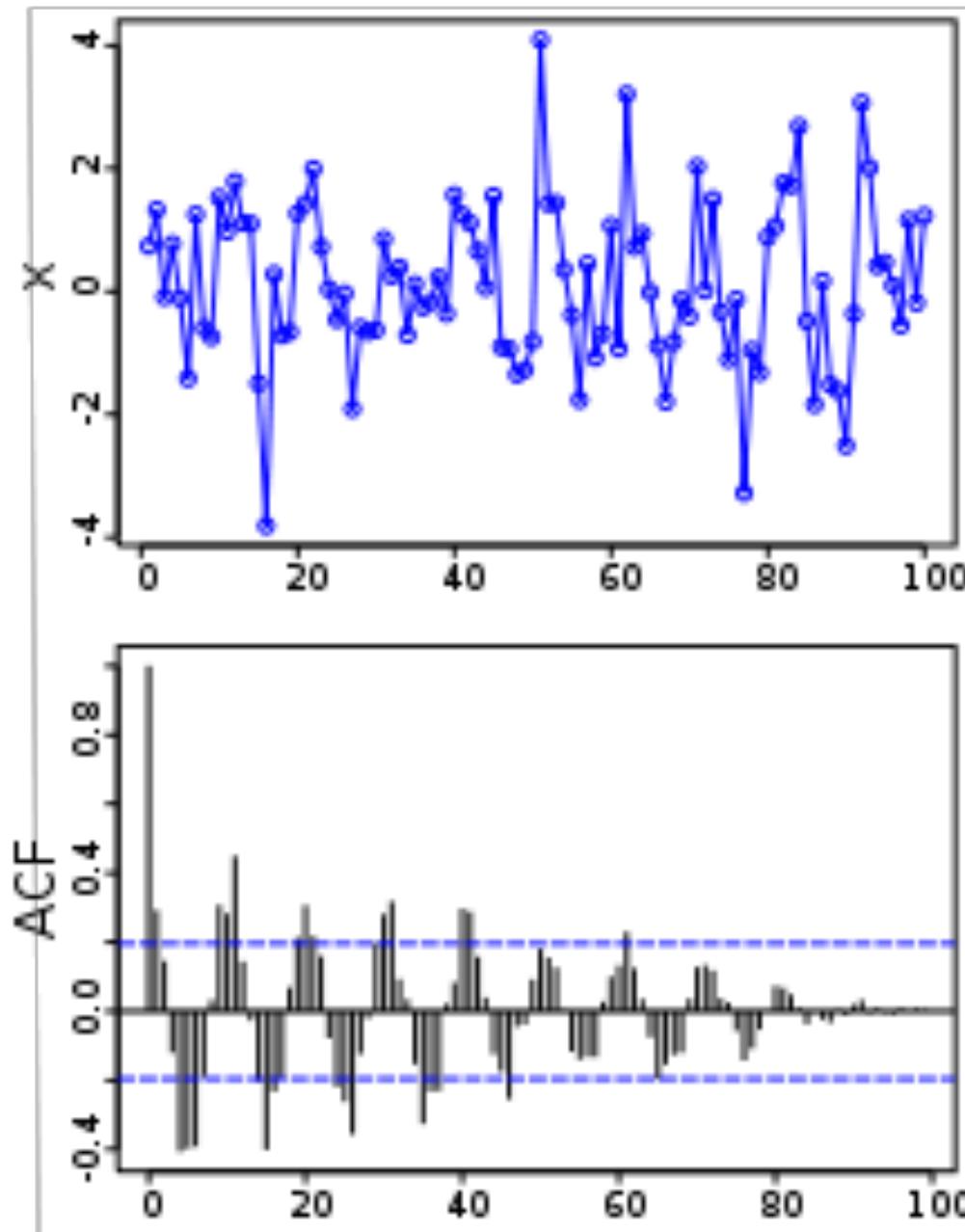
La transformada de Fourier de $f(t)$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}$$

La transformada de Fourier de $|g(\omega)|^2$

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{2\pi} |g(\omega)|^2 e^{-i\omega t} &= \int \frac{d\omega}{2\pi} g^*(\omega) e^{-i\omega t} \int dt' f(t') e^{i\omega t'} \\ &= \int dt' f(t') \int \frac{d\omega}{2\pi} g^*(\omega) e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} \\ &= \int dt' f(t') \left[\int \frac{d\omega}{2\pi} g(\omega) e^{-i\omega(t' - t)} \right]^* \\ &= \int dt' f(t') f(t' - t)^* \end{aligned}$$

La señal (azul) tiene una sinusoidal claramente visible en la autocorrelación (negra)



La correlación como filtro

Un filtro para datos (1).

- Si se quiere suavizar una señal: tomar el vector de datos x_j con longitud m y calcule el producto interno con el vector del filtro f_i de longitud n , con $n < m$
- El filtro mas simple es todos 0 y solo k elementos 1.
- Comenzar alineando los dos vectores en un extremo $i=j=0$ hasta $i=n$ y $j=n$ obteniendo C_0
- Luego mover el vector filtro sobre los datos uno $i=0$ $j=1$ hasta $i=n$ y $j=n+1$ asignando eso a C_1 , continuar el proceso hasta llegar a C_m
- $C(m)$ sera la señal suavizada por un promedio de k eventos. El filtro puede ser una Gaussiana u otra función.
- Se usa mucho en porcesamiento de imágenes.

Consideremos una imagen en 1D como un vector de números

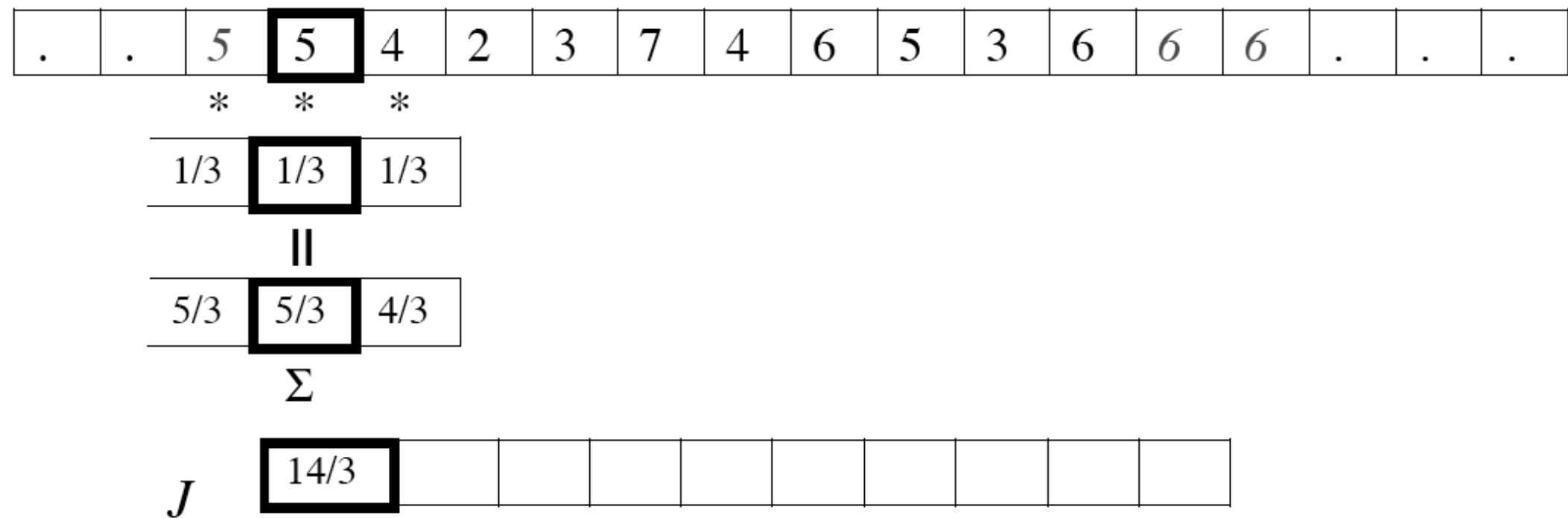
5	4	2	3	7	4	6	5	3	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ahora hagamos un promedio con los vecinos, cuidado con los extremos. Por ejemplo para el cuarto pixel con valor 3 lo reemplazamos con el valor $(2+3+7)/3=4$; para el tercer pixel reemplazamos el valor 2 por $(4+2+3)/3=3$

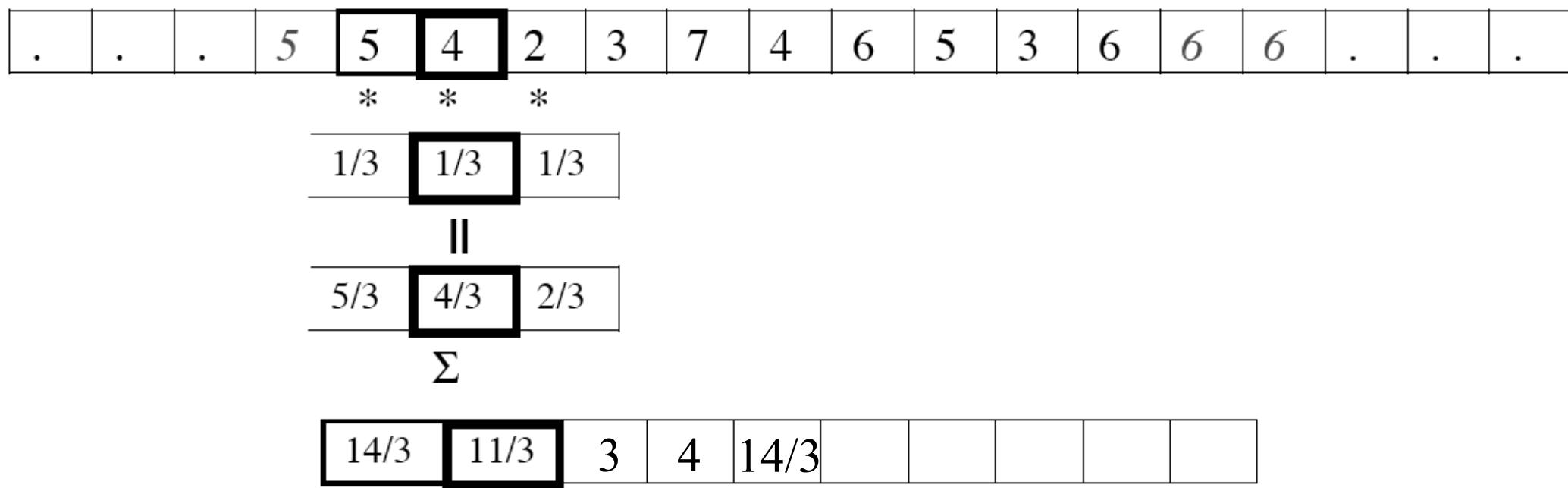
Hay para los extremos repitamos el ltimo valor

.	.	.	5	5	5	4	2	3	7	4	6	5	3	6	6	6	.	.	.
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

La correlación es entonces:



El siguiente valor es:



Tenemos un filtro muy sencillo, pero se pueden definir otros mas sofisticados incluso derivadas e integrales.

Patrón a encontrar (ignorando los extremos)

3	7	5
---	---	---

Serie

3	2	4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2

Correlación normalizada

.946	.877	.934	.73	.81	.989	.64	.59	.78	.835	.61	.931	.95	.83	.57	.988

Hay formas mucho mas sofisticadas pero en principio son similares

Un filtro para datos (2).

- Si se conoce como es la señal: tomar el vector de datos x_j con longitud m y calcule el producto interno con el vector de la señal s_i de longitud n , con $n < m$
- Comenzar alineando los dos vectores en un extremo $i=j=0$ hasta $i=n$ y $j=n$ obteniendo C_0
- Luego mover el vector señal sobre los datos uno $i=0$ $j=1$ hasta $i=n$ y $j=n+1$ asignando eso a C_1 , continuar el proceso hasta llegar a C_m
- $C(m)$ tendrá un valor máximo cuando el patron de la señal y los datos coincidan, el ruido se promediará a cero.

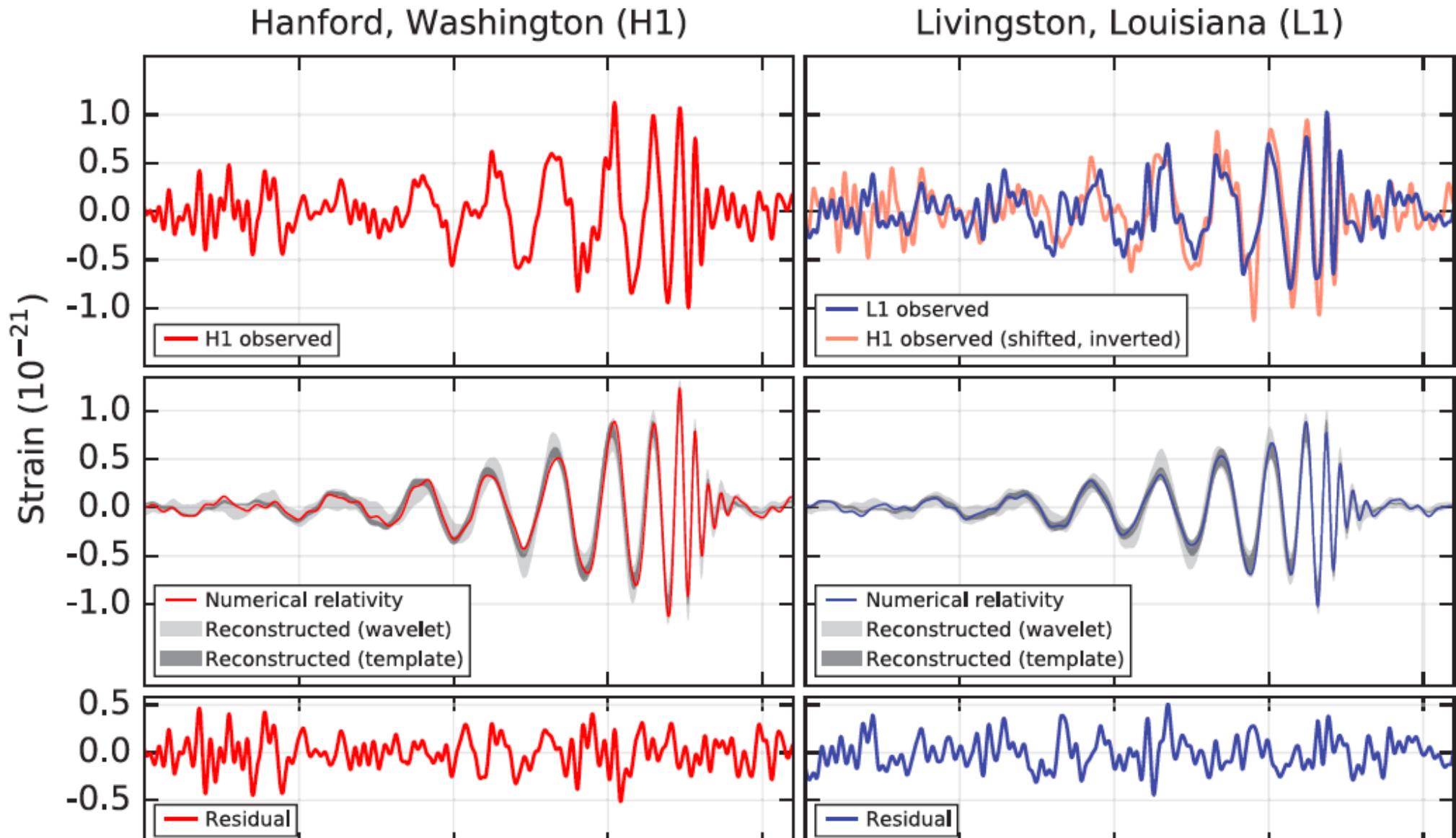
Estos filtros se pueden calcular por principios basicos
o por resultados de mediciones

Ejemplos:
LIGO

Aparatos de sordera

El teorema Wiener–Khinchin–Kolmogorov permite
utilizar la densidad de potencia espectral para calcular
la correlacion, esto es mucho mas eficiente
numéricamente ($n \ln(n)$) en vez de n^2

This is similar to the method used by LIGO to find gravitational waves

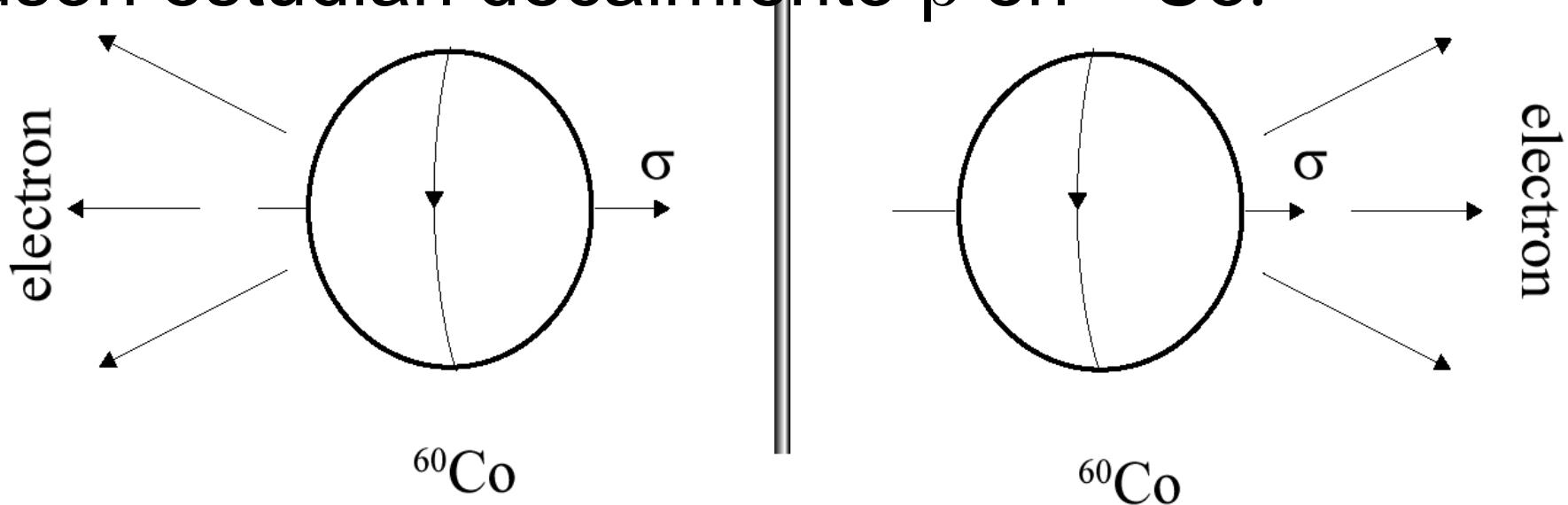


Una sorpresa en 1956

La naturaleza no tiene simetría P.

- 1950 Purcell and Ramsey “debe probarse”.
- 1956 T. D. Lee and C. N Yang apuntan hacia la interacción débil por falta de pruebas experimentales.
- 1957 Tres experimentos muestran que la interacción débil viola: Columbia NBS, Columbia, Chicago.

Columbia-NBS: Wu, Ambler, Hayward, Hoppes y Hudson estudian decaimiento β en ^{60}Co .



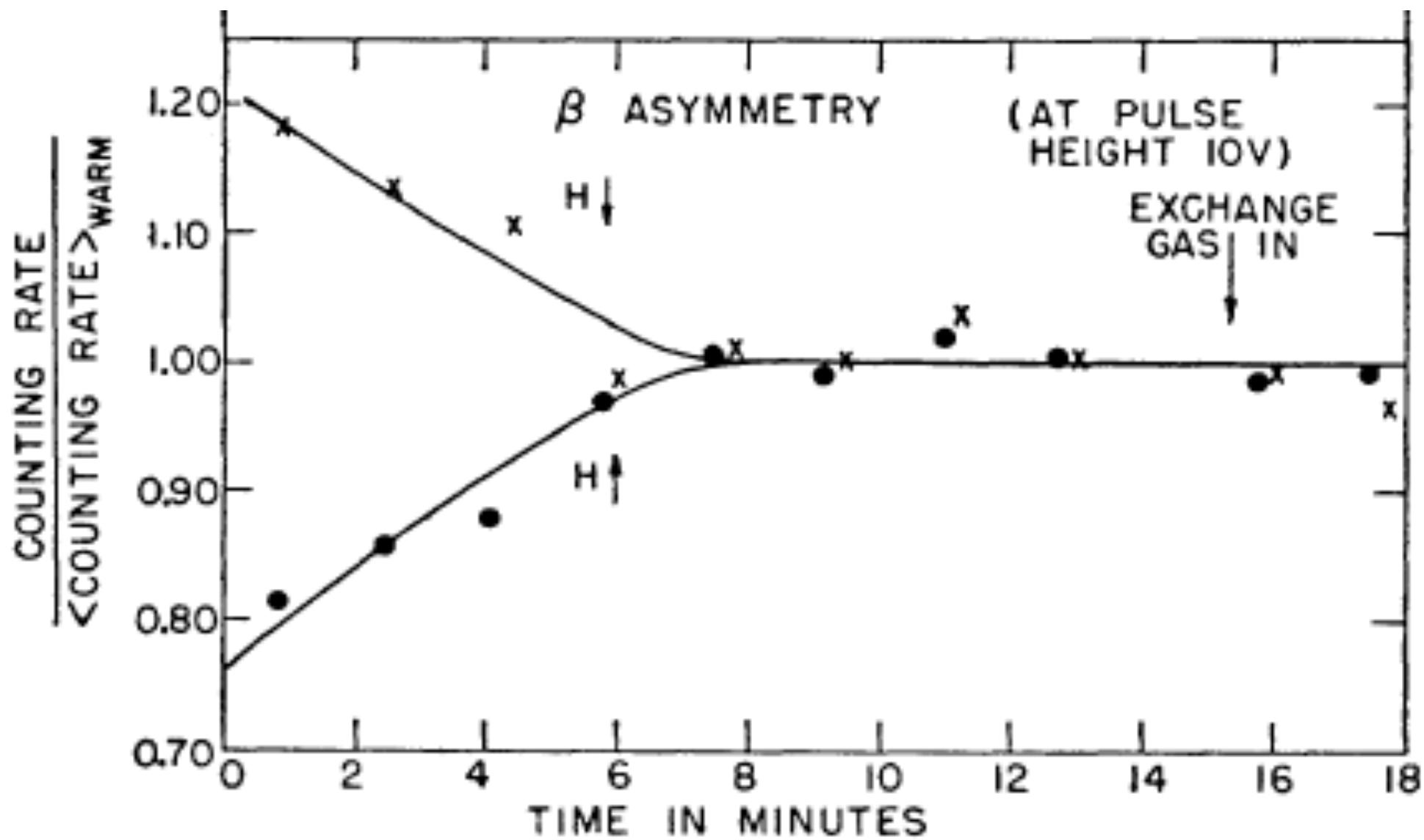
Decaimiento β del ^{60}Co

Wu, Ambler, Hayward, Hoppes, y Hudson;
Columbia, National Bureau of Standards (ahora
NIST).

Buscan una correlación entre el spin nuclear σ y
el momento del electrón emitido p El observable
es un pseudoescalar.

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \rangle$$

Para alinear los spines nucleares en un
campo magnético externo limitando su
espacio de fase tuvieron que enfriar la
muestra.



Asimetría de los electrones con respecto a la dirección del spin nuclear. Physical Review, 105, 1413 (1957).

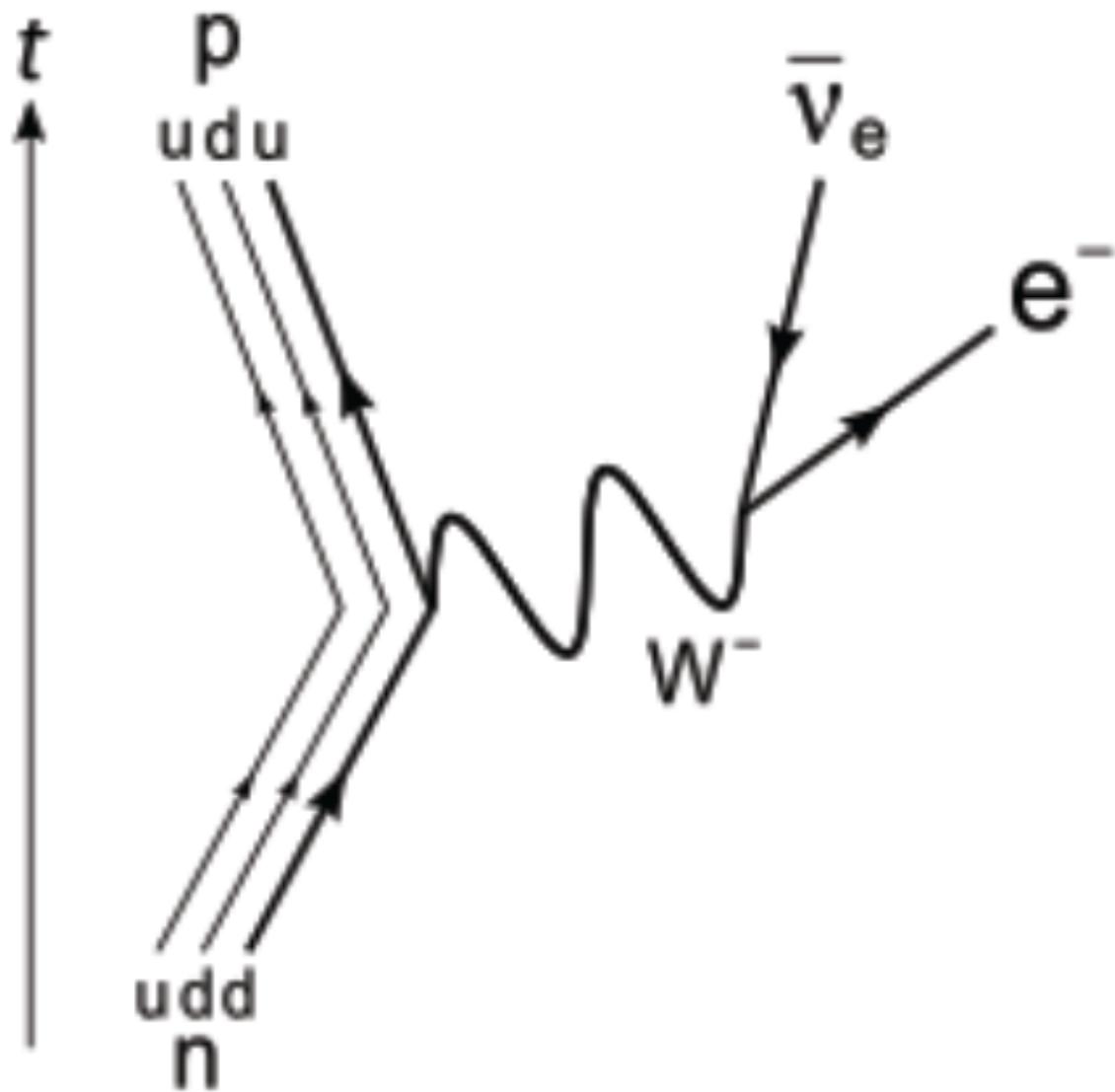
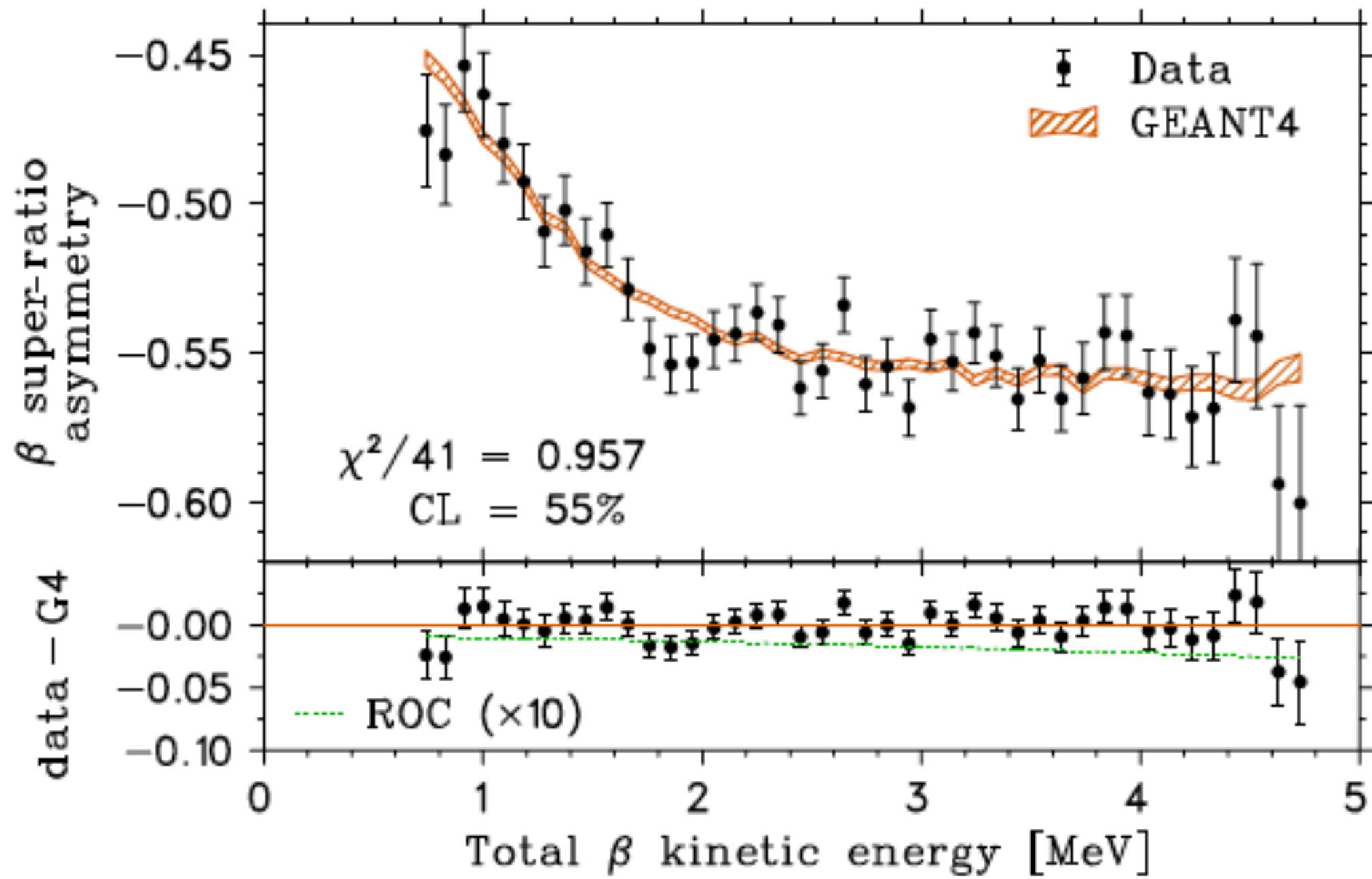


Diagrama de Feynman de decaimiento β . La interacción es de corto alcance dada la masa pesada del bosón W^- (tanto como un átomo de Rb)

Precision Measurement of the β Asymmetry in Spin-Polarized ^{37}K Decay

B. Fenker,^{1,2} A. Gorelov,³ D. Melconian,^{1,2,*} J. A. Behr,³ M. Anholm,^{3,4} D. Ashery,⁵ R. S. Behling,^{1,6} I. Cohen,⁵ I. Craiciu,³ G. Gwinner,⁴ J. McNeil,^{7,3} M. Mehlman,^{1,2} K. Olchanski,³ P. D. Shidling,¹ S. Smale,³ and C. L. Warner³

Using TRIUMF's neutral atom trap, TRINAT, for nuclear β decay, we have measured the β asymmetry with respect to the initial nuclear spin in ^{37}K to be $A_\beta = -0.5707(13)_{\text{syst}}(13)_{\text{stat}}(5)_{\text{pol}}$, a 0.3% measurement. This is the best relative accuracy of any β -asymmetry measurement in a nucleus or the neutron, and is in agreement with the standard model prediction $-0.5706(7)$. We compare constraints on physics beyond the standard model with other β -decay measurements, and improve the value of V_{ud} measured in this mirror nucleus by a factor of 4.



Correlaciones en Astrofísica

Arno Penzias y Robert Wilson de Bell Labs descubrieron los remanentes del Big Bang en 1965, observando las fluctuaciones (ruido) en microondas .

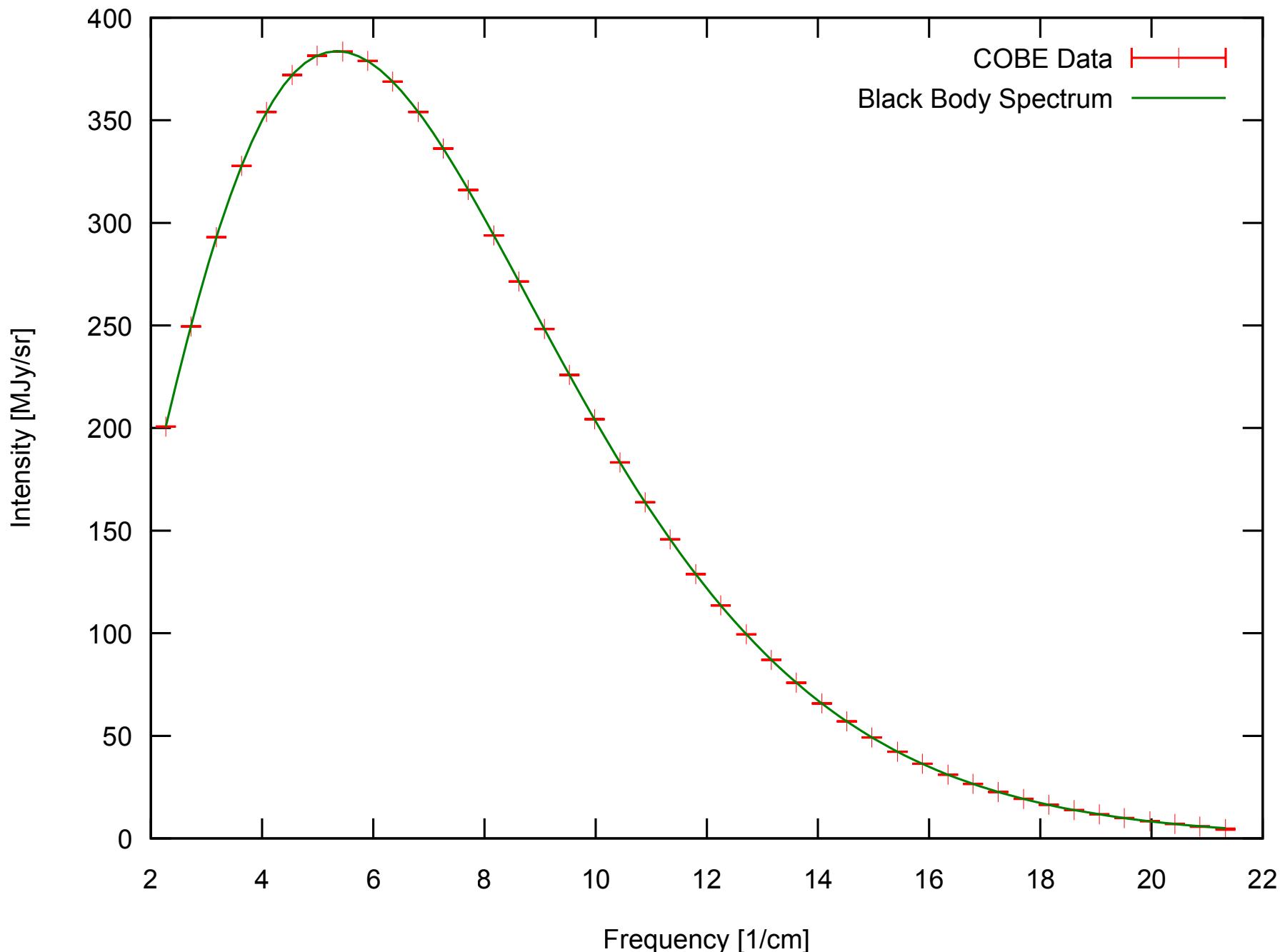


¿Cómo se genera el Cosmic Microwave Background (CMB)?

379,000 después del Big Bang, el universo se ha enfirado lo suficiente para formar átomos neutros y la mayor parte de la radiación ahora puede escapar.

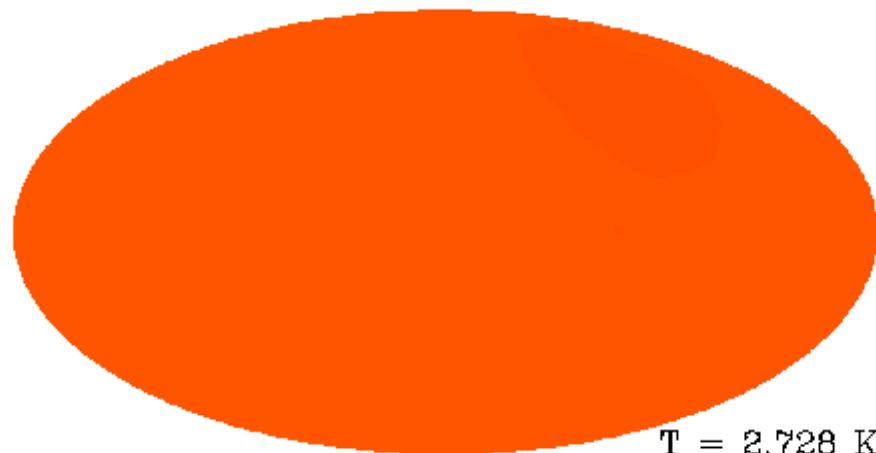
Esta radiación es casi uniforme pero tiene pequeñas fluctuaciones ($\partial T/T \sim 10^{-6}$) provenientes de fluctuaciones cuánticas. La gravedad también juega un papel importante. Las fluctuaciones son las semillas de la formación de galaxias, etc.

Cosmic Microwave Background Spectrum from COBE

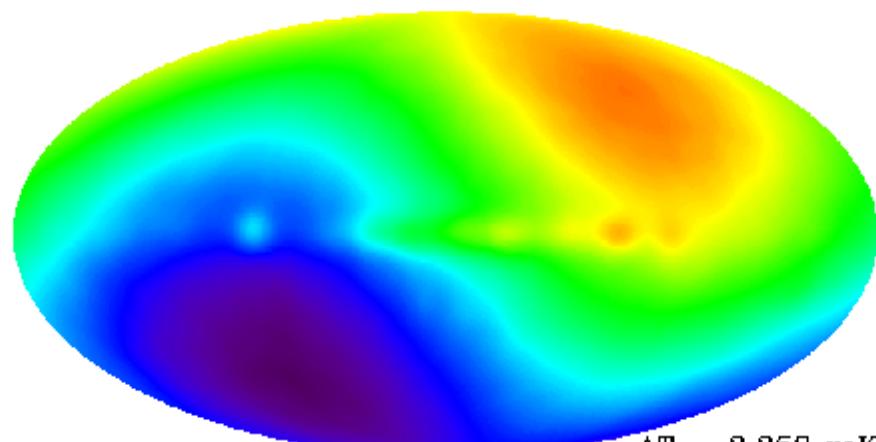


(Radiación de cuerpo negro CMB)

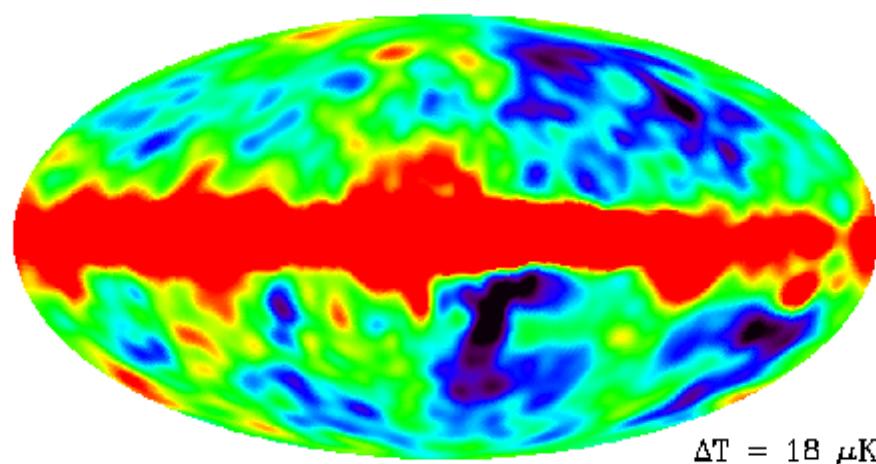
COBE 1992



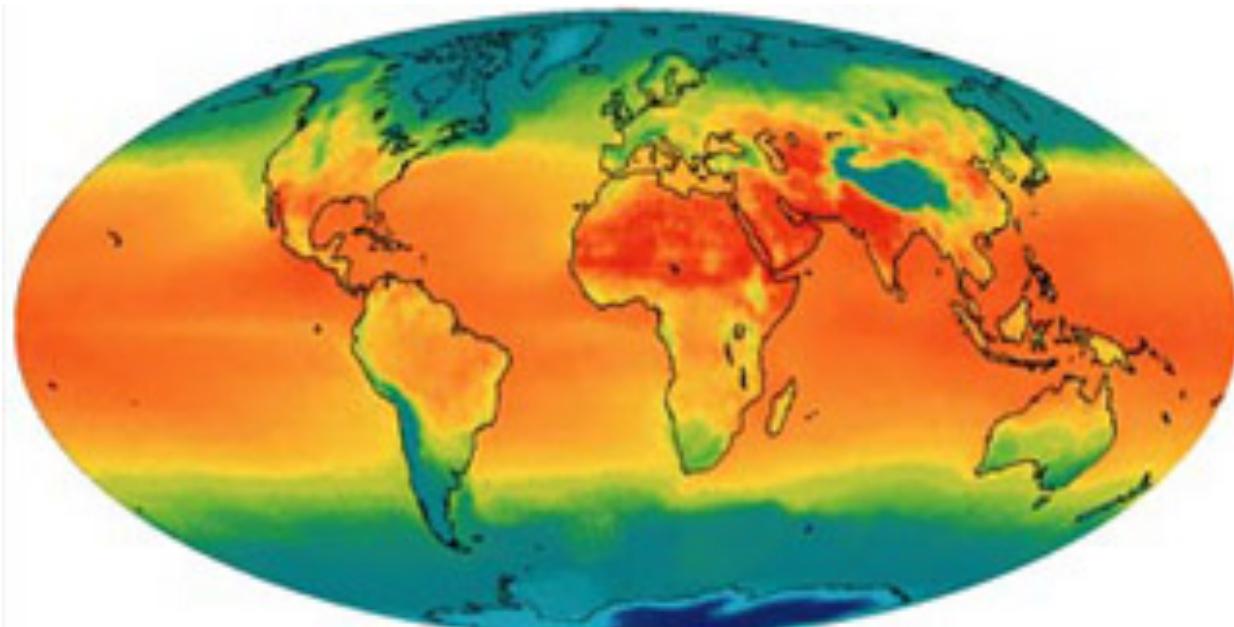
$T = 2.728$ K



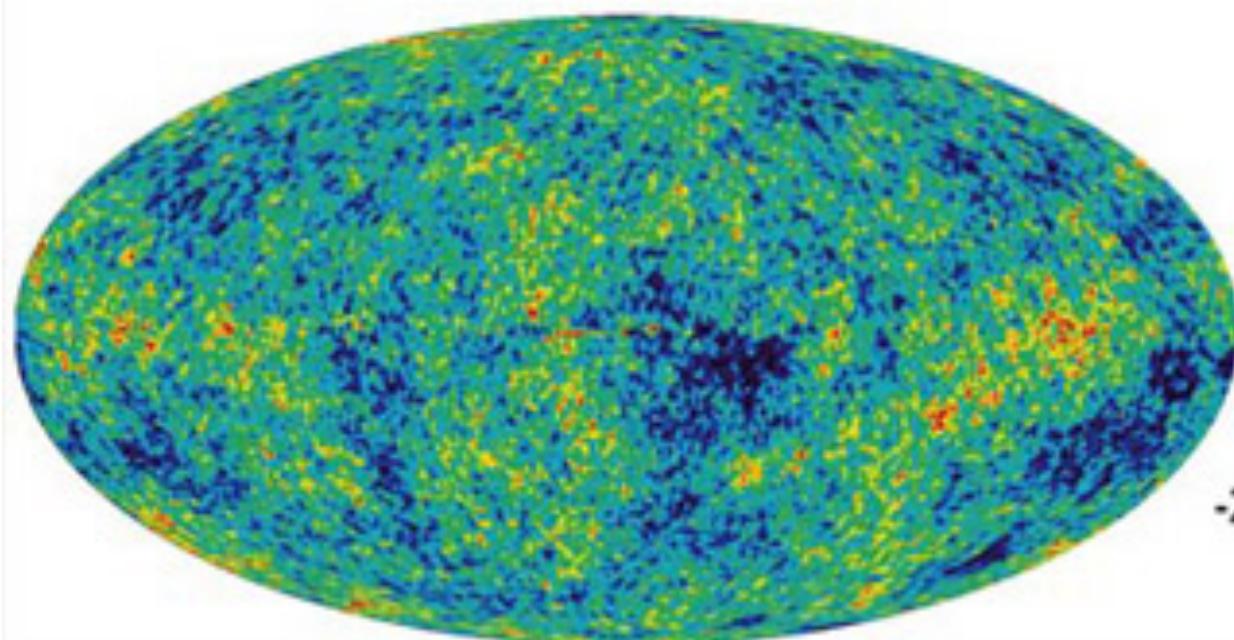
$\Delta T = 3.353$ mK



$\Delta T = 18$ μ K



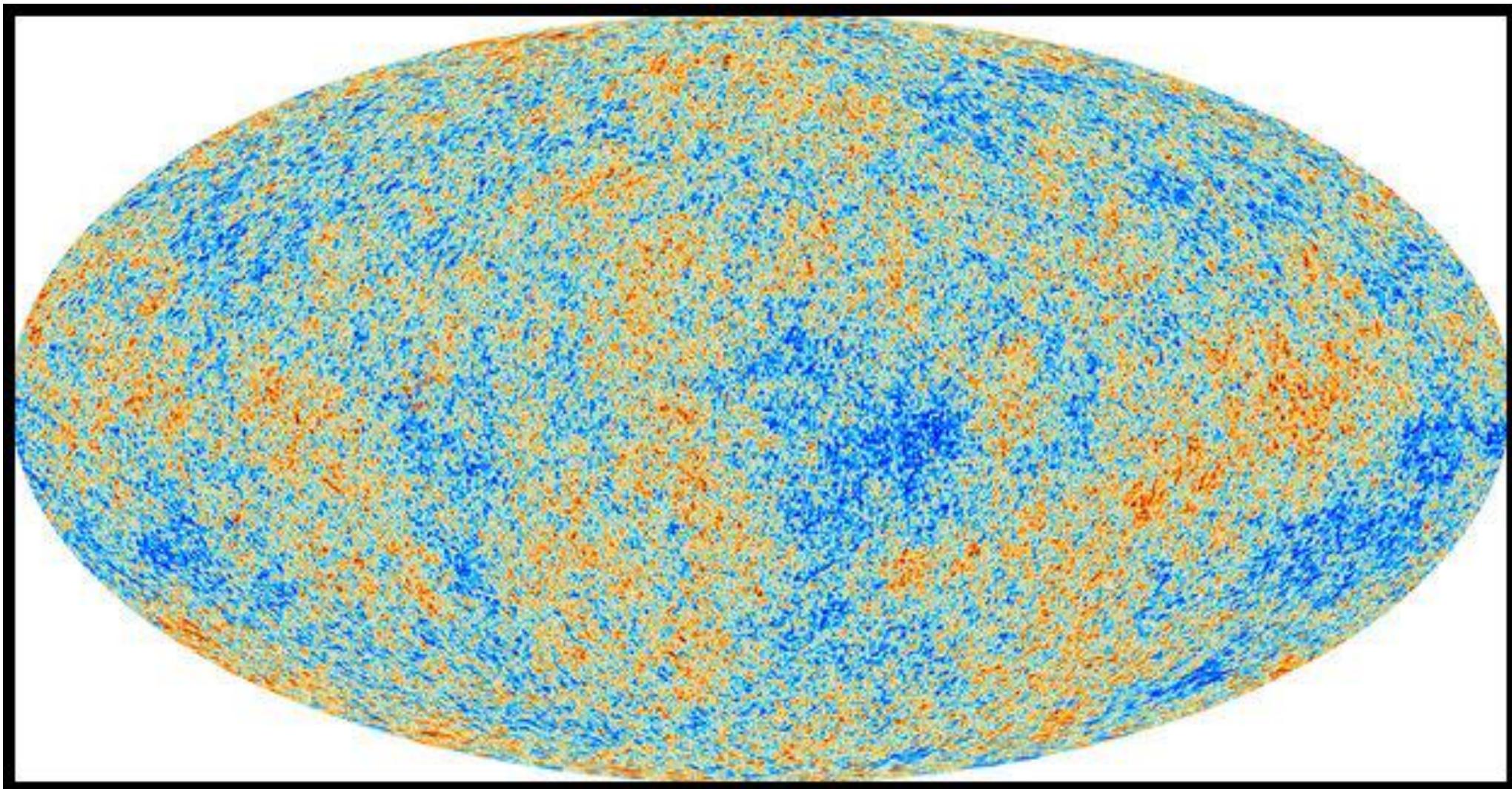
Earth
Temperatures



Microwave Sky
Temperatures

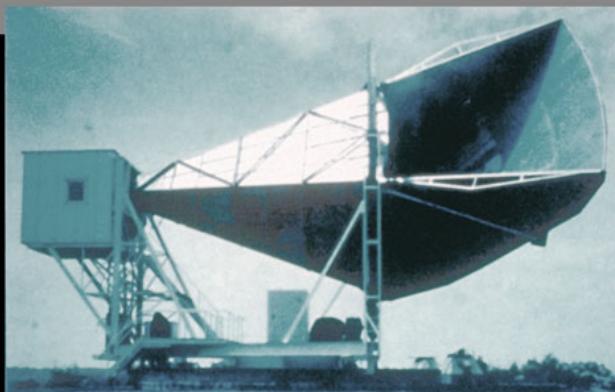


Resultados de la misión Planck 2013



Unos 300,000 años después del Big Bang

1965

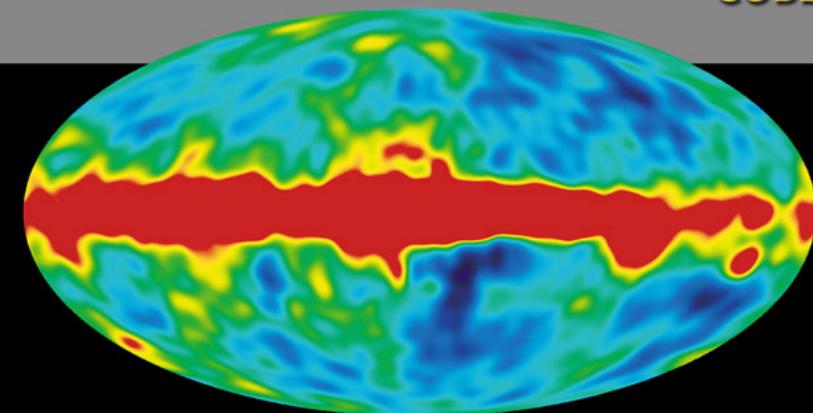


Penzias and
Wilson

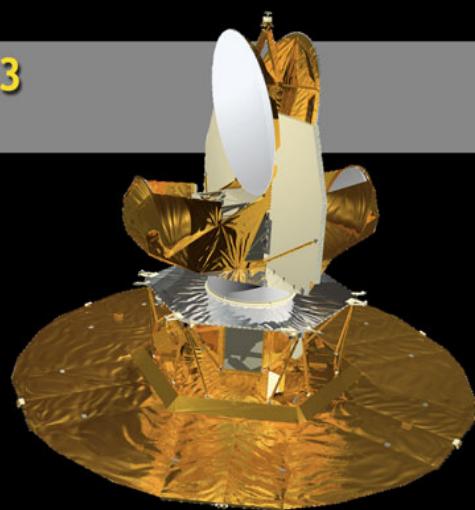
1992



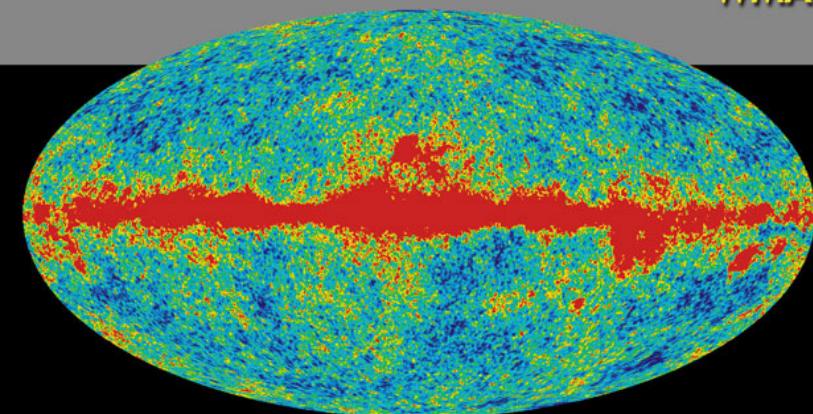
COBE

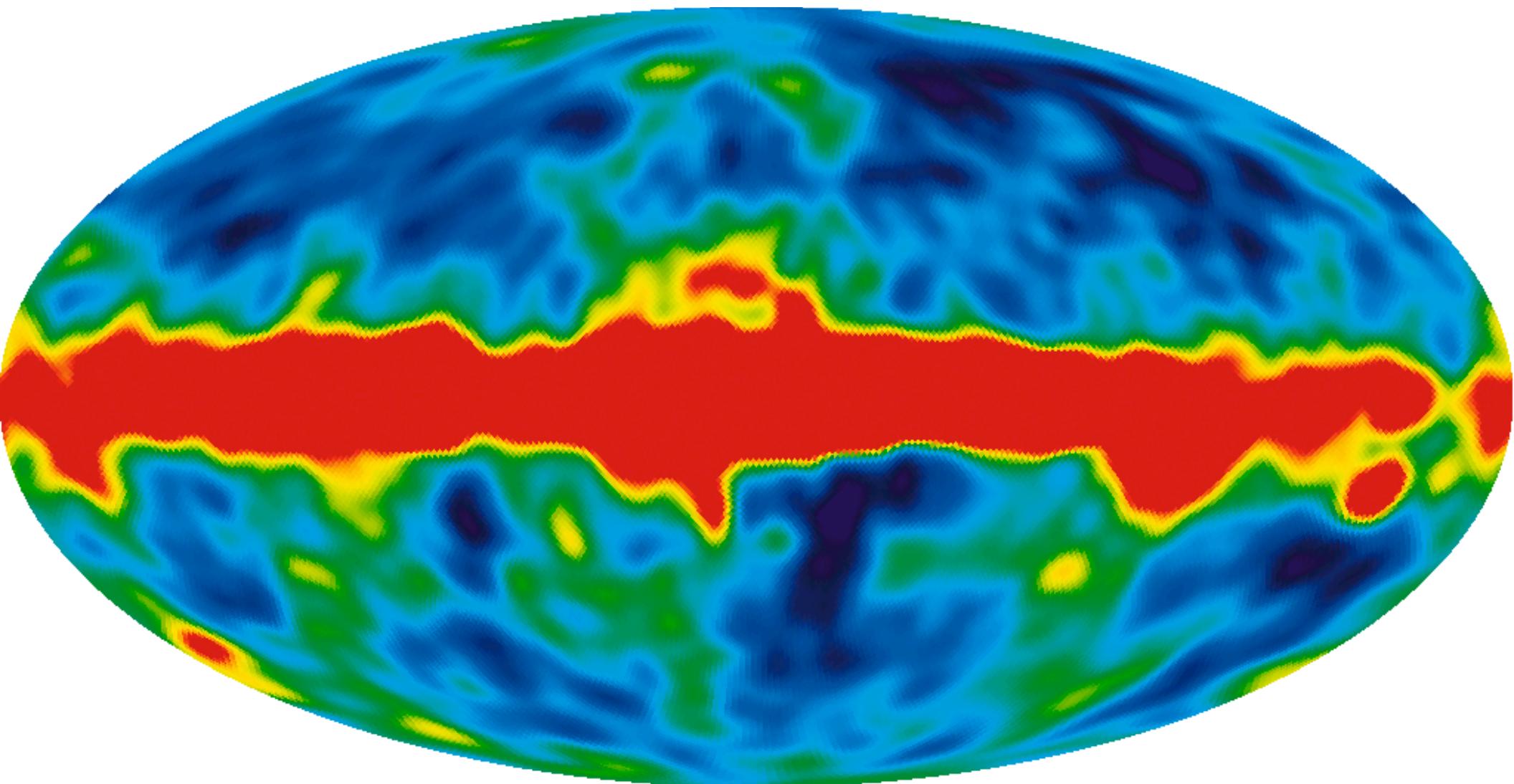


2003

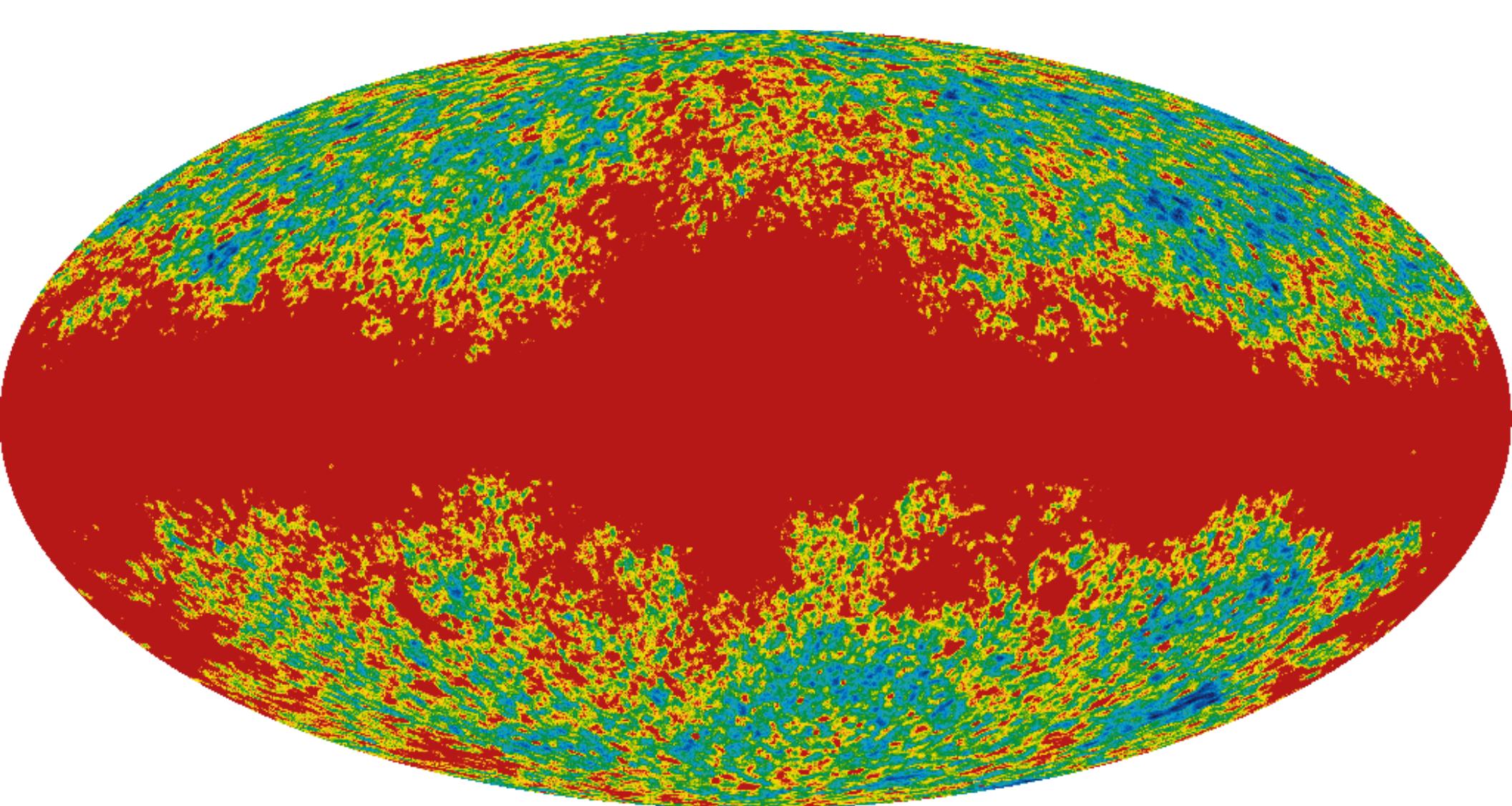


WMAP

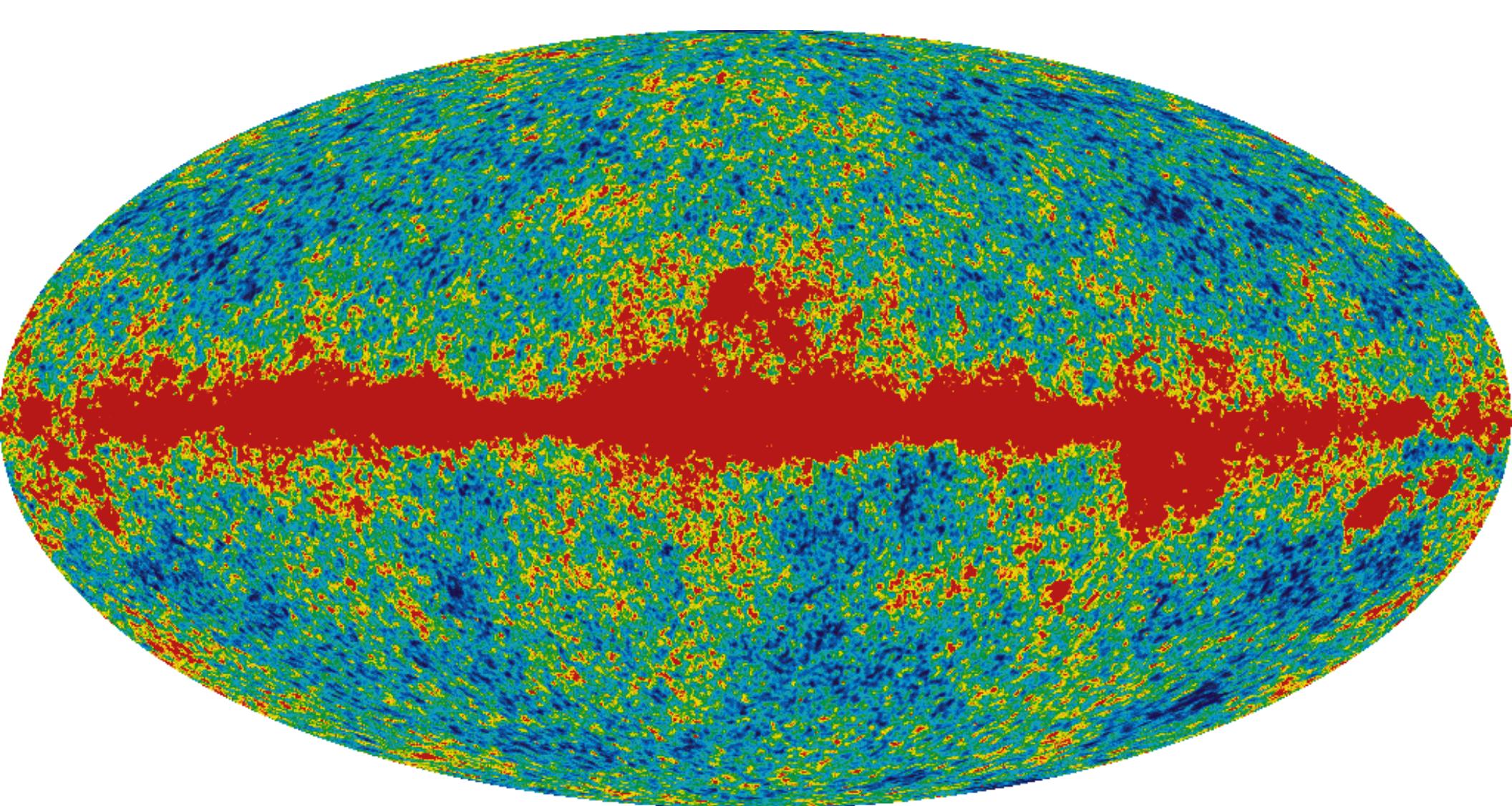




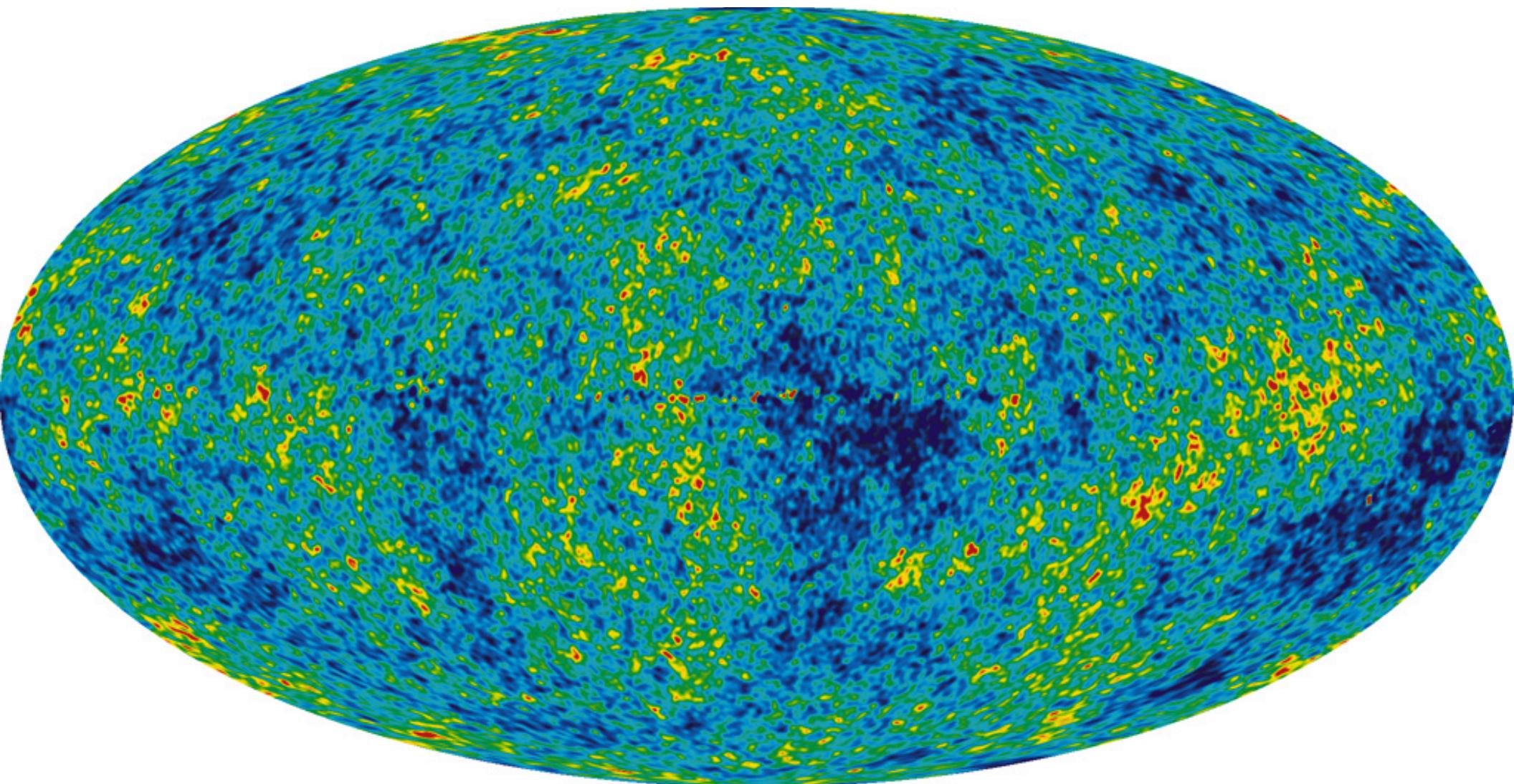
COBE Lanzado en 1989 resultado de 4 años:
resolución de 7 grados y 100 μ -Kelvin.
2006 Nobel para George Smoot y John Mather



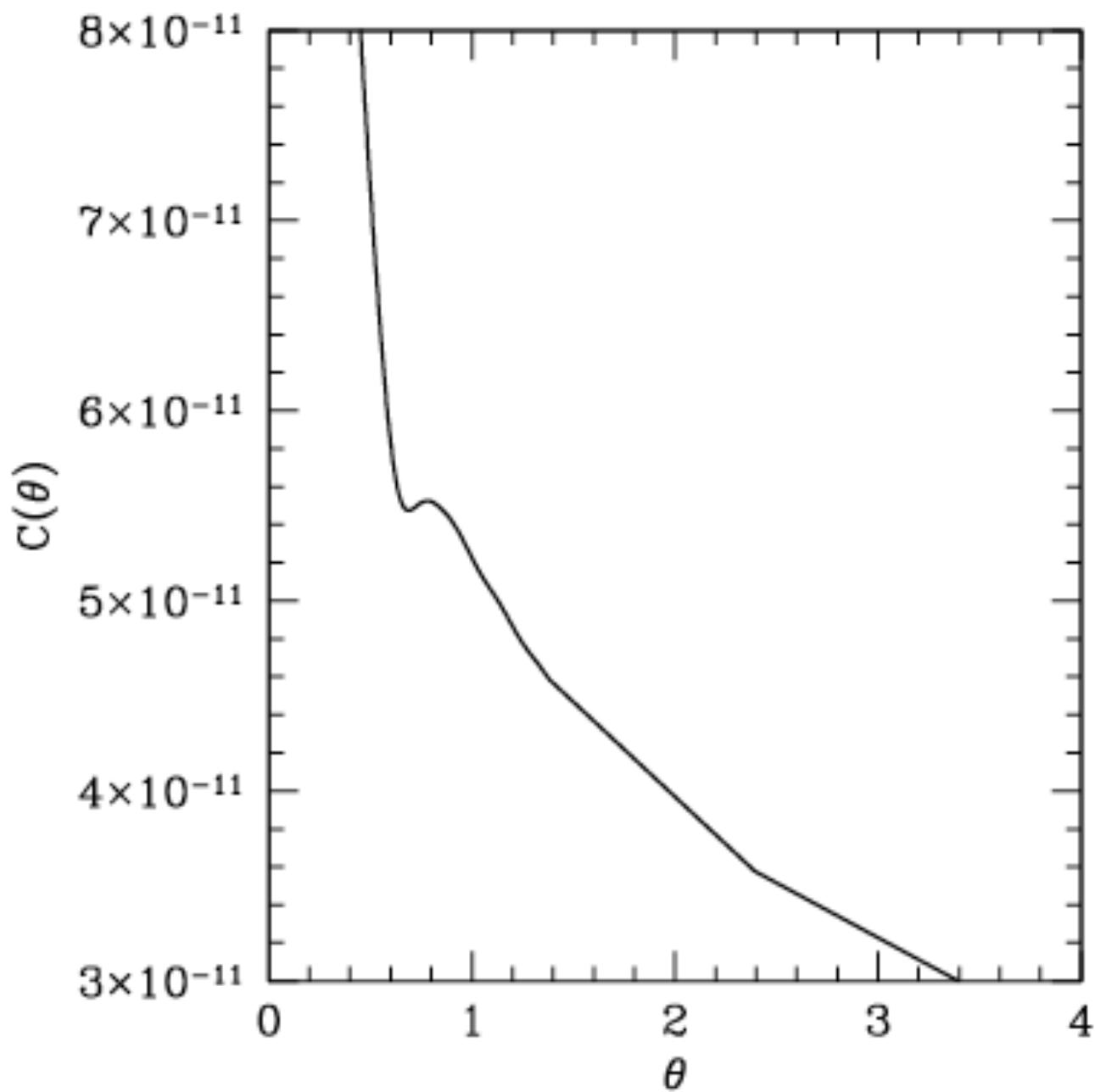
5 años WMAP en la banda K (20 to 30 GHz)



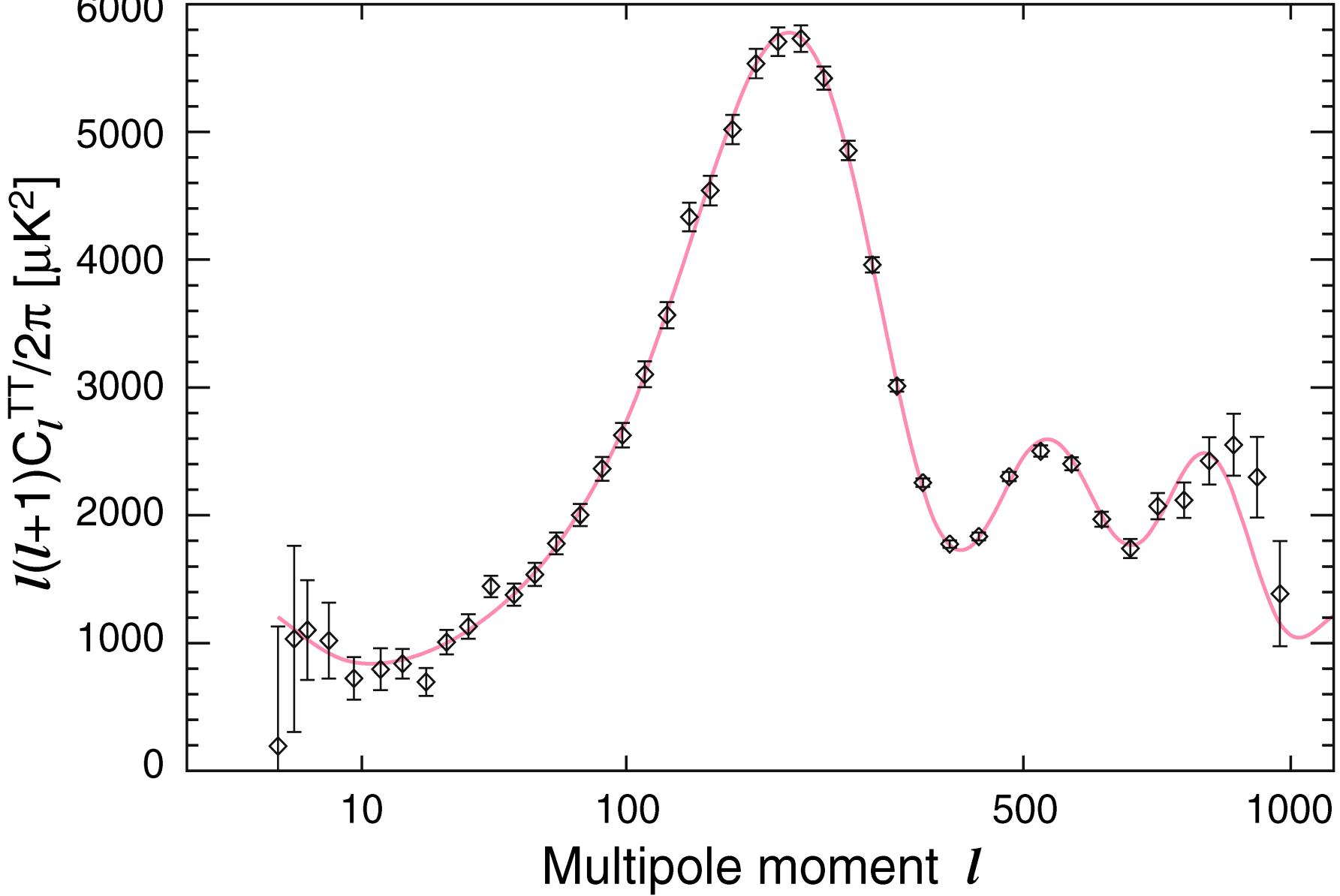
Banda Q 33 to 50 GHz (6 mm)



Fluctuaciones del WMAP
5 años (La Vía Lactea ha sido sustraída) 200 μ -Kelvin

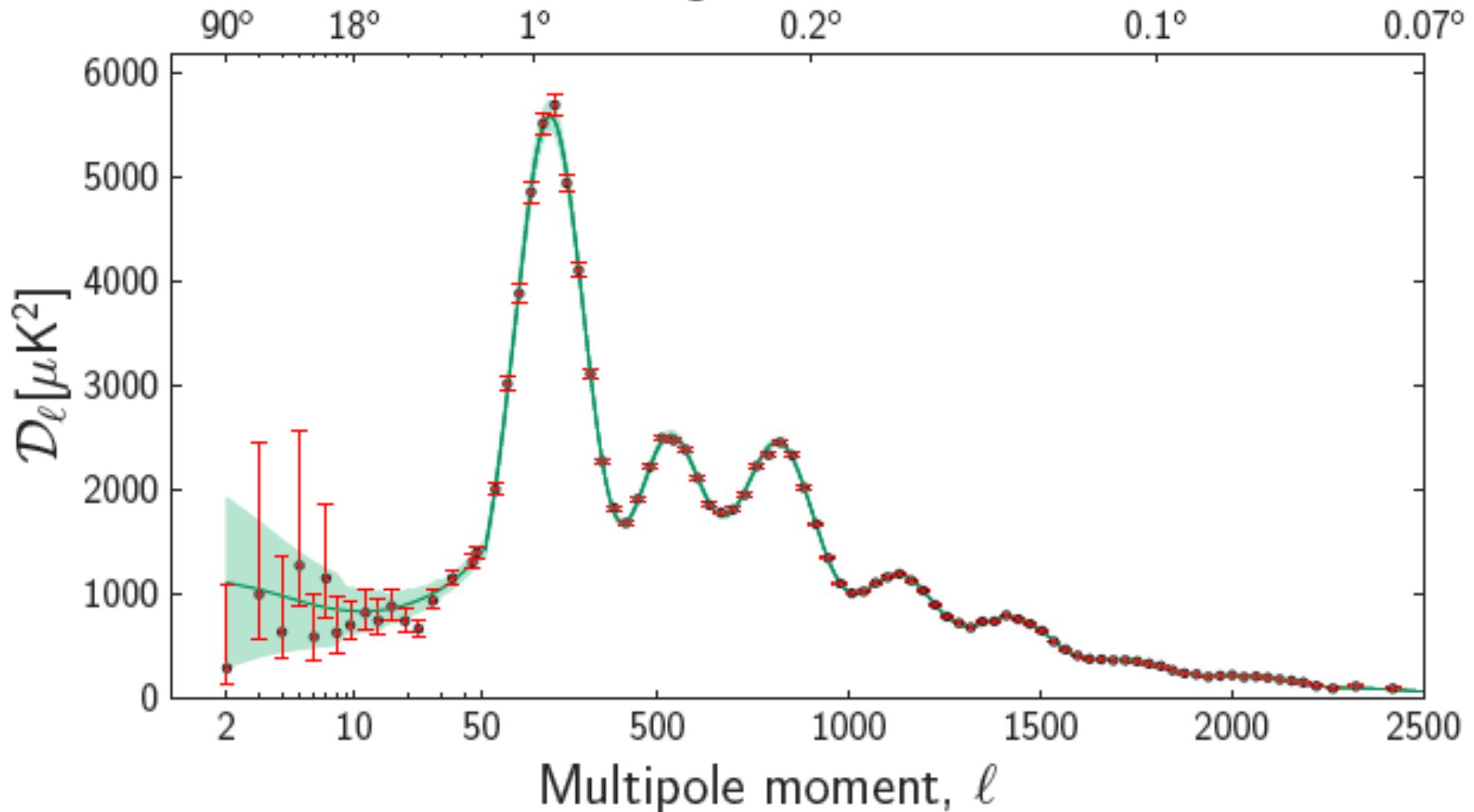


Función de correlación de las fluctuaciones del CMB
mostrando el horizonte del sonido acústico. ArXive
1506.01907



Espectro de potencia de COBE de las fluctuaciones
(correlación entre ellas) basicamente en función del
ángulo que las separa.

Angular scale



Espectro de potencia de (Planck) de las fluctuaciones
del CMB como función del momento multipolar ℓ y el
ángulo. ArXive 1506.01907

¿Qué nos dicen las
fluctuaciones y su
espectro?

- La distribución de materia era muy uniforme en el universo temprano, pero tuvo que tener fluctuaciones para generar las estructuras que vemos hoy (galaxias, etc.)
- Estas fluctuaciones en la densidad afectaron la temperatura emitida por fotones en cada región: En una región, los fotones tenían que sobreponerse a un potencial gravitacional alto, por lo que adquirieron un corrimiento al rojo enfriándose.

Las oscilaciones posteriores (acoustic sound horizon) nos son posibles con la materia bariónica existente. Están relacionadas con materia oscura no bariónica.

- Las correlaciones pueden ser en el tiempo, en el espacio, en el ángulo, en los pixeles, ...
- La correlación puede ser auto (la función consigo misma) o cruzada (dos funciones).
- Puede ser entre mas de dos vectores.
- Es una herramienta única para estudiar y caracterizar el ruido.
- La fase generalmente desaparece.

Gracias